arXiv:2304.03011v1 [math.DG] 6 Apr 2023

因果格林算子幂的 Hadamard展开及“预解式”

Lennart Ronge

摘要

我们推导出一种渐近展开，它类似于正规双曲算子 P 所对应的超前/推迟 Green 算子幂的 Hadamard 展开；此外，我们还推导出 $P - z$ 所对应的超前/推迟 Green 算子关于 $z \in \mathbb{C}$ 的展开。这些展开涉及与原 Hadamard 展开相同的 Hadamard 系数。

1 引言

Hadamard 展开是与波算子相关的格林算子的可微阶数形式幂级数。其形式为

$$\mathcal{K}(G) \sim \sum_{k=0}^{\infty} V_k R(2k+2),$$

其中， $\mathcal{K}(G)$表示格林算子的施瓦茨核， V_k 是关于两个变量的截面，称为 Hadamard 系数； R 表示距离函数幂次的洛伦兹类比。超前/滞后传播子和费曼传播子都存在 Hadamard 展开，它们使用相同的 Hadamard 系数，但涉及不同的分布 R。关于这两类 Hadamard 展开的构造，以及它们的相似之处与差异，可参见例如 [BS20] 的附录。

Hadamard 展开提供了一种规范方式，可以从格林算子中分离出奇异部分。这种方法可用于弯曲时空中应力-能量张量的重整化（例如参见 [DF08]），以及洛伦兹版本的局部 APS 指数定理（[BS20]）。Hadamard 系数本身也很有意义，因为它们是黎曼热核系数的洛伦兹类比，并编码了标量曲率等几何性质。

在 [DW20], Dang 和 Wrochna 为费曼预解算子及其幂推导了 Hadamard 展开，并利用这些展开研究洛伦兹散射空间上的谱作用量。在 [DW22], 中，他们利用这些展开研究了广义 Wodzicki 留数。

受其工作的启发，我们寻求为超前/推迟格林算子的幂发展类似的展开。虽然我们得到的展开类似于 [DW20]，中费曼传播子的展开，但推导这些展开所使用的方法却大不相同。

在第2节中，我们介绍相关的设定和背景材料。为了陈述下面的主要结果，并将所有内容汇集于一处，我们在此总结核心定义：

定义/记号。 P 是一个正规双曲算子，作用于整体双曲流形 M上的向量丛 E 的截面。 $U \subseteq M$ 是一个开、测地凸、整体双曲且因果相容的子集。 $\mathcal{K}(T)$表示算子 T的施瓦茨核。 $G^{\pm}$ 表示 P 的超前/推迟格林算子(2.4)。 $R_{\pm}$ 表示 U 上的黎斯分布(2.9)。 V^k 表示与 P 在 U上相关的Hadamard 系数(2.13)。 $\sim$ 表示按可微阶数的渐近展开(2.14)。

在第3节中，我们推导出 $G^{\pm}$ 的幂的展开式（见定理 3.3）——对于 $m \in \mathbb{Z}$，我们有

$$\mathcal{K}(G^{\pm m}) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} V^k R_{\pm}(2k+2m).$$

在第4节中，我们为 $G^{\pm}_{P-z}$（ $P-z$的超前/推迟格林算子）且满足 $z \in \mathbb{C}$，推导渐近展开。我们首先给出 $P-z$ 的 Hadamard 系数公式，

$$V^k(z) = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} z^m V^{k-m},$$

这立即给出了一个双重求和展开，其中 z 的依赖关系是显式的（见推论4.4）：

$$\mathcal{K}(G^{\pm}_{P-z}) \sim \sum_{k,m=0}^{\infty} \binom{k+m}{k} z^m V^k R_{\pm}(2k+2m+2).$$

接下来，我们定义依赖于 z 的偶黎斯分布的类似物 $R_{\pm}(z,2k)$，借此可将 $G^{\pm}_{P-z}$ 的展开写成与 $G^{\pm}$ 相同的形式，只不过使用依赖于 z 的黎斯分布代替通常的黎斯分布（见定理4.8）：

$$\mathcal{K}(G^{\pm}_{P-z}) \sim \sum_{k=0}^{\infty} V^k R_{\pm}(z, 2k+2),$$

或者更一般地说

$$\mathcal{K}({G^{\pm}_{P-z}}^m) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{k} V^k R_{\pm}(z, 2k+2m).$$

本文的结果源自作者的博士论文（[Ron23]），在论文中，这些结果与其他内容相对独立。本文旨在为读者提供一份独立、篇幅更短且更易读的成果介绍。因此，本文对与主要结果没有直接关系的背景设定和证明作了简要处理；更详细的说明可参见原论文。

致谢
我谨向 Matthias Lesch 和 Koen van den Dungen 致谢，感谢他们在撰写本文所依据的论文以及本文自身的过程中给予的建议与支持。

2 预备知识

2.1 设定

在本文中，我们始终假设 M 是一个带有度量 g 的整体双曲洛伦兹流形，且 P 是一个正规双曲算子，作用于 M 上向量丛 E 的截面。正规双曲是指 P 为二阶微分算子，其主符号由洛伦兹度量的负值给出。 M 的整体双曲性仅用于保证格林算子的存在性与唯一性。

注 2.1. 由于 M 和 P 是任意的，针对 M 或 P 证明的定理和给出的定义，对任意整体双曲流形和任意正规双曲算子都成立。我们偶尔会利用这一点。请注意，正规双曲算子在开子集上的限制仍是正规双曲算子。

2.2 记号

我们会经常遇到在时间的两个方向上对称成立的定义和陈述，通常用索引 $+$ 或 $-$来区分。为了避免把所有内容写两遍，我们用符号 $\pm$ 同时表示这两种情况。在定义或定理中使用 $\pm$ 或 $\mp$，表示该定义或定理中所有符号均取上号时成立，所有符号均取下号时也成立。有些情况下，我们还需要根据时间对齐方式的选择改变措辞。这时，我们会用“/”表示第一个词用于取上号的情况，第二个词用于取下号的情况。

例如，陈述“若 A 是过去/未来紧支的，则 $J_\pm(A) \cap J_\mp(x)$ 是紧支的。”意为“若 A 是过去紧支的，则 $J_+(A) \cap J_-(x)$ 是紧支的；若 A 是未来紧支的，则 $J_-(A) \cap J_+(x)$ 是紧支的。”。

我们用 $J_\pm(x)$ 表示点或集合 x 的因果未来/过去。我们用 $\mathcal{K}(T)$ 表示算子 T 的施瓦茨核。定义在 M 上的函数上的算子，若应用于

$M \times M$ 上的函数，则视为作用于第一分量，即

$$(Tf)(y,x) := (T(f(\cdot,x)))(y).$$

更一般地，定义在 E 上的分布上的算子，被视为作用于第一分量中的 $E \boxtimes F$ 上的分布（对任意向量丛 F），即对于纯张量积

$$T(f \otimes g) := (Tf) \otimes g.$$

如此定义，是为了使得对于作用于 E 的截面上的算子 T、S，有

$$\mathcal{K}(TS) = T\mathcal{K}(S).$$

2.3 截面空间

为了定义格林算子的幂，我们需要在适当的定义域上定义它们。这就要求我们讨论具有过去紧支集或未来紧支集的截面。

定义 2.2. 若集合 M 与 M 中每个点的过去集/未来集的交集都是紧集，则称 M 为过去紧/未来紧集合。

我们将用到以下截面空间和分布空间:

定义2.3。我们用 $\Gamma(E)$表示光滑截面的空间，用 $\Gamma^k(E)$表示 E的k 次连续可微截面的空间。我们用 $\mathcal{D}'(E)$表示 E中的分布空间。我们使用下标表示支集上的限制。我们将这些记号用于 Γ，但也使用带有 Γ^k 和 $\mathcal{D}'$的类似记号。

- 对于 $A \subseteq M$， $\Gamma_A(E)$ 表示支撑于 A 中的截面。
- $\Gamma_c(E)$ 表示紧支撑截面。
- $\Gamma_{\pm}(E)$ 表示具有过去/未来紧支撑的截面。

所有这些空间都带有规范拓扑，使得所有包含映射都是连续的，并且$\Gamma_c(E)$在所有空间中都是稠密的。例如， $\Gamma_A(E)$带有由紧子集上的所有C^k-范数诱导的拓扑，而 $\Gamma_{\pm}(E)$带有所有 $\Gamma_A(E)$（ A过去/未来紧）的极限拓扑。有关对这些空间更详细的描述，参见 [B¨ar14，第 2] 节。

2.4 格林算子

在此设置下，超前格林算子和推迟格林算子可以定义为在适当空间上 P 的逆算子。

定义/命题2.4。 P 作为从 $\mathcal{D}'_{\pm}(E)$ 到其自身的映射是可逆的。格林算子 $G^{\pm}_P$ 被定义为 P 在 $\mathcal{D}'_{\pm}(E)$ 上的逆算子。该算子是连续的，并且限制为从 $\Gamma_{\pm}(E)$到其自身的连续映射。如果所讨论的算子是明确的，我们省略下标 P。对于任意 $f \in \mathcal{D}'_{\pm}(E)$，有 $\mathrm{supp}(G^{\pm} f) \subseteq J_{\pm}(\mathrm{supp}(f))$。

这可由 [B¨ar14 的定理 3.8、推论 3.11 和引理 4.1] 得出（ P 是格林双曲的，因而前述结果适用；例如， [BGP07 的推论 3.4.3] 即可保证这一点）。更常见的做法是将格林算子定义为映射 $\Gamma_c(E) \to \Gamma(E)$。通过限制／连续延拓，这与此处采用的定义等价。我们所用定义的优点在于，格林算子的（整数）幂可以直接良好定义，因为格林算子是自同构。

2.5 适当定义域

本文的大多数讨论并非在整个 M 上进行，而是在 M 的适当子集上进行：

定义 2.5. 称 M 的子集 U 为 GE 集，若其为开集、测地凸、整体双曲且因果相容。

固定记号 2.6. 从现在起，固定 M 中任意一个 GE 集 U 。

要将分布限制到 U，需要开放性。定义 Hadamard 系数和黎斯分布需要测地凸性。整体双曲性确保 that$U$ 具有唯一的格林算子，而因果相容性确保这些算子与 M上格林算子的限制一致。事实上，根据 [BGP07、命题 3.5.1.] （以及连续性），对于任意 $f \in \mathcal{D}'_{\pm}(E)$，有：

$$G^{\pm}_{P|_U}(f|_U) = (G^{\pm}_P f)|_U.$$

在下文中，我们在记号上不区分 $G^{\pm}_P$ 和 $G^{\pm}_{P|_U}$，因为前面的等式保证这不会导致歧义。此外，我们经常在记号中省略将核限制在 $U \times U$ 上。

注2.7。再次，关于 U 的任何定理和定义都适用于整体双曲流形的任意 GE 子集。这包括作为其自身 GE 子集的洛伦兹向量空间。

GE 集的概念也足够一般，能够研究任意点附近的局部性质： [Min14、推论 2和注记 14] 表明， M 中的每一点都有一个由 GE 集构成的邻域基。

2.6 黎斯分布和 Hadamard 系数

本节将介绍黎斯分布和 Hadamard 系数，它们在本文中将发挥核心作用。我们将遵循 [BGP07]，相关内容也见于 [G¨un88]和 [Fri75]。由于所有构造都高度依赖指数映射，这些对象仅在洛伦兹流形的凸子集上定义。我们将为 U 定义它们，并在定义后省略指标 U，除非我们明确要将它们用于其他集合。

U 上的黎斯分布，粗略地说，是"距离函数的幂"的洛伦兹类比。 [BGP07 第 1.2 节和第 1.4] 节对它们作了详细描述。在这里，它们所起的作用类似于泰勒级数中 x 的幂。

定义 2.8。对于 x、$y \in U$，定义

$$\Gamma^U(y,x) := -g(exp_x^{-1}(y), exp_x^{-1}(y)).$$

这是黎曼距离平方的洛伦兹对应物。当且仅当 y 位于 x的未来或过去时， $\Gamma(y,x)$为正。现在我们定义黎斯分布（关于定义及以下说明，参见[BGP07，定义1.2.1和1.4.1、引理1.2.2以及命题1.4.2] ）

定义/命题2.9。对于实部为 $\Re(\alpha)$ 的 $\alpha \in \mathbb{C}$ 和 $x \in U$，将黎斯分布 $R^U_\pm(\alpha)(\cdot,x)$ 定义为 U 上由函数给出的分布

$$R^U_\pm(\alpha)(y,x) = \begin{cases} c_\alpha \Gamma(y,x)^{\frac{\alpha-d}{2}} & , \text{if } x \in J_\pm(0) \\ 0 & , \text{if } x \notin J_\pm(0) \end{cases}$$

with

$$c_\alpha := \frac{2^{1-\alpha}\pi^{\frac{2-d}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{\alpha-d+2}{2})}.$$

映射 $\alpha \mapsto R^U_\pm(\alpha)(\cdot,x)$ 是一个取值于 $\mathcal{D}'(U)$ 的全纯映射，并且唯一地延拓为定义在整个 $\mathbb{C}$ 上的全纯映射。对于任意 $\alpha \in \mathbb{C}$，定义 $R^U_\pm(\alpha)(\cdot,x)$ 为此全纯延拓在该处的值。这便在 $U \times U$ 上定义了黎斯分布 $R^U_\pm(\alpha)$，正如记号所示：

$$R^U_\pm(\alpha)[\psi] := \int_U R^U_\pm(\alpha)(\cdot,x)[\psi(\cdot,x)]dx$$

对于任意测试函数 $\psi \in C_c^\infty(U \times U)$。

定义 c_α 中的 Γ 指的是伽马函数，而不是上文定义的 Γ 。前置因子经过选择，使得

$$\Box R^{\mathbb{R}^d}_\pm(\alpha+2) = R^{\mathbb{R}^d}_\pm(\alpha).$$

以下内容中 c_α 的具体形式并不重要，之后也不会再出现伽马函数。我们有

$$R_\pm(0) = \delta,$$

即，第 0 阶 Riesz 分布是对角线上的狄拉克分布。 U 上的 Riesz分布可以通过指数映射从闵可夫斯基空间上的 Riesz 分布得到:

$$R^U_\pm(\alpha)(\cdot, x) = (exp_x)^{-1*} R^{T_x M}_\pm(\alpha)(\cdot, 0).$$

它们的支集位于基点的因果过去/未来中:

$$\mathrm{supp}(R^U_\pm(\alpha)(\cdot, x)) \subseteq J_\pm(x).$$

由于 Γ 在因果过去和未来的边界处消失，查看$\Re(\alpha)$的公式 $> d$ 表明，如果 $\Re(\alpha) > d + 2n$，则 $R_\pm(\alpha)$是 C^n。

在闵可夫斯基空间中，黎斯分布 $R^{\mathbb{R}^d}_\pm(2k)$ 对于 $k \in \mathbb{N}$ 可以被视为 $\Box^k$ 的基本解:

命题 2.10。在洛伦兹向量空间 V 上，我们有

$$R^V_\pm(2m) = G^{\pm m}_\Box \delta,$$

其中， δ 表示对角线上的狄拉克分布，而 $\Box$ 表示 V上的达朗贝尔算子。

证明。我们有

$$R^V_\pm(0) = \delta$$

and

$$\Box_V R^V_\pm(2m + 2) = R^V_\pm(2m).$$

Thus

$$R^V_\pm(2m + 2) = G^\pm_{\Box_V} R^V_\pm(2m).$$

反复迭代可得

$$R^V_\pm(2m) = G^{\pm m}_{\Box_V} R^V_\pm(0) = G^{\pm m}_{\Box_V} \delta.$$ □

现在我们转向本节要定义的第二类对象：Hadamard 系数。为定义它们，我们引入以下微分算子。

定义 2.11。对 $V \in \Gamma(E \boxtimes E^*)$，定义:

$$\rho^U V(y, x) := \nabla_{\mathrm{grad}\,\Gamma(y,x)} V(y, x) - \left(\frac{1}{2}\Box\Gamma(y, x) - d\right) V(y, x),$$

其中， ∇ 是由 P诱导的联络。

读者可以立即忘记 ρ 的定义，只需记住以下性质：

命题 2.12。对于 $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$、$x \in U$ 和 $V \in \Gamma(E \boxtimes E^*|_{U\times U})$，有

$$P(VR_\pm(\alpha+2)) = (PV)R_\pm(\alpha+2) - \frac{1}{\alpha}((\rho-\alpha)V)R_\pm(\alpha)$$

证明。根据 [BGP07，命题 1.4。2], 黎斯分布满足

$$2\alpha \operatorname{grad}(R_\pm(\alpha+2)) = (\operatorname{grad}\Gamma)R_\pm(\alpha)$$

and

$$\alpha\Box R_\pm(\alpha+2) = \left(\frac{1}{2}\Box\Gamma - d + \alpha\right) R_\pm(\alpha).$$

利用这一点以及正规双曲算子的莱布尼茨法则，我们对 $\Re(\alpha) > d+4$ 进行计算（因此 $R_\pm(\alpha, x)$ 是 C^2，我们不必担心分布）

$$\begin{aligned}
&\alpha P(VR_\pm(\alpha+2,x))\\
=&\alpha\left((PV)R_\pm(\alpha+2,x) - 2\nabla_{\operatorname{grad} R_\pm(\alpha+2,x)}V + V\Box R_\pm(\alpha+2,x)\right)\\
=&\alpha(PV)R_\pm(\alpha+2,x) - (\nabla_{\operatorname{grad}\Gamma}V)R_\pm(\alpha,x) + V\left(\frac{1}{2}\Box\Gamma_x - d + \alpha\right)R_\pm(\alpha,x)\\
=&\alpha(PV)R_\pm(\alpha+2,x) - ((\rho_x^U - \alpha)V)R_\pm(\alpha,x).
\end{aligned}$$

由于两边都是全纯函数，该等式对任意 α 都成立。 □

几乎完全相同的计算见于 [BGP07 的公式2.1]，用于引出 Hadamard 系数的定义，我们现在给出该定义：

定义/命题 2.13。存在唯一的一族光滑截面

$$V^{k,U} \in \Gamma(E \boxtimes E^*|_{U\times U})$$

（以 $k \in \mathbb{N}$ 为指标）且满足输运方程的

$$(\rho - 2k)V^{k,U} = 2kPV^{k-1,U}$$

（对于 $k = 0$，右端设为 0），并满足初始条件

$$V^{0,U}(x,x) = 1.$$

我们称这些为 Hadamard 系数。

定义 Hadamard 系数的动机在于，我们希望得到形式上的等式

$$P\sum_{k=0}^{\infty} V^k R_\pm(2k+2) = \delta,$$

这意味着（连同支集条件一起），如果该无穷和存在，它将是 $G^\pm$ 的施瓦茨核。一般而言，该和并不存在，我们只能得到某种形式的渐近展开。

2.7 可微阶数中的渐近展开式

Hadamard 展开以及本文中推导出的展开都不是精确等式。相反，左侧的量可以通过右侧的部分和，在任意阶的可微性意义下得到逼近：

定义 2.14。对于分布 F 和 f_k，我们记

$$F \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

当且仅当对于任意 $m \in \mathbb{N}$，存在 $N_0 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $N > N_0$，该差值

$$F - \sum_{n=0}^{N} f_n$$

是 m 次连续可微的。

如果右侧有多个求和，我们以类似的方式定义它（正如对极限所做的那样）。

注 2.15. 由于 Green 核和黎斯分布在第二个自变量的因果过去/未来之外均为零，因此在下列展开中，a C^k 余项也会在过去/未来边界附近以 k 阶消失。

3 格林算子的幂

我们首先推导超前/推迟 Green 算子幂的展开式。在开始主要证明之前，我们需要进行一些技术性工作，以保证格林算子不会（局部地）过度降低可微阶数。这对于控制渐近展开的余项是必要的。该结果基本上是将光滑截面连续地映射为光滑截面的一个推论。

命题 3.1. 设 $A \subset M$ 为过去/未来紧的紧集，$W \subset M$ 为开且相对紧的集合。令 r_W 表示到 W 的限制。则对于每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $m \in \mathbb{N}$，使得 $r_W \circ G^{\pm}$ 连续地将 $\Gamma_A^m(E)$ 映射到 $\Gamma^n(E|_W)$。

证明。我们知道

$$G^{\pm} \colon \Gamma_{\pm}(E) \to \Gamma_{\pm}(E)$$

是连续的。由于 $\Gamma_A(M)$和 $\Gamma_{J_{\pm}(A)}(M)$的拓扑与来自 $\Gamma_{\pm}$ 的子空间拓扑一致（因为后者带有极限拓扑），我们知道限制

$$G^{\pm} \colon \Gamma_A(E) \to \Gamma_{J_{\pm}(A)}(E)$$

也是连续的。 C^k-范数在 $\overline{W}$ 上是目标空间上的半范数。因此，根据连续性的半范数刻画，我们知道，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，存在 $c \in \mathbb{R}$、$m \in \mathbb{N}$ 和 $K \subseteq M$，使得对于所有 $\phi \in \Gamma_A(E)$

$$\|G^{\pm}\phi\|_{C^n(\overline{W})} \leq c\|\phi\|_{C^m(K)}.$$

右侧同样是 $\Gamma_A^m(E)$ 的半范数。因此，$r_W \circ G^{\pm}|_{\Gamma_A(E)}$ 可连续延拓为映射 $\Gamma_A^m(E) \to \Gamma^n(E|_W)$。由于 C^k-收敛蕴含分布收敛，这个连续延拓必然与 $r_W \circ G^{\pm}|_{\Gamma_A^m(E)}$一致，因为后者在分布意义下是连续的。

□

由于 Hadamard 系数和 Green 核是 $E \boxtimes E^*$ 中的截面，并且我们希望在两个坐标上都具有可微性，因此需要将上述结果扩展到 $G^{\pm}$ 作用于盒积截面的第一分量这一情形。

命题 3.2。设 $A \subset M$ 是过去/未来紧的，$W \subset M$ 是开且相对紧的。设 O 是某个流形，F 是其上的某个向量丛，其中 O。那么对于每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $m \in \mathbb{N}$，使得对于任意支集包含于 $A \times O$ 的 $f \in \Gamma^m(E \boxtimes F)$，都有 $G^{\pm}f|_{W\times O} \in \Gamma^n((E \boxtimes F)|_{W\times O})$，其中 $G^{\pm}f(y,x) := G^{\pm}(f(\cdot,x))(y)$。

证明。由于可微性可以局部检验，即在 $E \boxtimes F$ 平凡化的坐标图中检验，因此只需验证这些坐标图中分量函数的至多 m 阶偏导数存在。选取

$$m \qquad G^{\pm} \qquad \Gamma_A^{m-n}\ E \qquad \Gamma^n\ E \qquad \partial^I \circ \text{，使}$$

$$G^{\pm} \qquad C^{n-|I|}$$

得映射 ( ) 到 ( ) 连续。由于对于任意满足 $|I| < n$ 的多重指标，作为取值于 -截面的映射是连续的，因此第二个分量中的偏导数差商可以移入算子内部，此时极限是良定义的，并给出可微阶数低一阶的函数。重复这一过程，从一个 a C^m-截面出发，将第二组坐标中的所有偏导数移入内部，论证始终至少保持 C^{m-n}，由此可知 $G^{\pm}f$ 的所有至多 n 阶偏导数都良定义且连续。

□

现在我们可以证明本节的主要定理：

定理 3.3。设 $U \subseteq M$ 是一个 GE 集，且 $m \in \mathbb{Z}$。那么我们有渐近展开

$$\mathcal{K}(G^{\pm m})|_{U\times U} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} V^{k,U} R_{\pm}^{U}(2k+2m).$$

对于 $m < 0$，右侧是一个有限和，因为所有满足 $k + m > 0$ 的被加项都为零，因此等式成立。

注 3.4. 注意，特殊情形 $m = 1$ 重现了原始的 Hadamard 展开。

注3.5. 在 $m<0$的情况下，这实际上是 P的幂的核的一个公式。所有阶数为0或更低的偶黎斯分布在超前和推迟情形下都是相同的，并且仅支撑于对角线上，因此这个展开式并不像乍看之下那么令人惊讶。从 $m=-1$ 的情况，我们得到

$$\mathcal{K}(P)=V^0R_{\pm}(-2)-V^1\delta.$$

特别是， P 由度量 g （它确定黎斯分布）以及前两个 Hadamard 系数 V^0 和 V^1唯一确定。

证明。我们通过对 m 进行双向归纳来推进，证明如果该命题对 $m\in\mathbb{Z}$ 成立，那么当 $m\geq 0$ 时对 $m+1$ 也成立，并且当 $m\leq 0$ 时对 $m-1$ 也成立。由 $R_{\pm}(0)=\delta$ 可得 $m=0$ 这一情形，因为除第一项外的所有加数都为零。

我们先进行一些初步计算。对于 $k+m\neq 0$，我们可以利用 ρ （2.12）的刻画以及输运方程（见 2.13）来计算

$$\begin{aligned}
&\binom{k+m}{k}P(V^kR_{\pm}(2k+2m+2))\\
&=\binom{k+m}{k}\Big(\frac{-1}{2k+2m}(\rho-2k-2m)V^kR_{\pm}(2k+2m)+(PV^k)R_{\pm}(2k+2m+2)\Big)\\
&=\binom{k+m}{k}\Big(\frac{-1}{2k+2m}((2kPV^{k-1}-2mV^k)R_{\pm}(2k+2m))\\
&+(PV^k)R_{\pm}(2k+2m+2)\Big)\\
&=\binom{k+m}{k}\frac{2m}{2k+2m}V^kR_{\pm}(2k+2m)-\binom{k+m}{k}\frac{2k}{2m+2k}(PV^{k-1})R_{\pm}(2k+2m)\\
&+\binom{k+m}{k}(PV^k)R_{\pm}(2k+2m+2)\\
&=\binom{k+m-1}{k}V^kR_{\pm}(2k+2m)-\binom{k+m-1}{k-1}(PV^{k-1})R_{\pm}(2k+2m)\\
&+\binom{k+m}{k}(PV^k)R_{\pm}(2k+2m+2))
\end{aligned}$$

在特殊情形 $k=m=0$ 下，我们得到:

$$\begin{aligned}
P(V^0R_\pm(2)) &= \lim_{\alpha\to 0} P(V^0R_\pm(\alpha+2)) \\
&= \lim_{\alpha\to 0} P(V^0)R_\pm(\alpha+2) - (\frac{1}{\alpha}\rho V^0 - V^0)R_\pm(\alpha) \\
&= \lim_{\alpha\to 0} P(V^0)R_\pm(\alpha+2) + V^0R_\pm(\alpha) \\
&= P(V^0)R_\pm(2) + V^0R_\pm(0) \\
&= P(V^0)R_\pm(2) + V^0\delta \\
&= \delta + P(V^0)R_\pm(2),
\end{aligned}$$

其中我们利用了 V_0 在对角线上为 1。无论哪种方式，我们都得到 $k=0$:

$$P(V^0R_\pm(2m+2)) = V^0R_\pm(2m) + (PV^0)R_\pm(2m+2)$$

综合以上内容，对于任意 $N\in\mathbb{N}$，在 $m\geq 0$ 的情形下，以及对于任意 $N<-m$，若 $m<0$，我们有

$$\begin{aligned}
&P\sum_{k=0}^{N}\binom{m+k}{k}V^kR_\pm(2k+2m+2) \\
&= V^0R_\pm(2m) + (PV^0)R_\pm(2m+2) + \sum_{k=1}^{N}\binom{k+m-1}{k}V^kR_\pm(2k+2m) \\
&- \binom{k+m-1}{k-1}(PV^{k-1})R_\pm(2k+2m) + \binom{k+m}{k}(PV^k)R_\pm(2k+2m+2) \\
&= \sum_{k=0}^{N}\binom{k+m-1}{k}V^kR_\pm(2k+2m) - \sum_{k=0}^{N-1}\binom{k+m}{k}(PV^k)R_\pm(2k+2m+2) \\
&+ \sum_{k=0}^{N}\binom{k+m}{k}(PV^k)R_\pm(2k+2m+2) \\
&= \sum_{k=0}^{N}\binom{k+m-1}{k}V^kR_\pm(2k+2m) + \binom{N+m}{N}(PV^N)R_\pm(2N+2m+2) \\
&=: \sum_{k=0}^{N}\binom{k+m-1}{k}V^kR_\pm(2k+2m) + E_N
\end{aligned}$$

其中

$$E_N := \binom{N+m}{N}(PV^N)R_\pm(2N+2m+2)$$

是 C^n 用于 $N \geq \frac{d}{2} + n - m$。

情形 1： $m + 1 \Rightarrow m$, $m < 0$

假设归纳成立。

$$\mathcal{K}(G^{\pm m+1}) = \sum_{k=0}^{-m-1} \binom{m+k}{k} V^k R_{\pm}(2k + 2m + 2)$$

（其余所有求和项均为 0）。令 $N = -m - 1$。我们使用如下事实（见 [BGP07，下面的命题 2.3.1]）：在对角线上 $\Delta = \{(x, x)|x \in U\}$，有

$$PV^N|_{\Delta} = -V^{N+1}|_{\Delta}$$

以及二项式恒等式

$$\binom{-a}{b} = (-1)^b \binom{a+b-1}{b}$$

对于整数 b，这尤其意味着

$$\binom{-1}{b} = (-1)^b.$$

由此，我们得到

$$\begin{aligned} E_N &= \binom{-1}{N}(PV^N)R_{\pm}(0) \\ &= (-1)^N(PV^N)\delta \\ &= (-1)^{N+1}V^{N+1}\delta \\ &= \binom{-1}{N+1}V^{N+1}R_{\pm}(0) \\ &= \binom{-1}{-m}V^{-m}R_{\pm}(0). \end{aligned}$$

根据归纳假设和先前的计算，我们得到:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(G^{\pm m}) &= P\mathcal{K}(G^{\pm m+1}) \\ &= P\sum_{k=0}^{N}\binom{m+k}{k}V^k R_{\pm}(2k+2m+2) \\ &= \sum_{k=0}^{N}\binom{k+m-1}{k}V^k R_{\pm}(2k+2m) + E_N \\ &= \sum_{k=0}^{-m-1}\binom{k+m-1}{k}V^k R_{\pm}(2k+2m) + \binom{-1}{-m}V^{-m}R_{\pm}(0) \\ &= \sum_{k=0}^{-m}\binom{k+m-1}{k}V^k R_{\pm}(2k+2m)\end{aligned}$$

情况 2: $m \Rightarrow m+1$、$m \geq 0$

固定 $n \in \mathbb{N}$ 并假设定理对某个 $m \geq 0$成立。我们首先证明，该展开在 U的相对紧GE子集上成立。设 W、$O \subseteq U$是相对紧的（在 U中）且为 GE。命题 3.2蕴含存在 $n' \in \mathbb{N}$，使得 $G^{\pm}$ 将支集包含于 $J_{\pm}^{U}(\overline{O}) \times O$的 $C^{n'}$-截面映射为在 $W \times O$上 C^n的截面。根据归纳假设，我们可以选取 $N \geq \frac{d}{2} + n'$ 使得

$$F_N := G^{\pm m} - \sum_{k=0}^{N}\binom{m+k-1}{k}V^k R_{\pm}(2k+2m)$$

是一个 $C^{n'}$-截面。于是我们在 $U \times U$ 上有

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K}(G^{\pm m+1}) \\
&= G^{\pm}\mathcal{K}(G^{\pm m}) \\
&= G^{\pm}\left(\sum_{k=0}^{N}\binom{m+k-1}{k}V^k R_{\pm}(2k+2m) + F_N\right) \\
&= G^{\pm}\left(P\sum_{k=0}^{N}\binom{m+k}{k}V^k R_{\pm}(2k+2m+2) - E_N + F_N\right) \\
&= \sum_{k=0}^{N}\binom{m+k}{k}V^k R_{\pm}(2k+2m+2) + G^{\pm}(F_N - E_N) \\
&=: \sum_{k=0}^{N}\binom{m+k}{k}V^k R_{\pm}(2k+2m+2) + \tilde{F}_N.
\end{aligned}$$

with

$$\tilde{F}_N := \mathcal{K}(G^{\pm m+1}) - \sum_{k=0}^{N}\binom{m+k}{k}V^k R_{\pm}(2k+2m+2) = G^{\pm}(F_N - E_N).$$

根据我们对 n'和 N的选择， $\tilde{F}_N$在 $W \times O$上是 C^n的，因为 $E_N|_{U\times O}$和 $F_N|_{U\times O}$都是 $C^{n'}$，且支集包含于 $J_{\pm}(O) \times O$中。请注意，在选择了 W和O 之后，我们所作的唯一选择就是 n' 和 N。因此，我们希望使该展开独立于 N的选择。

设 $N' \geq \frac{d}{2} + n$ 任意。对于 $k \geq N'$，所有黎斯分布 $R_{\pm}(2k+2m+2)$ 都由 C^n-函数给出。我们看到。

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{N'} &= \mathcal{K}(G^{\pm m+1}) - \sum_{k=0}^{N'}\binom{m+k}{k}V^k R_{\pm}(2k+2m+2) \\
&= \sum_{k=N'+1}^{N}\binom{m+k}{k}V^k R_{\pm}(2k+2m+2) + \tilde{F}_N
\end{aligned}$$

在 C^n 上。由于这与 W 和 O 无关，因此可以将它们替换为任意相对紧的 GE 集。U 中的所有点都有相对紧的 GE 邻域（任选一个相对紧邻域，再选取一个包含于其中的 GE 邻域）。˜因此，任意 $(y, x) \in U \times U$ 都有一个邻域，在该邻域上 $F_{N'}$ 是 C^n，这意味着它在整个 $U \times U$ 上都是 C^n。由于 n 是任意的，我们得到了 $m+1$ 的所需渐近展开，从而完成了归纳。 □

4 格林函数的“预解式”

现在我们考虑算子 $P - z$ 在 $z \in \mathbb{C}$ 上的格林算子，它仍然是正规双曲的。若将 $G_P^{\pm}$ 看作 P 的某种逆算子，那么 $G_{P-z}^{\pm}$ 就类似于一个预解式。我们试图推导出一个与上述类似的展开，其中只出现 P 的 Hadamard 系数，而非 $P - z$ 的，并且 z 依赖性则转移到黎斯分布的一个广义版本上。

我们希望利用已有的渐近展开，来得到我们想要的展开。为此，我们将 $P - z$ 的 Hadamard 系数用 P 的 Hadamard 系数表示。

De定义4.1. 对于 $z \in \mathbb{C}$，令 $V^k(z)$ 表示 $P - z$ 的 Hadamard 系数。

命题 4.2。我们有

$$V^k(z) = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} z^m V^{k-m}.$$

注 4.3。拉普拉斯算子的热系数对应公式，

$$a_k(\Delta - z) = \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!} z^m a_{k-m}(\Delta),$$

可以类似地证明。或者，也可以通过对 e^{tz} 作泰勒展开并将展开式相乘而推导出该公式，在

$$e^{-t(\Delta - z)} = e^{tz} e^{-t\Delta}.$$

证明。设

$$V_k(z) := \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} z^m V^{k-m}$$

我们需要证明 $V_0(z)(x, x) = 1$ 和 $V_k(z)$ 满足输运方程。前者成立，因为 $V_0(z) = V^0$。对于后者，我们利用以下对象的输运方程进行计算：

P:

$$
\begin{aligned}
&(\rho-2k)V_k(z)\\
&=\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}z^m(\rho-2k)V^{k-m}\\
&=\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}z^m((\rho-2(k-m))V^{k-m}-2mV^{k-m})\\
&=\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}z^m2(k-m)PV^{k-m-1}-\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}z^m2mV^{k-m}\\
&=\sum_{m=0}^{k}\binom{k-1}{m}z^m2kPV^{k-m-1}-\sum_{m=1}^{k}\binom{k-1}{m-1}z^m2kV^{k-m}\\
&=\sum_{m=0}^{k-1}\binom{k-1}{m}z^m2kPV^{k-m-1}-\sum_{m=0}^{k-1}\binom{k-1}{m}z^{m+1}2kV^{k-m-1}\\
&=2k(P-z)\sum_{m=0}^{k-1}\binom{k-1}{m}z^mV^{k-m-1}\\
&=2k(P-z)V_{k-1}(z).
\end{aligned}
$$

$V_k(z)$ 因此满足关于 $P-z$ 的输运方程，所以它们就是所需的 Hadamard 系数。

□

将其代入Hadamard 展开，我们得到 $P-z$ 的 Green核的第一个展开式，这是一个双重求和形式的渐近展开，其中 z 依赖关系是显式的:

推论4.4。对于每个 GE 集 $U\subseteq M$，我们有渐近展开

$$
\mathcal{K}(G^{\pm}_{P-z})|_{U\times U}\sim\sum_{k,m=0}^{\infty}\binom{k+m}{k}z^mV^{k,U}R^U_{\pm}(2k+2m+2).
$$

证明。将标准的Hadamard 展开取至 $P-z$，代入我们关于依赖于 z的 Hadamard 系数的公式（命题 4.2），并重新对各求和项编号，我们

获得

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(G^{\pm}_{P-z}) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} V^n(z) R_{\pm}(2n+2) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+m=n} \binom{n}{k} z^m V^k R_{\pm}(2n+2) \\ &= \sum_{k,m=0}^{\infty} \binom{k+m}{k} z^m V^k R_{\pm}(2k+2m+2)\end{aligned}$$ □

这为我们给出了一个关于 z依赖关系的显式表达式。现在，我们希望将 z 依赖关系转移到黎斯分布中，以获得更接近经典Hadamard 展开的形式。偶黎斯分布是通过将闵可夫斯基空间上达朗贝尔算子的基本解平移到流形上得到的

$$R^{U}_{\pm}(2m)(\cdot, x) = (exp_x)^{-1*}(G^{\pm m}_{\Box}\delta_0)$$

（见命题 2.10 及前述备注）。一个合理的依赖于 z 的推广是改为对 $\Box - z$ 做同样的处理：

定义　关于4.5。对于 $z \in \mathbb{C}$、$x \in M$ 和 $m \in \mathbb{N}$，我们定义预解黎斯分布　*as*

$$R_{\pm}(z, 2m)(\cdot, x) := (exp_x^{-1})^*(G^{\pm m}_{\Box - z}\delta_0),$$

以及 $U \times U$ 上的版本

$$R_{\pm}(z, 2m)[\psi] = \int_U R_{\pm}(z, 2m)(\cdot, x)[\psi(\cdot, x)]dx.$$

这里的 $\Box$ 是 T_xM 上的达朗贝尔算子。

为了构造最终的展开式，我们需要将 Riesz 预解式分布展开为标准分布的形式。我们先在闵可夫斯基空间中进行推导：

Lem命题 4.6. 在任意洛伦兹向量空间 V 上，我们有如下渐近展开　n

$$G^{\pm k}_{\Box - z}\delta_0 \sim \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{m} z^m R^{V}_{\pm}(2m+2k)(\cdot, 0).$$

证明。将定理 3.3 应用于 $\Box - z$，可得渐近展开

$$G^{\pm k}_{\Box - z}\delta_0 = \mathcal{K}(G^{\pm k}_{\Box - z})(\cdot, 0) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{m} V^m(z)(\cdot, 0) R^{V}_{\pm}(2m+2k)(\cdot, 0),$$

其中， $V^m(z)$ 表示 $\Box - z$ 的 Hadamard 系数。$\Box$ 的 Hadamard 系数为

$$V^k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k\neq 0 \end{cases},$$

因为这使得所有输运方程都变成 $0 = 0$。因此，根据命题 4.2， $\Box - z$ 的 Hadamard 系数为

$$V^k(z) = z^m.$$

代入此式，我们得到

$$G^{\pm k}_{\Box - z}\delta_0 \sim \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{m} z^m R^V_{\pm}(2m+2k)(\cdot, 0). \qquad \square$$

这以一种直接的方式从闵可夫斯基空间推广到 M：

引理 4.7. 我们有如下渐近展开

$$R_{\pm}(z, 2k) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{m} z^m R^U_{\pm}(2m+2k).$$

证明。由于 U是凸的，因此它是可缩的，从而 TU是平凡的。令 ϕ: $U \times \mathbb{R}^d \to TU$为保持时间定向的等距平凡化，并将其在 x上方纤维上的限制记为 ϕ_x ，从而将 $\{x\} \times \mathbb{R}^d$ 与 $\mathbb{R}^d$识别。由于 ϕ_x 是保持时间定向的等距映射，它保持所有仅根据度量和时间定向定义的对象，即。

$$\phi_x^{-1*}(R^{\mathbb{R}^d}_{\pm}(2m+2k)) = R^{T_xM}_{\pm}(2m+2k)$$

and

$$\phi_x^{-1*}(G^{\pm k}_{\Box_{\mathbb{R}^d} - z}\delta_0) = G^{\pm k}_{\Box_{T_xM} - z}\delta_0.$$

Let

$$\mathrm{Exp}\colon \mathrm{Dom}(\mathrm{Exp}) \subseteq TU \to U \times U$$

表示以基点为变量的指数映射，即对于 $v \in T_xU$， $\mathrm{Exp}(v) = (x, \exp_x(v))$。

令 $n \in \mathbb{N}$ 为任意值。当 N 足够大，使得

$$G^{\pm k}_{\Box_{\mathbb{R}^d} - z}\delta_0 = \sum_{m=0}^{N} \binom{k+m-1}{m} z^m R^{\mathbb{R}^d}_{\pm}(2m+2k)(\cdot, 0) + F$$

对于 $F \in C^n(\mathbb{R}^d)$，我们有

$$\begin{aligned}
&R_{\pm}(z,2k)(\cdot,x)\\
&= (\exp_x)^{-1*}(G^{\pm k}_{\square_{T_xM}-z}\delta_0)\\
&= (\exp_x \circ\phi_x)^{-1*}(G^{\pm k}_{\square_{\mathbb{R}^d}-z}\delta_0)\\
&= (\exp_x \circ\phi_x)^{-1*}\left(\sum_{m=0}^{N}\binom{k+m-1}{m} z^m R^{\mathbb{R}^d}_{\pm}(2m+2k)(\cdot,0) + F\right)\\
&= \sum_{m=0}^{N}\binom{k+m-1}{m} z^m (exp_x)^{-1*} R^{T_xM}_{\pm}(2m+2k)(\cdot,0) + F\circ\phi_x^{-1}\circ exp_x^{-1}\\
&= \sum_{m=0}^{N}\binom{k+m-1}{m} z^m R^{U}_{\pm}(2m+2k)(\cdot,x) + F\circ\phi^{-1}\circ \mathrm{Exp}^{-1}(\cdot,x).
\end{aligned}$$

由于 $F\circ\phi^{-1}\circ\mathrm{Exp}^{-1}$ 是 C^n（也可视为 x 的函数），且 n 是任意的，我们得到了所需的展开。 □

现在，我们已具备证明本节主要结果所需的一切条件：若在 P 的格林算子的渐近展开中，将标准黎斯分布替换为 $z \in \mathbb{C}$ 的预解黎斯分布，那么就得到 $P-z$ 的格林算子的渐近展开。

定理4.8。若 $U \subseteq M$ 是 GE，则有渐近展开

$$\mathcal{K}(G^{\pm}_{P-z})|_{U\times U} \sim \sum_{k=0}^{\infty} V^{k,U} R^{U}_{\pm}(z,2k+2).$$

更一般地，

$$\mathcal{K}(G^{\pm}_{P-z}{}^{m})|_{U\times U} \sim \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+m-1}{k} V^{k,U} R^{U}_{\pm}(z,2k+2m).$$

证明。代入我们关于依赖于 z 的 Hadamard 系数的公式（命题 4.2）

进入该 定理 3.3 中关于幂次的展开，应用时以 $P - z$ 代替 P，我们得到 in

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{K}(G_{P-z}^{\pm}{}^{m}) \\
&\sim \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{k} V^k(z) R_{\pm}(2k+2m) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{k} \sum_{l+n=k} \binom{k}{n} z^n V^l R_{\pm}(2k+2m) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+l+m-1}{n+l} \binom{n+l}{n} z^n V^l R_{\pm}(2(n+m+l)) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+l+m-1}{n} \binom{l+m-1}{l} z^n V^l R_{\pm}(2(n+m+l)) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+m-1}{l} V^l \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+l+m-1}{n} z^n R_{\pm}(2(n+m+l)) \\
&\sim \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+m-1}{l} V^l R_{\pm}(z, 2m+2l).
\end{aligned}
$$

这里我们使用了恒等式

$$\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{c}\binom{a-c}{b-c}$$

以及引理 4.7。

This 证明了第二个断言，第一个断言则是 $m = 1$ 的特殊情形。 □

References

[B¨ar14] Christian B¨ar.《整体双曲时空上的格林双曲算子》。载于：《数学物理通讯》333.3（2014），第 1585–1615 页。 DOI: 10.1007/s00220-014-2097-7。 URL: https://doi.org/10.1007%2Fs00220-014-2097-7。[BGP07] Christian B¨ar、Nicolas Ginoux 和 Frank Pfaeffle。《洛伦兹流形上的波动方程与量子化》。2007。 ISBN: 978-3-03719-037-1。 DOI: 10.4171/037。[BS20] Christian B¨ar 和 Alexander Strohmaier。《洛伦兹流形上的局部指标理论》。2020。 DOI: 10.48550/ARXIV.2012.01364。 URL: https://arxiv.org/abs/2012.01364。[DF08] Yves D´ecanini 和 Antoine Folacci。《任意维一般时空中量子化标量场应力能量张量的 Hadamard 重整化》。载于：《物理评论D》78（4，2008），第 044025 页。 DOI: 10.1103/PhysRevD.78.044025。URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.044025。[DW20] Nguyen Viet Dang 和 Michal Wrochna。《洛伦兹散射空间上的波算子复幂与谱作用量》。2020。 DOI: 10.48550/ARXIV.2012.00712。URL: https://arxiv.org/abs/2012.00712。[DW22] Nguyen Viet Dang 和 Micha l Wrochna。《洛伦兹谱 ζ 函数的动力学留数》。英文。载于：Journal de l’Ecole polytechnique — Math´ematiques 9（2022），第 1245–1292 页。 DOI: 10.5802/jep.205。 URL: https://jep.centre-mersenne.org/articles/10.5802/jep.205/。[Fri75] Friedrich G Friedlander。《弯曲时空上的波动方程》。剑桥数学物理专著丛书；2。剑桥等地：Cambridge Univ. Pr，1975。 ISBN: 9780521205672, 0521205670。[G¨un88] Paul G¨unther。《惠更斯原理与双曲方程》。Perspectives in mathematics；5。波士顿：Acad. Pr，1988。 ISBN: 9780123073303, 0123073308。[Min14] E. Minguzzi。《利普希茨联络与喷射的凸邻域》。载于：Monatshefte f¨ur Mathematik 177.4（2014），第 569–625 页。 DOI: 10.1007/s00605-014-0699-y。URL: https://doi.org/10.1007%2Fs00605-014-0699-y。[Ron23] Lennart Ronge。《从格林算子中提取 Hadamard 系数》。波恩莱茵弗里德里希·威廉大学，2023。 URL: https://hdl.handle.net/20.500.11811/10718。