arXiv:2304.03014v1 [math.SG] 6 Apr 2023

勒让德球面的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数上的卡拉比–丘结构

诺埃米·勒古

Abstract. 本文证明，在 Liouville 流形的接触化中，水平可位移的 n 维勒让德球面的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数是一个 $(n+1)$-卡拉比–丘微分分次代数。特别地，这意味着该切卡诺夫–埃利亚什贝格代数的对角双模与逆对偶化双模之间存在一个拟同构。在这些双模的某个循环版本上（它们是用于计算切卡诺夫–埃利亚什贝格代数的霍赫希尔德同调与上同调的链复形），我们构造了 A_∞ 运算，并证明卡拉比–丘同构可延拓为一族满足 A_∞-函子方程的映射。

Contents

1. 引言 1
2. DG-双模背景 4
3. 模空间 5
4. 切卡诺夫–埃利亚什贝格代数 8
5. Rabinowitz DG-双模 8
6. 卡拉比–丘结构 10
7. 乘积与高阶结构映射 19
8. 示例：平凡结 36
参考文献 37

1. Introduction

我们研究接触流形 (Y,α) 中的 n 维勒让德子流形，该接触流形是 Liouville 流形 (P,β)的接触化。在勒让德子流形的勒让德同痕不变量中，有许多都源自著名的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数（C-E代数）（[Che02, Eli98, EES05, EES07]）。后者是与勒让德子流形 Λ 相关的含幺微分分次代数（DGA），由 Λ的 Reeb 弦生成；定义简述见第 4 节。本文取系数环为域 $\mathbb{Z}_2$。

众所周知，C-E 代数的线性化版本满足一种特殊类型的对偶性，这一点最初由 Sabloff [Sab06] 针对勒让德结证明，随后由 Ekholm-Etnyre-Sabloff [EES09] 推广到更高维情形，并由 Bourgeois-Chantraine[BC14]推广到双线性化情形。本文证明，在某些假设下，完整的 C-E 代数，即未经线性化的 C-E 代数，也满足类似类型的对偶性。这种对偶性通过微分分次双模（DG-双模）来表述。具体而言，若 $\mathcal{A}$ 表示一个 n维勒让德球面的 C-E 代数，则 $\mathcal{A}$ 是一个称为对角双模的 DG $\mathcal{A}$-双模，而 $\mathcal{A}$的逆对偶化双模 是 DG $\mathcal{A}$-双模 $\mathcal{A}^!:=$导出$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\mathcal{A},\mathcal{A}\otimes\mathcal{A})$。我们证明，存在

是一个拟同构

$$\mathcal{CY} : \mathcal{A} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{A}^!{}[-n-1] \tag{1}$$

满足 $\mathcal{CY} \simeq \mathcal{CY}^![-n-1]$。再结合 $\mathcal{A}$ 是一个同调光滑微分分次代数这一事实（见第2节），可得以下结果：

T定理 1.1。设 $\Lambda \subset Y$ 是一个可水平位移的勒让德球面。那么，它的 *C-E-al*代数是一个 $(n+1)$-卡拉比–丘微分分次代数。

此处采用的卡拉比–丘结构定义源自 Ginzburg [Gin]（另见[KS09]），不过我们对次数采用了相反的符号约定。

基于以下理由，我们有充分理由预期，可位移勒让德球面的 C-E 代数具有卡拉比–丘结构。在其学位论文中，Ganatra [Gan12] 证明，Weinstein 流形的包裹福克亚范畴 $\mathcal{W}$ 是一个非紧卡拉比–丘范畴；其中的卡拉比–丘结构与式 (1) 类似，是由 A_∞ 双模之间的等价诱导的：对角双模 $\mathcal{W}$ 与 A_∞情形下逆对偶化双模的一个类似物 $\mathcal{W}^!$。现在注意，Weinstein 流形 X（有限型）的包裹福克亚范畴由拉格朗日余核生成，这些余核由在 X的理想接触边界中的勒让德球面上附加临界把手而得到，见 [CDRGGb、GPS]。因此，可以利用手术同构 [BEE12、EL、Ekh]，为这些勒让德球面的 C-E 代数构造卡拉比–丘结构。回想一下，手术同构给出了余核的缠绕 Floer 上同调（即包裹福克亚范畴生成元的自同态群）与勒让德附着球面的 C-E 代数之间的一个 A_∞ 拟同构。注意，此处 X 取为次临界 Weinstein 流形。当 X 为标准球时，其边界中勒让德子流形的 C-E 代数可在一个接触 Darboux 球内计算，而该勒让德子流形在其中可位移，参见例如 [DRET22]。

这表明，勒让德球面的 C-E 代数上的卡拉比–丘结构，或许可以通过手术同构从 Ganatra 定义的结构得到。然而，本文不采用这种方法。相反，我们将研究范围限定于 Liouville 流形接触化中的勒让德球面，并引入一种勒让德子流形的 Rabinowitz Floer 同调，其系数取自由的 $\mathcal{A}$ 双模 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ 秩1，其中 $\mathcal{A}$表示 C-E 代数。

RabinowitzFloer同调最初被定义为 [CF09] 中接触型超曲面的一个同调理论。随后，针对 Liouville 流形中的恰当拉格朗日子流形，引入了一种相对理论，即拉格朗日 RabinowitzFloer 同调 [Mer14]；最近，非相对理论和相对理论都被推广到可填充的 Liouville 协边情形 [CO18]。这些先前的理论是在哈密顿框架下定义的，而在 [Leg] 中，我们为（平凡）Liouville 协边中的拉格朗日子流形引入了拉格朗日 RabinowitzFloer同调的SFT 型版本。在那里，我们使用拉格朗日协边负端处勒让德子流形的 C-E 代数的增广，从而定义了一个在 $\mathbb{Z}_2$ 上的复形。在本文中，我们只考虑勒让德子流形上的圆柱的Rabinowitz 复形，并且不使用增广，因此得到一个系数取自这些勒让德子流形的 C-E 代数的 DG-双模。

更确切地说，此处考虑的 Rabinowitz DG-双模由勒让德子流形 Λ 的二重副本 $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ 的混合弦生成，其中 Λ_1 是 $\Lambda_0 := \Lambda$ 的一个小幅负向推离，其微分则由边界位于 $\mathbb{R} \times (\Lambda_0 \cup \Lambda_1)$ 上的伪全纯圆盘计数定义。该微分是下三角的，因此 Rabinowitz 双模是 DG 双模态映射 $C_+(\Lambda_0, \Lambda_1) \to C_-(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 的锥，其中 C_+ 由从 Λ_0 到 Λ_1 的弦生成（与 Λ 的弦存在双射对应），而 C_- 由从 Λ_1 到 Λ_0 的弦生成（与之存在双射对应

，与 Λ 的弦以及 Λ 上 Morse 函数的临界点存在双射对应）。对于勒让德球面 Λ 及其 C-E 代数 $\mathcal{A}$，Rabinowitz 双模可描述为一个略有不同的 DG 双模映射的锥

$$\mathrm{CY} : \widehat{C}_+(\Lambda_0, \Lambda_1) \to \check{C}_-(\Lambda_0, \Lambda_1)$$

$\widehat{}$这对应于对作用量过滤的轻微修改。此处 $C_+(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 由从 Λ_0 到 Λ_1 的 Reeb 弦以及给定 Morse 函数在 Λ上的最大值生成，而$\smile C_-(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 由从 Λ_1 到 Λ_0 的弦以及 Morse 函数的最小值点生成。然后，$\widehat{}$ $\check{}$我们证明 $C_+(\Lambda_0, \Lambda_1)[-n-1]$与 $\mathcal{A}$拟同构，而 $C_-(\Lambda_0, \Lambda_1)$与导出$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}\otimes\mathcal{A})$拟同构。Rabinowitz 同调在勒让德同痕下的不变性意味着，如果 Λ 是水平可位移的，那么该复形是无环的。因此，移位后的映射 $\mathrm{CY}[-n-1]$ 给出一个 Calabi-Yau 拟同构 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^!{}[-n-1]$。

一般而言，我们预期，对于次临界 Weinstein 流形的接触边界中的任意勒让德子流形，Rabinowitz 复形都是无环的。注意，例如，Rabinowitz Floer 同调的周期轨道版本以及可填充勒让德子流形的RabinowitzFloer同调在那里都消失，参见 [CO18]。我们还预期，我们在此构造的卡拉比–丘结构与 Ganatra 在 [Gan12], 构造的结构一致，并计划在未来与Asplund的合作中证明这一点。与Ganatra 所采用的视角相比，此处视角的一个优势在于可计算性。定义我们所考虑运算的伪全纯圆盘可以利用Ekholm 的梯度流树理论进行计算 [Ekh07], ，而由哈密顿扰动定义的运算似乎缺乏通用的计算技术。

$\widehat{}$ $\check{}$通过将两个双模 $C_+(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 和 $C_-(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 分别与对角双模 $\mathcal{A}$ 取双模张量积，可以得到我们记为 $\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 和 $\check{C}_-^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 的复形，它们分别计算 $\mathcal{A}$ 的霍赫希尔德同调与上同调。在这些复形上，我们构造高阶映射，即对于任意 $(d+1)$-份 $\Lambda_0 \cup \cdots \cup \Lambda_d$，我们构造映射

$$\widehat{\mathfrak{m}}_d : \widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_{d-1}, \Lambda_d) \otimes \cdots \otimes \widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1) \to \widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_d)$$
$$\check{\mathfrak{m}}_d : \check{C}_-^{cyc}(\Lambda_{d-1}, \Lambda_d) \otimes \cdots \otimes \check{C}_-^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1) \to \check{C}_-^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_d)$$

满足 A_∞-方程，参见第 7 节。映射 $\check{\mathfrak{m}}_d$ 由边界位于 $\mathbb{R} \times (\Lambda_0 \cup \cdots \cup \Lambda_d)$上的伪全纯圆盘计数定义，其中 d负渐近作为输入，且有一个正渐近作为输出。这些映射是众所周知的，它们计算带有形式单位元的增广范畴 $\mathcal{A}ug_-(\Lambda)$ [BC14] 的 A_∞-结构（这里对应于Morse函数的最小值点）。另一方面，映射 $\widehat{\mathfrak{m}}_d$ 由出现在一维模空间紧化边界中的某些两层伪全纯楼的计数定义。从这个意义上说，它可以被视为一种 二次型 乘积。最后，我们证明，诱导在循环复形上的映射 CY 可扩展为一个映射族

$$\mathrm{CY}_d : \widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_{d-1}, \Lambda_d) \otimes \cdots \otimes \widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1) \to \check{C}_-^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_d)$$

满足 A_∞-函子方程。

注意，映射 CY 给出了 $\mathcal{A}$ 的霍赫希尔德同调与上同调之间的一个同构。将我们对 Rabinowitz 复形的定义推广到更一般接触流形中的勒让德子流形后，这一结果将恢复 [Gan12] 中包裹福克亚范畴的霍赫希尔德同调与上同调之间的拟同构。此外，我们大概也能恢复 Bourgeois-Ekholm-Eliashberg 在 [BEE11]中构造的不同乘积结构之间的关系。

致谢：我非常感谢 Georgios Dimitroglou Rizell 与我进行的所有讨论，也感谢他慷慨地分享想法。我还要感谢 Paolo Ghiggini，他对论文的初稿提出了宝贵意见。特别是，他指出了一条我曾在某个证明中使用、但实际上并不正确的论述。本研究得到 Knut and Alice Wallenberg Foundation 的资助，资助项目编号为 KAW 2021.0191 和 KAW 2021.0300；同时也得到 Swedish Research Council 的资助，资助项目编号为 2020-04426。

2. Background on DG-bimodules

设 $(\mathcal{A}_0, \partial_{\mathcal{A}_0}), (\mathcal{A}_1, \partial_{\mathcal{A}_1})$ 是定义在 $\mathbb{Z}_2$ 上的含幺微分分次代数（DGA）（为简便起见，此处我们仅考虑 $\mathbb{Z}_2$，但这并非严格必要）。DG $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0$-双模 是一个分次 $\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0$-双模 $\mathcal{B}$，并配备一个 1 次微分 $\partial_{\mathcal{B}}$，使得 $\partial_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\alpha}_1 b\boldsymbol{\alpha}_0) = \partial_{\mathcal{A}_1}(\boldsymbol{\alpha}_1)b\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\alpha}_1\partial_{\mathcal{B}}(b)\boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1 b\partial_{\mathcal{A}_0}(\boldsymbol{\alpha}_0)$。若 $(\mathcal{A}_0, \partial_{\mathcal{A}_0}) = (\mathcal{A}_1, \partial_{\mathcal{A}_1}) = (\mathcal{A}, \partial_{\mathcal{A}})$，则我们简单地写作 $\mathcal{A}$-双模，而不写作 $\mathcal{A} - \mathcal{A}$-双模。

例 2.1。 (1) DGA $(\mathcal{A}, \partial_{\mathcal{A}})$ 本身就是一个 DG $\mathcal{A}$-双模，称为对角双模。(2) DGA $\mathcal{A}$ 与其自身在 $\mathbb{Z}_2$ 上的张量积也是一个 DG $\mathcal{A}$-双模，其微分由 $\partial_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}}(a_1\otimes a_0) = \partial_{\mathcal{A}}(a_1)\otimes a_0 + a_1\otimes\partial_{\mathcal{A}}(a_0)$ 给出。注意，这个双模具有两种不同的双模结构：外部 和内部 双模结构：

$$\begin{array}{rccc} \mu^{out}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}}: & \mathcal{A}\otimes(\mathcal{A}\otimes\mathcal{A})\otimes\mathcal{A} & \to & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \\ & \boldsymbol{\alpha}\otimes(a\otimes a')\otimes\boldsymbol{\alpha}' & \mapsto & \boldsymbol{\alpha}a\otimes a'\boldsymbol{\alpha}' \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \mu^{in}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}}: & \mathcal{A}\otimes(\mathcal{A}\otimes\mathcal{A})\otimes\mathcal{A} & \to & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \\ & \boldsymbol{\alpha}\otimes(a\otimes a')\otimes\boldsymbol{\alpha}' & \mapsto & a\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\alpha}'a' \end{array}$$

(3) 给定两个 DG $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0$双模 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$，双模映射的集合$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ 是一个 DG $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0$ 双模，其微分由 $D(\phi) = \phi\circ\partial_{\mathcal{B}} + \partial_{\mathcal{C}}\circ\phi$给出。

在本文中，我们用 $-\otimes-$ 代替 $-\otimes_{\mathbb{Z}_2}-$ 表示在 $\mathbb{Z}_2$上的张量积。一个*DG*-态射 从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{C}$ 的 $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0$-双模是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(\mathcal{B},\mathcal{C})$中的一个0次元素 ϕ，它与 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$的微分交换；换言之，它是$(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(\mathcal{B},\mathcal{C}), D)$中的一个 0 次圈。一个拟同构的微分分次双模是一个在同调中诱导出同构的 DG-态射。

根据 [FHT95],，我们回顾一下，DG $\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0$-双模 $(\mathcal{B},\ \partial_{\mathcal{B}})$ 若同构于$\mathcal{A}_1\otimes V\otimes\mathcal{A}_0$，则称为自由，其中 V是由圈生成的 $\mathbb{Z}_2$-向量空间。在这种情况下， $\mathcal{B}$的自由生成集是 V的一组基。给定一个微分分次代数 $\mathcal{A}$，对角双模不是自由双模，而赋予外部或内部结构的 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$是自由的，由 $1\otimes1$生成。若存在一个滤过，则称 DG-双模$\mathcal{B}$ 为半自由 。

$$\{0\}\subset F_0\mathcal{B}\subset F_1\mathcal{B}\subset\cdots\subset\mathcal{B}$$

使得对于所有 $i\geqslant 0$、 $\bigcup F_i\mathcal{B} = \mathcal{B}$， $F_i\mathcal{B}$ 都是DG-子双模，并且 $F_0\mathcal{B}$ 和 $F_{i+1}\mathcal{B}/F_i\mathcal{B}$ 是自由双模。我们称如上的半自由DG双模 $\mathcal{B}$ 具有有限秩，如果存在某个 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $F_k\mathcal{B} = \mathcal{B}$。DG双模 $\mathcal{B}$ 的 半自由分解 是一个半自由DG双模 $R_{\mathcal{B}}$，连同一个 DG双模的拟同构 $R_{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}$。

在 DG $\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0$-双模范畴中，$\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(-,\mathcal{C})$ 表示函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(-,\mathcal{C})$的右导出函子。令 $R_{\mathcal{B}}$ 为 $\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0$-双模 $\mathcal{B}$的任意半自由分解，按定义有 $\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(R_{\mathcal{B}},\mathcal{C})$，其在拟同构意义下是良定义的。给定一个微分分次代数 $\mathcal{A}$，其逆对偶化双模记为 $\mathcal{A}^!$，定义为 $\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\mathcal{A},\mathcal{A}\otimes\mathcal{A})$。$\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\mathcal{A},\mathcal{A}\otimes\mathcal{A})$ 中的元素是从对角双模 $\mathcal{A}$到 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ 的双模态射，其中 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ 赋有内双模结构。于是，$\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\mathcal{A},\mathcal{A}\otimes\mathcal{A})$是一个 DG $\mathcal{A}$-双模，其双模结构由 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$上的外双模结构诱导，

即对于 $\phi \in \mathrm{RHom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}\otimes\mathcal{A})$，可将其写作 $\phi = \phi_l \otimes \phi_r$；对于任意 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{w} \in \mathcal{A}$，有

$$(\boldsymbol{v}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{w})(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{v}\phi_l(\boldsymbol{a})\otimes\phi_r(\boldsymbol{a})\boldsymbol{w}$$

Note 如果 ϕ: $\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 双模之间在导出意义下的 DG-态射，那么存在一个 induced morphism $\phi^!$: $\mathcal{C}^!\to\mathcal{B}^!$ given by $\phi^!(c^!) = c^!\circ\phi$.

注 2.1。为计算 $\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(\mathcal{B},\ \mathcal{C})$，上述提到的半自由分解可以取为 $\mathcal{B}$ 的条分解；不过它不是有限秩的。本文将关注闭勒让德子流形的 Chekanov-Eliashberg 微分分次代数的逆对偶化双模 $\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\mathcal{A},\ \mathcal{A}\otimes\mathcal{A})$（见第 4 节）。在这种情况下，对角双模 $\mathcal{A}$ 存在有限秩半自由分解，见第 6.4 节。

本文旨在证明，在某些假设下，勒让德球面的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数是一个卡拉比–丘微分分次代数。下面回顾所需的定义。

定义 2.1。 [KS09] 设 $(\mathcal{A},\ \partial_{\mathcal{A}})$ 是一个微分分次代数。

(1) 一个DG $\mathcal{A}$-双模如果与有限维半自由DG双模的直和项准同构，则称为完美。(2) 如果微分分次代数 $\mathcal{A}$ 作为DG $\mathcal{A}$-双模是完美的，则称其同调光滑。

定义 2.2。 [Gin] A 同调光滑微分分次代数 $\mathcal{A}$ 称为 $d\text{-}Calabi\text{-}Yau$，如果存在一个微分分次 $\mathcal{A}$-双模的拟同构

$$\phi : \mathcal{A}\to\mathcal{A}^![-d]$$

使得 $\phi \simeq \phi^![-d]$。

记号 2.1。本文采用如下移位约定：若 $|a|$ 是 DG-双模 $\mathcal{B}$中某个元素的次数，则将同一元素视为 $\mathcal{B}[d]$ 中的元素时，其次数为 $|a|+d$。于是，对于 DG-双模态射 f: $\mathcal{B}\to\mathcal{C}$，我们将移位映射记为 $f[d]$: $\mathcal{B}[d]\to\mathcal{C}[d]$。

3. Moduli spaces

我们将在与 [Leg] 相同的背景下进行讨论，并参阅所提及论文的第2.2–2.6节及其中的参考文献，以获取有关我们在此考察的伪全纯圆盘的模空间的更多细节。在本文中，每当我们考察一个Y 勒让德子流形时，我们总是假设它是闭的且非退化的，即它只具有有限个Reeb弦，这些 Reeb 弦彼此孤立，并对应于其拉格朗日投影在 P 上的横截交点。

设 $\Lambda\subset Y$ 为一个勒让德子流形，并将 $\mathcal{R}(\Lambda)$ 记为 Λ的Reeb 弦集合。对于任意弦$\gamma\in\mathcal{R}(\Lambda)$，我们将 $\mathrm{CZ}(\gamma)$ 记为其Conley-Zehnder 指数，参见 [EES05]。

注 3.1. 如果 Λ 不连通，则还需作出其他选择（例如，在各个连通分量之间选取路径），以便定义连接两个不同连通分量的 Reeb 弦的 Conley-Zehnder 指数，参见 [DR16a]。弦的指数取决于这些额外选择，但对于从一个连通分量到另一个连通分量的任意两条弦，其指数之差与这些选择无关。此外，本文假设所考虑的勒让德子流形的 Maslov 数始终为 0，且 P 的第一陈类消失。在这种情况下，我们得到一个定义良好的 $\mathbb{Z}$-值 Conley-Zehnder 指数（在作出上文讨论的可能需要的额外选择之后）。

设 J_P 是 $(P,\ \beta)$ 上的几乎复结构，与 $d\beta$ 相容，并且在 P 的柱状端部的一个紧集之外是柱状的。我们称这种结构为 容许的。接着，我们将 J 记作 $(\mathbb{R}\times Y,\ d(e^t\alpha))$ 上的几乎复结构，它是.....的柱状提升。

J_P，即 J 在 $\mathbb{R}\times Y$ 上的唯一柱状几乎复结构，使得投影π_P：$\mathbb{R}\times P\times\mathbb{R}\to P$为 $(J,\ J_P)$-全纯。

给定 $\gamma,\gamma_1,\dots,\gamma_d$ 的 Reeb 弦，我们记

$$\widehat{\mathcal{M}}_\Lambda(\gamma;\gamma_1,\dots,\gamma_d)$$

以 J 为全纯圆盘的模空间，其边界位于 $\mathbb{R}\times\Lambda$ 上，在 γ 处具有正渐近条件，在 $\gamma_1,\dots,\gamma_d$ 处具有负渐近条件。由于这些圆盘的边界条件是柱状的，且几乎复结构也是如此，因此平移 $\mathbb{R}$ 作用于这些模空间。我们记

$$\mathcal{M}_\Lambda(\gamma;\gamma_1,\dots,\gamma_d)=:\widehat{\mathcal{M}}_\Lambda(\gamma;\gamma_1,\dots,\gamma_d)/\mathbb{R}$$

为该作用下的商空间。

设 $\Lambda_0,\dots,\Lambda_d\subset Y$ 是 $d+1$ 个勒让德子流形，且链环 $\Lambda_0\cup\cdots\cup\Lambda_d$ 是非退化的。对于任意 $0\leqslant i\neq j\leqslant d$，我们记 $\mathcal{R}(\Lambda_i,\Lambda_j)$ 为从 Λ_j 到 Λ_i 的 Reeb 弦集合。这类弦称为混合 弦，而 $\mathcal{R}(\Lambda_i)$ 中的弦称为纯弦。设 $\gamma_{0d}\in\mathcal{R}(\Lambda_0,\Lambda_d)$,$(\gamma_1,\dots,\gamma_d)$ 是一个 d 元组的 Reeb 弦，满足 $\gamma_i\in\mathcal{R}(\Lambda_{i-1},\Lambda_i)\cup\mathcal{R}(\Lambda_i,\Lambda_{i-1})$，并且 $\boldsymbol{\delta}_i$ 是 $0\leqslant i\leqslant d$ 的 Reeb 弦词。我们记

$$\mathcal{M}_{\Lambda_{0\dots d}}(\gamma_{0d};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_1,\boldsymbol{\delta}_1,\dots,\gamma_d,\boldsymbol{\delta}_d)$$

由 $\mathbb{R}$ 的作用取商，得到满足以下条件的伪全纯圆盘模空间：

- 圆盘的边界落在按顺序排列的 $(d+1)$ 元拉格朗日子流形组 $\mathbb{R}\times\Lambda_0,\dots,\mathbb{R}\times\Lambda_d$上；沿边界逆时针行进时，• 此模空间中的圆盘以 Reeb 弦 γ_{0d} 为正渐近条件，以 Reeb 弦 γ_i 为正或负渐近条件，并以 Reeb 弦词 $\boldsymbol{\delta}_i$ 为负渐近条件

类似地，对于弦 $\gamma_{d0}\in\mathcal{R}(\Lambda_d,\Lambda_0)$ 以及上述其他弦，我们记

$$\mathcal{M}_{\Lambda_{0\dots d}}(\gamma_{d0};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_1,\boldsymbol{\delta}_1,\dots,\gamma_d,\boldsymbol{\delta}_d)$$

由 $\mathbb{R}$ 的作用取商，得到伪全纯圆盘模空间；其边界条件与上述相同，以 Reeb 弦 γ_{d0} 为负渐近条件，并且其他 punctures 的渐近条件也与上述相同。

注 3.2. 在我们采用的记号中，第一个渐近条件 γ、 γ_{0d} 或 γ_{d0} 总是由相应模空间中刚性圆盘的计数所定义的映射的输出。当伪全纯圆盘的拉格朗日边界条件是按顺序排列的 $(d+1)$ 元组 $(\mathbb{R}\times\Lambda_0,\dots,\mathbb{R}\times\Lambda_d)$ 时，只需知道第一个渐近条件是正渐近还是负渐近，便可根据其他混合渐近条件的方向确定它们是正渐近还是负渐近。更准确地说，若弦 γ_i 属于 $\mathcal{R}(\Lambda_i,\Lambda_{i-1})$，它总是正渐近条件；而若它属于 $\mathcal{R}(\Lambda_{i-1},\Lambda_i)$，则总是负渐近条件。

根据 [DR16a], ，如果几乎复结构 J 是定义在 P 上的某个可容许几乎复结构的柱状提升，且该结构是正则的（也就是说，对于上述任意一个模空间中的任意伪全纯圆盘 u，伪全纯圆盘 $\pi_P\circ u$ 都横截切出），那么 J 也是正则的，即我们所描述的模空间都是横截切出的。 [EES 05]中给出了 $\pi_P(\Lambda)$ 边界上的 P 中的伪全纯圆盘模空间所需的横截性结果。横截性成立时，这些模空间因此是光滑流形，而且还可以按照 Gromov 的意义进行紧化。

模空间的维数可以用其渐近行为的 Conley-Zehnder 指数表示。对于仅有纯渐近条件的模空间，我们有

$$\dim \mathcal{M}_\Lambda(\gamma;\gamma_1,\dots,\gamma_d) = (\mathrm{CZ}(\gamma)-1) - \sum_{i=1}^{d}\big(\mathrm{CZ}(\gamma_i)-1\big) - 1$$

于是，对于纯Reeb弦组成的词 $\boldsymbol{\delta} = \delta_1 \dots \delta_k$，记其长度为 $\ell(\boldsymbol{\delta}) = k$，并记$_kCZ(\boldsymbol{\delta}) := \sum$CZ$(\delta_i)$。此外，记 j^+ 中正混合 Reeb 弦$_{i=1}$渐近条件的数量为 $\{\gamma_1,\dots,\gamma_d\}$。我们有：

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{M}_{\Lambda_{0\dots d}}(\gamma_{0d};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_1,\boldsymbol{\delta}_1,\dots,\gamma_d,\boldsymbol{\delta}_d) = (\mathrm{CZ}(\gamma_{0d})-1) &+ \sum_{\gamma_i\in\mathcal{R}(\Lambda_i,\Lambda_{i-1})}\big(\mathrm{CZ}(\gamma_i)-1\big)\\ &- \sum_{\gamma_i\in\mathcal{R}(\Lambda_{i-1},\Lambda_i)}\big(\mathrm{CZ}(\gamma_i)-1\big) - \sum\big(\mathrm{CZ}(\boldsymbol{\delta}_i)-\ell(\boldsymbol{\delta}_i)\big) + (2-n)j^+ - 1\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{M}_{\Lambda_{0\dots d}}(\gamma_{d0};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_1,\boldsymbol{\delta}_1,\dots,\gamma_d,\boldsymbol{\delta}_d) = -\big(\mathrm{CZ}(\gamma_{d0})-1\big) &+ \sum_{\gamma_i\in\mathcal{R}(\Lambda_i,\Lambda_{i-1})}\big(\mathrm{CZ}(\gamma_i)-1\big)\\ &- \sum_{\gamma_i\in\mathcal{R}(\Lambda_{i-1},\Lambda_i)}\big(\mathrm{CZ}(\gamma_i)-1\big) - \sum\big(\mathrm{CZ}(\boldsymbol{\delta}_i)-\ell(\boldsymbol{\delta}_i)\big) + (2-n)(j^+-1) - 1\end{aligned}$$

关于这些维数的计算，参见 [CDRGGa，第 4 节3] 。下文中，我们添加上标来表示模空间的维数，即 $\mathcal{M}^i_\Lambda(\gamma;\ \gamma_1,\dots,\gamma_d)$ 表示一个 i 维模空间。我们将 0 维模空间中的伪全纯圆盘称为刚性的 。

我们将 Reeb 弦 γ_{ij} 的作用 $\mathfrak{a}(\gamma_{ij})$ 定义为：当 $i>j$ 时为 $\mathfrak{a}(\gamma_{ij}) = \int_{\gamma_{ij}}\alpha$，当 $i\leqslant j$ 时为 $\mathfrak{a}(\gamma_{ij}) = -\int_{\gamma_{ij}}\alpha$。根据上述所定义模空间中伪全纯圆盘的能量正性，我们有如下结论：如果模空间 $\mathcal{M}_\Lambda(\gamma;\ \gamma_1,\dots,\gamma_d)$ 非空，则渐近条件的作用满足

$$-\mathfrak{a}(\gamma) + \sum_{i=1}^{d}\mathfrak{a}(\gamma_i) \geqslant 0$$

如果 $\mathcal{M}_{\Lambda_{0\dots d}}(\gamma_{0d};\ \boldsymbol{\delta}_0,\ \gamma_1,\ \boldsymbol{\delta}_1,\ \dots,\ \gamma_d,\ \boldsymbol{\delta}_d)$ 非空，则有：

$$-\mathfrak{a}(\gamma_{0d}) + \sum_{\gamma_i\in\mathcal{R}(\Lambda_{i-1},\Lambda_i)}\mathfrak{a}(\gamma_i) + \sum_{\gamma_i\in\mathcal{R}(\Lambda_i,\Lambda_{i-1})}\mathfrak{a}(\gamma_i) + \sum_{j=0}^{d}\mathfrak{a}(\boldsymbol{\delta}_j) \geqslant 0$$

最后，如果 $\mathcal{M}_{\Lambda_{0\dots d}}(\gamma_{d0};\ \boldsymbol{\delta}_0,\gamma_1,\boldsymbol{\delta}_1,\dots,\gamma_d,\boldsymbol{\delta}_d)$ 非空，则有：

$$-\mathfrak{a}(\gamma_{d0}) + \sum_{\gamma_i\in\mathcal{R}(\Lambda_{i-1},\Lambda_i)}\mathfrak{a}(\gamma_i) + \sum_{\gamma_i\in\mathcal{R}(\Lambda_i,\Lambda_{i-1})}\mathfrak{a}(\gamma_i) + \sum_{j=0}^{d}\mathfrak{a}(\boldsymbol{\delta}_j) \geqslant 0$$

特别地，我们在此选取的作用量定义意味着，稍后我们将通过对上述模空间中的伪全纯圆盘进行计数而定义的映射将会降低作用量。

4. The Chekanov-Eliashberg DGA

本节简要回顾勒让德子流形的切卡诺夫–埃利亚什贝格代数（C-E代数）的定义，该代数最初定义于 [Che02, Eli98]，详情请参见 [Che02, EES05, EES07]。令 $\Lambda \subset Y$ 为一个勒让德子流形，并将由 Λ 的 Reeb 弦生成的 $\mathbb{Z}_2$-模记为 $C(\Lambda)$。Λ 的切卡诺夫–埃利亚什贝格微分分次代数记为 $\mathcal{A}(\Lambda)$，是 $C(\Lambda)$ 在 $\mathbb{Z}_2$ 上的张量代数：

$$\mathcal{A}(\Lambda) = \bigoplus_{i\geqslant 0} C(\Lambda)^{\otimes i}$$

其中 $C(\Lambda)^{\otimes 0} = \mathbb{Z}_2$。Reeb 弦 $\gamma \in \mathcal{R}(\Lambda)$ 的分次由 $|\gamma|_{\mathcal{A}} = 1 - \mathsf{CZ}(\gamma)$ 给出，并将其扩展到整个代数 $\mathcal{A}(\Lambda)$，方式为 $|\gamma_1 \dots \gamma_d|_{\mathcal{A}} = |\gamma_1|_{\mathcal{A}} + \dots + |\gamma_d|_{\mathcal{A}}$。

注4.1。注意，本文对C-E 代数采用了一种略显非传统的分次方式。这样选择是为了使微分成为一个次数为 1 的映射，而不是一个次数为 -1 的映射。

微分 $\partial_{\mathcal{A}}$ 在 $\mathcal{A}$ 上的作用在 Reeb 弦上定义为

$$\partial_{\mathcal{A}}(\gamma) = \sum_{d\geqslant 0} \sum_{\gamma_1,\dots,\gamma_d} \#\mathcal{M}^0_\Lambda(\gamma;\gamma_1,\dots,\gamma_d)\cdot \gamma_1 \dots \gamma_d$$

并依据莱布尼茨法则延拓到整个代数 $\mathcal{A}$，即 $\partial_{\mathcal{A}}(\gamma_1\gamma_2) = \partial_{\mathcal{A}}(\gamma_1)\gamma_2 + \gamma_1\partial_{\mathcal{A}}(\gamma_2)$。

注 4.2. 在勒让德子流形的 C-E 代数的原始定义中，微分是通过对边界位于投影 $\pi_P(\Lambda)$ 上的伪全纯圆盘进行计数来定义的，其中$\pi_P\colon\ \mathbb{R}\times P \to P$。Dimitroglou-Rizell 在 [DR16a] 中证明，微分也可以等价地通过对边界位于 $\mathbb{R}\times\Lambda \subset \mathbb{R}\times Y$ 上的伪全纯圆盘进行计数来定义。本文采用后一种观点。

定理 4.1. [Che02, EES05, EES07] 映射 $\partial_{\mathcal{A}}$ 是一个次数为 1 的映射，并满足 $\partial^2_{\mathcal{A}} = 0$。

复形 $(\mathcal{A}(\Lambda), \partial_{\mathcal{A}})$ 的同调称为 Λ的勒让德接触同调 。

5. The Rabinowitz DG-bimodule

设 $\Lambda_0, \Lambda_1 \subset Y$是勒让德子流形，$\mathcal{A}(\Lambda_0)$、$\mathcal{A}(\Lambda_1)$ 表示它们的 C-E 微分分次代数。记 $C(\Lambda_0,\Lambda_1)$ 为由 $\mathcal{R}(\Lambda_0,\Lambda_1)$中的弦生成的分次 $\mathbb{Z}_2$-模，其分次由 Conley-Zehnder 指数给出。进一步记 $C_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(\Lambda_0,\Lambda_1)$ 为由 $\mathcal{R}(\Lambda_0,\Lambda_1)$中的弦生成的 $\mathcal{A}(\Lambda_1)-\mathcal{A}(\Lambda_0)$-双模，即 $C_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(\Lambda_0,\Lambda_1)$ 的元素是形如 $\boldsymbol{v}_1\gamma_{01}\boldsymbol{v}_0$ 的词的线性组合，其中 $\boldsymbol{v}_i$ 是 Λ_i 的 Reeb 弦词，适用于 $i=0,1$ 和 $\gamma_{01}\in\mathcal{R}(\Lambda_0,\Lambda_1)$。$\boldsymbol{v}_1\gamma_{01}\boldsymbol{v}_0$ 的次数由 $\mathsf{CZ}(\gamma_{01}) + |\boldsymbol{v}_0|_{\mathcal{A}_0} + |\boldsymbol{v}_1|_{\mathcal{A}_1}$给出。类似地，记 $C_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(\Lambda_1,\Lambda_0)$为由 $\mathcal{R}(\Lambda_1,\Lambda_0)$中的弦生成的 $\mathcal{A}(\Lambda_1)-\mathcal{A}(\Lambda_0)$-双模。

Rabinowitz DG-双模$\mathrm{RFC}_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$是一个DG $\mathcal{A}(\Lambda_1)-\mathcal{A}(\Lambda_0)$-双模，其定义如下。底层分次双模包含两种不同类型的生成元：

$$\mathrm{RFC}_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(\Lambda_0,\Lambda_1) = C_+(\Lambda_0,\Lambda_1)\oplus C_-(\Lambda_0,\Lambda_1)$$

其中

- $C_+(\Lambda_0,\Lambda_1)$是 $\mathcal{A}(\Lambda_1)-\mathcal{A}(\Lambda_0)$-双模，其元素与 $C_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(\Lambda_1,\Lambda_0)$中的元素相同，但混合弦 γ_{10} 的分次经过修改：取其相反数并加上 n，即$|\gamma_{10}|_{\mathrm{RFC}(\Lambda_0,\Lambda_1)} = n - \mathsf{CZ}(\gamma_{10})$.• $C_-(\Lambda_0,\Lambda_1) = C_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(\Lambda_0,\Lambda_1)$。

$\mathrm{RFC}_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$ 上的微分由一个下三角 2×2-矩阵给出

$$\mathfrak{m}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{\Delta}_1^{++} & 0 \\ \mathbf{b}_1^{-+} & \mathbf{b}_1^{--} \end{pmatrix}$$

对于该对象，我们描述$\mathrm{RFC}_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(\Lambda_0,\Lambda_1)$在生成元上的分量。映射 $\boldsymbol{\Delta}_1^{++}$:$C_+(\Lambda_0,\Lambda_1)\to C_+(\Lambda_0,\Lambda_1)$ 在生成元上的定义由 $\Lambda_0\cup\Lambda_1$ 的勒让德接触同调微分限制在从 Λ_0 到 Λ_1 的混合弦上给出，即对于弦 $\gamma_{10}\in\mathcal{R}(\Lambda_1,\Lambda_0)$，有:

$$\boldsymbol{\Delta}_1^{++}(\gamma_{10})=\sum_{\beta_{10},\boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_1}\#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{01}}(\beta_{10};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{10},\boldsymbol{\delta}_1)\cdot\boldsymbol{\delta}_1\,\beta_{10}\,\boldsymbol{\delta}_0$$

其中，求和遍历所有混合弦 $\beta_{01}\in\mathcal{R}(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$ 以及由纯Reeb弦 $\boldsymbol{\delta}_i$ ofΛ_i 构成的所有词，其中 $i=0,1$。然后，我们将其扩展到双模元素 $\boldsymbol{v}_1\gamma_{10}\boldsymbol{v}_0$：

$$\boldsymbol{\Delta}_1^{++}(\boldsymbol{v}_1\gamma_{10}\boldsymbol{v}_0)=\partial_{\mathcal{A}(\Lambda_1)}(\boldsymbol{v}_1)\gamma_{10}\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{\Delta}_1^{++}(\gamma_{10})\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_1\gamma_{10}\partial_{\mathcal{A}(\Lambda_0)}(\boldsymbol{v}_0)$$

然后利用线性性扩展。分量 $\mathbf{b}_1^{--}$: $C_-(\Lambda_0,\ \Lambda_1)\to C_-(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$ 由 Legendrian 接触上同调微分中从 Λ_1 到 Λ_0 的混合弦限制给出:

$$\mathbf{b}_1^{--}(\gamma_{01})=\sum_{\beta_{01},\boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_1}\#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{01}}(\beta_{01};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{01},\boldsymbol{\delta}_1)\cdot\boldsymbol{\delta}_1\,\beta_{01}\,\boldsymbol{\delta}_0$$

我们将其扩展到双模元素 $\boldsymbol{v}_1\gamma_{01}\boldsymbol{v}_0$：

$$\mathbf{b}_1^{--}(\boldsymbol{v}_1\gamma_{01}\boldsymbol{v}_0)=\partial_{\mathcal{A}(\Lambda_1)}(\boldsymbol{v}_1)\gamma_{01}\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_1\,\mathbf{b}_1^{--}(\gamma_{01})\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_1\gamma_{01}\partial_{\mathcal{A}(\Lambda_0)}(\boldsymbol{v}_0)$$

最后，分量 $\mathbf{b}_1^{-+}$: $C_+(\Lambda_0,\ \Lambda_1)\to C_-(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$ 是定义在生成元上的香蕉映射：

$$\mathbf{b}_1^{-+}(\gamma_{10})=\sum_{\beta_{01},\boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_1}\#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{01}}(\beta_{01};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{10},\boldsymbol{\delta}_1)\cdot\boldsymbol{\delta}_1\,\beta_{01}\,\boldsymbol{\delta}_0$$

然后我们将其扩展到双模元素 $\boldsymbol{v}_1\gamma_{10}\boldsymbol{v}_0$：

$$\mathbf{b}_1^{-+}(\boldsymbol{v}_1\gamma_{10}\boldsymbol{v}_0)=\boldsymbol{v}_1\,\mathbf{b}_1^{-+}(\gamma_{10})\boldsymbol{v}_0$$

命题 5.1。我们有:

(1) $\mathfrak{m}_1$ *is a degree* 1 *map, and*
(2) $\mathrm{RFC}_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(\Lambda_0,\Lambda_1)$ *is a DG* $\mathcal{A}(\Lambda_1)-\mathcal{A}(\Lambda_0)$*-bimodule; i.e.* $\mathfrak{m}_1^2=0$.

证明。(1)由模空间的维数公式得到，见第 3 节。(2)通过考察以下类型的 1 维模空间边界上出现的伪全纯楼的代数贡献得到:

- $\mathcal{M}^1_{\Lambda_{01}}(\beta_{10};\boldsymbol{\delta}_0,\ \gamma_{10},\ \boldsymbol{\delta}_1)$: 条带在 γ_{10} 处具有正渐近条件，在 β_{10} 处具有负渐近条件，并在词 $\boldsymbol{\delta}_0$ 和 $\boldsymbol{\delta}_1$ 处具有负纯渐近条件；
- $\mathcal{M}^1_{\Lambda_{01}}(\beta_{01};\boldsymbol{\delta}_0,\ \gamma_{01},\ \boldsymbol{\delta}_1)$: 条带在 β_{10} 处具有正渐近条件，在 γ_{10}、
- $\mathcal{M}^1_{\Lambda_{01}}(\beta_{01}$ 处具有负渐近条件；$\boldsymbol{\delta}_0,\ \gamma_{10},\ \boldsymbol{\delta}_1)$: 香蕉在 β_{10} 和 γ_{10} 处具有正渐近条件。

□

等价地，我们有 $(C_+(\Lambda_0,\ \Lambda_1),\ \boldsymbol{\Delta}_1^{++})$ 和 $(C_-(\Lambda_0,\ \Lambda_1),\ \mathbf{b}_1^{--})$ 是 DG $\mathcal{A}(\Lambda_1)$-$\mathcal{A}(\Lambda_0)$-双模，而 $\mathrm{RFC}_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$ 是 DG-双模映射 $\mathbf{b}_1^{-+}$: $C_+(\Lambda_0,\ \Lambda_1)[1]\to C_-(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$ 的锥。

记号 5.1。我们省略表示微分各分量输出和输入的指数“++”、“−+”和“−−”，并记 $\boldsymbol{\Delta}_1:=\boldsymbol{\Delta}_1^{++}$ 和 $\mathbf{b}_1:=\mathbf{b}_1^{-+}+\mathbf{b}_1^{--}$。必要时，我们将明确说明是否考虑映射 $\mathbf{b}_1$的某个限制。

注 5.1。 如果 C-E 微分分次代数 $\mathcal{A}(\Lambda_0)$ 和 $\mathcal{A}(\Lambda_1)$ 分别在 $\mathbb{Z}_2$上承认增广（见 [Che02]） ε_0和 ε_1，我们可以利用它们将双模系数转换为$\mathbb{Z}_2$ 中的元素，从而得到一个 $\mathbb{Z}_2$-模 RFC(Λ_0， Λ_1)。在拉格朗日协边对为两个平凡圆柱的情形下，这个模对应于[Leg] 中定义的模。此外，如果 Λ_1 是 Λ_0的一个副本，则该复形同[EES09]中描述的二重副本复形同构。

现在我们回顾 Rabinowitz 复形成为无圈复形的一个充分条件。

定义 5.1。 </style} (Λ_0与 Λ_1) 中的一对勒让德子流形 $Y = P \times \mathbb{R}$ 称为水平可位移</style，若存在 P的哈密顿各向同性 φ_t 使得 $\Pi_P(\Lambda_0) \cap \varphi_1(\Pi_P(\Lambda_1)) = \varnothing$，其中$\Pi_P : Y \to P$ 是投影。

定理 5.1([勒让德子流形])。 若 (Λ_0, Λ_1) 是水平可位移的，则$\mathrm{RFC}_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 是无圈的。

注 5.2。 在 [勒让德子流形], 定理 5.1 中，证明针对的是 $\mathbb{Z}_2$-模 RFC(Λ_0, Λ_1) ，但该证明可直接推广到双模情形。

假设 Λ_1 是由一个小的负 Morse 函数对 Λ_0 作出的扰动，见下文第 6.1 节。若扰动足够小，则根据 C-E 代数 [EES07] 的不变性（以及 $\mathbb{R} \times Y$上的几乎复结构是 P上的某个可容许几乎复结构的柱状提升这一事实，见 [DR16a]），微分分次代数 $\mathcal{A}(\Lambda_0)$ 与 $\mathcal{A}(\Lambda_1)$ 在如下意义下典范同构： Λ_0 的 Reeb 弦与 Λ_1 的 Reeb 弦之间存在典范对应，且在此对应下微分一致。在这种情况下，我们将带有 $\mathcal{A} := \mathcal{A}(\Lambda_0) = \mathcal{A}(\Lambda_1)$的 Rabinowitz 双模 $(\mathrm{RFC}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\Lambda_0, \Lambda_1), \mathfrak{m}_1)$ 记作。它是一个 DG $\mathcal{A}$-双模。

6. The Calabi-Yau structure

本节的目标是证明以下定理:

定理 6.1. 可水平位移的勒让德球面 $\Lambda \subset Y$ 的 *C-E* 代数 $\mathcal{A}(\Lambda)$ 是一个 $(n+1)$-卡拉比–丘微分分次代数。

为证明该定理，我们要找到一个拟同构 $\mathcal{A} \to$ 导出$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}\otimes\mathcal{A})\widehat{\quad}\check{\quad}$，它是 DG $\mathcal{A}$-双模之间的拟同构。我们将首先描述 DG-双模 $C_+(\Lambda_0, \Lambda_1)$和 $C_-(\Lambda_0, \Lambda_1)$，它们分别是 RFC $_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 的商双模和子双模，其中 $\mathrm{RFC}_{\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_0}(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 对应于 Λ 的一个二重副本 $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$。随后，我们证明这些双模分别与 $\mathcal{A}$ 和导出$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}\otimes\mathcal{A})$ 拟同构（相差某些次数平移）。最后，我们定义一个 DG-双模态射 CY :$\frown\quad\smile C_+(\Lambda_0, \Lambda_1) \to C_-(\Lambda_0, \Lambda_1)$，并证明该态射的锥与 DG-双模 $\mathrm{RFC}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 拟同构。由 $\mathrm{RFC}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 的无环性可知，CY 是一个拟同构，因此我们得到所需的拟同构 $\mathcal{A} \to$ 导出$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$。

6.1. **二重副本** $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$。在本第 6 节中，我们都假设 $\Lambda \subset Y$ 是一个 n 维勒让德球面。设 f: $\Lambda \to \mathbb{R}$ 是一个 $\mathcal{C}^1$-小的负 Morse 函数，恰有一个最大值和一个最小值点，并且 f 的范数远小于 Λ 最短 Reeb 弦的长度。令 Λ_1 表示 f 在 Λ 的标准邻域中的一阶喷射（将其识别为 $J^1(\Lambda)$ 中零截面的一个邻域），并记 $\Lambda_0 := \Lambda$。于是，我们称 $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ 为 Λ 的二重副本。

每个 Reeb弦 γ的 Λ 都会产生两个 $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$的混合 Reeb弦： $\gamma_{01} \in \mathcal{R}(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 和$\gamma_{10} \in \mathcal{R}(\Lambda_1, \Lambda_0)$。定义混合弦的 Conley-Zehnder 指数时，封帽路径的选择方式使得 $\mathrm{CZ}(\gamma_0) = \mathrm{CZ}(\gamma_{01}) = \mathrm{CZ}(\gamma_{10})$。勒让德子流形 $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$还拥有两个从 Λ_1 到 Λ_0 的额外混合 Reeb 弦，它们对应于 f的临界点，并称为 *Morse* 弦。我们将 y_{01} 对应于 f 的最大值的 Reeb 弦记为 x_{01}，将对应于最小值点的记为 x_{01}。注意，由于函数 $\ell(y_{01}) < \ell(x_{01})$

f 为负，因此我们将 y_{01} 称为最小*Morse Reeb*弦，并将 x_{01} 称为最大*MorseReeb*弦。注意，$\mathbf{CZ}(y_{01}) = 0$，而$\mathbf{CZ}(x_{01}) = n$。最后，我们记 $C^l_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\Lambda_0, \Lambda_1)$由从 Λ_1 到 Λ_0的长弦 生成的 $\mathcal{A}(\Lambda_1) - \mathcal{A}(\Lambda_0)$-双模（简写为 $\mathcal{A}$-双模，因为代数 $\mathcal{A}(\Lambda_0)$ 和 $\mathcal{A}(\Lambda_1)$ 已被规范地识别），即从 Λ_1 到 Λ_0 的不是 Morse 弦的弦。

6.2. **双模** $\widehat{C}_+(\Lambda_0、\Lambda_1)$ **和** $\check{C}_-(\Lambda_0、\Lambda_1)$。DG $\mathcal{A}$-双模 $(\widehat{C}_+(\Lambda_0、\Lambda_1)、\widehat{\mathfrak{m}}_1)$ 定义如下。其底层分次双模由Rabinowitz双模的正作用生成元和最大值 Morse 弦生成：

$$\widehat{C}_+(\Lambda_0, \Lambda_1) = C_+(\Lambda_0, \Lambda_1)[1] \oplus \langle x_{01} \rangle_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}[1]$$

其中 $\langle x_{01} \rangle_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}$ 表示由 x_{01} 生成的 $C_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\Lambda_0、\Lambda_1)$ 的 $\mathcal{A}$-子双模。因此，$\langle x_{01} \rangle_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}[1]$ 中的弦x_{01} 的次数为 $n + 1 = \mathbf{CZ}(x_{01}) + 1$。微分 $\widehat{\mathfrak{m}}_1$ 在生成元上的定义为

$$\begin{aligned}\widehat{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{10}) &= \mathbf{\Delta}_1(\gamma_{10}) + \gamma_1 x_{01} + x_{01}\gamma_0\\ \widehat{\mathfrak{m}}_1(x_{01}) &= 0\end{aligned}$$

其中，γ_i 表示对应于 γ_{10}的 Λ_i 的纯弦。

命题6.1。 该双模 $(\widehat{C}_+(\Lambda_0, \Lambda_1), \widehat{\mathfrak{m}}_1)$ 是一个半自由*DG*双模。

我们在此陈述一个引理，将在多个证明中反复使用。

引理6.1。 [EES09] 对于 Λ_0 的2-副本 $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$，我们有：

(1) 对于每个 ***Reeb*** 弦 $\gamma_{01} \in C^l(\Lambda_0, \Lambda_1)$，恰好存在两个刚性伪全纯条带，它们在 γ_{01} 处具有正渐近条件，并在最小 ***Reeb*** 弦y_{01}处具有负渐近条件。此外，这两个条带各自恰好有一个纯负弦渐近条件：一个条带对应的弦为 γ_0，另一个对应的弦为 γ_1（其中 γ_i 表示对应于 γ_{01} 的 Λ_i 的纯*Reeb*弦）。(2) 对于每个 ***Reeb*** 弦 $\gamma_{10} \in \mathcal{R}(\Lambda_1, \Lambda_0)$，恰好存在两个边界位于 $\mathbb{R} \times (\Lambda_0 \cup \Lambda_1)$ 上的刚性伪全纯圆盘，它们是香蕉，在γ_{10} 处和最大 ***Reeb*** 弦 x_{01}处具有正渐近行为。此外，这两个香蕉各自恰好有一个纯负弦渐近条件：一个香蕉对应的弦为 γ_0，另一个对应的弦为 γ_1。(3) 边界位于 $\mathbb{R}\times(\Lambda_0\cup\Lambda_1)$ 上、在最大值 x_{01} 处有一个正 ***puncture*** 且在弦 β_{01} 处有一个负 ***puncture*** 的刚性伪全纯条带的计数为零。

[{"id":0,"output":"证明。 根据 [EES09 定理 3.6]，，边界在 $\mathbb{R}\times(\Lambda_0\cup\Lambda_1)$上的刚性伪全纯条带，在 γ_{01} 处具有正渐近、在最小 Reeb 弦 y_{01} 处具有负渐近（该弦对应于函数 f的最大值），与刚性广义圆盘 相对应；这些广义圆盘由一个边界在 $\mathbb{R} \times \Lambda_0$ 上的伪全纯圆盘、在γ_0 处的正渐近，以及从最大临界点到圆盘边界上一点的 f 的负梯度流线组成。由刚性可知，该伪全纯圆盘必为常值条带 $\mathbb{R} \times \gamma_0$，随后流线有两种方式附着于其上（要么在 $\mathbb{R}\times${的 γ_0}起点处，要么在 $\mathbb{R} \times \{$ 的 γ_0}终点处），经过识别后得到（1）中的两个条带。"}]

对于（2），任何在 γ_{10} 处以及在最大 Reeb 弦 x_{01} 处具有正渐近行为的刚性香蕉，都对应于一个刚性广义圆盘。该广义圆盘由一个边界位于 $\mathbb{R} \times \Lambda_0$ 上、在 γ_0 处具有正渐近行为的伪全纯圆盘，以及一条从圆盘边界上的某点流向最小临界点的 f 负梯度流线组成（记住，x_{01} 对应于 f 的最小值点）。再次利用刚性可知，该圆盘必为常值圆盘；将流线附着于圆盘的两种可能方式在识别后，分别给出（2）中的两个香蕉。

对于（3），根据作用量的原因，弦 β_{01} 必须是 Morse 弦，并且条带没有负纯 Reeb 弦渐近行为。因此，[EES09 定理 3.6] 告诉我们，此类圆盘与从对应于 β_{01} 的临界点流向最小值点的 f 负梯度流线之间存在双射对应。但在我们的情形中，f 只有两个临界点，因此要么没有流线（当 $n \geqslant 2$ 时，因次数原因），要么恰有两条流线（从最大值流向最小值点）。□

命题 *6.1* 的证明。我们计算 $(\widehat{\mathfrak{m}}_1)^2(\gamma_{10}) = \widehat{\mathfrak{m}}_1\big(\boldsymbol{\Delta}_1(\gamma_{10})\big) + \partial_{\mathcal{A}}(\gamma_1)x_{01} + x_{01}\partial_{\mathcal{A}}(\gamma_0)$。对于出现在 $\boldsymbol{\Delta}_1(\gamma_{10})$ 中的任意项 $\boldsymbol{\delta}_1\,\beta_{10}\,\boldsymbol{\delta}_0$，有

$$\begin{aligned}\widehat{\mathfrak{m}}_1(\boldsymbol{\delta}_1\,\beta_{10}\,\boldsymbol{\delta}_0) &= \partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\delta}_1)\beta_{10}\,\boldsymbol{\delta}_0 + \boldsymbol{\delta}_1\,\big(\boldsymbol{\Delta}_1(\beta_{10}) + \beta_1 x_{01} + x_{01}\beta_0\big)\,\boldsymbol{\delta}_0 + \boldsymbol{\delta}_1\,\beta_{10}\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\delta}_0)\\ &= \partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\delta}_1)\beta_{10}\,\boldsymbol{\delta}_0 + \boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{\Delta}_1(\beta_{10})\,\boldsymbol{\delta}_0 + \boldsymbol{\delta}_1\,\beta_{10}\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\delta}_0) + \boldsymbol{\delta}_1(\beta_1 x_{01} + x_{01}\beta_0)\,\boldsymbol{\delta}_0\\ &= \boldsymbol{\Delta}_1(\boldsymbol{\delta}_1\,\beta_{10}\,\boldsymbol{\delta}_0) + \boldsymbol{\delta}_1(\beta_1 x_{01} + x_{01}\beta_0)\,\boldsymbol{\delta}_0\end{aligned}$$

因此，我们有

$$(\widehat{\mathfrak{m}}_1)^2(\gamma_{10}) = (\boldsymbol{\Delta}_1)^2(\gamma_{10}) + \partial_{\mathcal{A}}(\gamma_1)x_{01} + x_{01}\partial_{\mathcal{A}}(\gamma_0) + \sum_{\boldsymbol{\delta}_1\,\beta_{10}\,\boldsymbol{\delta}_0 \in \boldsymbol{\Delta}_1(\gamma_{10})} \boldsymbol{\delta}_1(\beta_1 x_{01} + x_{01}\beta_0)\,\boldsymbol{\delta}_0$$

我们知道 $(\boldsymbol{\Delta}_1)^2(\gamma_{10}) = 0$，接下来还需要理解为什么最后三项会消失。 h.

在将平移除去后，具有 γ_{10} 和 x_{01}处正渐近条件以及纯负 Reeb 弦渐近条件的香蕉的一维模空间的紧化边界，由通过一条 Reeb 弦连接的断裂圆盘组成，这些圆盘是二层楼。这条 Reeb 弦要么是混合弦，要么是纯弦。第一种情况下，根据引理 6.1 (3)，唯一（非消失的）可能性是：楼的上层是一个对$\boldsymbol{\Delta}_1(\gamma_{10})$ 有贡献的圆盘，在 γ_{10}处具有正渐近条件，在弦 β_{10} 处具有负渐近条件，并具有纯负 Reeb 弦渐近条件；下层则是一个刚性香蕉，在 β_{10} 和 x_{01}处具有正渐近条件。根据引理 6.1 (2)，这样的香蕉有两个，因此对于任意 $\boldsymbol{\delta}_1\,\beta_{10}\,\boldsymbol{\delta}_0 \in \boldsymbol{\Delta}_1(\gamma_{10})$，我们得到两个对 $\boldsymbol{\delta}_1(\beta_1 x_{01} + x_{01}\beta_0)\,\boldsymbol{\delta}_0$有贡献的楼。第二种情况下，楼的顶层是一个刚性香蕉，在 γ_{10} 和 x_{01}处具有正渐近条件。根据引理 6.1 (2)，连接用的纯 Reeb 弦要么是 γ_0，要么是 γ_1。因此，楼的下层是一个对 $\partial_{\mathcal{A}}(\gamma_i)$有贡献的圆盘，取决于哪一条纯弦充当连接用弦，$i = 0,1$。这意味着 $\partial_{\mathcal{A}}(\gamma_1)x_{01} + x_{01}\partial_{\mathcal{A}}(\gamma_0) = 0$。

ˆ $C_+(\Lambda_0,\Lambda_1)$ 的半自由性质可直接从弦上的作用量滤过推出。事实上，记 γ_{10}^j 为 $\widehat{C}_+(\Lambda_0,\Lambda_1)$ 的生成元，其中 $1 \leqslant j \leqslant k$ 是长弦。经过重新标记，存在实数 $\ell_0,\ell_1,\ldots,\ell_k$，使得

$$\mathfrak{a}(x_{01}) < \ell_0 < 0 < \mathfrak{a}(\gamma_{10}^1) < \ell_1 < \cdots < \ell_{k-1} < \mathfrak{a}(\gamma_{10}^k) < \ell_k$$

ˆ $\mathbb{Z}_2$向量空间 $F_jC_+ = \{\gamma \in C_+(\Lambda_0,\Lambda_1)[1] \oplus \langle x_{01}\rangle_{\mathbb{Z}_2}[1] : \mathfrak{a}(\gamma) < \ell_j\}$，其中 $0 \leqslant j \leqslant k$，给出了一个滤过

$$\mathcal{A}\otimes F_0\widehat{C}_+\otimes\mathcal{A} \subset \mathcal{A}\otimes F_1\widehat{C}_+\otimes\mathcal{A} \subset \cdots \subset \mathcal{A}\otimes F_k\widehat{C}_+\otimes\mathcal{A} = \widehat{C}_+(\Lambda_0,\Lambda_1)$$

ˆ由此可知，$C_+(\Lambda_0,\Lambda_1)$ 是半自由且有限秩的。 □

现在来描述 $\mathcal{A}$-双模 $(\check{C}_-(\Lambda_0,\Lambda_1),\check{\mathfrak{m}}_1)$。其底层分次双模为：

$$\check{C}_-(\Lambda_0,\Lambda_1) = C^l_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\Lambda_0,\Lambda_1) \oplus \langle y_{01}\rangle_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}$$

并且作为 $\mathcal{A}$-子双模 $C_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\Lambda_0,\Lambda_1)$ 其中的元素按Conley-Zehnder 指数分次。生成元上的微分 $\check{\mathfrak{m}}_1$ 由映射限制到 $\check{C}_-(\Lambda_0,\Lambda_1)$ 所得

$\mathbf{b}_1^{--}$，其定义见第 5 节。注意，根据引理 6.1 (1)，我们有

$$\check{\mathfrak{m}}_1(y_{01}) = \mathbf{b}_1^{--}(y_{01}) = \sum_{\gamma\in\mathcal{R}(\Lambda)} \gamma_1\gamma_{01} + \gamma_{01}\gamma_0$$

命题 6.2. 双模 $(\check{C}_-(\Lambda_0,\Lambda_1),\check{\mathfrak{m}}_1)$ 是半自由*DG*双模。

证明。 考虑具有生成元 $C_-(\Lambda_0、\ \Lambda_1)$ 处的正˘和负混合渐近条件的条带模空间紧化的边界。该边界由通过混合弦或纯弦连接的两层楼组成。如果连接的混合弦为 x_{01}，则根据引理 6.1 (3)，该楼要么不存在，要么成对出现，因此其贡献在代数上抵消。其他情形恰好是对 $(\check{\mathfrak{m}}_1)^2$ 有贡献的情形。

˘证明 $C_-(\Lambda_0,\Lambda_1)$ 是半自由的论证，与命题 6.1 的证明类似。□

6.3. **球面的 Rabinowitz 复形的另一种锥描述。** 我们将定义一个 DG 双模态映射

$$\mathrm{CY} : \widehat{C}_+(\Lambda_0,\Lambda_1) \to \check{C}_-(\Lambda_0,\Lambda_1) \tag{2}$$

并证明 CY 的锥与 DG-双模 $\mathrm{RFC}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\Lambda_0,\Lambda_1)$ 准同构。对于⌢γ_{10}, x_{01} 的生成元，我们设:

$$\mathrm{CY}(\gamma_{10}) = \sum_{\substack{\beta_{01}\in\mathcal{R}^l(\Lambda_0,\Lambda_1)\cup\{y_{01}\}\\ \boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_1}} \#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{01}}(\beta_{01};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{10},\boldsymbol{\delta}_1)\cdot\boldsymbol{\delta}_1\,\beta_{01}\,\boldsymbol{\delta}_0$$

$$\mathrm{CY}(x_{01}) = \sum_{\substack{\beta_{01}\in\mathcal{R}^l(\Lambda_0,\Lambda_1)\\ \boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_1}} \#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{01}}(\beta_{01};\boldsymbol{\delta}_0,x_{01},\boldsymbol{\delta}_1)\cdot\boldsymbol{\delta}_1\,\beta_{01}\,\boldsymbol{\delta}_0$$

见图 1。注意，在最后一个等式中，出于能量原因， β_{01} 不可能是最小 Morse 弦 y_{01}。还要注意，作为非分次映射，映射 CY 在⌢ ⌣$C_+(\Lambda_0,\Lambda_1)$ 的生成元上的作用，由映射 $\mathbf{b}_1$ 取值于 $C_-(\Lambda_0,\Lambda_1)$ 的分量给出。

引理 6.2。 映射 CY 是一个 *DG* 双模态映射。

证明。 我们先计算

$$\mathrm{CY}\circ\widehat{\mathfrak{m}}_1(x_{01}) + \check{\mathfrak{m}}_1\circ\mathrm{CY}(x_{01}) = \check{\mathfrak{m}}_1\circ\mathrm{CY}(x_{01}) = (\mathbf{b}_1^{--})^2(x_{01}) = 0$$

倒数第二个等式直接由定义得出。于是，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{CY}\circ\widehat{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{10}) + \check{\mathfrak{m}}_1\circ\mathrm{CY}(\gamma_{10}) &= \mathrm{CY}\left(\boldsymbol{\Delta}_1(\gamma_{10}) + \gamma_1 x_{01} + x_{01}\gamma_0\right) + \check{\mathfrak{m}}_1\big(\mathrm{CY}(\gamma_{10})\big)\\
&= \mathrm{CY}\left(\boldsymbol{\Delta}_1(\gamma_{10})\right) + \gamma_1\,\mathrm{CY}(x_{01}) + \mathrm{CY}(x_{01})\gamma_0 + \check{\mathfrak{m}}_1\big(\mathrm{CY}(\gamma_{10})\big)\\
&= \mathrm{CY}\Big(\sum \#\mathcal{M}^0(\beta_{10};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{10},\boldsymbol{\delta}_1)\boldsymbol{\delta}_1\beta_{10}\boldsymbol{\delta}_0\Big) + \gamma_1\,\mathrm{CY}(x_{01}) + \mathrm{CY}(x_{01})\gamma_0\\
&\quad + \widehat{\mathfrak{m}}_1\Big(\sum \#\mathcal{M}^0(\xi_{01};\boldsymbol{\sigma}_0,\gamma_{10},\boldsymbol{\sigma}_1)\boldsymbol{\sigma}_1\xi_{01}\boldsymbol{\sigma}_0\Big)\\
&= \sum \#\mathcal{M}^0(\nu_{01},\boldsymbol{\delta}'_0,\beta_{10},\boldsymbol{\delta}'_1)\#\mathcal{M}^0(\beta_{10};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{10},\boldsymbol{\delta}_1)\boldsymbol{\delta}_1\boldsymbol{\delta}'_1\nu_{01}\boldsymbol{\delta}'_0\boldsymbol{\delta}_0 \qquad (3)\\
&\quad + \gamma_1\,\mathrm{CY}(x_{01}) + \mathrm{CY}(x_{01})\gamma_0 \qquad (4)\\
&\quad + \sum \#\mathcal{M}^0(\xi_{01};\boldsymbol{\sigma}_0,\gamma_{10},\boldsymbol{\sigma}_1)\Big(\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\sigma}_1)\xi_{01}\boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\sigma}_1\xi_{01}\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\sigma}_0)\Big) \qquad (5)\\
&\quad + \sum \#\mathcal{M}^0(\nu_{01};\boldsymbol{\sigma}'_0,\xi_{01},\boldsymbol{\sigma}'_1)\#\mathcal{M}^0(\xi_{01};\boldsymbol{\sigma}_0,\gamma_{10},\boldsymbol{\sigma}_1)\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}'_1\nu_{01}\boldsymbol{\sigma}'_0\boldsymbol{\sigma}_0 \qquad (6)
\end{aligned}$$

这个最后方程中的各项实际上对应于伪全纯楼的代数贡献；这些楼出现在模空间紧化的边界上。

˘个具有两个正渐近的香蕉，一个位于 γ_{10} ，另一个位于 $C_-(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$ 的一个生成元处，并具有一些负纯Reeb弦渐近行为，见图 2。□

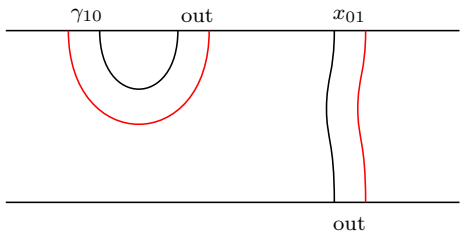


FIGURE 1. 对映射 CY 有贡献的伪全纯圆盘。

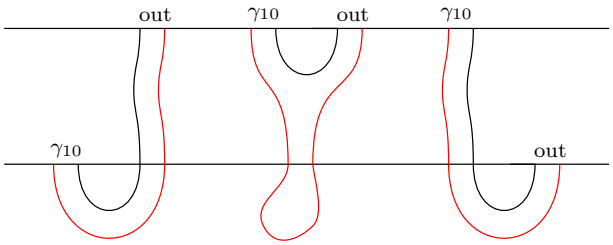


FIGURE 2. 在具有位于 γ_{10}处的正渐近的香蕉模空间边界中，伪全纯楼的类型。当最左侧楼的两个分量之间的连接 Reeb 弦为长弦或 y_{01}时，它在代数上对（6）作出贡献；而如果它是弦 x_{01}，则在代数上对（4）作出贡献。中间的楼概略表示类型（5）的贡献，最右侧的楼则对（3）作出贡献。

^ ˘CY 的锥 $\mathsf{Cone(CY)} = C_+(\Lambda_0,\ \Lambda_1)[-1] \oplus C_-(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$ 是一个 DG $\mathcal{A}$-双模，我们证明它与 Rabinowitz 双模 $\mathsf{RFC}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$ 准同构。这几乎是显然的，事实上，考虑如下双模映射：

$$\nu : \mathrm{Cone(CY)} \to \mathrm{RFC}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\Lambda_0, \Lambda_1)$$

将二重副本的每个混合弦 $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ 映射到其自身。

命题 6.3。 ν 是 *DG*-双模之间的拟同构。

证明。 我们有

$$\begin{aligned}\nu \circ \mathfrak{m}_1^{\mathrm{Cone(CY)}}(\gamma_{10}) + \mathfrak{m}_1 \circ \nu(\gamma_{10}) &= \nu\big(\hat{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{10}) + \mathrm{CY}(\gamma_{10})\big) + \mathfrak{m}_1(\gamma_{10}) \\ &= \nu\big(\mathbf{\Delta}_1(\gamma_{10}) + \gamma_1 x_{01} + x_{01}\gamma_0 + \mathrm{CY}(\gamma_{10})\big) + \mathbf{\Delta}_1(\gamma_{10}) + \mathbf{b}_1(\gamma_{10}) \\ &= \mathbf{\Delta}_1(\gamma_{10}) + \gamma_1 x_{01} + x_{01}\gamma_0 + \mathrm{CY}(\gamma_{10}) + \mathbf{\Delta}_1(\gamma_{10}) + \mathbf{b}_1(\gamma_{10})\end{aligned}$$

注意到 $\gamma_1 x_{01} + x_{01}\gamma_0$ +$\mathsf{CY}(\gamma_{10}) = \mathbf{b}_1(\gamma_{10})$ ，因为 $\mathsf{CY}(\gamma_{10})$ 是通过计数在 γ_{10} 处及在 $\mathcal{R}^l(\Lambda_0, \Lambda_1)$处有正渐近条件的香蕉定义的，而另外两项对应于在 γ_{10} 和 x_{10}处有正渐近条件的香蕉。因此，上述和为零。当输入为 x_{01} 或 $\check{C}_-(\Lambda_0, \Lambda_1)$的任意生成元时，关系 $\nu \circ \mathfrak{m}_1^{\mathrm{Cone(CY)}} + \mathfrak{m}_1 \circ \nu = 0$ 可直接由映射的定义得出。□

6.4. **Calabi-Yau同构**。 在本小节中，我们假设 Λ_0 是水平可位移的，这意味着复形RFC$_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 是无环的。因此，这也意味着上一节中定义的复形Cone(CY) 是无环的，从而次数 $\widehat{\quad}\quad\breve{0}$ 映射 CY：$C_+(\Lambda_0,\ \Lambda_1) \to C_-(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$ 是微分分次双模之间的拟同构。我们将通过证明存在微分分次双模之间的拟$\widehat{\quad}\quad\breve{}$同构 $\mathcal{A} \simeq C_+(\Lambda_0, \Lambda_1)[-n-1]$ 和导出Hom$_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\mathcal{A},\ \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}) \simeq C_-(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$，来说明这个拟同构是一个Calabi-Yau同构。

我们定义一个双模映射 F： $\widehat{C}_+(\Lambda_0,\ \Lambda_1)[-n-1] \to \mathcal{A}$ 由

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{v}_1\gamma_{10}\boldsymbol{v}_0) &= 0 \\ F(\boldsymbol{v}_1 x_{01}\boldsymbol{v}_0) &= \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_0 \end{aligned}$$

对于 $\boldsymbol{v}_i$ Λ_i 的 Reeb 弦词，其在右侧被规范地识别为 Λ_0的 Reeb 弦词。

命题 6.4. 映射 F 是 *DG*-双模的拟同构。

证明。由定义可直接得出， F 是一个 0 次链映射。因此，它是一个 DG-双模态射；我们通过证明其锥是无圈的来验证它是一个拟同构。对于 Λ_1 的 Reeb 弦 $\boldsymbol{w}_1 = w^1\cdots w^k$ 组成的一个词，记作

$$\overline{\boldsymbol{w}}_1 = \sum_{j=1}^{k} w^1\cdots w^{j-1} w_{10}^j w^{j+1}\cdots w^k \in C_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\Lambda_1, \Lambda_0)$$

考虑 DG-双模 Cone(F)，其微分记为 $\partial^{\mathrm{Cone}(F)}$。我们定义一个次数为 -1 $\mathbb{Z}_2$ 的线性映射 h : Cone $(F) \to$ Cone(F) ：

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{w}_1\gamma_{10}\boldsymbol{v}_0) &= 0, \\ h(\boldsymbol{w}_1 x_{01}\boldsymbol{v}_0) &= \overline{\boldsymbol{w}}_1\boldsymbol{v}_0, \\ h(a^1\cdots a^k) &= x_{01}a^1\cdots a^k \end{aligned}$$

并证明 h 定义了锥(F)上恒等映射与零映射之间的同伦，即

$$\partial^{\mathrm{Cone}(F)}\circ h + h\circ\partial^{\mathrm{Cone}(F)} = \mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(F)}$$

我们针对 Cone(F) 中的三种不同类型元素检验这一关系。首先:

$$\begin{aligned} \big(\partial^{\mathrm{Cone}(F)}\circ h + h\circ\partial^{\mathrm{Cone}(F)}\big)(\boldsymbol{w}_1\gamma_{10}\boldsymbol{v}_0) &= 0 + h\circ\widehat{\mathfrak{m}}_1(\boldsymbol{w}_1\gamma_{10}\boldsymbol{v}_0) + h\circ F(\boldsymbol{w}_1\gamma_{10}\boldsymbol{v}_0) \\ &= h\Big(\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{w}_1)\gamma_{10}\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{w}_1\gamma_{10}\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{v}_0) + \boldsymbol{w}_1\boldsymbol{\Delta}_1(\gamma_{10})\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{w}_1\big(\gamma x_{01} + x_{01}\gamma\big)\boldsymbol{v}_0\Big) + 0 \\ &= h\big(\boldsymbol{w}_1\gamma x_{01}\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{w}_1 x_{01}\gamma\boldsymbol{v}_0\big) \\ &= \overline{\boldsymbol{w}}_1\gamma\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{w}_1\gamma_{10}\boldsymbol{v}_0 + \overline{\boldsymbol{w}}_1\gamma\boldsymbol{v}_0 \\ &= \boldsymbol{w}_1\gamma_{10}\boldsymbol{v}_0. \end{aligned}$$

然后，

$$\begin{aligned} \big(\partial^{\mathrm{Cone}(F)}\circ h + h\circ\partial^{\mathrm{Cone}(F)}\big)(\boldsymbol{w}_1 x_{01}\boldsymbol{v}_0) &= \partial^{\mathrm{Cone}(F)}(\overline{\boldsymbol{w}}_1\boldsymbol{v}_0) + h\big(\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{w}_1)x_{01}\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{w}_1 x_{01}\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{v}_0) + \boldsymbol{w}_1\boldsymbol{v}_0\big) \\ &= \widehat{\mathfrak{m}}_1(\overline{\boldsymbol{w}}_1)\boldsymbol{v}_0 + \overline{\boldsymbol{w}}_1\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{v}_0) + \overline{\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{w}_1)}\boldsymbol{v}_0 + \overline{\boldsymbol{w}}_1\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{v}_0) + x_{01}\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{v}_0 \\ &= \widehat{\mathfrak{m}}_1(\overline{\boldsymbol{w}}_1)\boldsymbol{v}_0 + \overline{\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{w}_1)}\boldsymbol{v}_0 + x_{01}\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{v}_0 \end{aligned}$$

注意， $\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{w}_1\overline{)=\boldsymbol{\Delta}_1}(\boldsymbol{w}_1)$ 它是 $\widehat{\mathfrak{m}}_1(\boldsymbol{w}_1)$的一个分量。假设 $\boldsymbol{w}_1 = \overline{w}^1 \dots w^k$于是我们得到

$$\begin{aligned}\left(\partial^{\mathrm{Cone}(F)} \circ h + h \circ \partial^{\mathrm{Cone}(F)}\right)(\boldsymbol{w}_1 x_{01} \boldsymbol{v}_0) &= \sum_{j=1}^{k} (w^1 \cdots w^{j-1}(w^j x_{01} + x_{01} w^j) w^{j+1} \cdots w^k)\boldsymbol{v}_0 + x_{01}\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{v}_0 \\ &= \boldsymbol{w}_1 x_{01} \boldsymbol{v}_0.\end{aligned}$$

最后，对于词 $a^1 \dots a^k$ in $\mathcal{A}$，我们计算

$$\begin{aligned}\left(\partial^{\mathrm{Cone}(F)} \circ h + h \circ \partial^{\mathrm{Cone}(F)}\right)(a^1 \cdots a^k) &= \partial^{\mathrm{Cone}(F)}(x_{01} a^1 \cdots a^k) + h \circ \partial_{\mathcal{A}}(a^1 \cdots a^k) \\ &= x_{01}\partial_{\mathcal{A}}(a^1 \cdots a^k) + F(x_{01} a^1 \cdots a^k) + x_{01}\partial_{\mathcal{A}}(a^1 \cdots a^k) \\ &= a^1 \cdots a^k.\end{aligned}$$

□

注意到，命题 6.4 蕴含 $C_+(\Lambda_0, \Lambda_1)[-n-1]$ 是对角 DG-双模 $\mathcal{A}$ 的半自由分解。这尤其意味着存在 DG-双模之间的拟同构：导出$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}\left(\widehat{C}_+(\Lambda_0, \Lambda_1)[-n-1], \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\right)$。这一半自由分解也是有限秩的，因此 $\mathcal{A}$ 是同调光滑的。

备注6.1。注意到，对于与一个（具有某些特定性质的）箭图相关联的 DG-范畴，这样的有限秩半自由分解已在 [Kel11, 第 3 节中明确给出。6]

现在我们考虑一个双模映射 $G\colon \check{C}_-(\Lambda_0, \Lambda_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}\left(\widehat{C}_+(\Lambda_0, \Lambda_1)[-n-1], \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\right)\widehat{}$，其在生成元上的定义为 $G(\gamma_{01}) = \phi_\gamma$，其中 $\phi_\gamma\colon C_+(\Lambda_0, \Lambda_1)[-n] \to \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ 是一个双模映射，其在生成元上的定义如下：

$$\begin{aligned}\phi_\gamma(\beta_{10}) &= \begin{cases} 1\otimes 1 & \text{if } \beta = \gamma, \\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \\ \phi_\gamma(x_{01}) &= 0.\end{aligned}$$

and 同样， $G(y_{01}) = \phi_y$ 是由 $\phi_y(\beta_{10}) = 0$ 和 $\phi_y(x_{01}) = 1\otimes$ 定义的双模映射 1.

命题 6.5. 映射 G 是 *DG*-双模之间的拟同构。

证明。回忆一下，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}\left(\widehat{C}_+(\Lambda_0, \Lambda_1)[-n-1], \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\right)$ 上的微分由 $D(\phi) = \phi\circ\widehat{\mathfrak{m}}_1 + \partial_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}}\circ\phi$给出。我们想要证明

$$G\circ\check{\mathfrak{m}}_1 + D\circ G = 0$$

设 γ_{01} 是 $\check{C}_-(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 中的一个生成元。我们有 $G\circ\check{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{01})\colon \widehat{C}_+(\Lambda_0, \Lambda_1)[-n-1] \to \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ 是双模映射；对于每个正渐近于弦 β_{01}、负渐近于 γ_{01}，且负渐近于纯 Reeb$\widehat{}$弦词 $\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{v}_1$ 的伪全纯圆盘，将其应用于 $\beta_{10} \in C_+(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 时，该圆盘贡献 $\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_0$。另一方面，我们有 $D\circ G(\gamma_{01}) = G(\gamma_{01})\circ\widehat{\mathfrak{m}}_1 + \partial_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}}\circ G(\gamma_{01})$。与上述相同的伪全纯圆盘对 $G(\gamma_{01})\circ\widehat{\mathfrak{m}}_1(\beta_{10})$ 贡献 $\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_0$。注意，出于作用量方面的原因，这些圆盘仅在$\beta \neq \gamma$时才可能存在。在这种情况下，我们还有 $\partial_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}}\circ G(\gamma_{01})(\beta_{10}) = 0$。若 $\beta = \gamma$，则$G\circ\check{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{01})(\beta_{10}) = G(\gamma_{01})\circ\widehat{\mathfrak{m}}_1(\beta_{10}) = 0$ 且 $\partial_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}}\circ G(\gamma_{01})(\beta_{10}) = \partial_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}}(1\otimes 1) = 0$。注意，对于 x_{01}，我们直接有

$$G\circ\check{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{01})(x_{01}) + D\circ G(\gamma_{01})(x_{01}) = 0$$

现在我们证明，将 $G\circ\check{\mathfrak{m}}_1+D\circ G$ 应用于 $y_{01}\in\check{C}_-(\Lambda_0,\Lambda_1)$ 时，它会消失。回忆 $\check{\mathfrak{m}}_1(y_{01})=\sum_{\gamma\in\mathcal{R}(\Lambda)}\gamma_{01}+\gamma_{01}\gamma$，因此我们有

$$\begin{aligned}G\circ\check{\mathfrak{m}}_1(y_{01})(\gamma_{10})&=\gamma\otimes 1+1\otimes\gamma\\ G\circ\check{\mathfrak{m}}_1(y_{01})(x_{01})&=0\end{aligned}$$

另一方面，对于一个弦 γ_{10}，我们有

$$\begin{aligned}D\circ G(y_{01})(\gamma_{10})&=G(y_{01})\circ\hat{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{10})+\partial_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}}\circ G(y_{01})(\gamma_{10})\\&=G(y_{01})\circ\hat{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{10})+0\\&=G(y_{01})\big(\boldsymbol{\Delta}_1(\gamma_{10})+\gamma x_{01}+x_{01}\gamma\big)\\&=G(y_{01})(\gamma x_{01}+x_{01}\gamma)=\gamma\otimes 1+1\otimes\gamma\end{aligned}$$

最后，

$$\begin{aligned}D\circ G(y_{01})(x_{01})&=G(y_{01})\circ\hat{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{10})+\partial_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}}\circ G(y_{01})(x_{01})\\&=0+\partial_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}}(1\otimes 1)=0\end{aligned}$$

注意，G 存在一个逆 G^{-1}：$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}\left(\widehat{C}_+(\Lambda_0,\Lambda_1)[-n-1],\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\right)\to\check{C}_-(\Lambda_0,\Lambda_1)$它将双模态射 $\phi\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}\left(\widehat{C}_+(\Lambda_0,\Lambda_1)[-n-1],\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\right)$ 映射为

$$\begin{aligned}\phi(\gamma_{10})&=\sum_{j=1}^{k_\gamma}\boldsymbol{w}_\gamma^j\otimes\boldsymbol{v}_\gamma^j\\ \phi(x_{01})&=\sum_{j=1}^{k_x}\boldsymbol{w}_x^j\otimes\boldsymbol{v}_x^j\end{aligned}$$

到 $G^{-1}(\phi)=\sum_{\gamma\in\mathcal{R}(\Lambda)}\sum_{j=1}^{k_\gamma}\boldsymbol{w}_\gamma^j\gamma_{01}\boldsymbol{v}_\gamma^j+\sum_{j=1}^{k_x}\boldsymbol{w}_x^jy_{01}\boldsymbol{v}_x^j$。 □

定理 *6.1* 的证明。由命题 6.4 的证明可知，$\mathcal{A}$ 是同调$\widehat{\ }$光滑的，且有 $C_+(\Lambda_0,\ \Lambda_1)[-n-1]$ 有限维半自由分解。考虑移位 Calabi-Yau 映射：

$$\mathcal{CY}:=\mathrm{CY}[-n-1]:\widehat{C}_+(\Lambda_0,\Lambda_1)[-n-1]\to\check{C}_-(\Lambda_0,\Lambda_1)[-n-1]$$

$\widehat{\ }$若 Λ_0水平可位移，则 CY 是拟同构。此外，$C_+(\Lambda_0,\ \Lambda_1)[-n-1]\check{\ }$通过映射 F 与 $\mathcal{A}$ 拟同构，而目标 $C_-(\Lambda_0,\ \Lambda_1)[-n-1]$ 通过映射 $G[-n-1]$与 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}\left(\widehat{C}_+(\Lambda_0,\ \Lambda_1)[-n-1],\ \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\right)[-n-1]$ 拟同构。还要记住，我们有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}\left(\widehat{C}_+(\Lambda_0,\ \Lambda_1)[-n-1],\ \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\right)[-n-1]\cong\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}\left(\mathcal{A},\ \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\right)[-n-1]$，因此得到一个拟同构 $\mathcal{A}\to\mathcal{A}^!\![-n-1]$。最后，我们需要验证 $\mathcal{CY}=\mathcal{CY}^!\![-n-1]$。注意，

$$\mathcal{CY}^!:\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}\left(\check{C}_-(\Lambda_0,\Lambda_1)[-n-1],\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\right)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}\left(\widehat{C}_+(\Lambda_0,\Lambda_1)[-n-1],\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\right)$$

按定义由 $\mathcal{CY}^!(\phi)=\phi\circ\mathcal{CY}$给出。注意，$\mathcal{CY}^!$ 的目标与 $\check{C}_-(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$ 拟同构，通过映射 G^{-1}，而其定义域与 $\widehat{C}_+(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$ 拟同构，通过 DG 双模态映射：

$$H:\widehat{C}_+(\Lambda_0,\Lambda_1)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}\left(\check{C}_-(\Lambda_0,\Lambda_1)[-n-1],\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\right)$$

在生成元上的定义为： $H(\gamma_{10}) = \phi_\gamma$，其中 $\phi_\gamma(\gamma_{01}) = 1 \otimes 1$，且在其他情况下为零；以及 $H(x_{01}) = \phi_x$，其中 $\phi_x(y_{01}) = 1 \otimes 1$，且在其他情况下为零。与命题 6.5 证明中类似的论证表明， H 是一个拟同构。因此我们得到一个 DG 双模态映射

$$G^{-1} \circ \mathcal{CY}^! \circ H : \widehat{C}_+(\Lambda_0, \Lambda_1) \to \check{C}_-(\Lambda_0, \Lambda_1)$$

我们在生成元上计算这个映射：

$$G^{-1} \circ \mathcal{CY}^! \circ H(\gamma_{10}) = G^{-1} \circ \mathcal{CY}^!(\phi_\gamma) = G^{-1} \circ \phi_\gamma \circ \mathcal{CY}$$

而 $\phi_\gamma \circ \mathcal{CY} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}(C_+(\Lambda_0, \Lambda_1)[-n-1], \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$ 由在 γ_{01} 处具有正渐近的香蕉或条带的计数给出，即

$$\begin{aligned}\phi_\gamma \circ \mathcal{CY}(\beta_{10}) &= \phi_\gamma\Big(\sum_{\substack{\xi_{01} \in \mathcal{R}^l(\Lambda_0,\Lambda_1) \cup \{y_{01}\} \\ \boldsymbol{\delta}_0, \boldsymbol{\delta}_1}} \#\mathcal{M}^0(\xi_{01}; \boldsymbol{\delta}_0, \beta_{10}, \boldsymbol{\delta}_1)\, \boldsymbol{\delta}_1\, \xi_{01}\, \boldsymbol{\delta}_0 \Big) \\ &= \sum_{\boldsymbol{\delta}_0, \boldsymbol{\delta}_1} \#\mathcal{M}^0(\gamma_{01}; \boldsymbol{\delta}_0, \beta_{10}, \boldsymbol{\delta}_1)\, \boldsymbol{\delta}_1 \otimes \boldsymbol{\delta}_0\end{aligned}$$

and

$$\phi_\gamma \circ \mathcal{CY}(x_{01}) = \sum_{\boldsymbol{\delta}_0, \boldsymbol{\delta}_1} \#\mathcal{M}^0(\gamma_{01}; \boldsymbol{\delta}_0, x_{01}, \boldsymbol{\delta}_1)\, \boldsymbol{\delta}_1 \otimes \boldsymbol{\delta}_0$$

因此我们得到

$$G^{-1} \circ \mathcal{CY}^! \circ H(\gamma_{10}) = \sum_{\beta_{10}, \boldsymbol{\delta}_0, \boldsymbol{\delta}_1} \#\mathcal{M}^0(\gamma_{01}; \boldsymbol{\delta}_0, \beta_{10}, \boldsymbol{\delta}_1)\, \boldsymbol{\delta}_1\, \beta_{01}\, \boldsymbol{\delta}_0 + \sum_{\boldsymbol{\delta}_0, \boldsymbol{\delta}_1} \#\mathcal{M}^0(\gamma_{01}; \boldsymbol{\delta}_0, x_{01}, \boldsymbol{\delta}_1)\, \boldsymbol{\delta}_1\, y_{01}\, \boldsymbol{\delta}_0$$

而

$$\mathcal{CY}(\gamma_{10}) = \sum_{\substack{\beta_{01} \in \mathcal{R}^l(\Lambda_0,\Lambda_1) \\ \boldsymbol{\delta}_0, \boldsymbol{\delta}_1}} \#\mathcal{M}^0(\beta_{01}; \boldsymbol{\delta}_0, \gamma_{10}, \boldsymbol{\delta}_1)\, \boldsymbol{\delta}_1\, \beta_{01}\, \boldsymbol{\delta}_0 + \sum_{\boldsymbol{\delta}_0, \boldsymbol{\delta}_1} \#\mathcal{M}^0(y_{01}; \boldsymbol{\delta}_0, \gamma_{10}, \boldsymbol{\delta}_1)\, \boldsymbol{\delta}_1\, y_{01}\, \boldsymbol{\delta}_0$$

类似地，我们可以计算

$$G^{-1} \circ \mathcal{CY}^! \circ H(x_{01}) = \sum_{\beta_{10}, \boldsymbol{\delta}_0, \boldsymbol{\delta}_1} \#\mathcal{M}^0(y_{01}; \boldsymbol{\delta}_0, \beta_{10}, \boldsymbol{\delta}_1)\, \boldsymbol{\delta}_1\, \beta_{01}\, \boldsymbol{\delta}_0$$

while

$$\mathcal{CY}(x_{01}) = \sum \#\mathcal{M}^0(\beta_{01}; \boldsymbol{\delta}_0, x_{01}, \boldsymbol{\delta}_1)\, \boldsymbol{\delta}_1\, \beta_{01}\, \boldsymbol{\delta}_0$$

所以，为了得到 $\mathcal{CY} = \big(G^{-1} \circ \mathcal{CY}^! \circ H\big)[-n-1] := G^{-1}[-n-1] \circ \mathcal{CY}[-n-1] \circ H[-n-1]$，我们需要检查：

(1) 对任意 $\gamma_{10} \in \mathcal{R}(\Lambda_1, \Lambda_0)$, $\beta_{01} \in \mathcal{R}^l(\Lambda_0, \Lambda_1)$，以及它们对应的 $\gamma_{01} \in \mathcal{R}^l(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 和$\beta_{10} \in \mathcal{R}(\Lambda_1, \Lambda_0)$，我们有：

$$\sum_{\boldsymbol{\delta}_0, \boldsymbol{\delta}_1} \#\mathcal{M}^0(\beta_{01}; \boldsymbol{\delta}_0, \gamma_{10}, \boldsymbol{\delta}_1) = \sum_{\boldsymbol{\delta}_0, \boldsymbol{\delta}_1} \#\mathcal{M}^0(\gamma_{01}; \boldsymbol{\delta}_0, \beta_{10}, \boldsymbol{\delta}_1)$$

(2) 对于任意 $\beta_{01} \in \mathcal{R}^l(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 及其对应的 $\beta_{10} \in \mathcal{R}(\Lambda_1, \Lambda_0)$，有：

$$\sum_{\boldsymbol{\delta}_0, \boldsymbol{\delta}_1} \#\mathcal{M}^0(\beta_{01}; \boldsymbol{\delta}_0, x_{01}, \boldsymbol{\delta}_1) = \sum_{\boldsymbol{\delta}_0, \boldsymbol{\delta}_1} \#\mathcal{M}^0(y_{01}; \boldsymbol{\delta}_0, \beta_{10}, \boldsymbol{\delta}_1)$$

第 (1) 点由 [EES09, 定理 3.6] 得出。事实上，边界位于 $\mathbb{R} \times (\Lambda_0 \cup \Lambda_1)$ 且在 β_{10}和 γ_{01}处具有正渐近行为的刚性香蕉的计数，与边界位于 $\mathbb{R} \times (\Lambda_0 \cup \Lambda_1^A)$的刚性条带的计数存在双射对应；其中 Λ_1^A是 Λ_1沿正 Reeb 方向平移 $A >> 0$ 后得到的，使得唯一的混合 Reeb 弦是从 Λ_0 到Λ_1^A的弦，在 β_{10}^A 处具有正渐近，在 γ_{10}^A处具有负渐近，其中 β_{10}^A 和 γ_{10}^A 是

分别对应于 β_{10} 和 γ_{01} 的 $\Lambda_0 \cup \Lambda_1^A$的混合弦。根据 [EES09，定理3.6], ，边界位于 $\mathbb{R} \times (\Lambda_0 \cup \Lambda_1^A)$ 上的刚性条带的数量对应于边界位于 $\mathbb{R} \times \Lambda$ 上的条带的数量，该条带在 β 处具有正渐近（对应于 β_{10}的纯弦），并在 γ处具有负渐近。同样，边界位于$\mathbb{R} \times (\Lambda_0 \cup \Lambda_1)$ 上且在 β_{01} 和 γ_{10} 处具有正渐近的刚性香蕉的数量，与边界位于 $\mathbb{R} \times (\Lambda_0 \cup \Lambda_1^{-A})$ 上的刚性条带的数量存在双射对应关系，该条带在 β_{01}^{-A}处具有正渐近，并在 γ_{01}^{-A}处具有负渐近。后一数量也与边界位于 $\mathbb{R} \times \Lambda$上的刚性条带的数量存在双射对应关系，后者渐近于 β（正渐近），并渐近于γ（负渐近）。

对于（2），根据 [EES09 定理 3.6]，一个边界位于 $\mathbb{R} \times (\Lambda_0 \cup \Lambda_1)$、在 β_{01} 处正渐近、在 x_{01} 处负渐近的刚性条带，对应于一个广义圆盘。该广义圆盘由一个边界位于 $\mathbb{R}\times\Lambda$ 、在 β 处正渐近的圆盘，以及从最小值点（记住，最大 Reeb 弦 $x_{01} \in \mathcal{R}(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 对应于 f 的最小临界点 x ）到圆盘边界上一点的 f 负梯度流线组成。但不存在从最小值点流出的非恒定负梯度流线，因此圆盘的边界必须经过 x （更准确地说，由于我们处于柱状情形，边界会穿过 $\mathbb{R} \times \{x\}$ ）。另一方面，一个边界位于 $\mathbb{R} \times (\Lambda_0 \cup \Lambda_1)$ 、正渐近于 β_{10} 和 y_{01} 的刚性香蕉，对应于一个刚性广义圆盘。该广义圆盘由一个边界位于 $\mathbb{R} \times \Lambda$ 、正渐近于 β 的圆盘，以及从圆盘边界上一点到最大临界点 y 的 f 负梯度流线组成。同样，这条流线必须是常值的，且圆盘的边界必须经过 $\mathbb{R} \times \{y\}$。现在我们来验证这两类圆盘的计数相同。

若 $\dim \Lambda = 1$: 假设 $\mathcal{M}^0(\beta_{01}; \boldsymbol{\delta}_0, x_{01}, \boldsymbol{\delta}_1)$ 非空，也就是说，假设存在一个边界位于 $\mathbb{R} \times \Lambda$ 上的伪全纯圆盘，它经过 $\mathbb{R} \times \{x\}$，并渐近于弦 β （正向）以及词 $\boldsymbol{\delta}_0, \boldsymbol{\delta}_1$（负向）。注意，圆盘的边界与 $\mathbb{R} \times \{x\}$ 横截。特别地，对于 Λ 上充分接近 x 的每个点 pt，它也经过所有 $\mathbb{R} \times \{\text{pt}\}$ 。若函数 f 的选取使其临界点彼此充分接近，则等式 (2) 成立。

若 $\dim \Lambda \geqslant 2$，我们使用 [DR16b] 中的结果。记 $\mathcal{M}_\Lambda^{\{*\}}(\beta; \boldsymbol{\delta}_0, \boldsymbol{\delta}_1)$ 为边界位于 $\mathbb{R} \times \Lambda$ 上、渐近于 β（正向）和词 $\boldsymbol{\delta}_0$ 与 $\boldsymbol{\delta}_1$（负向）的伪全纯圆盘的模空间；这些圆盘在定义域内的边界上有一个标记点 $*$ ，该点位于映射到词 $\boldsymbol{\delta}_0$ 的最后一条 Reeb 弦的穿孔与映射到词 $\boldsymbol{\delta}_1$ 的第一条 Reeb 弦的穿孔之间。注意，该模空间仍有 $\mathbb{R}$ 的作用。存在一个光滑的求值映射

$$ev : \mathcal{M}_\Lambda^{\{*\}}(\beta; \boldsymbol{\delta}_0, \boldsymbol{\delta}_1) \to \Lambda$$

由 $ev(u) = u(*)$ 给出。注意，由于我们处于柱状情形，评价映射的取值落在 Λ 中（而不是一般的 $\mathbb{R} \times \Lambda$ 中）。通过 [MS12，第 3], 章的推广， Λ 中的每一点都是评价映射的正则值，因此最小值和最大值 Morse 临界点 x 和 y 也特别如此。现在，利用 [DR16b，第 8], 节中的横截性结果，我们得到评价映射是适当的，从而 $\#ev^{-1}(x) = \#ev^{-1}(y)$。最后注意到，0 维模空间 $\mathcal{M}_\Lambda^0(\beta_{01}; \boldsymbol{\delta}_0, x_{01}, \boldsymbol{\delta}_1)$ 和 $\mathcal{M}_\Lambda^0(y_{01}; \boldsymbol{\delta}_0, \beta_{10}, \boldsymbol{\delta}_1)$ 分别与 $ev^{-1}(x)$ 和 $ev^{-1}(y)$ 相对应。

□

7. Products and higher order structure maps

在本节中，我们定义链复形 $\check{C}_-^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 和 $\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 它们是在 $\mathbb{Z}_2$ 上，通过与对角双模 $\mathcal{A}$ 进行双模张量积，从 $C_-(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 和 $C_+(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 得到的。

我们证明这些复形具有乘积结构，并且其上由式（2）诱导的 Calabi-Yau 态射保持同调中的乘积。

记号7.1。下面我们将考虑边界位于一个勒让德子流形的三份拷贝（甚至更多份拷贝）上的Reeb 弦。此前，我们用 γ_{01} 表示从 Λ_1 到 Λ_0 的Reeb 弦，并用 γ_{10} 表示相应的、从 Λ_0 到 Λ_1 的 Reeb 弦。除非另有说明，本节中这种“对应关系”不再适用，即我们将用 γ_{ij} 表示三份拷贝的Reeb 弦，其中 $1 \leqslant i \neq j \leqslant 2$，但 γ_{ij} 不一定是从 Λ_j 到 Λ_i 且与 γ_{ji} 相对应的弦，除非另有说明。不过，我们仍将使用 x_{ij} 和 y_{ij} 来分别表示不同双重副本之间的最大值和最小值点 Morse Reeb弦。

7.1. 霍赫希尔德同调与上同调的链复形。我们首先描述-$\widehat{\ }$链复形 $(C_+^{cyc}(\Lambda_0,\ \Lambda_1),\ \widehat{\mathfrak{m}}_1)$，其中为避免记号重复，我们也用 $\widehat{\mathfrak{m}}_1$ 表示微分，但这不应造成任何混淆。向量空间 $\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$ 是无限维的，由 $\mathbb{Z}_2$ 上形如 $\gamma_{10}\boldsymbol{a}$ 以及 $x_{01}\boldsymbol{a}$ 的元素生成，其中 $\boldsymbol{a} = a_1 \dots a_k$ 表示由 Λ的 Reeb 弦组成的一个单词。微分定义为

$$\begin{aligned}\widehat{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{10}\boldsymbol{a}) = &\sum_{\beta_{10},\boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_1} \#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{01}}(\beta_{10};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{10},\boldsymbol{\delta}_1)\cdot\beta_{10}\,\boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{\delta}_1 + x_{01}\gamma\boldsymbol{a} + x_{01}\boldsymbol{a}\gamma\\ &+\sum_{j=1}^{k}\gamma_{10}a_1\dots a_{j-1}\partial_{\mathcal{A}}(a_j)a_{j+1}\dots a_k\end{aligned}$$

其中 γ 是对应于 γ_{10}的纯Reeb弦，且 $\widehat{\mathfrak{m}}_1(x_{01}\boldsymbol{a}) = 0$。参见图3。注意，根据定义，该复形计算 $\mathcal{A}$ 的霍赫希尔德同调。事实上，记 $\mathcal{A}^e = \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^{op\widehat{\ }}$，并注意到 $\mathcal{A}$-双模 $C_+(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$ 可视为一个右 DG $\mathcal{A}^e$-模，其$\widehat{\ }$模结构由 $\widehat{c}\cdot(a,\ b) = b\widehat{c}a$给出，对任意$\widehat{c}\in C_+(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$皆如此；而代数 $\mathcal{A}$ 可$\widehat{\ }$视为一个DG左 $\mathcal{A}^e$-模，且 $(a,\ b)\cdot a_1\dots a_k = aa_1\dots a_kb$。根据定义，$C_+^{cyc}(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$ 是$\widehat{\ }$等于左、右DG $\mathcal{A}^e$-模的张量积 $C_+(\Lambda_0,\ \Lambda_1)\otimes_{\mathcal{A}^e}\mathcal{A}$。此外记得，$C_+(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$ 是 $\mathcal{A}$的半自由分解，因此 $C_+(\Lambda_0,\ \Lambda_1)\otimes_{\mathcal{A}^e}\mathcal{A}$的同调同构于 $\mathcal{A}$的霍赫希尔德同调。类似地，复形 $\left(\breve{C}_-^{cyc}(\Lambda_0,\ \Lambda_1),\ \breve{\mathfrak{m}}_1\right)$ 在 $\mathbb{Z}_2$ 上由元素 $\gamma_{01}\boldsymbol{a}$ 和 $y_{01}\boldsymbol{a}$生成，并

$$\begin{aligned}\breve{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{01}a_1\dots a_k) = &\sum_{\beta_{01},\boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_1}\#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{01}}(\beta_{01};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{01},\boldsymbol{\delta}_1)\cdot\beta_{01}\,\boldsymbol{\delta}_0\,a_1\dots a_k\,\boldsymbol{\delta}_1\\ &+\sum_{j=1}^{k}\gamma_{01}a_1\dots a_{j-1}\partial_{\mathcal{A}}(a_j)a_{j+1}\dots a_k\end{aligned}$$

以及 $\widehat{\mathfrak{m}}_1(y_{01}\boldsymbol{a}) = \sum_{\gamma\in\mathcal{R}(\Lambda)}\gamma_{01}\gamma\boldsymbol{a} + \gamma_{01}\boldsymbol{a}\gamma$，其中 γ_{10} 是对应于 γ的混合弦。同样，我们可以验证

$$\breve{C}_-^{cyc}(\Lambda_0,\Lambda_1)\simeq\breve{C}_-(\Lambda_0,\Lambda_1)\otimes_{\mathcal{A}^e}\mathcal{A}\simeq\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{A},\mathcal{A}\otimes\mathcal{A})\otimes_{\mathcal{A}^e}\mathcal{A}\simeq\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{A},\mathcal{A})$$

因此复形 $(\breve{C}_-^{cyc}(\Lambda_0,\ \Lambda_1),\ \breve{\mathfrak{m}}_1)$ 计算了 $\mathcal{A}$的霍赫希尔德上同调。由定理 6.1，我们由此得到 $\mathbb{R}\times P$ 中一个可水平位移的勒让德球面的 C-E 代数的霍赫希尔德同调与霍赫希尔德上同调之间的同构。

7.2. 乘积结构。在 [Leg] 中，作者在 Λ_0,Λ_1 的 C-E 代数存在增广的情况下，定义了复形 $\mathrm{RFC}(\Lambda_0,\Lambda_1)$ 上的乘积结构，以及更一般的A_∞-结构映射。当 Λ_1 是 Λ_0的一个小幅负向推离时，这个乘积自然延拓到链复形 $\mathrm{RFC}^{cyc}(\Lambda_0,\Lambda_1)$ 上（即在循环模型$\curvearrowright$ $\curvearrowleft C^{cyc}(\Lambda_0,\Lambda_1)$ 上诱导的香蕉映射的锥，且取值于 $C^{cyc}(\Lambda_0,\Lambda_1)$）。这个乘积通过计数与构造

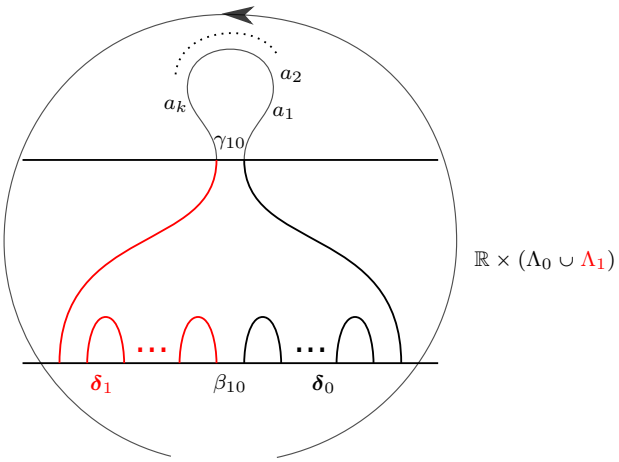


FIGURE 3. 对 $\hat{\mathfrak{m}}(\gamma_{10}a_1 \dots a_k)$ 有贡献的伪全纯圆盘。注意，顶部的“气泡”并非伪全纯圆盘，而是表示循环词 $\gamma_{10}a_1 \dots a_k$ 的一种方式。圆盘的贡献 $\beta_{10}\boldsymbol{\delta}_0 a_1 \dots a_k \boldsymbol{\delta}_1$ 由输出混合弦 β_{10} 及其后的一串 Reeb 弦构成，这些弦按照沿圆盘边界从 β_{10} 开始逆时针行进时的顺序排列。

RFC(Λ_0, Λ_1) 上的乘积时所计数的同类伪全纯圆盘来定义，但将负向纯Reeb弦的渐近条件保留为系数，而不是借助增广将其转化为 $\mathbb{Z}_2$ 的元素。不过，似乎无法直接在 $\mathcal{A}$-双模 RFC(Λ_0, Λ_1) 上定义乘积，因为没有妥善处理这些系数的方法（有关以非交换代数为系数构造 A_∞ 结构，请参见[CDRGG16] ）。请注意，我们所计数的伪全纯圆盘，其边界位于勒让德子流形 Λ的三份拷贝$\Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ 所对应的圆柱上。这三份拷贝由 $\Lambda_0 = \Lambda$ 给出，随后 Λ_1 和 Λ_2 是 Λ 的小幅扰动负向推离（Λ_2 比 Λ_1的负向推离幅度稍大），使得$\Lambda_0 \cup \Lambda_1$、 $\Lambda_0 \cup \Lambda_2$ 和 $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ 如第 6.1 节所述构成双重副本。注意， $\check{C}^{cyc}_-(\Lambda_0$、 $\Lambda_1)$是 RFC$^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1)$的子复形，而且 RFC$^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 中的乘积在$\check{C}^{cyc}_-$ 上的限制取值于$\check{C}^{cyc}_-$ ，参见 [Leg]。因此，我们在$\check{C}^{cyc}_-$ 上得到一个良定义的乘积。更确切地说，给定 Λ 的三份拷贝 $\Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ ，存在一个零次映射 $\check{\mathfrak{m}}_2 \colon \check{C}^{cyc}_-(\Lambda_1, \Lambda_2) \otimes \check{C}^{cyc}_-(\Lambda_0, \Lambda_1) \to \check{C}^{cyc}_-(\Lambda_0, \Lambda_2)$ ，定义如下

$$\check{\mathfrak{m}}_2(\gamma_{12}\boldsymbol{a}_1, \gamma_{01}\boldsymbol{a_0}) = \sum_{\substack{\gamma_{02} \\ \boldsymbol{\delta}_0, \boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2}} \#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{012}}(\gamma_{02}; \boldsymbol{\delta}_0, \gamma_{01}, \boldsymbol{\delta}_1, \gamma_{12}, \boldsymbol{\delta}_2) \cdot \gamma_{02}\, \boldsymbol{\delta}_0\, \boldsymbol{a}_0\, \boldsymbol{\delta}_1\, \boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{\delta}_2$$

其中 γ_{ij} 也可以是最小 Morse Reeb弦。并且此映射 $\check{\mathfrak{m}}_2$ 满足莱布尼茨法则 $\check{\mathfrak{m}}_1 \circ \check{\mathfrak{m}}_2 + \check{\mathfrak{m}}_2(\mathrm{id} \otimes \check{\mathfrak{m}}_1) + \check{\mathfrak{m}}_2(\check{\mathfrak{m}}_1 \otimes \mathrm{id}) = 0$。这个乘积是标准的“两负输入一正输出”乘积，见图 4。与微分类似，输出元素中的纯 Reeb 弦词，是从混合输出 Reeb 弦开始沿伪全纯圆盘的边界逆时针追踪得到的。由于 C-E 代数中的系数，在 $\check{C}^{cyc}_-(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 上验证乘积的莱布尼茨法则，比在 Z_2 向量空间 $C(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 上验证乘积的莱布尼茨法则涉及稍多一些项；因此，我们现在详细说明，如 [Leg]，中所做的那样。我们想要证明

$$\check{\mathfrak{m}}_1 \circ \check{\mathfrak{m}}_2(\gamma_{12}\boldsymbol{a}_1, \gamma_{01}\boldsymbol{a}_0) + \check{\mathfrak{m}}_2\big(\gamma_{12}\boldsymbol{a}_1, \check{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{01}\boldsymbol{a}_0)\big) + \check{\mathfrak{m}}_2\big(\check{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{12}\boldsymbol{a}_1), \gamma_{01}\boldsymbol{a}_0\big) = 0$$

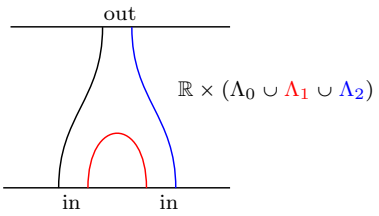


FIGURE 4. 边界位于 $\mathbb{R}\times(\Lambda_0\cup\Lambda_1\cup\Lambda_2)$ 上、对 $\check{C}^{cyc}_-(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$ 上的乘积有贡献的伪全纯楼。

左侧可以改写为

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\gamma_{02}\\ \boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2}} \#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{012}}(\gamma_{02};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{01},\boldsymbol{\delta}_1,\gamma_{12},\boldsymbol{\delta}_2)\cdot \check{\mathfrak{m}}_1\big(\gamma_{02}\,\boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{a}_0\,\boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{\delta}_2\,\big)\\
&\qquad + \check{\mathfrak{m}}_2\big(\gamma_{12}\boldsymbol{a}_1,\check{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{01})\boldsymbol{a}_0+\gamma_{01}\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_0)\big)+\check{\mathfrak{m}}_2\big(\check{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{12})\boldsymbol{a}_1+\gamma_{01}\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_0),\gamma_{01}\boldsymbol{a}_0\big)\\
&=\sum \#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{012}}(\gamma_{02};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{01},\boldsymbol{\delta}_1,\gamma_{12},\boldsymbol{\delta}_2)\cdot\Big(\check{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{02})\,\boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{a}_0\,\boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{\delta}_2+\gamma_{02}\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{a}_0\,\boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{\delta}_2)\Big)\\
&\qquad+\check{\mathfrak{m}}_2\big(\gamma_{12}\boldsymbol{a}_1,\check{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{01})\boldsymbol{a}_0\big)+\check{\mathfrak{m}}_2\big(\check{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{12})\boldsymbol{a}_1,\gamma_{01}\boldsymbol{a}_0\big)\\
&\qquad+\check{\mathfrak{m}}_2\big(\gamma_{12}\boldsymbol{a}_1,\gamma_{01}\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_0)\big)+\check{\mathfrak{m}}_2\big(\gamma_{01}\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_0),\gamma_{01}\boldsymbol{a}_0\big)
\end{aligned}$$

我们将具有 $\boldsymbol{a}_i$ 边界的项与其他项分开，以得到

$$\begin{aligned}
&=\sum \#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{012}}(\gamma_{02};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{01},\boldsymbol{\delta}_1,\gamma_{12},\boldsymbol{\delta}_2)\cdot\Big(\check{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{02})\,\boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{a}_0\,\boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{\delta}_2+\gamma_{02}\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\delta}_0)\boldsymbol{a}_0\,\boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{\delta}_2\\
&\qquad\qquad+\boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{a}_0\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\delta}_1)\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{\delta}_2+\boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{a}_0\,\boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{a}_1\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\delta}_2)\Big)\\
&+\check{\mathfrak{m}}_2\big(\gamma_{12}\boldsymbol{a}_1,\check{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{01})\boldsymbol{a}_0\big)+\check{\mathfrak{m}}_2\big(\check{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{12})\boldsymbol{a}_1,\gamma_{01}\boldsymbol{a}_0\big)\\
&+\sum \#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{012}}(\gamma_{02};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{01},\boldsymbol{\delta}_1,\gamma_{12},\boldsymbol{\delta}_2)\cdot\Big(\gamma_{02}\,\boldsymbol{\delta}_0\,\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_0)\,\boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{\delta}_2+\boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{a}_0\,\boldsymbol{\delta}_1\,\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_1)\,\boldsymbol{\delta}_2\,\Big)\\
&+\check{\mathfrak{m}}_2\big(\gamma_{12}\boldsymbol{a}_1,\gamma_{01}\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_0)\big)+\check{\mathfrak{m}}_2\big(\gamma_{01}\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_0),\gamma_{01}\boldsymbol{a}_0\big)
\end{aligned}$$

前两行作为类型为 $\mathcal{M}^1_{\Lambda_{012}}(\gamma_{02};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{01},\boldsymbol{\delta}_1,\gamma_{12},\boldsymbol{\delta}_2)$ 的模空间边界上的伪全纯楼的代数贡献而消失。最后两行也消失，因为根据乘积的定义，我们有

$$\sum_{\substack{\gamma_{02}\\ \boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2}} \#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{012}}(\gamma_{02};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{01},\boldsymbol{\delta}_1,\gamma_{12},\boldsymbol{\delta}_2)\cdot\gamma_{02}\,\boldsymbol{\delta}_0\,\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_0)\,\boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{\delta}_2=\check{\mathfrak{m}}_2\big(\gamma_{12}\boldsymbol{a}_1,\gamma_{01}\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_0)\big)$$

and

$$\sum_{\substack{\gamma_{02}\\ \boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2}} \#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{012}}(\gamma_{02};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{01},\boldsymbol{\delta}_1,\gamma_{12},\boldsymbol{\delta}_2)\cdot\gamma_{02}\,\boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{a}_0\,\boldsymbol{\delta}_1\,\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_1)\,\boldsymbol{\delta}_2=\check{\mathfrak{m}}_2\big(\gamma_{12}\partial_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_1),\gamma_{01}\boldsymbol{a}_0\big)$$

因此，莱布尼茨法则成立。此外，由 [EES09, 定理 5.5] 可知，乘积 $\check{\mathfrak{m}}_2$ 具有单位元，该单位元由最小Morse Reeb弦给出，即我们有$\check{\mathfrak{m}}_1(y_{01})=\check{\mathfrak{m}}_1(y_{12})=0$ 且 $\check{\mathfrak{m}}_2(\gamma_{12}\boldsymbol{a}_1,\ y_{01})=\gamma_{02}\boldsymbol{a}_1$ 以及 $\check{\mathfrak{m}}_2(y_{12},\ \gamma_{01}\boldsymbol{a}_0)=\gamma_{02}\boldsymbol{a}_0$，对于所有对应于同一个弦（长弦或 Morse 弦）的 $\gamma_{01}\in\mathcal{R}(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$、$\gamma_{12}\in\mathcal{R}(\Lambda_1,\ \Lambda_2)$ 和 $\gamma_{02}\in\mathcal{R}(\Lambda_0,\ \Lambda_2)$。

记号 7.2。下文中，对于 $\check{C}^{cyc}_-(\Lambda_0,\Lambda_1)$ 中的元素，我们将只写 γ_{01}，而不写更一般的 $\gamma_{01}\boldsymbol{a}$。这样做只是为了稍微缩短公式的长度。对于 $\widehat{C}^{cyc}_+(\Lambda_0,\Lambda_1)$中的元素，我们也将采取同样的做法。特别地，我们将只对输入对 $(\gamma_{21},\gamma_{10})$ 定义一个乘积 $\hat{\mathfrak{m}}_2$，其中输入也可以是最大Morse Reeb弦，但是

请注意，更一般地定义 $\hat{\mathfrak{m}}_2(\gamma_{21}\boldsymbol{a}_1, \gamma_{10}\boldsymbol{a}_0)$ 的规则与乘积 $\check{\mathfrak{m}}_2$的规则相同。也就是说，输出将包含词语 $\boldsymbol{a}_0$ 和 $\boldsymbol{a}_1$，位于通过逆时针沿着定义 $\hat{\mathfrak{m}}_2(\gamma_{21}, \gamma_{10})$ 时所涉及的伪全纯圆盘的边界而得到的一个更大的纯黎布弦单词中。

现在，我们来构造 $\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1)$上的这个乘积。由 Λ 的一个三份拷贝，我们定义一个映射

$$\hat{\mathfrak{m}}_2 : \widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_1, \Lambda_2) \otimes \widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1) \to \widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_2)$$

通过对图5所示的两层伪全纯楼计数。更确切地说，对于 $\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 的生成元 γ_{10}，x_{01}，以及 $\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_1, \Lambda_2)$ 的生成元 γ_{21}，x_{12}，有：

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathfrak{m}}_2(\gamma_{21}, \gamma_{10}) = \\
&\sum_{\substack{\beta_{12}\in\mathcal{R}^l(\Lambda_1,\Lambda_2)\\ \cup\{y_{12}\}}} \sum_{\substack{\boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_1'\\ \boldsymbol{\delta}_2,\boldsymbol{\delta}_2'}} \#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{012}}(x_{02};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{10},\boldsymbol{\delta}_1,\beta_{12},\boldsymbol{\delta}_2')\cdot\#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{12}}(\beta_{12};\boldsymbol{\delta}_1',\gamma_{21},\boldsymbol{\delta}_2)\cdot x_{02}\,\boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{\delta}_1'\,\boldsymbol{\delta}_2\,\boldsymbol{\delta}_2' \\
&+\sum_{\gamma_{20}}\sum_{\substack{\beta_{12}\in\mathcal{R}^l(\Lambda_1,\Lambda_2)\\ \cup\{y_{12}\}}} \sum_{\substack{\boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_1'\\ \boldsymbol{\delta}_2,\boldsymbol{\delta}_2'}} \#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{012}}(\gamma_{20};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{10},\boldsymbol{\delta}_1,\beta_{12},\boldsymbol{\delta}_2')\#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{12}}(\beta_{12};\boldsymbol{\delta}_1',\gamma_{21},\boldsymbol{\delta}_2)\cdot\gamma_{20}\,\boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{\delta}_1'\,\boldsymbol{\delta}_2\,\boldsymbol{\delta}_2'
\end{aligned}$$

$$\hat{\mathfrak{m}}_2(\gamma_{21}, x_{01}) = \sum_{\beta_{12}} \sum_{\substack{\boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_1'\\ \boldsymbol{\delta}_2,\boldsymbol{\delta}_2'}} \#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{012}}(x_{02};\boldsymbol{\delta}_0,x_{01},\boldsymbol{\delta}_1,\beta_{12},\boldsymbol{\delta}_2')\#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{12}}(\beta_{12};\boldsymbol{\delta}_1',\gamma_{21},\boldsymbol{\delta}_2)\cdot x_{02}\,\boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{\delta}_1'\,\boldsymbol{\delta}_2\,\boldsymbol{\delta}_2'$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathfrak{m}}_2(x_{12}, \gamma_{10}) &= \sum_{\beta_{12}} \sum_{\substack{\boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_1'\\ \boldsymbol{\delta}_2,\boldsymbol{\delta}_2'}} \#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{012}}(x_{02};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{10},\boldsymbol{\delta}_1,\beta_{12},\boldsymbol{\delta}_2')\#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{12}}(\beta_{12};\boldsymbol{\delta}_1',x_{12},\boldsymbol{\delta}_2)\cdot x_{02}\,\boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{\delta}_1'\,\boldsymbol{\delta}_2\,\boldsymbol{\delta}_2' \\
&+\sum_{\gamma_{20},\beta_{12}} \sum_{\substack{\boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_1'\\ \boldsymbol{\delta}_2,\boldsymbol{\delta}_2'}} \#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{012}}(\gamma_{20};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{10},\boldsymbol{\delta}_1,\beta_{12},\boldsymbol{\delta}_2')\#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{12}}(\beta_{12};\boldsymbol{\delta}_1',x_{12},\boldsymbol{\delta}_2)\cdot\gamma_{20}\,\boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{\delta}_1'\,\boldsymbol{\delta}_2\,\boldsymbol{\delta}_2'
\end{aligned}$$

$$\hat{\mathfrak{m}}_2(x_{12}, x_{01}) = 0$$

注意，在 $\hat{\mathfrak{m}}_2(\gamma_{21}, x_{01})$ 和 $\hat{\mathfrak{m}}_2(x_{12}, \gamma_{10})$的定义中，“连接”弦 β_{12} 会自动属于 $\mathcal{R}^l(\Lambda_1, \Lambda_2) \cup \{y_{12}\}$。第一种情况下，出于作用量方面的考虑，它必须是 Morse 弦；而由于次数方面的原因，它不可能是 x_{12}。第二种情况下，出于次数方面的原因，它也不可能是 x_{12}。

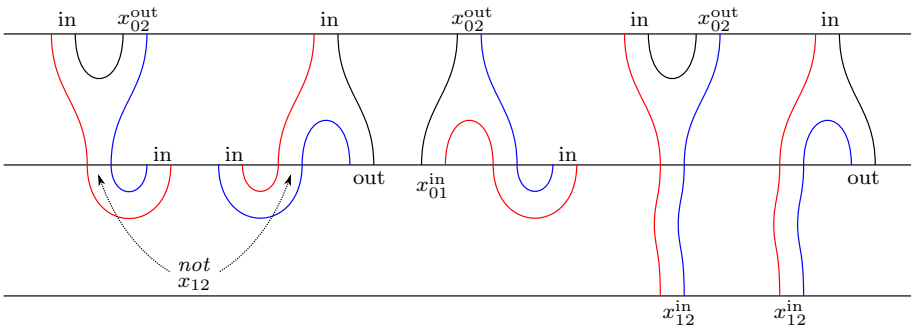


FIGURE 5. 对乘积 $\hat{\mathfrak{m}}_2$ 在 $\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0$ 上作出贡献的伪全纯楼, $\Lambda_1)$

根据 [Leg，命题 2]我们可以检查该映射 $\hat{\mathfrak{m}}_2$ 是 0 次的。于是有：

命题7.1。映射 $\hat{\mathfrak{m}}_2$满足 $\hat{\mathfrak{m}}_1 \circ \hat{\mathfrak{m}}_2 + \hat{\mathfrak{m}}_2(\text{恒等映射} \otimes \hat{\mathfrak{m}}_1) + \hat{\mathfrak{m}}_2(\hat{\mathfrak{m}}_1 \otimes \text{恒等映射}) = 0$，即 $\hat{\mathfrak{m}}_2$下降为同调上的良定义映射。

证明。我们对每种输入对的类型分别证明该命题。对于一对输入 $(\gamma_{21},\ \gamma_{10})$，我们通过考察以下模空间乘积的紧化边界中的伪全纯楼的代数贡献，得到莱布尼茨法则：

$$\mathcal{M}^1(x_{02};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{10},\boldsymbol{\delta}_1,\beta_{12},\boldsymbol{\delta}'_2)\times\mathcal{M}^0(\beta_{12};\boldsymbol{\delta}'_1,\gamma_{21},\boldsymbol{\delta}_2) \tag{7}$$

$$\mathcal{M}^0(x_{02};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{10},\boldsymbol{\delta}_1,\beta_{12},\boldsymbol{\delta}'_2)\times\mathcal{M}^1(\beta_{12};\boldsymbol{\delta}'_1,\gamma_{21},\boldsymbol{\delta}_2) \tag{8}$$

$$\mathcal{M}^1(\gamma_{20};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{10},\boldsymbol{\delta}_1,\beta_{12},\boldsymbol{\delta}'_2)\times\mathcal{M}^0(\beta_{12};\boldsymbol{\delta}'_1,\gamma_{21},\boldsymbol{\delta}_2) \tag{9}$$

$$\mathcal{M}^0(\gamma_{20};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{10},\boldsymbol{\delta}_1,\beta_{12},\boldsymbol{\delta}'_2)\times\mathcal{M}^1(\beta_{12};\boldsymbol{\delta}'_1,\gamma_{21},\boldsymbol{\delta}_2) \tag{10}$$

关于 (7) 和 (8) 的紧化边界中的楼，见图 6；关于 (9) 和 (10) 的紧化边界中的楼，见图 7。在每种情况下（以及证明其余部分的所有情形中），我们都省略绘制出现两次的楼，即同时出现在 (7) 和 (8) 的边界中，或同时出现在 (9) 和 (10) 的边界中的楼，因为它们在 $\mathbb{Z}_2$ 上彼此抵消。

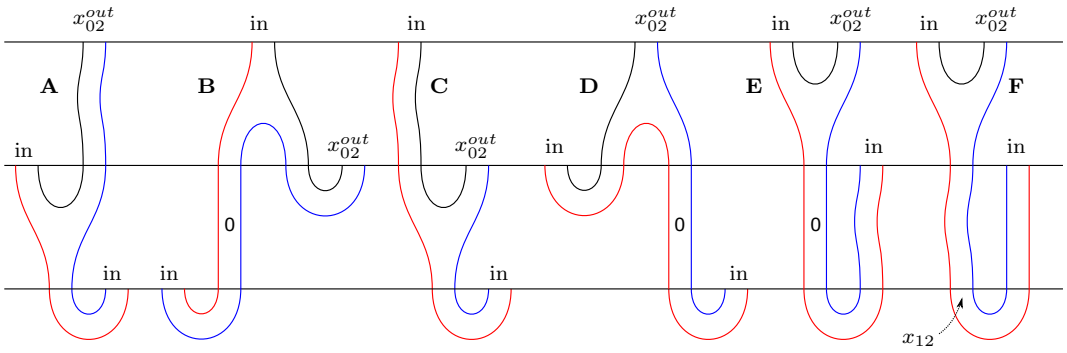


FIGURE 6. (7) 和 (8) 的边界中的伪全纯楼。

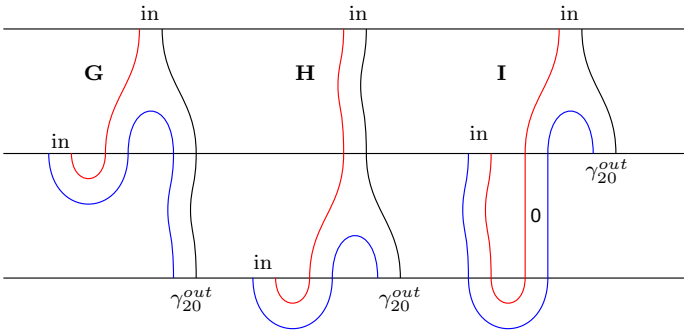


FIGURE 7. (9) 和 (10) 的边界中的伪全纯楼。

根据引理 6.1 (3)，楼 **A** 要么从不出现，要么出现两次，因此我们可以忽略它。

现在考虑建筑**B**。移除包含输出 x_{02} 端点的香蕉后，得到一个对 $\widehat{\mathfrak{m}}_2(\gamma_{21},\gamma_{10})$ 的分量有贡献的建筑，其取值于$\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0,\Lambda_2)$ 的生成元，形式为 $\beta_{20}\,\boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{\delta}_2$。添加在 x_{02} 处具有正渐近的香蕉，并使用引理 6.1 (2)，我们得到该建筑贡献了 $x_{02}\beta\,\boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{\delta}_2+x_{02}\,\boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{\delta}_2\,\beta$，其中 β

是与 β_{01}对应的 Λ 纯Reeb弦。因此，这类**B** 楼与**G**共同贡献于 $\hat{\mathfrak{m}}_1 \circ \hat{\mathfrak{m}}_2(\gamma_{21}, \gamma_{10})$。

类型为 **C** 和 **D**的楼，连同 **H** 一起对 $\hat{\mathfrak{m}}_2(\gamma_{21},\ \hat{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{10}))$有贡献。实际上，这里唯一稍微微妙的事情是关于楼 **D**的。根据假设，从 Λ_2 到 Λ_1 的混合连接弦不是最大MorseReeb弦 x_{12}。但是，如果这样的楼存在，那么出于作用量的原因，这条连接弦必须是最小Morse 弦 y_{12}，因为该楼中具有三个混合渐近条件的分量在 Morse弦 x_{02}处具有一个正渐近。出于次数的原因，从 Λ_1 到 Λ_0 的连接混合弦随后必须是 x_{01}，而以它为正渐近的香蕉对 $\hat{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{01})$ 中取值于 $\langle x_{01}\rangle^{cyc}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}$ 的分量有贡献（对于满足 $\boldsymbol{a} = 1$的元素 $\gamma_{10}\boldsymbol{a}$，这个分量实际上为零，但在一般情形下并非如此）。

最后，考虑楼 **F**。通常，这类楼会成对抵消，但由于关于连接弦的假设，**F** 型楼会由香蕉退化而产生，却不会由具有三个混合渐近条件的顶层退化而产生。于是可见，楼 **E**、**F** 和 **I** 对 $\hat{\mathfrak{m}}_2(\hat{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{21}), \gamma_{10})$ 有贡献，因此我们证明了输入对 $(\gamma_{21}, \gamma_{10})$ 满足莱布尼茨法则。

对于输入对 (γ_{21}, x_{01})，莱布尼茨法则限制为 $\hat{\mathfrak{m}}_2(\hat{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{21}), x_{01}) = 0$，因为 $\hat{\mathfrak{m}}_1$ 在最大 Reeb 弦上消失。考虑以下模空间乘积的紧化边界中的伪全纯楼：

$$\mathcal{M}^1(x_{02}; \boldsymbol{\delta}_0, x_{01}, \boldsymbol{\delta}_1, \beta_{12}, \boldsymbol{\delta}_2') \times \mathcal{M}^0(\beta_{12}; \boldsymbol{\delta}_1', \gamma_{21}, \boldsymbol{\delta}_2) \tag{11}$$

$$\mathcal{M}^0(x_{02}; \boldsymbol{\delta}_0, x_{01}, \boldsymbol{\delta}_1, \beta_{12}, \boldsymbol{\delta}_2') \times \mathcal{M}^1(\beta_{12}; \boldsymbol{\delta}_1', \gamma_{21}, \boldsymbol{\delta}_2) \tag{12}$$

这些楼的示意图见图 8。和之前一样，第一个楼可以忽略。由于作用量的原因，第二个楼也不会出现。最后，第三个楼对 $\hat{\mathfrak{m}}_2(\hat{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{21}), x_{01})$ 有贡献。对于输入对 (x_{12}, γ_{10})，莱布尼茨法则限制为

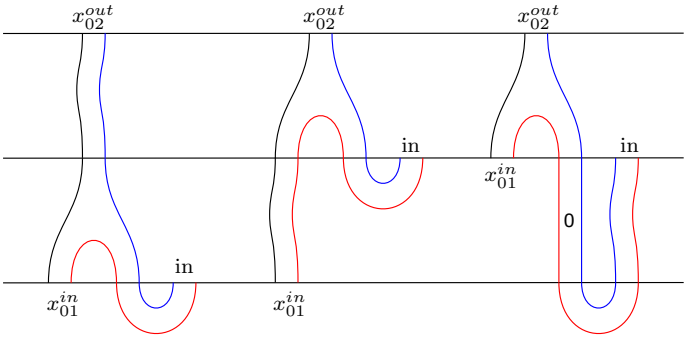


FIGURE 8. (11) 和 (12) 的边界中的伪全纯楼。

$\hat{\mathfrak{m}}_1 \circ \hat{\mathfrak{m}}_2(x_{12},\ \gamma_{10}) + \hat{\mathfrak{m}}_2(x_{12},\ \hat{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{10})) = 0$。我们考虑紧化的边界的

$$\mathcal{M}^1(x_{02}; \boldsymbol{\delta}_0, \gamma_{10}, \boldsymbol{\delta}_1, \beta_{12}, \boldsymbol{\delta}_2') \times \mathcal{M}^0(\beta_{12}; \boldsymbol{\delta}_1', x_{12}, \boldsymbol{\delta}_2) \tag{13}$$

$$\mathcal{M}^0(x_{02}; \boldsymbol{\delta}_0, \gamma_{10}, \boldsymbol{\delta}_1, \beta_{12}, \boldsymbol{\delta}_2') \times \mathcal{M}^1(\beta_{12}; \boldsymbol{\delta}_1', x_{12}, \boldsymbol{\delta}_2) \tag{14}$$

以及.....的

$$\mathcal{M}^1(\gamma_{20}; \boldsymbol{\delta}_0, \gamma_{10}, \boldsymbol{\delta}_1, \beta_{12}, \boldsymbol{\delta}_2') \times \mathcal{M}^0(\beta_{12}; \boldsymbol{\delta}_1', x_{12}, \boldsymbol{\delta}_2) \tag{15}$$

$$\mathcal{M}^0(\gamma_{20}; \boldsymbol{\delta}_0, \gamma_{10}, \boldsymbol{\delta}_1, \beta_{12}, \boldsymbol{\delta}_2') \times \mathcal{M}^1(\beta_{12}; \boldsymbol{\delta}_1', x_{12}, \boldsymbol{\delta}_2) \tag{16}$$

whos不同的分量示意于图9中。通过类似于之前的论证，

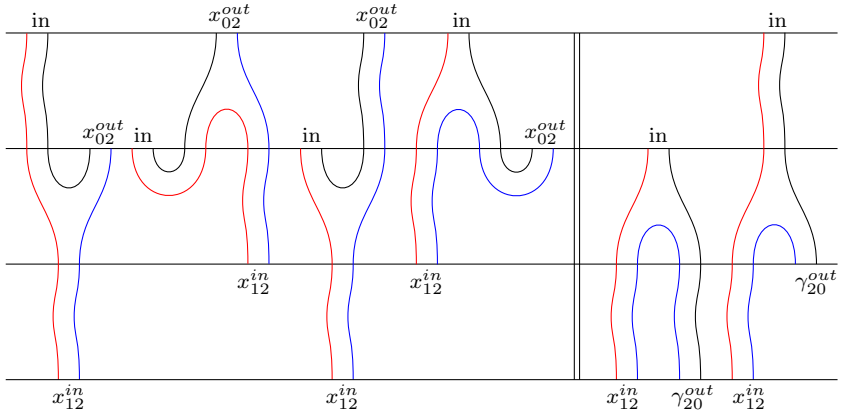


FIGURE 9. 左：式 (13) 和 (14) 边界中的伪全纯楼；右：式 (15) 和 (16) 边界中的伪全纯楼。

第二座和第三座楼的代数贡献消失。第一座和第六座楼对 $\hat{\mathfrak{m}}_2(x_{12},\ \hat{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{10}))$有贡献，而第四座和第五座楼对 $\hat{\mathfrak{m}}_1\circ\hat{\mathfrak{m}}_2(x_{12},\ \gamma_{10})$有贡献。最后，对于一对 $(x_{12},\ x_{01})$莱布尼茨法则中的所有项都按定义消失。□

注7.1。注意，$\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$ 上的乘积是通过计数双层伪全纯楼来定义的，这些楼出现在一维模空间紧化的边界中。特别地，为定义乘积而选取计数的楼并无规范选择，但在同伦意义下有选择。特别地，我们可以定义一个映射

$$\hat{\boldsymbol{d}}_2 : \widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_1,\Lambda_2)\otimes\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0,\Lambda_1)\to\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0,\Lambda_2)$$

由 $\hat{\boldsymbol{d}}_2(a_1,\ a_0)=\hat{\mathfrak{m}}_2(a_1,\ a_0)$ 对于 $(a_1,\ a_0)$ 属于类型 $(\gamma_{21},\ \gamma_{10}),\ x_{01})$ 或 $(x_{12},\ x_{01})$，然后设定

$$\hat{\boldsymbol{d}}_2(x_{12},\gamma_{01})=\sum_{\beta_{01}}\sum_{\substack{\boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_0'\\ \boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_1',\boldsymbol{\delta}_2}}\#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{012}}(x_{02};\boldsymbol{\delta}_0,\beta_{01},\boldsymbol{\delta}_1',x_{12},\boldsymbol{\delta}_2)\#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{01}}(\beta_{01};\boldsymbol{\delta}_0',\gamma_{10},\boldsymbol{\delta}_1)\cdot x_{02}\,\boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{\delta}_0'\,\boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{\delta}_1'\,\boldsymbol{\delta}_2$$

参见图10。映射 $\hat{\boldsymbol{d}}_2$ 和 $\hat{\mathfrak{m}}_2$ 通过一个（次数为 -1的）同伦 h 同伦：$\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_1,\Lambda_2)\otimes\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0,\Lambda_1)\to\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0,\Lambda_2)$ 定义为

$$\begin{aligned}h(x_{12}\boldsymbol{a}_1,\gamma_{01}\boldsymbol{a}_0)=&\sum_{\boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2}\#\mathcal{M}^0(x_{02};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{10},\boldsymbol{\delta}_1,x_{12},\boldsymbol{\delta}_2)\cdot x_{02}\,\boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{a}_0\,\boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{\delta}_2\\&+\sum_{\gamma_{20}}\sum_{\boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{\delta}_2}\#\mathcal{M}^0(\gamma_{20};\boldsymbol{\delta}_0,\gamma_{10},\boldsymbol{\delta}_1,x_{12},\boldsymbol{\delta}_2)\cdot\gamma_{20}\,\boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{a}_0\,\boldsymbol{\delta}_1\,\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{\delta}_2\end{aligned}$$

且 h对其他生成元对均为零。事实上，通过研究用于定义 h的那类一维模空间的紧致- 化的边界，可以检验

$$\hat{\mathfrak{m}}_2+\hat{d}_2=h(\mathrm{id}\otimes\hat{\mathfrak{m}}_1)+h(\hat{\mathfrak{m}}_1\otimes\mathrm{id})+\hat{\mathfrak{m}}_1\circ h$$

尽管用于定义 $\boldsymbol{d}_2$ 的伪全纯楼具有某种“对称性”（即对 $\boldsymbol{d}_2(\gamma_{21},\ x_{01})$ 和 $\boldsymbol{d}_2(x_{12},\ \gamma_{10})$ 有贡献的楼彼此对称），我们还是选择了其他楼来定义乘积 $\hat{\mathfrak{m}}_2$。这样选择的主要原因是，之后更容易找到公式，将这个乘积推广为满足 A_∞-方程的映射族 $\{\hat{\mathfrak{m}}_d\}$，见第7.4节。

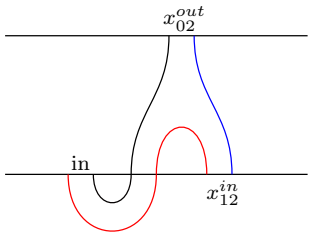


FIGURE 10. 对 $\boldsymbol{d}_2(x_{12},\ \gamma_{01})$ 有贡献的伪全纯楼。

注7.2。 对以长弦为输入和输出的乘积$\hat{\mathfrak{m}}_2$ 分量有贡献的伪全纯楼，也可用于在线性化勒让德接触同调复形上构造乘积结构；当勒让德子流形水平可位移时，该乘积将具有单位元。

众所周知，在线性化的勒让德子流形接触上同调上存在一种（非幺）乘积结构（甚至是一种 A_∞-结构），它最初在 [CKE+11] 中定义，后来在 [BC14]中推广到了双线性化情形。这一乘积可以直接由C-E代数计算，也可以等价地通过计数边界位于三份拷贝 $\Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ 的Λ 、负渐近于一条从 Λ_0 到 Λ_1 的弦和一条从 Λ_1 到 Λ_2 的弦（输入），并正渐近于一条从 Λ_0 到 Λ_2 的弦（输出）的伪全纯圆盘来计算；这些圆盘还可能具有经过增广的纯负渐近行为。在这种情形下，所考虑的混合弦从来不是 Morse 弦。

在 [NRS+20]中，对于 $\mathbb{R}^3$ 中的纽结，作者考虑由从Λ_1 到 Λ_0 的 Λ 的二重副本中的混合弦生成的复形，并将其记为$\mathrm{Hom}_+(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$。随后，他们通过计数与上述类似的曲线（两个负混合输入和一个正混合输出）在这个复形上定义了一个乘积（以及一个 A_∞-结构），但主要区别在于，在此情形下，Morse 弦可以作为输入和输出。复形 $\mathrm{Hom}_+(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ 的同调同构于 Λ的勒让德接触同调。这是由二重副本的复形的无环性推出的；对于 $\mathbb{R}^3$中的纽结，该复形具有无环性，见 [NRS+20，命题5.4]。特别地，Hom_+ 上的乘积并不能规范地在勒让德接触同调上给出一个乘积。

根据 [CDRGG15，命题2.7]，由增广 $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ 对 DG-双模 $(C_+(\Lambda_0, \Lambda_1), \boldsymbol{\Delta}_1)$进行的（双）线性化，典范同构于双线性化的勒让德接触同调复形 $LCC^{\varepsilon_0,\varepsilon_1}_*(\Lambda)$。我们声称，乘积 $\hat{\mathfrak{m}}_2$的仅长弦渐近条件分量在通过增广进行线性化后，在勒让德接触同调复形上给出一个乘积；其证明示意于图 7 中。在存在Λ 的填充且满足水平可置换性假设的情况下，可以证明这个勒让德接触同调上的新乘积同构于Hom_+ 复形上的乘积，因为二者都同构于该填充的奇异上同调上的乘积（通过 Ekholm–Seidel 同构 [Ekh12，DR16a]）。我们将在与 GeorgiosDimitroglou-Rizell 合作的一篇后续论文中更精确地研究这一点，在那里我们描述由 C-E 代数承载的相对卡拉比–丘结构 。这一相对结构尤其使我们能够在没有填充的情况下证明 LCH_* 与 Hom_+ 上的乘积之间的同构。

7.3. 卡拉比–丘映射下的乘积。 考虑在 $\mathbb{Z}_2$-模上诱导的卡拉比–丘映射 CY，记作 $\mathrm{CY}_1 : \widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1) \to \check{C}_-^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1)$。

T定理 7.1。 映射 CY_1 保持同调中的乘积结构，即关系

$$\mathrm{CY}_1 \circ \hat{\mathfrak{m}}_2 + \check{\mathfrak{m}}_2\big(\mathrm{CY}_1, \mathrm{CY}_1\big) = 0$$

在同调中成立。

证明。 在此证明中，我们将使用记号 $\hat{\mathfrak{m}}_2^+$ 和 $\hat{\mathfrak{m}}_2^x$ 分别表示 $\hat{\mathfrak{m}}_2$ 中取值于 $C_+^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 和 $\langle x_{01}\rangle_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}^{cyc}$ 的分量。

给定 Λ 的三份拷贝 $\Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2$，我们定义一个（次数为 -1）映射

$$\mathrm{CY}_2 : \widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_1, \Lambda_2) \otimes \widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1) \to \check{C}_-^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_2)$$

通过对图 11 所示的伪全纯楼进行计数。与乘积$\hat{\mathfrak{m}}_2$ 类似，我们要求楼中从 Λ_2 到 Λ_1 的连接弦不是最大Morse Reeb弦 x_{12}。不过请注意，出于作用量方面的原因，对于**C** 型和**D**型的楼，这一条件会自动满足。

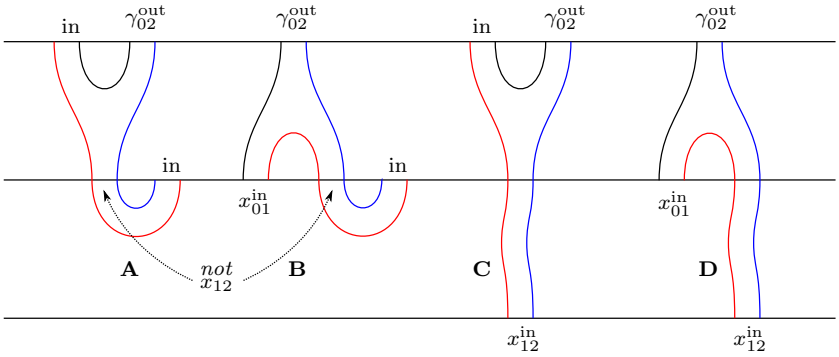


FIGURE 11. 对映射 CY_2有贡献的伪全纯楼。

通过考察图11 中类型 **A**、**B**、**C** 和**D** 的模空间的一维乘积的紧化的边界中的楼，可以证明满足以下关系：

$$\check{\mathfrak{m}}_1 \circ \mathrm{CY}_2 + \check{\mathfrak{m}}_2\big(\mathrm{CY}_1 \otimes \mathrm{CY}_1\big) + \mathrm{CY}_1 \circ \hat{\mathfrak{m}}_2 + \mathrm{CY}_2(\mathrm{id} \otimes \hat{\mathfrak{m}}_1) + \mathrm{CY}_2(\hat{\mathfrak{m}}_1 \otimes \mathrm{id}) = 0 \tag{17}$$

这表明 CY_1 保留同调中的乘积。在图12中，我们描绘了 A 型模空间的一维乘积的紧化边界中的不同类型的楼。A1 型楼以及 A3型楼中连接弦从 Λ_1 到 Λ_0 且为 x_{01}的那些楼，对$\mathrm{CY}_2(\gamma_{21}, \hat{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{10}))$作出贡献。当连接弦从 Λ_2 到 Λ_0且为 x_{02}时，A2 型楼对$\mathrm{CY}_1 \circ \hat{\mathfrak{m}}_2^x(\gamma_{21}, \gamma_{10})$ 作出贡献；否则，它们对 $\check{\mathfrak{m}}_1 \circ \mathrm{CY}_2(\gamma_{21}, \gamma_{10})$ 作出贡献。当连接弦从 Λ_1 到 Λ_0 不是 x_{01} 时，A3型楼对 $\check{\mathfrak{m}}_2(\mathrm{CY}_1(\gamma_{21}), \mathrm{CY}_1(\gamma_{10}))$ 作出贡献。A4 型楼对$\mathrm{CY}_1 \circ \hat{\mathfrak{m}}_2^+(\gamma_{21}, \gamma_{10})$ 作出贡献，最后，A5 和 A6 型楼对 $\mathrm{CY}_2(\hat{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{21}), \gamma_{10})$ 作出贡献。这给出了输入对 $(\gamma_{21}, \gamma_{10})$ 的关系 (17)。在图 13 中，我们考察 B 型模空间的一维乘积的边界中的断裂圆盘。当从 Λ_2 到 Λ_0 的连接弦是最大值 Morse 弦 x_{02} 时，B1型楼对 $\mathrm{CY}_1 \circ \hat{\mathfrak{m}}_2^x(\gamma_{21}, x_{01})$ 作出贡献；否则，它们对 $\check{\mathfrak{m}}_1 \circ \mathrm{CY}_2(\gamma_{21}, x_{01})$ 作出贡献。B2 型楼对 $\check{\mathfrak{m}}_2(\mathrm{CY}_1(\gamma_{21}), \mathrm{CY}_1(x_{01}))$ 作出贡献（连接弦中没有一个是最大值）。最后，B3 和B4 型楼对 $\mathrm{CY}_2(\hat{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{21}), x_{01})$ 作出贡献。这些贡献之和给出了输入对 (γ_{21}, x_{01}) 的关系 17（注意，根据定义，关系中的某些项为零）。类似地，通过考察 C型和D 型模空间的一维乘积的边界中的断裂圆盘，可以分别对输入对 (x_{12}, γ_{10}) 和 (x_{12}, x_{01}) 验证这一关系，见图14。

□

由定理 7.1 可推得，乘积 $\hat{\mathfrak{m}}_2$ 在同调中有一个单位元，它由 $\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 中的任意一个圈表示；该圈经映射 CY_1映至最小Morse Reeb弦 y_{01}。

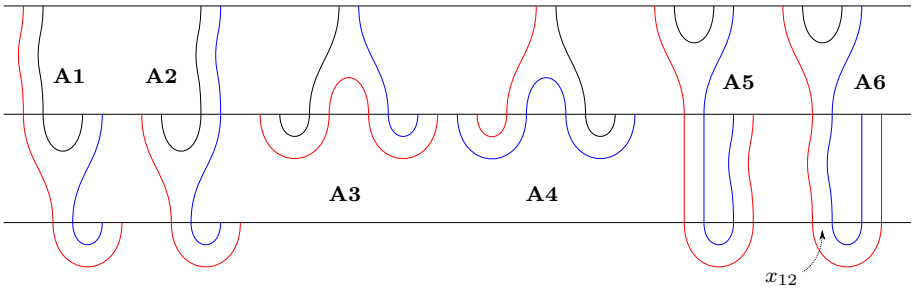


FIGURE 12. A 型模空间乘积的一维边界中的伪全纯楼。

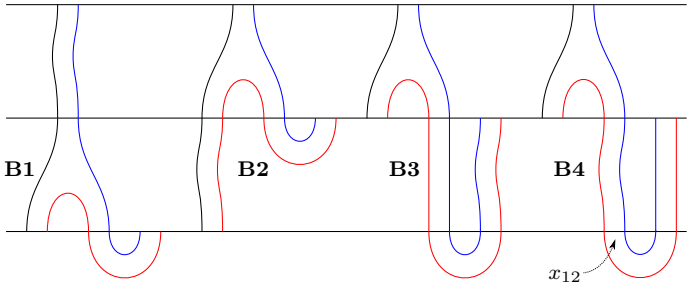


FIGURE 13. 维数为1的模空间乘积边界中的伪全纯楼，类型 **B**。

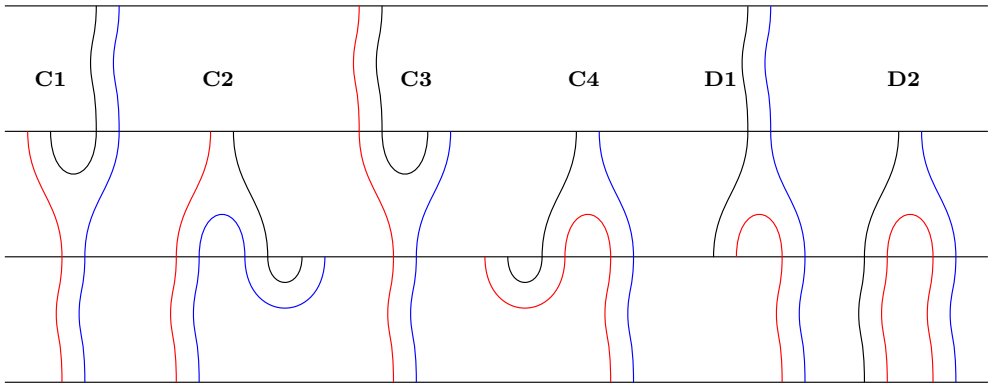


FIGURE 14. 类型 **C** 和 **D** 的一维乘积模空间边界中的伪全纯楼。

7.4. A_∞**-结构。** 我们可以更进一步，对每个 $d \geqslant 3$ 定义映射 $\check{\mathfrak{m}}_d$ 和 $\hat{\mathfrak{m}}_d$，其次数为$2-d$；这些映射通过计数边界位于 $(d+1)$-份 Λ 上的伪全纯圆盘来定义（其定义方式与 2-份和 3-份类似）。给定 Λ的一个 $(d+1)$-份 $\Lambda_0 \cup \cdots \cup \Lambda_d$，这些映射

$$\check{\mathfrak{m}}_d : \check{C}_-^{cyc}(\Lambda_{d-1}, \Lambda_d) \otimes \cdots \otimes \check{C}_-^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1) \to \check{C}_-^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_d)$$

由具有与输入相对应的混合负渐近行为以及一个作为输出的正渐近条件的伪全纯圆盘的计数给出。映射 $\check{\mathfrak{m}}_d$ 的次数为 $2-d$。这些映射满足 A_∞-方程这一事实可追溯至 [CKE+11、BC14]。在我们的情形中，必须格外注意C-E代数中的系数，但其处理方式与我们在第 7.2 节处理的情形完全相同。

现在定义映射 $\widehat{\mathfrak{m}}_d$。首先，我们将映射$\mathbf{b}_1$ 和 $\mathbf{\Delta}_1$ 扩展为高阶映射

$$\mathbf{b}_d, \mathbf{\Delta}_d : \mathrm{RFC}^{cyc}(\Lambda_{d-1}, \Lambda_d) \otimes \cdots \otimes \mathrm{RFC}^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1) \to \mathrm{RFC}^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_d)$$

对于 $d \geqslant 1$ 定义如下。这些映射的次数为 $2-d$，并在 [Leg 第 8], 节中讨论过，但我们在此重述其定义。对于由 d个元素组成的元组 $(c_{d-1}\boldsymbol{a}_{d-1}, \ldots, c_0\boldsymbol{a}_0) \in \mathrm{RFC}^{cyc}(\Lambda_{d-1}, \Lambda_d) \otimes \cdots \otimes \mathrm{RFC}^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1)$，其中 c_j 是混合弦， $\boldsymbol{a}_j$ 是纯 Reeb 弦构成的词，定义如下。

$$\mathbf{b}_d(c_{d-1}\boldsymbol{a}_{d-1}, \ldots, c_0\boldsymbol{a}_0) = \sum_{\substack{\gamma_{0d} \\ \boldsymbol{\delta}_0, \ldots, \boldsymbol{\delta}_d}} \#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{0\ldots d}}(\gamma_{0d}; \boldsymbol{\delta}_0, c_0, \boldsymbol{\delta}_2, \ldots, \boldsymbol{\delta}_{d-1}, c_{d-1}, \boldsymbol{\delta}_d) \cdot \gamma_{0d}\, \boldsymbol{\delta}_0\, \boldsymbol{a}_0\, \boldsymbol{\delta}_1 \ldots \boldsymbol{a}_{d-1}\, \boldsymbol{\delta}_d$$

$$\mathbf{\Delta}_d(c_{d-1}\boldsymbol{a}_{d-1}, \ldots, c_0\boldsymbol{a}_0) = \sum_{\substack{\gamma_{d0} \\ \boldsymbol{\delta}_0, \ldots, \boldsymbol{\delta}_d}} \#\mathcal{M}^0_{\Lambda_{0\ldots d}}(\gamma_{d0}; \boldsymbol{\delta}_0, c_0, \boldsymbol{\delta}_2, \ldots, \boldsymbol{\delta}_{d-1}, c_{d-1}, \boldsymbol{\delta}_d) \cdot \gamma_{d0}\, \boldsymbol{\delta}_0\, \boldsymbol{a}_0\, \boldsymbol{\delta}_1 \ldots \boldsymbol{a}_{d-1}\, \boldsymbol{\delta}_d$$

注意，对于映射 $\mathbf{b}_d$，输出中的混合弦是用于定义该映射的伪全纯圆盘的正渐近，而对于 $\mathbf{\Delta}_d$，它是负渐近。因此，出于能量原因， $\mathbf{\Delta}_d(c_{d-1}\boldsymbol{a}_{d-1}, \ldots, c_0\boldsymbol{a}_0)$ 自动为 0，若对所有 $0 \leqslant j \leqslant d-1$ 都有$c_j \in C(\Lambda_j, \Lambda_{j+1})$。

记号 7.3。 我们将用 $\mathbf{b}_d^x$ 表示取值于 $\langle x_{0d} \rangle^{cyc}_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}$ 的$\mathbf{b}_d$ 分量，并用$\mathbf{b}_d^\vee$ 表示取值于 $\check{C}^{cyc}_-(\Lambda_0, \Lambda_d)$ 的分量。

我们作出以下观察：

- 作为非分次映射，映射 CY_1 等于映射 $\mathbf{b}_1^\vee$限制到 $\widehat{C}^{cyc}_+$ 的结果，即它由对具有两个正渐近的香蕉进行计数来定义。• 映射 $\check{\mathfrak{m}}_d$ 等于将 $\mathbf{b}_d^\vee$限制到 $\check{C}^{cyc}_-(\Lambda_{d-1}, \Lambda_d) \otimes \cdots \otimes \check{C}^{cyc}_-(\Lambda_0, \Lambda_1)$的结果。

使用这些记号，我们还可以将微分 $\widehat{\mathfrak{m}}_1$ 和乘积 $\widehat{\mathfrak{m}}_2$ 改写如下（现在我们再次省略元素的完整记号，去掉纯 Reeb 弦一词）：

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{m}}_1(\gamma_{10}) &= \mathbf{\Delta}_1(\gamma_{10}) + \mathbf{b}_1^x(\gamma_{10}) \\
\widehat{\mathfrak{m}}_2(\gamma_{21}, \gamma_{10}) &= \mathbf{b}_2^x\big(\mathrm{CY}_1(\gamma_{21}), \gamma_{10}\big) + \mathbf{\Delta}_2\big(\mathrm{CY}_1(\gamma_{21}), \gamma_{10}\big) \\
\widehat{\mathfrak{m}}_2(\gamma_{21}, x_{01}) &= \mathbf{b}_2^x\big(\mathrm{CY}_1(\gamma_{21}), x_{01}\big) \\
\widehat{\mathfrak{m}}_2(x_{12}, \gamma_{10}) &= \mathbf{b}_2^x\big(\mathrm{CY}_1(x_{12}), \gamma_{10}\big) + \mathbf{\Delta}_2\big(\mathrm{CY}_1(x_{12}), \gamma_{10}\big)
\end{aligned}$$

注意到，由于作用量的原因， $\mathbf{\Delta}_2\big(\mathrm{CY}_1(\gamma_{21}), x_{01}\big) = 0$ 以及 $\mathbf{b}_2^x\big(x_{12}, \mathrm{CY}_1(x_{01})\big) = \mathbf{\Delta}_2\big(\mathrm{CY}_1(x_{12}), x_{01}\big) = 0$。因此，我们可以为乘积写出一个紧凑的公式

$$\widehat{\mathfrak{m}}_2 = \big(\mathbf{b}_2^x + \mathbf{\Delta}_2\big)\big(\mathrm{CY}_1 \otimes \mathrm{id}\big)$$

最后，注意到映射 CY_2 可以重写为$\mathrm{CY}_2 = \mathbf{b}_2^\vee\big(\mathrm{CY}_1 \otimes \mathrm{id}\big)$。

注 7.3. 严格来说，映射 $\widehat{\mathfrak{m}}_1$ 的定义域和值域都是 $\mathbb{Z}_2$-模 $\widehat{C}^{cyc}_+(\Lambda_0, \Lambda_1)$，因此它实际上等于映射 $\mathbf{\Delta}_1$ 和 $\mathbf{b}_1^x$ 的限制映射经移位 *1* 后的和（这些限制映射的定义域为 $\widehat{C}^{cyc}_+(\Lambda_0, \Lambda_1)[-1]$）。因此，对于 $\widehat{\mathfrak{m}}_1, \widehat{\mathfrak{m}}_2$、$\mathrm{CY}_1, \mathrm{CY}_2$的公式，以及我们下文定义的映射，读者应将这些等式视为非分次映射之间的等式。

现在我们推广这些公式，也就是说，我们定义映射

$$\widehat{\mathfrak{m}}_d : \widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_{d-1},\Lambda_d)\otimes\cdots\otimes\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0,\Lambda_1)\to\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0,\Lambda_d)$$
$$\mathrm{CY}_d : \widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_{d-1},\Lambda_d)\otimes\cdots\otimes\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0,\Lambda_1)\to\check{C}_-^{cyc}(\Lambda_0,\Lambda_d)$$

对于 Λ 的一个 $(d+1)$ 副本，通过

$$\widehat{\mathfrak{m}}_d=\sum_{j=2}^{d}\sum_{\substack{1\leqslant i_2,\dots,i_j\leqslant d-1\\ i_2+\cdots+i_j=d-1}}\left(\mathbf{b}_j^x+\mathbf{\Delta}_j\right)\Big(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\mathrm{id}\Big)\tag{18}$$

$$\mathrm{CY}_d=\sum_{j=2}^{d}\sum_{\substack{1\leqslant i_2,\dots,i_j\leqslant d-1\\ i_2+\cdots+i_j=d-1}}\mathbf{b}_j^{\vee}\left(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\mathrm{id}\right)\tag{19}$$

注意， $\widehat{\mathfrak{m}}_d$ 的次数为 $2-d$ ，而 CY_d 的次数为 $1-d$。

The定理 7.2。 设 $\Lambda_0\cup\cdots\cup\Lambda_d$ 是 Λ_0 的一个 $(d+1)$ 副本。那么对于任意 $1\leqslant k\leqslant d$ 以及任意 $(k+1)$ 个整数元组 $0\leqslant s_0<\cdots<s_k\leqslant d$ 我们有：

$$\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=0}^{k-m}\widehat{\mathfrak{m}}_{k-m+1}\big(\mathrm{id}^{\otimes k-m-n}\otimes\widehat{\mathfrak{m}}_m\otimes\mathrm{id}^{\otimes n}\big)=0\tag{20}$$

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{\substack{t_1,\dots,t_r\\ t_1+\cdots+t_r=k}}\check{\mathfrak{m}}_r\big(\mathrm{CY}_{t_r}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{t_1}\big)+\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=0}^{k-m}\mathrm{CY}_{k-m+1}\big(\mathrm{id}^{\otimes k-m-n}\otimes\widehat{\mathfrak{m}}_m\otimes\mathrm{id}^{\otimes n}\big)=0\tag{21}$$

其中

- $\widehat{\mathfrak{m}}_m$ 具有定义域 $\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_{s_{n+m-1}}\ \Lambda_{s_{n+m}})\otimes\cdots\otimes\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_{s_n},\Lambda_{s_{\ n+1}})$,
- $\widehat{\mathfrak{m}}_{k-m+1}$ 和CY_{k-m+1} 具有定义域

$\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_{s_{k-1}},\Lambda_{s_k})\otimes\dots\ \widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_{s_{n+m}}\ \Lambda_{s_{n+m+1}})\otimes\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_{s_{n-1}},\Lambda_{s_n})\otimes\cdots\otimes\ \widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_{s_1},\Lambda_{s_0})$,

- 如果我们记$\tau_j=\sum_{i=1}^{j}t_i$，那么CY^{t_j} 具有定义域

$$\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_{s_{\tau_{j-1}}},\Lambda_{s_{\tau_j}})\otimes\cdots\otimes\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_{s_{\tau_{j-1}}},\Lambda_{s_{\tau_{j-1}+1}}),$$

且 $\check{\mathfrak{m}}_r$ 具有定义域

$$\check{C}_-^{cyc}(\Lambda_{s_{\tau_{r-1}}},\Lambda_{s_{\tau_r}})\otimes\cdots\otimes\check{C}_-^{cyc}(\Lambda_{s_{\tau_1}},\Lambda_{s_{\tau_2}})\otimes\check{C}_-^{cyc}(\Lambda_{s_{\tau_1}},\Lambda_{s_0}),$$

为简化记号，下文假设 $(k+1)$-元整数$(s_0,\dots,s_k)$ 是 $(0,\dots,k)$。为了证明定理 7.2，我们将使用 [Leg]中关于映射 $\mathbf{b}_d$ 和 $\mathbf{\Delta}_d$ 的结果，现回顾如下。

引理 7.1。 [Leg、引理 3和引理 5] 令 $\Lambda_0\cup\cdots\cup\Lambda_d$ 是 $(d+1)$ 的副本。那么对于任意 $1\leqslant k\leqslant d$ ，我们有：

(1) $\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=0}^{k-m}\mathbf{b}_{k-m+1}\big(\mathrm{id}^{\otimes d-m-n}\otimes(\mathbf{b}_m+\mathbf{\Delta}_m)\otimes\mathrm{id}^{\otimes n}\big)=0$

(2) $\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=0}^{k-m}\mathbf{\Delta}_{k-m+1}\big(\mathrm{id}^{\otimes d-m-n}\otimes(\mathbf{b}_m+\mathbf{\Delta}_m)\otimes\mathrm{id}^{\otimes n}\big)=0$

定理 *7.2* 的证明。为了避免使用任何无谓的复杂记号，并直接应用引理 7.1，我们在证明定理时忽略映射的分次。这意味着，对于 CY_1 ，我们将记 $\mathbf{\Delta}_1+\mathbf{b}_1^x$ 为 $\widehat{\mathfrak{m}}_1$（限制在适当的模上）。我们先用归纳法证明 (21)。对于 $k=1,2$，我们已分别在引理 6.2 和定理 7.1 的证明中证明了该关系。现在假设对于输入数量小于或等于 的情形，该关系成立，接下来证明 (21) 对 $k\geqslant 3$ 个输入也成立。

我们将等式 (21) 的左端记为 LHS(21)。利用 $\check{\mathfrak{m}}_r = \mathbf{b}_r^\vee$ 以及卡拉比–丘映射的公式，可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{LHS}(21) = &\sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{t_1,\dots,t_j\geqslant 1\\ t_1+\cdots+t_j=k}} \mathbf{b}_j^\vee \left(\mathrm{CY}_{t_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{t_1}\right) + \mathbf{b}_1^\vee \circ \widehat{\mathfrak{m}}_k \\ &+ \sum_{m=1}^{k-1}\sum_{n=0}^{k-m}\sum_{j=2}^{k-m+1} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-m}} \mathbf{b}_j^\vee \Big(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\mathrm{id}\Big)\big(\mathrm{id}^{\otimes k-m-n}\otimes\widehat{\mathfrak{m}}_m\otimes\mathrm{id}^{\otimes n}\big)\end{aligned}$$

我们将第二行中的情形 $n=0$ 与其他情形分开，得到：

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{t_1,\dots,t_j\geqslant 1\\ t_1+\cdots+t_j=k}} \mathbf{b}_j^\vee \left(\mathrm{CY}_{t_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{t_1}\right) + \mathbf{b}_1^\vee \circ \widehat{\mathfrak{m}}_k + \sum_{m=1}^{k-1}\sum_{j=2}^{k-m+1} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-m}} \mathbf{b}_j^\vee \Big(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\widehat{\mathfrak{m}}_m\Big) \\ &+ \sum_{m=1}^{k-1}\sum_{n=1}^{k-m}\sum_{j=2}^{k-m+1} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-m}} \mathbf{b}_j^\vee \Big(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\mathrm{id}\Big)\big(\mathrm{id}^{\otimes k-m-n}\otimes\widehat{\mathfrak{m}}_m\otimes\mathrm{id}^{\otimes n}\big)\end{aligned}$$

现在，我们将第一行中的情形 $t_1=1$ 和 $m=1$ 与其他情形分开，并在第二行作变量替换 $s-1 \qquad s$（注意，对于任意 $2\leqslant s\leqslant j$，当 $1+\sum i_v \leqslant n \leqslant 1+\sum i_v$时，“内部” $\widehat{\mathfrak{m}}_m$ 将是 CY_{i_s} 的一个自变量，因此我们可以不对 $1\leqslant n\leqslant k-m$ 求和，而改为对满足 $2\leqslant s\leqslant j$ 和 $0\leqslant n\leqslant i_s-1$ 的变量 s、 n 求和），从而得到：

$$\begin{aligned}&\sum_{j=2}^{k} \sum_{\substack{t_2,\dots,t_j\geqslant 1\\ t_2+\cdots+t_j=k-1}} \mathbf{b}_j^\vee \left(\mathrm{CY}_{t_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{t_2}\otimes\mathrm{CY}_1\right) + \mathbf{b}_1^\vee \circ \widehat{\mathfrak{m}}_k + \sum_{j=2}^{k} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-1}} \mathbf{b}_j^\vee \Big(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\widehat{\mathfrak{m}}_1\Big) \\ &\sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{t_1,\dots,t_j\geqslant 1\\ t_1\geqslant 2\\ t_1+\cdots+t_j=k}} \mathbf{b}_j^\vee \left(\mathrm{CY}_{t_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{t_1}\right) + \sum_{m=2}^{k-1}\sum_{r=2}^{k-m+1} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_r\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_r=k-m}} \mathbf{b}_r^\vee \Big(\mathrm{CY}_{i_r}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\widehat{\mathfrak{m}}_m\Big) \\ &+ \sum_{j=2}^{k} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-1}} \sum_{s=2}^{j}\sum_{m=1}^{i_s}\sum_{n=0}^{i_s-m} \mathbf{b}_j^\vee \Big(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_s-m+1}\big(\mathrm{id}^{\otimes i_s-m-n}\otimes\widehat{\mathfrak{m}}_m\otimes\mathrm{id}^{\otimes n}\big)\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\mathrm{id}\Big)\end{aligned}$$

在第一行中，求和针对的是相同的参数集合，因此我们利用 $\mathrm{CY}_1 + \widehat{\mathfrak{m}}_1 = \mathbf{b}_1^\vee + \mathbf{\Delta}_1 + \mathbf{b}_1^x = \mathbf{b}_1 + \mathbf{\Delta}$ 将它们合并。然后，我们在第二行利用公式 (18) 和 (19) 改写 CY_{t_1} 和 $\widehat{\mathfrak{m}}_m$，并在第一行改写 $\widehat{\mathfrak{m}}_k$。最后，我们在第三行使用关系式 (21)，根据归纳假设，该关系式成立。完成所有这些变换后

我们得到：

$$\sum_{j=2}^{k}\sum_{\substack{t_2,\dots,t_j\geqslant 1\\ t_2+\cdots+t_j=k-1}}\mathbf{b}_j^\vee\Big(\mathrm{CY}_{t_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{t_2}\otimes\big(\mathbf{b}_1+\mathbf{\Delta}_1\big)\Big)$$

$$+\sum_{r=2}^{k}\sum_{\substack{t_2,\dots,t_r\geqslant 1\\ t_2+\cdots+t_r=k-1}}\mathbf{b}_1^\vee\circ\big(\mathbf{b}_r^x+\mathbf{\Delta}_r\big)\Big(\mathrm{CY}_{t_r}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{t_2}\otimes\mathrm{id}\Big)$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\sum_{\substack{t_1,\dots,t_j\geqslant 1\\ t_1\geqslant 2\\ t_1+\cdots+t_j=k}}\sum_{r=2}^{t_1}\sum_{\substack{i_2,\dots,i_r\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_r=t_1-1}}\mathbf{b}_j^\vee\Big(\mathrm{CY}_{t_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{t_2}\otimes\mathbf{b}_r^\vee\left(\mathrm{CY}_{i_r}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\mathrm{id}\right)\Big)$$

$$+\sum_{m=2}^{k-1}\sum_{j=2}^{k-m+1}\sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-m}}\sum_{r=2}^{m}\sum_{\substack{t_2,\dots,t_r\geqslant 1\\ t_2+\cdots+t_r=m-1}}\mathbf{b}_j^\vee\Big(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\big(\mathbf{b}_r^x+\mathbf{\Delta}_r\big)\big(\mathrm{CY}_{t_r}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{t_2}\otimes\mathrm{id}\big)\Big)$$

$$+\sum_{j=2}^{k}\sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-1}}\sum_{s=2}^{j}\sum_{r=1}^{i_s}\sum_{\substack{t_1,\dots,t_r\geqslant 1\\ t_1+\cdots+t_r=i_s}}\mathbf{b}_j^\vee\Big(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathbf{b}_r^\vee\left(\mathrm{CY}_{t_r}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{t_1}\right)\otimes\mathrm{CY}_{i_{s-1}}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\mathrm{id}\Big)$$

我们可以将中间三行相加，并对所得的和以及最后一行作变量替换，得到：

$$\sum_{j=2}^{k}\sum_{\substack{t_2,\dots,t_j\geqslant 1\\ t_2+\cdots+t_j=k-1}}\mathbf{b}_j^\vee\Big(\mathrm{CY}_{t_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{t_2}\otimes\big(\mathbf{b}_1+\mathbf{\Delta}_1\big)\Big)$$

$$+\sum_{j=2}^{k}\sum_{\substack{t_2,\dots,t_j\geqslant 1\\ t_2+\cdots+t_j=k-1}}\sum_{r=2}^{j}\mathbf{b}_{j-r+1}^\vee\Big(\mathrm{CY}_{t_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{t_{r+1}}\otimes\big(\mathbf{b}_r+\mathbf{\Delta}_r\big)\big(\mathrm{CY}_{t_r}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{t_2}\otimes\mathrm{id}\big)\Big)$$

$$+\sum_{j=2}^{k}\sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-1}}\sum_{r=1}^{j-1}\sum_{n=1}^{j-r}\mathbf{b}_{j-r+1}^\vee\Big(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathbf{b}_r^\vee\left(\mathrm{CY}_{i_{n+r}}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_{n+1}}\right)\otimes\mathrm{CY}_{i_n}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\mathrm{id}\Big)$$

最后请注意，在最后一行中将$\mathbf{b}_r^x+\mathbf{\Delta}_r$加到$\mathbf{b}_r^\vee$上不会产生任何变化，因为出于次数和能量原因，这些项都为零（注意，对$\mathbf{b}_r^x\left(\mathrm{CY}_{i_{n+r}}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_{n+1}}\right)$有贡献的曲线，其唯一的正渐近条件是一个最大值 Morse 弦，而负渐近条件必须是 Morse 弦，这是由作用量原因决定的。这些负渐近条件都在 CY 映射的像中，因此只能是最小值点 Morse 弦。出于指标原因，这样的刚性圆盘并不存在）。接着我们注意到，第一行是第三行在 $r=1,n=0$ 时的情形，而第二行是第三行在 $r\geqslant 1,n=0$ 时的情形，因此我们有

$$\mathrm{LHS}(21)=\sum_{j=2}^{k}\sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-1}}\sum_{r=1}^{j}\sum_{n=0}^{j-r}\mathbf{b}_{j-r+1}^\vee\Big(\mathrm{id}^{\otimes j-r-n}\otimes\big(\mathbf{b}_r+\mathbf{\Delta}_r\big)\otimes\mathrm{id}^{\otimes n}\Big)\Big(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\mathrm{id}\Big)$$

根据引理 7.1(1)，该项为零，因此我们证明了关系式 (21)。为了证明关系式 (20)，我们将使用关系式 (21)，这会稍微简化记号。

以下的计算中。我们有：

$$\begin{aligned}\mathrm{LHS}(20) = \widehat{\mathfrak{m}}_1 \circ \widehat{\mathfrak{m}}_k + \widehat{\mathfrak{m}}_k\big(\mathrm{id}^{\otimes k-1} \otimes \widehat{\mathfrak{m}}_1\big) + \sum_{m=2}^{k-1} \widehat{\mathfrak{m}}_{k-m+1}\big(\mathrm{id}^{\otimes k-m} \otimes \widehat{\mathfrak{m}}_m\big) \\ + \sum_{m=1}^{k-1}\sum_{n=1}^{k-m} \widehat{\mathfrak{m}}_{k-m+1}\big(\mathrm{id}^{\otimes k-m-n} \otimes \widehat{\mathfrak{m}}_m \otimes \mathrm{id}^{\otimes n}\big)\end{aligned}$$

并且我们使用公式 (18) 重写 $\widehat{\mathfrak{m}}_j$ 出现的位置，但最后一行中的“内层”项除外。我们得到：

$$\begin{aligned}\mathrm{LHS}(20) &= \sum_{j=2}^{k} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-1}} (\mathbf{b}_1^x + \boldsymbol{\Delta}_1)(\mathbf{b}_j^x + \boldsymbol{\Delta}_j)\Big(\mathrm{CY}_{i_j} \otimes \cdots \otimes \mathrm{CY}_{i_2} \otimes \mathrm{id}\Big) \\ &+ \sum_{j=2}^{k} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-1}} (\mathbf{b}_j^x + \boldsymbol{\Delta}_j)\Big(\mathrm{CY}_{i_j} \otimes \cdots \otimes \mathrm{CY}_{i_2} \otimes (\mathbf{b}_1^x + \boldsymbol{\Delta}_1)\Big) \\ &+ \sum_{m=2}^{k-1}\sum_{j=2}^{k-m+1} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-m}} \sum_{r=2}^{m} \sum_{\substack{t_2,\dots,t_r\geqslant 1\\ t_2+\cdots+t_r=m-1}} (\mathbf{b}_j^x + \boldsymbol{\Delta}_j)\Big(\mathrm{CY}_{i_j} \otimes \cdots \otimes \mathrm{CY}_{i_2} \otimes (\mathbf{b}_r^x + \boldsymbol{\Delta}_r)\Big(\mathrm{CY}_{t_r} \otimes \cdots \otimes \mathrm{CY}_{t_2} \otimes \mathrm{id}\Big)\Big) \\ &+ \sum_{m=1}^{k-1}\sum_{n=1}^{k-m}\sum_{j=2}^{k-m+1} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-m}} (\mathbf{b}_j^x + \boldsymbol{\Delta}_j)\Big(\mathrm{CY}_{i_j} \otimes \cdots \otimes \mathrm{CY}_{i_2} \otimes \mathrm{id}\Big)\big(\mathrm{id}^{\otimes k-m-n} \otimes \widehat{\mathfrak{m}}_m \otimes \mathrm{id}^{\otimes n}\big)\end{aligned}$$

注意，最后一行可以写成：

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{j=2}^{k-m+1} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-m}} \sum_{s=2}^{j}\sum_{n=0}^{i_s} (\mathbf{b}_j^x + \boldsymbol{\Delta}_j)\Big(\mathrm{CY}_{i_j} \otimes \cdots \otimes \mathrm{CY}_{i_s}\big(\mathrm{id}^{\otimes i_s-1-n} \otimes \widehat{\mathfrak{m}}_m \otimes \mathrm{id}^{\otimes n}\big) \otimes \cdots \otimes \mathrm{CY}_{i_2} \otimes \mathrm{id}\Big) \\ &= \sum_{j=2}^{k} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-1}} \sum_{s=2}^{j}\sum_{m=1}^{i_s}\sum_{n=0}^{i_s-m} (\mathbf{b}_j^x + \boldsymbol{\Delta}_j)\Big(\mathrm{CY}_{i_j} \otimes \cdots \otimes \mathrm{CY}_{i_s-m+1}\big(\mathrm{id}^{\otimes i_s-m-n} \otimes \widehat{\mathfrak{m}}_m \otimes \mathrm{id}^{\otimes n}\big) \otimes \cdots \otimes \mathrm{CY}_{i_2} \otimes \mathrm{id}\Big)\end{aligned}$$

其中，等式右边是在进行变量代换后得到的。在最后一行，我们现在可以应用关系式（21）得到：

$$\sum_{j=2}^{k} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-1}} \sum_{s=2}^{j}\sum_{r=1}^{i_s} \sum_{\substack{t_1,\dots,t_r\geqslant 1\\ t_1+\cdots+t_r=i_s}} (\mathbf{b}_j^x + \boldsymbol{\Delta}_j)\Big(\mathrm{CY}_{i_j} \otimes \cdots \otimes \mathrm{CY}_{i_{s+1}} \otimes \breve{\mathfrak{m}}_r\big(\mathrm{CY}_{t_r} \otimes \cdots \otimes \mathrm{CY}_{t_1}\big) \otimes \cdots \otimes \mathrm{CY}_{i_2} \otimes \mathrm{id}\Big)$$

利用 $\check{\mathfrak{m}}_r = \mathbf{b}_r^\vee$，我们得到：

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS}(20) &= \sum_{j=2}^{k} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-1}} \big(\mathbf{b}_1^x+\boldsymbol{\Delta}_1\big)\big(\mathbf{b}_j^x+\boldsymbol{\Delta}_j\big)\Big(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\mathrm{id}\Big)\\
&+\sum_{j=2}^{k} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-1}} \big(\mathbf{b}_j^x+\boldsymbol{\Delta}_j\big)\Big(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\big(\mathbf{b}_1^x+\boldsymbol{\Delta}_1\big)\Big)\\
&+\sum_{m=2}^{k-1}\sum_{j=2}^{k-m+1} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-m}} \sum_{r=2}^{m} \sum_{\substack{t_2,\dots,t_r\geqslant 1\\ t_2+\cdots+t_r=m-1}} \big(\mathbf{b}_j^x+\boldsymbol{\Delta}_j\big)\Big(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\big(\mathbf{b}_r^x+\boldsymbol{\Delta}_r\big)\Big(\mathrm{CY}_{t_r}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{t_2}\otimes\mathrm{id}\Big)\Big)\\
&\sum_{j=2}^{k} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-1}} \sum_{s=2}^{j}\sum_{r=1}^{i_s} \sum_{\substack{t_1,\dots,t_r\geqslant 1\\ t_1+\cdots+t_r=i_s}} \big(\mathbf{b}_j^x+\boldsymbol{\Delta}_j\big)\Big(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_{s+1}}\otimes\mathbf{b}_r^\vee\,\big(\mathrm{CY}_{t_r}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{t_1}\big)\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\mathrm{id}\Big)
\end{aligned}$$

通过在第三行和第四行进行变量代换，我们得到：

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS}(20) &= \sum_{j=2}^{k} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-1}} \big(\mathbf{b}_1^x+\boldsymbol{\Delta}_1\big)\big(\mathbf{b}_j^x+\boldsymbol{\Delta}_j\big)\Big(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\mathrm{id}\Big)\\
&+\sum_{j=2}^{k} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-1}} \big(\mathbf{b}_j^x+\boldsymbol{\Delta}_j\big)\Big(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\big(\mathbf{b}_1^x+\boldsymbol{\Delta}_1\big)\Big)\\
&+\sum_{j=2}^{k-1} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-1}} \sum_{r=2}^{j-1} \big(\mathbf{b}_{j-r+1}^x+\boldsymbol{\Delta}_{j-r+1}\big)\Big(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_{r+1}}\otimes\big(\mathbf{b}_r^x+\boldsymbol{\Delta}_r\big)\Big(\mathrm{CY}_{i_r}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\mathrm{id}\Big)\Big)\\
&\sum_{j=2}^{k} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j\geqslant 1\\ i_2+\cdots+i_j=k-1}} \sum_{r=1}^{j-1}\sum_{n=1}^{j-r} \big(\mathbf{b}_{j-r+1}^x+\boldsymbol{\Delta}_{j-r+1}\big)\Big(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathbf{b}_r^\vee\,\big(\mathrm{CY}_{i_{n+r}}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_{n+1}}\big)\otimes\mathrm{CY}_{i_n}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\mathrm{id}\Big)
\end{aligned}$$

最后，注意到添加

- $\mathbf{b}_j^\vee$ 到$\mathbf{b}_j^x+\boldsymbol{\Delta}_j$ 在第一行中不起作用，因为它会由于能量原因（当输出为长弦时）或由于抵消的圆盘对（当$\mathbf{b}_j^\vee$ 的输出为 y 且勒让德子流形的维数为 1 时）而消失。• $\mathbf{b}_1^\vee$ 到$\mathbf{b}_1^x+\boldsymbol{\Delta}_1$ 在第二行中不会带来更多贡献，因为$\mathbf{b}_1^\vee$ 的输出是长弦（出于能量原因）。让我们检查一下，当$\mathbf{b}_1^\vee$ 的输出为 Morse 弦 y时，它也会消失。在这种情况下，能量论证意味着这些项

$$\boldsymbol{\Delta}_j\Big(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\mathbf{b}_1^y\Big)$$

  消失。接下来我们考虑这些项：

$$\mathbf{b}_j^x\Big(\mathrm{CY}_{i_j}\otimes\cdots\otimes\mathrm{CY}_{i_2}\otimes\mathbf{b}_1^y\Big)$$

  对这类项有贡献的伪全纯楼应包含一个刚性圆盘，其唯一的正渐近为 x。由于能量原因，j 负渐近必须是 Morse 弦，具体而言只能是 y（根据 CY 映射的定义）。由于指标原因，这样的刚性圆盘并不存在。

- $\mathbf{b}_r^\vee$ 在第三行的$\mathbf{b}_r^x+\boldsymbol{\Delta}_r$ 也不会产生贡献，原因与上一点相同。

- $\mathbf{b}_r^x + \boldsymbol{\Delta}_r$ 第四行的$\mathbf{b}_r^\vee$ 最终也不会改变任何结果。事实上，$\boldsymbol{\Delta}_r\big(\mathrm{CY}_{i_{n+r}} \otimes \cdots \otimes \mathrm{CY}_{i_{n+1}}\big)$ 因能量原因而消失；随后，与之前一样，项$\mathbf{b}_r^x\big(\mathrm{CY}_{i_{n+r}} \otimes \cdots \otimes \mathrm{CY}_{i_{n+1}}\big)$ 也会消失，因为圆盘的数量为偶数，或者根本没有圆盘；这些圆盘的正渐近为 x ，且负渐近仅位于 y的弦处。

此外，注意第一行是最后一行在 $r = j, n = 0$ 的情形，第二行是最后一行在 $r = 1, n = 0$ 的情形，第三行是最后一行在 $2 \leqslant r \leqslant j-1, n = 0$ 的情形。因此我们有

左边（20）=

$$\sum_{j=2}^{k} \sum_{\substack{i_2,\dots,i_j \geqslant 1 \\ i_2+\cdots+i_j=k-1}} \sum_{r=1}^{j} \sum_{n=0}^{j-r} \big(\mathbf{b}_{j-r+1}^x + \boldsymbol{\Delta}_{j-r+1}\big)\Big(\mathrm{id}^{\otimes j-r-n} \otimes \big(\mathbf{b}_r + \boldsymbol{\Delta}_r\big) \otimes \mathrm{id}^{\otimes n}\Big)\Big(\mathrm{CY}_{i_j} \otimes \cdots \otimes \mathrm{CY}_{i_2} \otimes \mathrm{id}\Big)$$

根据引理 7.1（1）和（2），该式为零。 □

8. Example: the unknot

这里的计算是 [BEE11 第 5]节中计算的一个特例。不过，我们仍用本文的记号详细说明。令 Λ 为标准的 $TB = -1$ 平凡结，并考虑一个二重副本和三份拷贝，见图 15。我们有

$$\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1) = \langle a_{10}, x_{01} \rangle_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}^{cyc} \quad \text{and} \quad \check{C}_-^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1) = \langle a_{01}, y_{01} \rangle_{\mathcal{A}-\mathcal{A}}^{cyc}$$

其中有 $|a_{10}|_{\widehat{C}_+} = 0$、$|x_{01}|_{\widehat{C}_+} = 2$、$|a_{01}|_{\check{C}_-} = 2$ 和 $|y_{01}|_{\check{C}_-} = 0$。记 $\boldsymbol{a}^j = a \dots a$ 为由 j 个弦 a 组成的词，它是 Λ 中唯一的 Reeb 弦。对于所有 $j \geqslant 0 \widehat{\mathfrak{m}}_1(a_{10}\boldsymbol{a}^j) = x_{01}a\boldsymbol{a}^j + x_{01}\boldsymbol{a}^j a = 0$, 以及 $\widehat{\mathfrak{m}}_1(x_{01}) = 0$ ，我们都有相应结论。另一方面， $\check{\mathfrak{m}}_1(a_{01}\boldsymbol{a}^j) = 0$, 例如由维数原因可知，而 $\check{\mathfrak{m}}_1(y_{01}\boldsymbol{a}^j) = a_{01}a\boldsymbol{a}^j + a_{01}\boldsymbol{a}^j a = 0$。因此，两个微分 $\widehat{\mathfrak{m}}_1$ 和 $\check{\mathfrak{m}}_1$ 均为零，这意味着 $\big(\widehat{C}_+^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1), \widehat{\mathfrak{m}}_1\big)$ 和 $\big(\check{C}_-^{cyc}(\Lambda_0, \Lambda_1), \check{\mathfrak{m}}_1\big)$ 的同调都是无限维的，分别由所有词 $a_{10}\boldsymbol{a}^j, x_{01}\boldsymbol{a}^j$ 和 $a_{01}\boldsymbol{a}^j, y_{01}\boldsymbol{a}^j$ 生成。在这个简单的例子中，由维数原因，定义卡拉比–丘映射的方式是唯一的；不过，也可以很容易地从图中看出哪些香蕉在 a_{10} 处具有正渐近条件，哪些条带在 x_{01} 处具有负渐近条件。这给出：

$$\mathrm{CY}_1(a_{10}\boldsymbol{a}^j) = y_{01}\boldsymbol{a}^j \quad \text{and} \quad \mathrm{CY}_1(x_{01}\boldsymbol{a}^j) = a_{01}\boldsymbol{a}^j$$

然后，我们可以利用三份拷贝的拉格朗日投影来计算 $\widehat{C}_+^{cyc}$ 和 $\check{C}_-^{cyc}$ 上的乘积结构。渐近于 $\check{C}_-^{cyc}$ 的生成元且具有一个正渐近的刚性圆盘

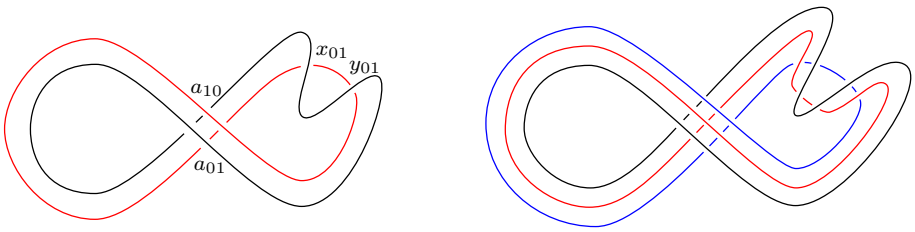


Figure 15. 二重副本 $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ 的拉格朗日投影在左侧，三份拷贝 $\Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ 的在右侧。

并且两个负渐近对乘积 $\check{\mathfrak{m}}_2$ 作出贡献，并且可以看出，唯一的项是那些给出

$$\check{\mathfrak{m}}_2(a_{12}\boldsymbol{a}^j, y_{01}\boldsymbol{a}^i) = a_{02}\boldsymbol{a}^{i+j}, \quad \check{\mathfrak{m}}_2(y_{12}\boldsymbol{a}^j, a_{01}\boldsymbol{a}^i) = a_{02}\boldsymbol{a}^{i+j} \text{以及} \check{\mathfrak{m}}_2(y_{12}\boldsymbol{a}^j, y_{01}\boldsymbol{a}^i) = y_{02}\boldsymbol{a}^{i+j}$$

这表明最小Morse Reeb弦作为单位元，即诱导一个拟同构 $\check{C}_-^{cyc}(\Lambda_1,\ \Lambda_2) \cong \check{C}_-^{cyc}(\Lambda_0,\ \Lambda_2)$。对于乘积 $\widehat{\mathfrak{m}}_2$，我们必须寻找如图5所示的楼。唯一的楼就是我们在图16中描绘的那些。它们给出乘积的以下非平凡分量：

$$\widehat{\mathfrak{m}}_2(a_{21}\boldsymbol{a}^j, a_{10}\boldsymbol{a}^i) = a_{20}\boldsymbol{a}^{i+j}, \quad \widehat{\mathfrak{m}}_2(a_{21}\boldsymbol{a}^j, x_{01}\boldsymbol{a}^i) = x_{02}\boldsymbol{a}^{i+j} \quad \text{and} \quad \widehat{\mathfrak{m}}_2(x_{12}\boldsymbol{a}^j, a_{10}\boldsymbol{a}^i) = x_{02}\boldsymbol{a}^{i+j}$$

这意味着混合生成元 a 是乘积 $\widehat{\mathfrak{m}}_2$的单位元。高阶运算 $\widehat{\mathfrak{m}}_j$ 和 $\widehat{\mathfrak{m}}_j$ 对于 $j \geqslant 3$ 均为零。

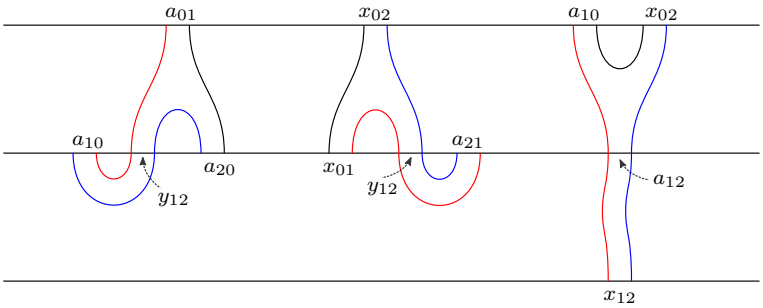


FIGURE 16. 平凡结的乘积 $\widehat{\mathfrak{m}}_2$ 对应的伪全纯楼。

REFERENCES

[BC14] F. Bourgeois 和 B. Chantraine. 双线性化勒让德接触同调与增广范畴. *J. Symplectic Geom.*, 12(3):553–583, 2014. [BEE11] F. Bourgeois、T. Ekholm 和 Y. Eliashberg. 通过勒让德手术构造辛同调乘积. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 108(20):8114–8121, 2011. [BEE12] F. Bourgeois、T. Ekholm 和 Y. Eliashberg. 勒让德手术的影响. *Geom. Topol.*, 16(1):301– 389, 2012. 附录由 Sheel Ganatra 和 Maksim Maydanskiy 撰写。[CDRGGa] B. Chantraine、G. Dimitroglou Rizell、P. Ghiggini 和 R. Golovko. 拉格朗日协边的弗洛尔理论. arXiv:1511.09471v1 [math.SG]. [CDRGGb] B. Chantraine、G. Dimitroglou Rizell、P. Ghiggini 和 R. Golovko. Weinstein 流形与扇区的包裹福克亚范畴的几何生成. arXiv:1712.09126 [math.SG], 即将发表于 Annales Scientifiques de l' ´Ecole Normale Sup´erieure.[CDRGG15] B. Chantraine、G. Dimitroglou Rizell、P. Ghiggini 和 R. Golovko. 弗洛尔同调与拉格朗日同调. 载于 *Proceedings of the Gökova Geometry-Topology Conference 2014*, 第 76–113 页。G¨okova 几何/拓扑会议 (GGT)，G¨okova，2015. [CDRGG16] B. Chantraine、G. Dimitroglou Rizell、P. Ghiggini 和 R. Golovko. 非交换增广范畴. 载于 *Proceedings of the Gökova Geometry-Topology Conference 2015*, 第 116–150 页。G¨okova 几何/拓扑会议 (GGT)，G¨okova，2016. [CF09] K. Cieliebak 和 U. Frauenfelder. 正合接触嵌入的弗洛尔同调. *Pacific J. Math.*, 239 2 251( ): –316, 2009. [Che02] Y. Chekanov. 勒让德链环的微分代数. *Invent. Math.*, 150(3):441–483, 2002. [CKE+11] G. Civan、P. Koprowski、J. Etnyre、J. M. Sabloff 和 A. Walker. 勒让德接触同调的乘积结构. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 150(2):291–311, 2011. [CO18] K. Cieliebak 和 A. Oancea. 辛同调与埃伦伯格–斯廷罗德公理.

Algebr. , ( ): – . 附录 *Geom. Topol.* 18 4 1953 2130, 2018

由 Peter Albers 共同撰写。[DR16a] G. Dimitroglou Rizell. 将伪全纯多边形提升至 $P \times \mathbb{R}$ 的辛化及其应用. *Quantum Topol.*, 7(1):29–105, 2016. [DR16b] Georgios Dimitroglou Rizell. 勒让德环境手术与勒让德接触同调.

J. Sym- , ( ): – . [*plectic Geom.* 14 3 811 901, 2016

DRET22] G. Dimitroglou Rizell、T. Ekholm 和 D. Tonkonog. 浸入拉格朗日曲面的精细圆盘势. *J. Differential Geom.*, 121(3):459–539, 2022.

[EES05] T.Ekholm、J.Etnyre和M.Sullivan。 $\mathbb{R}^{2n+1}$中的勒让德子流形的接触同调。*J. Differential Geom.*，71(2):177–305，2005。[EES07] T.Ekholm、J.Etnyre 和 M.Sullivan。

$P \times \mathbb{R}$ *Trans. Amer. Math.* 中的勒让德接触同

Soc. 359 7 3301 3335 2007
调。，():–（电子版），。[EES09] T. Ekholm、J.B. Etnyre和J. M.Sabloff。勒让德接触同调的一个对偶性正合序列。 *Duke Math. J.*，150(1):1–75，2009。[Ekh] T. Ekholm。勒让德手术的全纯曲线。arXiv:1906.07228v1 [math.SG]。[Ekh 07] T.Ekholm。一阶喷射空间中的 Morse流树和勒让德接触同调。 *Geom. Topol.*，111083: –1224，2007。[Ekh12] T. Ekholm。有理SFT、线性化勒让德接触同调和拉格朗日Floer 上同调。载于 *Perspectives in analysis*、 *geometry*、 *and topology*， *Progr. Math.*第 296 卷，第 109–145 页。Birkh¨auser/Springer，纽约，2012。[EL] T. Ekholm和 Y. Lekili。拉格朗日不变量与勒让德不变量之间的对偶性。arXiv:

1701 01284 3 。v math.SG。[Eli

[ ]
98] Y. Eliashberg。接触拓扑中的不变量。载于 *Proceedings of the International Congress of Math-*
ematicians Vol. II (Berlin, 1998) 327 338, 1998 ，第Extra Vol. II 号，

第– 页。[FHT95] Y. F

´ *Handbook of* elix、S.Halperin 和

algebraic topology 829 865 1995
J-C Thomas。拓扑学中的微分分次代数。载于 ，第 – 页。North-Holland，阿姆斯特丹，。[Gan12] S.Ganatra。 *Symplectic Cohomology and Duality for the Wrapped Fukaya Category*。ProQuestLLC，安娜堡，密歇根州，2012。学位论文（博士）——麻省理工学院。[Gin] V. Ginzburg。Calabi-Yau代数。arXiv:math/0612139 [math.AG]。[GPS] S.Ganatra、J.Pardon 和 V. Shende。缠绕 Fukaya范畴的扇区下降。arXiv:1809.03427 [math.SG]。[Kel11] B. Keller。变形 Calabi-Yau 完备化。 *J. Reine Angew. Math.*，654:125–180，2011。附有 MichelVan den Bergh 的附录。[KS09] M. Kontsevich 和Y. Soibelman。关于 A_∞-代数、 A_∞-范畴和非交换几何的笔记。载于 *Homological mirror symmetry*， *Lecture Notes in Phys.*第 757卷，第153–219页。Springer，柏林，2009。[Leg] N. Legout。pxr 的辛化中的拉格朗日协边的A-infinity范畴。arXiv:2012.08245v2 [math.SG], 即将在 Quantum Topology发表。[Mer14] W. J.Merry。拉格朗日 Rabinowitz Floer同调与扭曲余切丛。

Geom. Dedi- ， : – 。[MS12]

cata 171 345 386, 2014
D.McDuff和D.Salamon。

J-holomorphic curves and symplectic topology 52 *American* ，{v}的卷。美国数
Mathematical Society Colloquium Publications
学学会，普罗维登斯，罗德岛州，第二版，2012。[NRS+20] L. Ng、D. Rutherford、V.Shende、S.Sivek和 E. Zaslow。增广即层。 *Geom. Topol.*，245 2149(): –2286，2020。[Sab06] J.M. Sabloff。勒让德接触同调的对偶性。 *Geom. Topol.*，10:2351–2381，2006。

Department of Mathematics、 Uppsala University、 Box 480、 SE-751 06 Uppsala、
Sweden*Email address*: noemie.legout@math.uu.se