加权树的群逆元

Raju Nandi

数学学科印度理工学院甘地讷格尔分
校印度甘地讷格尔 382355

arXiv:2304.03020v1 [math.CO] 6 Apr 2023

摘要：
设 (G,w)是一个无向加权图。(G,w) 的群逆是一个邻接矩阵为 $A^{\#}$的加权图，其中 A 是 (G,w) 的邻接矩阵。我们研究奇异加权树的群逆。可以证明，如果 (T,w) 是一棵奇异加权树，那么 $T^{\#}$ 再次是一棵树，当且仅当 T 是一棵星树；而这又当且仅当 $T^{\#}$ 与 T 图同构时成立。本文引入并研究了一类新的 $\mathbb{T}$ 加权树。可以证明，正权树的邻接矩阵在 $\mathbb{T}$ 中与一个非负矩阵符号相似。

关键词：加权图；邻接矩阵；图的群逆；最大匹配；交错路径；星。AMS 主题分类：05C22、05C50、15A09。

1. Introduction

设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $n\times n$ 实对称矩阵。那么 A 的无向加权图记为 $\mathcal{G}(A)$，是有序对 (G,w)，其中 G 是图，其顶点记为 $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，使得 v_iv_j 是 G 的一条边，当且仅当 $a_{ij}\neq 0$（允许存在自环）；而 w 是权重函数，它将 G 中的每条边 v_iv_j 映射为权重 $w(v_iv_j)=a_{ij}$。反过来也可以这样定义。设 (G,w) 是一个具有 n 个顶点 $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ 的无向加权图。将 G 的邻接矩阵定义为由以下方式定义的 $n\times n$ 矩阵 A】【。

$$a_{ij}=\begin{cases} w(v_iv_j) & \text{if } v_iv_j \text{ is an edge of } G,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

请注意，对于无权无向图，所有权重均假定为 1。设(G,w) 是一个带权无向图，其邻接矩阵为 A。如果 A 可逆，则称带权图 (G^{-1},w^{-1}) 是(G,w)的逆。这里，我们假定 G 和 G^{-1} 具有相同的顶点集。此外，当且仅当 A^{-1} 的第 ij 个条目非零，并且边 v_iv_j 的权重 $w^{-1}(v_iv_j)$等于该条目时，v_iv_j 才是 G^{-1} 中的一条边。众所周知，以这种方式定义的逆在保持边权重的图同构意义下是唯一的。对于奇异矩阵，如果群逆 $A^{\#}$ 存在，则以完全类似的方式定义图 (G,w) 的群逆。回顾一下，如果存在，矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的群逆是满足方程 $AXA=A$、$XAX=X$ 和 $AX=XA$的唯一矩阵 $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$。此外，对于实矩阵 A，A 的Moore-Penrose 逆是满足方程 $AA^{\dagger}A=A$、$A^{\dagger}AA^{\dagger}=A^{\dagger}$、$(AA^{\dagger})^{T}=AA^{\dagger}$ 和 $(A^{\dagger}A)^{T}=A^{\dagger}A$ 的唯一矩阵 $A^{\dagger}$。特别地，可以证明 $A^{\dagger}=A^{T}(AA^{T})^{\dagger}.$。众所周知，对于满足条件 $R(A)=R(A^{T})$ 的方阵，Moore-Penrose 逆与群逆重合。这里，$R(X)$ 表示矩阵 X 的值域。有关这些广义逆和Moore-Penrose 逆概念的更多细节，请参阅 [6]。

因此，G 的群逆是图，记作（$G^{\#},w^{\#}$）；与前文一样，G 和 $G^{\#}$ 的顶点集取为相同，而 $G^{\#}$中边 v_iv_j 的权重 $w^{\#}$ 定义为 $A^{\#}$的第 ij个元素。此外，与非奇异 A的情形一样，群逆图 $G^{\#}$ 在保持边权重的同构意义下唯一确定。

在着手证明我们的结果之前，让我们先作如下观察，以便从恰当的角度审视这项工作。无论图是否为加权图，由于无向图的邻接矩阵总是对称的（并且对称矩阵的群逆总是存在），无向图的群逆总是存在。对于有向图，我们所知甚少。例如，我们陈述一个结果 [7,命题 1.1]：给定一个方阵 A，令 $D(A)$ 为一棵有向树。那么 $A^{\#}$ 存在，当且仅当 $D(A)$ 满足一个涉及极大匹配的特定条件。

在进一步讨论之前，我们先概述研究图的群逆为何可能很重要。稍后还会补充一些研究动机。在化学中，分子的分子图是通过将对应于烃类体系中碳原子的顶点作为图的顶点来构造的；当且仅当对应的碳原子之间存在化学键时，图中的两个顶点才相邻（见 [9, 10]）。分子的各种能量，例如 HOMO 能量、LUMO 能量和总 π-电子能量，都与其分子图的特征值直接相关。最小正特征值是量子化学中的一个重要参数。人们认为，它的大小与从烃分子中移除一个电子所需的能量有关（见 [11]）。众所周知，计算最小正特征值是一项复杂的数值任务（见 [18] 及其中引用的参考文献）。回到确定最小特征值这一问题，注意到当分子图 G 非奇异时，估计 G 的最小正特征值的界限，一种方法是估计 G^{-1} 的最大正特征值的界限。对于具有群逆的奇异图，众所周知，$G^{\#}$ 的所有非零特征值构成的集合，等于 G 的所有非零特征值的倒数构成的集合。因此，要估计 G 的最小正特征值，可以考虑估计 $G^{\#}$ 的最大正特征值。

上述定义的加权图的逆在 [4, 14, 16, 21]中进行了研究。如果我们为每条边赋予一个正权重，则称该加权图为正权重图。具有邻接矩阵 A 的正权重图称为正可逆图，如果 A^{-1} 与一个非负矩阵对角相似。具有整数边权重的正可逆图已在 [1, 5, 13]中得到研究。在最近的一项工作中，[15] 的作者推导出了无向加权树的邻接矩阵的群逆各项元素的公式，并给出了图形描述。

在第2 节中，我们证明了图的群逆元的一些性质。我们证明，如果 T 是一棵奇异加权树，那么 $T^{\#}$ 再次是一棵树，当且仅当 T 是一棵星树；反过来，这当且仅当 $T^{\#}$ 与 T 图同构，而这正是本文的主要结果。然后，我们给出了奇异加权路径的群逆元信息。在第3节中，我们引入了一类新的加权树 $\mathbb{T}$，并证明该类是正群可逆的，同时证明了一个 Perron-Frobenius 型结果。

注 1.1. 为简洁起见，今后在论述中我们将省略权重函数的符号。我们将带权图 (G, w) 简写为 G。

2. Properties of group inverses of weighted graphs

首先，我们总结一下本节的研究结果。

我们先回顾以下 [3]。设 T 是一个（无权）无向非奇异树（即 T 的邻接矩阵是非奇异的）。设 A 是 T的邻接矩阵。则存在一个符号矩阵 F，使得 $FA^{-1}F$是某个（无权）无向图的邻接矩阵。特别地，注意到这意味着 $FA^{-1}F$ 的元素不是零就是一。非奇异树 T 的逆记为 T^{-1}，其定义为一个图，该图的邻接矩阵为 $FA^{-1}F$。则 T^{-1} 是连通的[5, 引理 2.7]，并且是二部图 [5, 引理 2.10]。首先，我们对奇异连通加权图的群逆得到了类似结果。这在命题 2.1 中给出。在定理 2.12 中，我们证明了：如果 T 是一个奇异加权树，那么 $T^{\#}$ 再次为树，当且仅当 T是星树；而后者又当且仅当 $T^{\#}$ 与 T图同构。最后，我们在命题 2.14 中给出了奇异路径的群逆的相关信息。

命题 2.1. 设 G 是加权的。
(a) 若 G 是连通的，则 $G^{\#}$ 是连通的。(
b) 若 G 是二部的，则 $G^{\#}$ 是二部的。

证明. (*a*) 设 G 是连通的，并设 A 是 G的邻接矩阵。若 $G^{\#}$ 不连通，则 $G^{\#}$ 的邻接矩阵（假设它有 k 个连通分量）将是一个由 $A^{\#} = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k$给出的直和。这将意味着 $A = (A^{\#})^{\#} = {A_1}^{\#} \oplus {A_2}^{\#} \oplus \cdots {A_k}^{\#}$，产生矛盾。因此， $G^{\#}$ 是连通的。

(*b*) 由于 G 是一个二部图， G的邻接矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C^T & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $C \in \mathbb{R}^{k\times(n-k)}$ 和$k \leq \frac{n}{2}$。然后由 [7, 定理 2.2],

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} 0 & (CC^T)^{\#}C \\ C^T(CC^T)^{\#} & 0 \end{pmatrix}.$$

因此， $G^{\#}$ 是一个二部图。 □

接下来，我们证明一些将在后续讨论中用到的结果。

引理 2.2.设 $K_{1,n}$ 是 $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}\}$ 上的加权星，其中心为 v_{n+1}，其中 w_i 表示边 v_iv_{n+1} 上的权重，对所有 $i = 1$、 2 、 ... 、 n。令 $p = \sum_{i=1}^{n} w_i^2$。若 A 是 $K_{1,n}$ 的邻接矩阵，则 $A^{\#} = \frac{1}{p}A$。
证明。邻接矩阵 $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ 由 $A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x^T & 0 \end{pmatrix}$ 给出，其中 $x = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T \in \mathbb{R}^n$。令 $X = \frac{1}{p}A$。由于 X是 A的倍数， $AX = XA$。注意到$x^Tx = p$，因此 $A^3 = pA$。于是 $XAX = \frac{1}{p^2}A^3 = X$且 $AXA = \frac{1}{p}A^3 = A$，这表明$X = A^{\#}$。□

回顾一下，图 G 和 H 的同构（记作 $G \cong H$ ）是 G 和 H的顶点集之间的一个双射， f：$V(G) \to V(H)$，并满足：对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v，它们在 G 中相邻，当且仅当 $f(u)$ 和 $f(v)$ 在 H中相邻。对于两个加权图 $\overline{G}$ 和$\overline{H}$，若它们的底层图彼此同构，则称这两个加权图彼此同构。

推论 2.3。设 T 是一棵加权星。则 $T^{\#} \cong T$。

证明。令 A 为 T的邻接矩阵，则 $A^{\#}$ 是 $T^{\#}$的邻接矩阵。根据引理 2.2， $A^{\#}$ 是 A的常数倍。因此， $T^{\#} \cong T$。□

图中的匹配是指一组边，其中任意两条边都没有公共顶点。如果这组边的基数最大，则该匹配是最大匹配。令M 为图 G的一个最大匹配。如果一条路径的边相对于 M 交替属于 M 和 M^c，且第一条边和最后一条边属于 M，则称该路径为交错路径。

设 $\{v_1, v_2, \ldots, v_l\} \subseteq V(G)$。则 $G \backslash \{v_1, v_2, \ldots, v_l\}$ 是从 G 中删除顶点 $\{v_1, v_2, \ldots, v_l\}$ 及其关联边后得到的子图。

现在，我们将使用来自 [15]的以下记号。设 T 为一棵加权树。对于 T中任意一对不同顶点 v_i, v_j，令 $\mathcal{M}(v_i, v_j)$表示 T 的所有最大匹配 M 构成的集合，且这些匹配具有如下性质： v_iv_j-路径相对于 M是交替的。满足 $\mathcal{M}(v_i, v_j) \neq \phi$ 的一对顶点 v_i, v_j 称为最大可匹配。

此外，对于任意最大可匹配对顶点 v_i、 v_j 以及一个最大匹配 $M \in \mathcal{M}(v_i$、 $v_j)$，令 $\alpha_{v_i,v_j}(M)$ 表示所有权重 $w(e)$ 的乘积，其中遍历 M 的所有不包含在 T中唯一的 v_iv_j-路径 P上的边 e。（空集上的乘积视为等于 1。）此外，对于同一对顶点 v_i、 v_j ，令 $\alpha(v_i$、 $v_j)$ 为路径 P 中所有边 e 上取值 $w(e)$ 的乘积，并根据 v_i 与 v_j 之间的距离模 4同余于 $+1$ 还是 -1，乘以 $+1$ 或 -1；如果 v_i、 v_j 不是最大可匹配的，则令 $\alpha(u_i$、 $v_j) = 0$。对于 T 的任意最大可匹配对顶点 v_i、 v_j，令

$$\mu_T(v_i, v_j) = \alpha(v_i, v_j) \sum_{M \in \mathcal{M}(v_i, v_j)} (\alpha_{\overline{v_i, v_j}}(M))^2.$$

由此可知， $\mu_T(v_i, v_j) = 0$ 当 v_i, v_j 不是最大可匹配对时（其中包括 $v_i = v_j$ 的情形）。最后，令 $\mathcal{M}$ 为 T 中所有最大匹配的集合；对于每个 $M \in \mathcal{M}$，令 $\alpha(M)$ 为对 M 的所有边 e 所取权重 $w(e)$ 的乘积。最后，设

$$m(T) = \sum_{M \in \mathcal{M}} (\alpha(M))^2.$$

按照上述术语，接下来回顾在 [15], 中证明的加权树邻接矩阵群逆的一个公式。

定理 2.4。 [15, 定理 1] 设 T 是一棵顶点集为 V的加权树。那么，其群逆 $T^{\#}$ 中有两个不同的顶点 v_i、$v_j \in V$由一条边 e 相连，当且仅当 v_i、v_j 是 T中的一个最大可匹配对，其中 e 的权重由下式给出

$$w^{\#}(e) = w^{\#}(v_iv_j) = \frac{\mu_T(v_i, v_j)}{m(T)}.$$

这里的理解是，如果一对 v_i, v_j 不是最大可匹配的（包括 $v_i = v_j$ 的情况），那么 $w^{\#}(v_iv_j) = 0$。

注 2.5. 设 T 是一棵加权树， v_i、v_j 是 T 中任意两个顶点。由定理 2.4 可知， T 中存在一条从 v_i 到 v_j 的交错路径，当且仅当 v_iv_j 是 $T^{\#}$ 中的一条边。我们将反复用到这一事实。

注 2.6. 设 T 是一棵加权树，其顶点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$。那么， $T^{\#}$ 中的 $deg(v_i)$ 是从 v_i 出发的 T 中交错路径的条数。

引理 2.7. 设 T 是一棵奇异加权树， e 是 T 中的一条悬挂边。那么 e 属于 T 的某个最大匹配。

证明。设 M 是 T 的一个最大匹配。若 e 属于 M，则结论成立。因此，假设 e 不属于 M。那么 e 与 M 的一条边相邻；否则，$M \cup \{e\}$ 是一个匹配。然而，这与 M 是一个最大匹配这一事实矛盾。˜设 e 与 $v_iv_j \in M$ 相邻。由于 e 是一条悬挂边， M:=($M \backslash \{v_iv_j\}$) $\cup \{e\}$ 是 T 中的一个˜最大匹配。显然， e 属于最大匹配 M。□

引理 2.8.设 T 是一棵非星的加权树。如果 T 有至少两条相邻的悬挂边，则 $T^{\#}$ 不是树。

证明。注意到，由于 T 至少有两条相邻的悬挂边，因此它必然是奇异的。设 v_iv_p 和 v_iv_q 是 T的相邻悬挂边。由于 T 不是星，它有一条长度至少为三的路径。因此，最大匹配中的边数至少为二。设 M 是 T 中的一个包含悬挂边 v_iv_p 的最大匹配（根据引理 2.7，这是可能的）。

情形 (i)：假设存在一条关于 M 的长度至少为三的交错路径 P 中 T，且以 v_iv_p 作为初始边。注意， P的初始顶点是 v_p；令终点为 v_k。由于 v_iv_q 是悬挂边且与 v_iv_p相邻，˜M：=($M \backslash \{v_iv_p\}$)$\cup \{v_iv_q\}$ 也是 T中的最大匹配。以 ˜ 为初始顶点、以 v_k 为终点的路径 Qv_q 是 T中关于 M 的交错路径。注意，P 和 Q 除初始边外完全相同。现在，利用注 2.5，顶点序列 (v_i, v_p, v_k, v_q, v_i) 是 $T^{\#}$ 中的一个环，这证明了 $T^{\#}$ 不是树。

情形 (ii)：假设不存在相对于 M 、以 v_iv_p 为初始边且长度至少为三的任何交错路径。那么存在一条路径 $v_pv_iv_lv_mv_j$ ，其长度为

在 T中长度为四，且边 v_pv_i、 v_mv_j属于 M。注意， $\overline{M}=(M\backslash\{v_mv_j\})\cup\frown\{v_lv_m\}$ 也将是 T 中的一个最大匹配。此外， $M=(\overline{M}\backslash\{v_iv_p\})\cup\{v_iv_q\}$ 是 T 中的一个最大匹配。因此，路径 $v_pv_iv_lv_m$ 是关于 $\overline{M}$ 的一条交错路径，而路径$\frown v_qv_iv_lv_m$ 是关于 M 的一条交错路径，位于 T中。再次利用注 2.5，顶点序列 $(v_i, v_p, v_m, v_q, v_i)$将在 $T^{\#}$ 中构成一个环，因此 $T^{\#}$ 不是一棵树。□

注 2.9.引理 2.8可以改述如下。设 T 不是星。如果 T 和 $T^{\#}$是加权树，则在 T中没有两条悬挂边相邻。稍后给出的例 2.15 表明，引理 2.8 的逆命题并不成立。

引理2.10。设 T 是一棵奇异加权树。设 T 具有一条长度为三的交错路径 P（相对于某个最大匹配），使得 P 的中间非匹配边属于另一个最大匹配。则 $T^{\#}$ 不是树。

证明。设 P 是相对于最大匹配M交错的路径 $v_iv_pv_qv_j$。设中间边 v_pv_q 属于另一个最大匹配 M。由于 v_iv_p 和v_qv_j 都是相对于 M 的长度为一的交错路径，根据注 2.5，它们也是 $T_{\#}$ 中的边。现在，顶点序列 $(v_i, v_p, v_q, v_j, v_i)$ 是 $T_{\#}$ 中的一个 4-圈。因此， $T_{\#}$不是一棵树。□

回顾一下，冠树是通过向给定树的每个顶点附加一个新的悬挂顶点而得到的树，并且冠树总是非奇异的。

对于一个非奇异无向无权树 T， $[5,$ 定理 2.11$]$ 表明，T^{-1} 再次为树，当且仅当 T 为冠树。在下面的引理中，我们将对奇异加权树得到类似的刻画。

引理 2.11. 设 T 是奇异加权树。那么， $T^{\#}$ 是树当且仅当 T 是星树。

证明。假设 T 是一个星，则根据引理2.3， $T^{\#}$ 同构于 T。对于逆向部分，我们用逆否命题来证明，即证明如果 T 不是一个星，则 $T^{\#}$ 不是一棵树。由于 T 是一棵奇异加权树，它也不是一棵冠树。因此，存在一个非悬挂顶点 v_k，使得它要么与多于一个悬挂顶点相邻，要么不与任何悬挂顶点相邻。对于第一种情况，根据引理2.8， $T^{\#}$ 不是一棵树。现在，我们讨论后一种情况。假设 v_k 与 m 个非悬挂顶点 v_{kj}、 $1\leq j\leq m$相邻。令 M 为 T的一个最大匹配。

情形（i）：没有边 v_kv_{kj} 属于 M。那么，存在一条不同于 $v_{kj}v_k$ 的边 $v_{kj}v_{\tilde{kj}}$, $1\leq j\leq m$，使得 $\{v_{kj}v_{\tilde{kj}}:\ 1\leq j\leq m\}\subseteq M$；否则，这将与 M 是一个最大匹配这一事实矛盾。现在， $M_1=(M\backslash\{v_{k1}v_{\tilde{k1}}\})\cup\{v_kv_{k1}\}$ 和 $M_2=(M\backslash\{v_{k2}v_{\tilde{k2}}\})\cup\{v_kv_{k2}\}$ 也都是 T 的最大匹配。因此， $v_{k1}v_kv_{k2}v_{\tilde{k2}}$

是相对于 M_1 的一条交错路径，并且 $v_k v_{k2}$ 是 M_2 中的一条匹配边。于是，根据引理 2.10， $T^{\#}$ 不是一棵树。

情形 (ii)：对于某些 $i, v_k v_{ki}$ 属于 M。那么，存在一个最大匹配 M（否则，我们总可以构造出这种$\widehat{\ }$类型的最大匹配），使得 $\{v_k v_{ki}\} \cup \{v_{kj} v_{\overline{kj}} : 1 \leq j \leq m, j \neq i\}$ $\subseteq M$，其中 $v_{kj} v_{\overline{kj}}$ 是与 v_{kj} 相邻的一条边，且不是 $v_{kj} v_k, 1 \leq j \leq m$。

$\widehat{\ }$子情形 (i)：如果 $v_{ki} v_{\overline{ki}}$ 是一条悬挂边，那么， $\overline{M} = (M \backslash \{v_k v_{ki}, v_{kp} v_{\overline{kp}}\}) \cup \{v_{ki} v_{\overline{ki}}, v_k v_{kp}\}$ 也是 T 中的一个最大匹配，其中 $p \neq i$。同样，由引理 2.10， $T^{\#}$ 不是一棵树。

~子情形 (ii)：假设 $v_{ki} v_{\overline{ki}}$ 不是一条悬挂边。那么，存在一个最大匹~配 M，使得 $\{v_k v_{ki}, v_{\overline{ki}} v_{\widehat{ki}}\} \cup \{v_{kj} v_{\overline{kj}} : 1 \leq j \leq m, j \neq i\} \subseteq M$，其中 $v_{\overline{ki}} v_{\widehat{ki}}$ 是与 $v_{\overline{ki}}$ 相邻的一条边，且不是 $v_{ki} v_{\overline{ki}}$。因此，路径 $v_{\overline{kq}} v_{kq} v_k v_{ki} v_{\overline{ki}} v_{\widehat{ki}}$ 是相对于 $\tilde{M}$ 的一条长度为五的交错路径，其中某个 $q \neq i$满足该条件，这会导致在 $T^{\#}$中形成一个长度为四的环。

因此，证明至此完成。 □

在 [5, 定理 2.11], 中，作者证明了，对于一个非奇异树 T， T^{-1}再次为树当且仅当 T 为冠树；而后者成立当且仅当 T^{-1} 同构于T。自然会问，当树是奇异树时，是否也存在类似的刻画。在下一个结果中，我们确定了一类满足类似结论的奇异树。

定理 2.12. 对于具有 n 个顶点的奇异加权树 T，以下陈述等价：

(i) T 中的交错路径数量为 $n-1$。(ii) $T^{\#}$ 是一棵树。(iii) T 是星图。(iv) $T^{\#}$ 与 T同构。

证明。$(i) \Rightarrow (ii)$：由于 T 有 $n-1$ 条交错路，根据注 2.5， $T^{\#}$ 有 $n-1$ 条边。由于 $T_{\#}$ 是连通的并且有 $n-1$ 条边， $T^{\#}$ 是一棵树。
$(ii) \Rightarrow (iii)$：由引理2.11可知。 $(iii) \Rightarrow (iv)$：由推论 2.3 得出。
$(iv) \Rightarrow (i)$：令 T 不是星图。根据引理 2.11， $T^{\#}$ 不是树。因此， T 不同构于 $T_{\#}$。然而，由于假设 $T_{\#}$ 同构于 T，我们得出 T 是星图。由于每个单元素边集都将在星图中构成一个最大匹配，因此星图中的交错路径数量就是边的数量，即 $n-1$。□

推论 2.13. 设 T 是奇异加权树，且 A 是 T 的邻接矩阵。那么 A 和 $A^{\#}$ 具有相同的零非零模式，当且仅当 T 是加权星。

证明。注意到 A 和 $A^{\#}$ 具有相同的零非零模式，这意味着 T 和 $T^{\#}$ 彼此同构。然后，证明由引理 2.2 和定理 2.12 得出。□

我们称带权无向图 H 是带权无向图G 的子图，如果 H 的底层图是 G的底层图的子图。

在下一个结果中，我们将给出关于奇数长度路径的群逆的一些信息。$\widehat{}$我们用 P_n 表示一条路径，用 $\{v_iv_{i+1}$ 表示其边集： $1 \leq i \leq n-1\}$。那么， $M = \{v_1v_2, v_3v_4, \ldots, v_{2n-1}v_{2n}\}$ 和$\overline{M} = \{v_2v_3, v_4v_5, \ldots, v_{2n}v_{2n+1}\}$ 是 P_{2n+1}中的两个最大匹配。

我们以一个关于奇数长度路径的群逆的结果结束本节。

命题 2.14. 将 P_{2n+1} 视为一个加权图。那么，我们有如下结论：
(i) P_{2n+1} 是 $P^{\#}_{2n+1}$的生成子树。(ii) v_iv_j 是 $P^{\#}_{2n+1}$ 中的一条边，当且仅当 $i+j$ 为奇数。(iii) 对于 $n \geq 2$，图 $P^{\#}_{2n+1}$ 没有任何悬挂顶点。

证明。（i）由于最大匹配边也是交错路径，根据注 2.5 可知，对于所有 $i = 1$、2、.....、$2n$， v_iv_{i+1} 是 $P^{\#}_{2n+1}$ 中的一条边。因此， P_{2n+1} 是 $P^{\#}_{2n+1}$ 的生成子树。

（ii）假设 $i+j$ 为奇数。那么 i 和 j 具有不同的奇偶性。路径 $\widehat{}$ 中的每条边都属于 P_{2n+1} 中的 M 或 $\overline{M}$。一条从 v_i 开始、 i 为奇数并以 v_j、$\widehat{}$ 结尾的路径，其中 j 为偶数，相对于最大匹配 M 是交错的；而一条从 v_i 开始、 i 为偶数并以 v_j 结尾的路径，其中 j 为奇数，相对于 $\overline{M}$ 是交错的。因此，在这两种情况下， v_iv_j 都是 $P_{\#\,2n+1}$ 中的一条边，这再次由注 2.5 得出。

我们将通过逆否等价来证明逆命题部分。设 $i+j$ 为偶数。则 i和 j 具有相同的奇偶性。于是，任何从 v_i 开始并在 v_j结束的路径长度都是偶数。因此， v_iv_j-路径不能是交错路径。由注2.5， v_iv_j 不能是 $P^{\#}_{2n+1}$ 中的一条边。因此，如果 v_iv_j 是 $P_{\#\,2n+1}$ 中的一条边，则 $i+j$ 为奇数。

(iii)由于边 v_1v_2 和 v_1v_4-路径是相对于最大匹配 $\widehat{M}$从 v_1开始的两条交错路径， $P_{\#\,2n+1}$中的顶点 v_1的度至少为二。类似地，相对于最大匹配 $\overline{M}$ 的 $v_{2n}v_{2n+1}$-交错路径和 $v_{2n-2}v_{2n+1}$-交错路径意味着， $P^{\#}_{2n+1}$ 中的顶点 v_{2n+1} 的度至少为二。

对于任意顶点 v_i、 $i \neq 1$、 $2n+1$， $v_{i-1}v_i$路径和 v_iv_{i+1}路径是 P_{2n+1}中的两条交错路径。这意味着$P^{\#}_{2n+1}$ 中的 v_i 的度也至少为二。因此， $P_{\#\,2n+1}$中的任意顶点的度至少为二。因此， $P^{\#}_{2n+1}$中不存在悬挂顶点。□

例 2.15。考虑加权路径 P_5 及其群逆 $P_5^{\#}$ 。

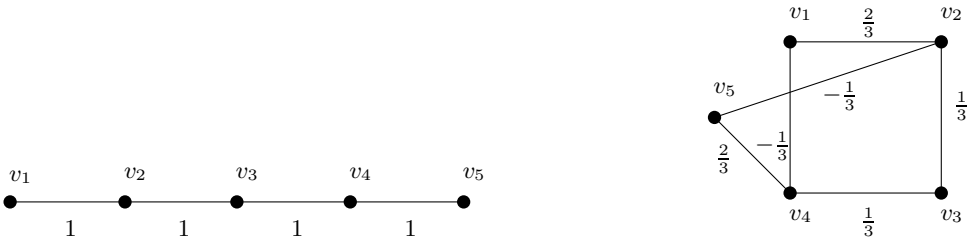

FIGURE 1. P_5 (左) 和 $P_5^{\#}$ (右)

我们记录以下观察结果:

(i) $v_1v_2v_3v_4v_5$ 路径（在这里为 P_5 ）是 $P_5^{\#}$ 的生成子树。(ii) v_iv_j 是 $P_5^{\#}$ 中的一条边, 当且仅当 $i+j$ 为奇数。(iii) $P_5^{\#}$ 没有悬挂顶点。(iv)显然， P_5 有三个最大匹配（每个匹配都包含两条边）。引理 2.10 的假设成立。注意到 $P_{2n+1}^{\#}$ 包含一个4-圈。

3. A NEW CLASS OF WEIGHTED TREES

在本节中，我们介绍一类新的加权树，并证明该类中正权树的邻接矩阵的群逆与某个非负矩阵符号相似。我们还证明，给定类中任意成员的邻接矩阵在每条边上具有正权重时, 其最小正特征值是单重的。

现在，我们定义一类新的加权树。类 $\mathbb{T}$ 的定义要求每个 $T \in \mathbb{T}$ 都是满足以下性质的简单无向加权树:

(i) T 至少有一个非悬挂顶点。(ii) 每个非悬挂顶点都与 T中的至少一个悬挂顶点相邻。

例 3.1。考虑两个加权树 T_1 和 T_2。

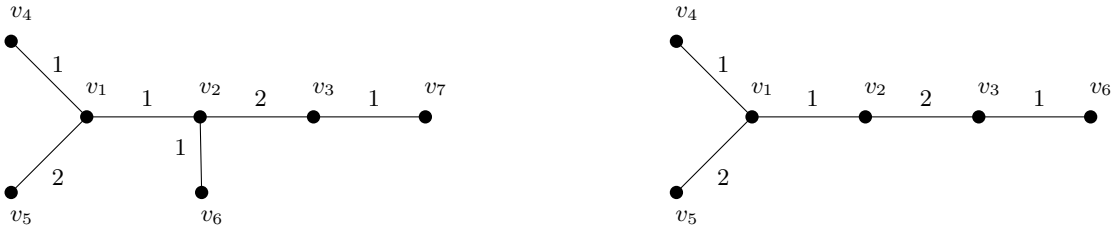

FIGURE 2. T_1 （左）和 T_2 （右）

注意， $T_1 \in \mathbb{T}$ 和 $T_2 \notin \mathbb{T}$。 T_1 有 3 个非悬挂顶点， v_1、 v_2 和 v_3 ，并且它们分别都至少与一个悬挂顶点相邻，然而， T_2中的非悬挂顶点 v_2 不与任何悬挂顶点相邻。

值得指出的是，属于 $\mathbb{T}$ 的底层图是簇网络的一个特例：以任意树为基图，以星图为卫星即可得到， [2, 22]。 [22], 中给出了由两个图构成的簇的基尔霍夫指数公式，并以各个部分表示。 [2] 中则以各个部分表示，得出了广义簇网络的基尔霍夫指数公式和有效电阻。簇网络在化学应用中具有重要意义，因为所有由某个中心子分子与其他部分融合而成的复合分子，都可以理解为广义簇网络。例如，由于很容易发现簇网络结构，因此可以用它们来理解某些分子中的金属-金属相互作用问题（见 [19]）。

在 [8], Godsil 已证明，如果 A 是一个具有唯一完美匹配的无向无权二部图 G 的邻接矩阵，且 $G\backslash M$ 又是一个二部图，那么 A^{-1} 与一个非负矩阵对角相似。特别地，对于可逆的（无权）树，（邻接矩阵的）逆与一个 $\{0,1\}$-矩阵对角相似。此外，他还提出了这样一个问题：刻画所有具有唯一完美匹配的二部图，使得每个此类图的邻接矩阵的逆都与一个非负矩阵对角相似。后来，在 [14], Panda 和 Pati 将 Godsil 的结果推广到了加权图的情形。通过为每条匹配边赋予权重 1，并假设非匹配边具有任意正权重，他们证明了 A^{-1} 与一个非负矩阵符号相似。Godsil 提出的问题，其一般形式最近已在 [20, 定理 1.3] 中得到解决。对于奇异二分图类，一个类似问题对于本文引入的这类新树有肯定答案，其中每条边都具有正权重。

注 3.2. 注意，加权冠树属于 $\mathbb{T}$。考虑一棵不是冠树的树 $T \in \mathbb{T}$ 。那么在 T 中至少有两个悬挂顶点具有一个公共邻点。这意味着 T 的邻接矩阵中至少有两行互为倍数。因此，T 是奇异的。

定理 3.3. 设 $T \in \mathbb{T}$。那么， T 的最大匹配中不可能包含非悬挂边。

证明. 如果 T 是一棵冠树，那么它有一个完美匹配，且每条匹配边都是悬挂边。现在考虑 T 不是冠树的情况。在这种情况下， T 中至少有一个非悬挂顶点与至少两个悬挂顶点相邻。我们通过对 T 中顶点的数量进行归纳法来证明该断言。

$\mathbb{T}$ 中的最小树是 $K_{1,\,2}$ ，且每个最大匹配都只包含悬挂边。设 $T \in \mathbb{T}$ 有 n 个顶点。假设对于属于 $\mathbb{T}$ 且顶点数小于 n的任意树，该命题都成立。设 v_i 是与 r个悬挂顶点 $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}\}$相邻的非悬挂顶点，这些顶点位于 T中。设 e是 T中最大匹配 M 所包含的任意一条非悬挂边。我们证明这会导致矛盾。

情形 (i)： e 与 v_i关联。于是，边 $v_iv_{i_p}$、 $1 \le p \le r$均不属于 M。因此，M 也将是树 $T\backslash\{v_{i_1}\} \in \mathbb{T}$ 的一个最大匹配。然而，这与归纳法假设相矛盾：在树 $T\backslash\{v_{i_1}\}$ （有 $n-1$ 个顶点）中，存在一条非悬挂边属于某个最大匹配。

情形(ii)： e不与顶点 v_i相连。那么，$v_iv_{i_p}$、 $1 \le p \le r$中必有一个属于 M；否则 M 将不会是最大匹配。令$v_iv_{i_p}$ 属于 M，其中 p、 $1 \le p \le r$为某些.....。那么，对于某个 $q \ne p$， M也将是树 $T\backslash\{v_{i_q}\}$的最大匹配，这再次与归纳法假设矛盾。

至此，证明完毕。 □

我们得到以下直接推论，它在后续讨论中将会非常有用。

推论 3.4. 令 $T \in \mathbb{T}$。则任意交错路径的长度至多为三 .

证明。假设 T 有一条长度至少为五的交错路径 P。那么 P 应至少有一条属于最大匹配的非悬挂边。这是矛盾。□

注 3.5. 设 $T \in \mathbb{T}$ 有 k 个非悬挂顶点 $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$，其中每个 v_i 都与 t_i 个悬挂顶点相邻。那么， T 的任意一个最大匹配都必然包含一组 k 条互不相邻的悬挂边。因此， T 中最大匹配的边数为 k，最大匹配的数量为 $t_1t_2 \ldots t_k$。

注 3.6. 令 $T \in \mathbb{T}$。那么， T 中长度为三的交错路径的初始顶点和终端顶点都应为悬挂顶点；长度为一的交错路径不过是一条悬挂边。

推论 3.7。令 $T \in \mathbb{T}$。于是我们得到以下结论：
(a) 令 $v_1, v_2, ..., v_k$ 表示非悬挂顶点，其中每个 v_i 都与 t_i 个悬挂顶点相邻。然后在 $T^{\#}$ 中，有公式 $deg(v_i) = t_i$。
(b) 设 T 是一棵树 它既不是星也不是冠树。那么 $T^{\#}$ 至少有一个 4-圈。

证明。(*a*) 根据定理 3.3，非悬挂边不属于T中的任何最大匹配。这意味着， v_i 在T中出发的交错路只有 t_i 悬挂边。由注 2.6， v_i在 $T_{\#}$中的关联边数为 t_i。因此， $deg(v_i)$ 在 $T_{\#}$ 中为 t_i。

(*b*) 由于 T 不是冠树且 $T \in \mathbb{T}$， T中存在两条相邻的悬挂边。现在，根据引理 2.8 的证明可知， $T^{\#}$ 至少有一个 4-圈。□

接下来，我们将前文提到的 [8]关于可逆树的结果推广到类 $\mathbb{T}$。这里需要指出的是，如果我们考虑的基树 T 是非奇异的，并且在每个非悬挂顶点上连接相同数量的悬挂顶点，

那么，根据以下定理，可以从 [17, 命题 6]推导出 $A^{\#}$ 的可符号化性。 [17] 的作者通过线性代数方法证明了他们的结果，而我们给出一个简单的图论证明。

定理 3.8. 设 $T \in \mathbb{T}$ 在每条边上赋予正权重。设 A 为 T的邻接矩阵。那么存在一个符号矩阵 S ，使得 $SA^{\#}S$ 是非负矩阵。

证明. 不失一般性，设 v_1是 T中的一个悬挂顶点。对于 $i = 1, 2, \ldots, n$，令$P(v_1, v_i)$表示从 v_1到 v_i的路径，并令 n_i表示路径 $P(v_1, v_i)$上不属于 T中任何一个最大匹配的边数。令 $n_1 = 0$, $s_i = (-1)^{n_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$，并令 $S = \mathrm{diag}(s_1, s_2, \ldots, s_n)$。令 $A^{\#} = (\beta_{ij})$, 则 $SA^{\#}S$的第 ij 个元素为 $s_i s_j \beta_{ij}$，当且仅当 $\beta_{ij} = 0$时该值为零。假设 $\beta_{ij} \neq 0$，则根据定理 2.4， v_i 与 v_j 之间的路径相对于某个最大匹配是交替的。由于边权重为正， β_{ij} 的符号取决于 $(-1)^{\frac{d(v_i,v_j)-1}{2}}$ 的符号。根据推论 3.4，$d(v_i, v_j)$要么为一，要么为三。若 $d(v_i, v_j) = 1$，则 $v_i v_j$是悬挂边，因此 $n_i = n_j$。现在， $s_i s_j = (-1)^{2n_i} = 1$ 且 $(-1)^{\frac{d(v_i,v_j)-1}{2}} = 1$。因此， $SA^{\#}S$ 的第 ij 个元素为正。另一方面，当 $d(v_i, v_j) = 3$时，要么 $n_j = n_i + 1$, 要么 $n_j = n_i - 1$。在这两种情况下， $s_i s_j = -1$ 且 $(-1)^{\frac{d(v_i,v_j)-1}{2}} = -1$。因此，在这种情况下， $SA^{\#}S$ 的第 ij 个元素也为正。□

注 3.9. 我们通过一个例子说明，上述结果不适用于不属于 $\mathbb{T}$ 的奇异加权树。

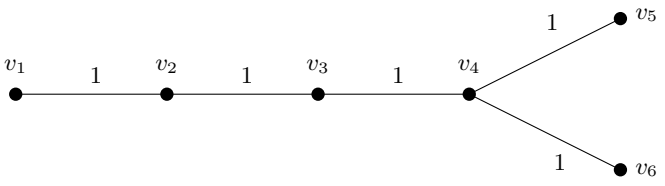

FIGURE 3. (T, w)

T 的邻接矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

假设存在一个符号矩阵 $S = (s_{ij})$，使得 $SA^{\#}S$ 非负。令$A^{\#} = (\beta_{ij})$，并令 $B = SA^{\#}S = (b_{ij})$。于是 $b_{ij} = s_i s_j \beta_{ij}$，从而 $b_{12} = \frac{3}{5}s_1 s_2$、$b_{14} = -\frac{1}{5}s_1 s_4$、$b_{23} = \frac{2}{5}s_2 s_3$ 和 $b_{34} = \frac{2}{5}s_3 s_4$。由于 B 是一个非负矩阵，数值 $s_1 s_2$、$s_1 s_4$、$s_2 s_3$ 和 $s_3 s_4$ 分别为正、负、正和正。由于 $s_1 s_2$ 为正且 $s_1 s_4$ 为负，我们推得 $\frac{s_2}{s_4}$ 为负。此外，由于 $s_2 s_3$ 和 $s_3 s_4$ 为正，可得 $\frac{s_2}{s_4}$ 为正，这就产生了矛盾。

注3.10.回顾一下，若有向图 $D(A)$（对应于矩阵 A）是强连通的，则称 A 为不可约矩阵。设 A 为一个 $n \times n$ 实矩阵，且 $A^{\#}$存在。那么根据引理 2.4], A 是不可约的，当且仅当 $A^{\#}$ 是不可约的。

在 [5, 推论2.8], 中，我们证明了，对于一个非奇异的无权树 T，T的最小正特征值是单的，并且存在一个与最小特征值对应的特征向量，使得其所有分量均非零。我们对新类的树 $\mathbb{T}$证明了类似的结果，其中每条边上的正权重可任意指定。

G的谱半径记为 $\rho(G)$，它是其邻接矩阵A的谱半径。

推论 3.11. 设 $T \in \mathbb{T}$ 的每条边都具有正权重，其邻接矩阵为 A。那么 T, $\tau(T)$ 的最小正特征值是单重的。此外，存在一个对应的特征向量，其每个分量都非零。

证明。由定理 3.8，存在一个符号矩阵 S，使得 $SA^{\#}S$ 是非负矩阵。由于 A 不可约，根据注 3.10，$A^{\#}$ 不可约，因此 $SA^{\#}S$ 不可约。现在，由 Perron–Frobenius 定理，$\rho := \rho(SA^{\#}S)$ 是单的；又由于 $SA^{\#}S$ 与 $A^{\#}$相似，$\rho(T_{\#})$ 是单的。因此，$\tau(T) = \rho^{-1}(T^{\#})$ 是单的。

设 $x > 0$ 为对应于 $\rho(SA^{\#}S)$ 的 Perron 向量，使得 $SA^{\#}Sx = \rho(SA^{\#}S)x$。由于 $\rho(SA^{\#}S) = \rho(A^{\#})$ 且 $S = S^{-1}$, $A^{\#}(Sx) = \rho(T^{\#})(Sx)$。因此，$Sx \in R(A^{\#}) = R(A)$，于是 $Sx = AA^{\#}(Sx) = \rho(T^{\#})A(Sx)$。这意味着 $\tau(T)(Sx) = \rho T^{-1}(\#)(Sx) = A(Sx)$，说明 Sx 是对应于 $\tau(T)$ 的特征向量。由于 $x > 0$ 和 S 是符号矩阵，Sx 的所有元素均非零。□

我们以介绍 $\mathbb{T}$中的树（即毛毛虫树）来结束本节。毛毛虫树是一种树，删除其叶节点及关联边后会得到一个路径图。

命题 3.12. 设 $T \in \mathbb{T}$ 是一棵非星的加权毛毛虫树，它有 n 个悬挂顶点和 k 个非悬挂顶点 v_1、v_2、.....、v_k，满足 $v_i \sim v_{i+1}$，其中 $i = 1 = 2, ..., k-1$。设对于每个 i， t_i 表示与 v_i 相邻的悬挂顶点数。那么 $T^{\#}$ 中的边数为 $n + t_1t_2 + t_2t_3 + \cdots + t_{k-1}t_k$.

证明。我们假设 $v_i \sim v_{i+1}$，其中 $i = 1 = 2, ..., (k-1)$。根据注 2.5， T 中交错路径的数量等于 $T^{\#}$ 中的边数。由于最大匹配边是唯一的悬挂边， T 中长度为一的交错路径数量为 n。

对于长度为三的交错路径，初始边应与 v_i 相 incident，末端边应与某个 $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ 的 v_{i+1} 相 incident。对于任意 i，在 T 中，从与 v_i 相邻的悬挂顶点出发并以与 v_{i+1} 相邻的悬挂顶点结束的交错路径总数为 t_it_{i+1}。因此， T 中长度为三的交错路径总数为 $t_1t_2 + t_2t_3 + \cdots + t_{k-1}t_k$。由于 T 中任意交错路径的长度至多为三，$T^{\#}$ 中的边总数为 $n + t_1t_2 + t_2t_3 + \cdots + t_{k-1}t_k$。 □

4. Acknowledgement

作者感谢印度理工学院马德拉斯分校的K.C.Sivakumar，就本文草稿版本进行了多次讨论。这些讨论极大地提高了文章的可读性。

References

[1] S. Akbari 和 S.J. Kirkland，关于酉模图，Lin.Alg. Appl.，421（2007），3-15。[2] C. Arauz，某些复合网络的基尔霍夫指数。DiscreteAppl. Math.，160（2012），1429-1440。[3] R.B. Bapat，图与矩阵，第二版，Universitext，Springer，伦敦；Hindustan Book Agency，新德里，2010。[4] R.B. Bapat 和 E. Ghorbani，三角矩阵与二部图的逆，LinearAlg. Appl.，447（2014），68-73。[5] S.Barik、M. Neumann 和 S. Pati，关于非奇异树及其倒数特征值性质，Lin.Multilin. Alg. 54（2006），453-465。[6] A.Ben-Israel 和 T. N. E. Greville，广义逆——理论与应用，第15卷，Springer-Verlag，纽约，2003。[7] M. Catral、D. D. Olesky、P. Van den Driessche，具有路径图的矩阵的群逆，Elec. J.Linear Algebra 17（2008），219-233。[8] C.D. Godsil，树的逆，Combinatorica 5（1985），33-39。[9] A.Graovac、I.Gutman、N. Trinajsti´c，缀合分子化学的拓扑方法，Springer，柏林，1977。[10] I.Gutman 和 O.E.Polansky，有机化学中的数学概念，Springer，柏林，1986。[11] I.Gutman，D.Rouvray，交替烃中 HOMO-LUMO 间隔的一个近似拓扑公式，Chem. Phys. Lett. 62（1979），384-388。[12] A. Kalauch、S.Lavanya、K.C. Sivakumar，群逆为 M-矩阵的矩阵，LinearAlgebra Appl.，614（2021），44-67。[13] C. McLeman、E.McNicholas，图的可逆性，GraphsCombin.，30（2014），977-1002。[14] S.K. Panda、S. Pati，具有唯一完美匹配的一类二部图的逆，Elec. J.Linear Algebra 29（2015），89-101。[15] S. Pavl´ıkov´a 和 J. ˇSir´aˇn，不可逆加权树的求逆，Australas. J.Combin.，75（2019），246-255。[16] S.Pavl´ıkov´a，关于带标记图的逆的注记，Australas. J.Combin. 67（2017），222-234。[17] S. Pavl´ıkov´a 和 D.Sevcovic，关于块对称矩阵的 Moore-Penrose 伪逆及其在图论中的应用，2022。https://arxiv.org/abs/2207.11563[18] S.Raniand 和 S. Barik，关于树的交错路径和最小正特征值，J.Comb. Optim.，39（2020），589-601。[19] H. E. Toma，超分子化学与技术。Anais da Academia Brasileira deCiˆencias，72（2000），05-26。[20] Y. Yang 和 D. Ye，二部图的逆，Combinatorica38（2018），1251-1263。[21] D. Ye、Y.Yang、B. Mandal、D. J. Klein，图的可逆性与中位特征值，LinearAlgebra Appl.，513（2017），304-323。[22] H. Zhang、Y. Yang 和 C. Li，复合图的基尔霍夫指数。DiscreteAppl. Math.，157（2009），2918-2927。