arXiv:2304.03021v1 [math.LO] 6 Apr 2023

¨ ´弱良序与 Fraïssé 猜想

ANTON FREUND AND DAVIDE MANCA

Abstract. 良序的概念还可以通过初始段之间的嵌入来定义。我们运用逆向数学框架，考察这一定义的逻辑强度及其与 Fra¨ıss´e 猜想的联系；该猜想已由 Laver 证明。我们还弥补了 Shore 证明中的一个小缺口：他证明了 Fra¨ıss´e 猜想蕴含 RCA_0, 上的算术超限递归。我们通过给出 Σ^0_2-归纳的新证明来填补这一缺口。

1. Introduction

对良序的研究对于证明论具有重要意义，并为序数分析和逆数学这两种不同研究路径之间提供了接点。后者为比较来自各个领域的定理的公理强度提供了一个成熟的框架。其核心思想是在一个较弱的基础理论之上证明定理与公理之间的等价性，例如递归概括系统RCA_0。关于更多背景，我们请参阅 [4, 17] 。在这一框架下，子系统 ATR_0 似乎是研究可数序数的自然环境。正如 S. Simpson所断言的那样，“[ATR_0] 是允许发展出一套完善的可数良序理论的最弱公理系统” [17]。特别地，ATR_0 等价于如下陈述：任意两个可数良序都可以通过以下两种方式中的任意一种进行比较 [5, 17], 。对于线性序 X 和 Y，嵌入是一个保序映射 $f\colon\ X \to Y$。如果存在这样的映射，我们记作 $X \leq_w Y$。另一方面，从 X 到 Y的强嵌入，是 X 与 Y的某个初始段之间的同构，即一个集合$I \subseteq Y$，使得当我们对某个 $y \in I$有 $x <_Y y$ 时，总能得到 $x \in I$。因此，在所有线性序的类上可以得到两种拟序，并且假设ATR_0，它们在良序上的限制相同。鉴于以往关于这两种可嵌入性概念的研究（见 [5, 7]），研究是否可以利用初始段来获得对良序这一概念本身的富有成效的刻画，似乎是很自然的。以下是这种刻画的一个显而易见的候选。

定义 1.1. 若某个可数线性序 X 不存在可嵌入真初始段 $I_0 \subsetneq I$的初始段 $I \subseteq X$，则称其为弱良序。

对可数序的限制是由逆向数学的框架所决定的。然而，这也有更实质性的动机：Fra¨ıss´e 的猜想在下面的命题 1.3 中发挥着核心作用，但对于一般情形并不可用。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 03B30, 03F15, 03F35, 06A05.

Key words and phrases. 弱良序、Fra¨ıss´e 猜想、逆向数学、算术超限递归。由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助——项目编号 460597863。

不可数序。在下文中，我们假设所有序都是可数的。现在注意到，上述性质可由良序的通常定义推出。

引理 1.2（RCA_0）。如果 X 是良序，那么它是弱良序。

证明。为证明逆否命题，假设对于某个线性序 X，存在初始段 $I_0 \subsetneq I \subseteq X$ 和一个嵌入 $f\colon I \to I_0$。任取$x \in I \setminus I_0$，根据假设它非空：于是 $x > f(x) > f(f(x)) > \ldots$，因此 X 不是良基的。□

对于反向蕴含，我们依赖前述的 Fra¨ıss´e 猜想，该猜想由 R. Laver [9]证明。它断言，任意可数（或更一般地说，σ-稀疏）的线性序无限序列 $L_0, L_1, \ldots$ 都存在 $i < j$，使得 $L_i \leq_w L_j$。

命题 1.3（RCA_0）。Fra¨ıss´e 猜想蕴含，任何弱良序都是良序。

证明。为了证明逆否命题，设 $(x_i)_{i<\omega}$ 是一个非良基线性序中的无限下降序列 X。将 L_i 定义为 X 的初始段，由所有小于 x_i 的元素组成。根据 Fra¨ıss´e 猜想，必定存在 $i < j$，使得 $I = L_i$ 嵌入 $I_0 = L_j$。由于 $x_i > x_j$，我们确实有 $L_j \subsetneq L_i$。□

为了解两种可嵌入性的关系，注意到，如果一个线性序 X 嵌入到一个良序 Y 中，无论是弱嵌入还是强嵌入，那么 X 也是一个良序。另一方面，如果 Y 只是一个弱良序，那么当嵌入是强嵌入时，我们仍然可以得出 X 是一个弱良序。然而，当嵌入是弱嵌入时，我们无法立即得出这一结论。事实上，我们将看到，ATR_0 等价于这样一个原理：只要对于某个弱良序 Y 有 $X \leq_w Y$，就有 X 是一个弱良序（结合引理3.6与定理3.5）。定义1.1 中描述的良序概念在另一方面也弱于通常的良序概念：推论3.2给出了一个线性序的例子，在一个足够弱的理论中，可以证明它是一个弱良序，但不能证明它是一个良序。

Fra¨ıss´e 猜想的精确强度，是逆向数学中的一个重要未解问题。在 [16], R. Shore 证明，该猜想在良序上的限制等价于 $\mathsf{RCA}_0 + \Sigma^0_2$ 中的 ATR_0，归纳。随后他论证，后一结果的基理论可以降至仅有 RCA_0。然而，消去 Σ^0_2 归纳的最后一步用到了 ω^ω 是良基的这一点，而 RCA_0 无法证明这一点。本文将给出一个新的证明，说明 Fra¨ısse 猜想蕴含 RCA_0 上的 Σ^0_2 归纳（特别参见第 4 节）。关于上界，A. Montalb´an [12] 已证明，Fra¨ıss´e 猜想可在公理系统 $\mathbf{\Pi}^1_1$-CA_0 中得到证明。

自然会有人问，命题 1.3 是否需要 Fra¨ıss´e 猜想的全部强度，或者其中的蕴含是否远非最有效。事实证明，两者皆非。根据以下结果，我们将能够得出结论：当任意弱良序都是良基时，算术超限递归成立。

命题 1.4（RCA_0）。如果每个弱良序都是良序，那么 Fra¨ıss´e 猜想在不可分解良序上的限制成立。

在给出证明之前，我们先回顾一下：如果对于非空线性序 A 和 B，$X = A + B$ 成立，则 X 嵌入 A 或 X 嵌入 B，那么线性序 X 就是不可分解的。我们称 X 为左不可分解，

如果它总是嵌入 A；如果它总是嵌入 B，则称 X 为右不可分解。在 X 是良序这一特殊情形下，引理 1.2 表明它只能是右不可分解的。

证明。设（X_i）$_{i\in\omega}$ 是不可分解良序的一个无限序列：我们的目标是找到指标 $i<j$，使得 X_i 嵌入 X_j。不妨假设没有任何 X_i 为空。我们用 ω^* 表示 $\mathbb{N}$ 上的序，其序关系为 $\leq^* = \{(m,n) \mid m \geq n\}$。考虑线性序 $\sum_{i\in\omega^*} X_i$：它不是良序，因为任意点族 $x_i \in X_i$都会产生一个下降序列。根据命题中的假设，我们可以断定它不是弱良序。因此，我们得到一个嵌入 f，它将 L 的一个初始段嵌入 L_0的一个更短初始段中。我们找到一个指标 j 以及一个非空初始段 $I \subseteq X_j$，使得 $L = \sum_{i<^* j} X_i + I$。首先，我们在附加假设 $L_0 = \sum_{i<^* j+1} X_i$下证明该结论，然后说明这不会损失一般性。在这一附加假设下，对于某个初始段 $J \subsetneq X_{j+1}$，$X_{j+1} \subseteq L$必须嵌入 $\sum_{i<^* j+2} X_i + J$。事实上，它嵌入 $\sum_{i<^* j+2} X_i$：如果 X_{j+1} 的某个终段确实嵌入 J，那么 X_{j+1}也会嵌入其中，这与引理 1.2矛盾。设 $i > j+2$ 是满足以下条件的最小指标：对于某个 $x \in X_{j+1}$，有 $f(x) \in X_i$。于是，X_{j+1} 的一个终段嵌入 X_i，因此 X_{j+1}也嵌入其中。现在，如果 L_0 包含于 $\sum_{i<^* j+1} X_i$中，我们可以直接延拓它。唯一的其他可能性是，对于某个 $I_0 \subsetneq I \subseteq X_j$，$L_0 = \sum_{i<^* j} X_i + I_0$ 成立。我们得到 $f \restriction I$ 的值域不包含于 I_0 中，因为否则良序 X_j 将违反引理 1.2。因此，存在一个非空初始段 $I' \subseteq I$，使得 $\mathrm{rng}(f \restriction I') \subseteq L_0' = \sum_{i<^* j+1} X_i$。这意味着我们可以用 L_0' 替换 L_0，并用 $L' = \sum_{i<^* j} X_i + I'$替换 L，从而归约到我们已经处理过的特殊情形。□

根据 [16, 推论2.16], 命题1.4的结论蕴含了任意良序下的Fra¨ıss´e猜-想，并从而蕴含 ACA_0 上的ATR_0。反过来，在第 2 节中，我们调整 Montalb´an通过带符号树对 Fra¨ıss´e 猜想的 [12] 分析，以证明 ATR_0 证明任意弱良序都是良序。在第 3节中，我们证明后者蕴含ACA_0，因此等价于 RCA_0 上的算术超限递归（见定理3.5）。在同一节中，我们还将看到，与此形成鲜明对比的是，RCA_0 足以证明：任何在（序数乘方的）句法版本下闭合的弱良序必然已经是良序。因此，弱良序是良序这一原则一般而言很强，但在一个重要的情形类中却很弱。我们将论证（见备注 4.4），这种二分法为线性序和证明论序数的“自然”描述这一理念提供了一些新的洞见。

致谢。对于Richard Shore 提供的有关其原始证明及其与我们第 4 节之间联系的信息和支持，我们深表感谢。

2. Cantor normal form for weak well orders

在本节中，我们证明 ATR_0 证明每个弱良序都是良序。为此，我们改编了 Montalb´an 对Fra¨ıss´e 猜想的分析中的一个论证，其中豪斯多夫秩的概念发挥着重要作用。

如果线性序 X 不嵌入 $\mathbb{Q}$，则称其为稀疏的。由于每个可数线性序都嵌入 $\mathbb{Q}$，所以每当 X 非稀疏时，我们都可以考虑一对嵌入 (f,g)，使得 $f\colon X \to \mathbb{Q}$ 且 $g\colon \mathbb{Q} \to X$。一般而言，如果我们

如果能在两个线性序之间找到这样一对嵌入，我们就称它们为等拟形。

引理 2.1 (RCA_0)。每个弱良序都是稀疏的。

证明。我们证明其逆否命题。设 L 是一个非稀疏线性序，并考虑 L 与 $\mathbb{Q}$ 之间的等态映射 (f, g)。取满足 $x = g(q_0)$ 的 $x \in L$，其中某个 $q_0 \in \mathbb{Q}$。由于 $\mathbb{Q}$ 是左不可分解的，我们可以考虑一个嵌入 $h\colon \mathbb{Q} \to \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q < q_0\}$。于是 $g \circ h \circ f$ 是从 L 到初始段 $\{y \in L \,|\, y < x\}$ 的嵌入，因此 L 不是弱良序。□

如引言所述，以下所有线性序都假定为可数。本节的主要结果是：在 ATR_0，中，任何稀疏弱良序 W 都有康托尔标准形；也就是说，存在一个良序 α 和一个非递增序列 $\langle \sigma(0) \dots, \sigma(n-1) \rangle \in \alpha^{<\omega}$，使得 W 与序 $\omega^{\sigma(0)} + \ldots + \omega^{\sigma(n-1)}$ 同构。解释如下：给定一个线性序 X，我们将 $\omega(X)$ 定义为底集为

$$\omega(X) = \{\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle \,|\, x_i \in X \text{ and } x_0 \geq_X \dots \geq_X x_{n-1}\}$$

以及字典序比较。为了更精确地说明，我们用 $l(\sigma)$ 表示序列 $\sigma = \langle \sigma_0, \dots, \sigma_{l(\sigma)-1} \rangle$ 的长度，用 σ_i 表示其项。此时，$\sigma \leq_{\omega(X)} \tau$成立，当且仅当满足以下情形之一：要么 $l(\sigma) \leq l(\tau)$，且对所有 $i < l(\sigma)$ 都有 $\sigma_i = \tau_i$；要么存在某个 $j < \min\{l(\sigma), l(\tau)\}$，使得 $\sigma_j <_X \tau_j$，并且对 $i < j$ 有 $\sigma_i = \tau_i$。相应地，W 的康托尔标准形可以定义为一个元素 $\sigma \in \omega(\alpha)$，使得 W 同构于初始段 $\{x \in \omega(\alpha) \,|\, x <_{\omega(\alpha)} \sigma\}$，简记为 $\omega[\sigma]$。在特殊情形 $\sigma = \langle \beta \rangle$ 下，我们将同一个初始段记作 ω^β。对于 $\sigma = \langle \sigma(0) \dots, \sigma(n-1) \rangle$，这使得 $\omega[\sigma]$ 同构于 $\omega^{\sigma(0)} + \ldots + \omega^{\sigma(n-1)}$。

关于康托尔标准形的上述结果意味着，每个稀疏的弱良序都是良基的。鉴于引理2.1，这足以证明每个弱良序都是良序。Hirst 已在 [7] 中证明，ATR_0 等价于每个良序都具有康托尔标准形这一事实，但遗憾的是，他的证明似乎并不适用于弱良序。正如之前所提到的，我们的方法转而遵循 Montalb´an的先前工作：我们的定理2.4 的证明实质上改编自 [11, 引理 3.4] 的证明。下面，我们将非正式地解释这两个论证之间的关系，但要理解主要论证，并不需要这一解释，备注 2.2 除外。

在 [11], 蒙塔尔布´安使用下文讨论的豪斯多夫秩概念，证明任何散线性序都可以分解为遗传不可分解线性序之和。此外，假设一个等价于弗拉¨伊塞´的猜想的陈述，该和是有限的。遗传不可分解线性序可以表示为带标记的良基树，其中每个节点上的标记来自集合 $\{+, -\}$。与这样的树 T 相关联的序称为 T的线性化。若 T根上的标记是“ $-$”，则该线性化是左不可分解的；若同一标记是“ $+$ ”，则它是右不可分解的，其含义将在命题 1.4 下文中解释。在前一种情形中，该线性化不是弱良序，因为它嵌入到它的任意初始段中。此外，T的任何子树都表示该线性化的一个区间，即满足以下条件的子序：如果 x、$z \in A$ 和 $x < y < z$，那么 $y \in A$。一般而言，弱良序与其区间之间存在如下关系：

备注 2.2. 线性序 X 是弱良序，当且仅当每个区间 $A \subseteq X$也都是如此。事实上，假设对于某个区间 A 我们有一个

嵌入 $f\colon\ J \to J_0$ 初始段 $J_0 \subsetneq J \subseteq A$。将 X 写作 $I + J + I'$，并考虑 id_I，即 I上的恒等映射。然后， $I + J$通过 $\mathrm{id}_I + f$嵌入到 $I + J'$中。

与子树对应的区间本身也是遗传不可分解线性序。鉴于前述观察，如果 T 中至少有一个节点的标记为“$-$”，那么它的线性化就不是弱良序。反过来，如果 T 的所有节点都标记为“$+$”，那么 T 的线性化是某个与 T 相关的良基树上的 Kleene-Brouwer 序的子序，因此 ACA_0 可以证明它是良序。由引理 1.2 可知，遗传不可分解线性序是弱良序，当且仅当它是某棵树 T 的线性化，且每个节点上的标记都是“$+$”。此外，如果 T 上存在秩函数，那么该线性化与 $\omega^{\mathrm{rank}(T)}$ 同构；特别是，在假设 ATR_0 时也是如此。直观地说，这就是为什么对于弱良序，我们能够仅使用 ATR_0 而非 Fra¨ıss´e 猜想来得到有限分解。下面我们将详细证明这一点。

首先，我们回顾一些关于散线性序的已知事实。考虑一个线性序 L 和一个良序 α。我们可以假设 L 的域由自然数组成。通过同时超限递归，我们定义$\sim_\beta$ 在 L 上的一个等价关系以及对于所有 $\beta < \alpha$的一个子集 $L_\beta \subseteq L$ 。令 $\sim_0$ 为恒等关系。我们声明，当存在 $c_0 \leq_L \ldots \leq_L c_n$ 中有限多个点，使得或者 $a \leq_L b$ 和 $a \sim_\beta c_0 \wedge b \sim_\beta c_n$，或者 $b \leq_L a$ 和 $b \sim_\beta c_0 \wedge a \sim_\beta c_n$，并且对于 a 与 b 之间的所有 x，都存在唯一的 $i \leq n$ 满足 $x \sim_\beta c_i$时， $a \sim_{\beta+1} b$ 成立。如果 λ 是一个极限序数，则当对于某个后继序数 $\gamma < \lambda$有 $a \sim_\gamma b$ 时，令 $a \sim_\lambda b$ 成立。此外，对于所有 $\beta < \alpha$，对于满足 $x \sim_\beta y$}的所有 $y \in L$定义 $L_\beta = \{x \in L \mid x \leq_{\mathbb{N}} y$。注意到 $L_0 = L$，并且对于所有 β，如果 x、y 是 L_β 中的不同元素，则 $x \not\sim_\beta y$。集合 L_β 称为 L的第 β个豪斯多夫导数。如果 $a \sim_\beta b$，我们称 a 和 b 为β-邻点。 a的 β-邻域定义为 $N^\beta(a) = \{b \in L \mid b \sim_\beta a\}$。容易看出， β-邻域是区间。此外，如果 $b \sim_{\beta+1} a$，则有 $N^\beta(b) \subseteq N^{\beta+1}(a)$。因此， $N^{\beta+1}(a)$可以写成 $\sum_{b \in I} N^\beta(b)$，其中 $I = N^{\beta+1}(a) \cap L_\beta$。在$\mathsf{ATR}_0$ 中，对于任意可数良序 α，我们可以定义序列 $(\sim_\beta)_{\beta<\alpha}$。

定理 2.3(Clote)。假设ATR_0 并考虑一个散线性序 L。那么存在一个可数良序 α、一个 $a \in L$ 和 $\beta < \alpha$，使得 $L_\beta = \{a\}$。

关于证明，请参阅 [2]的引理 13 和14。给定定理中所述的 β 和 a，我们得到 $L = N^\beta(a)$。事实上，如果在满足 $x \sim_\beta b$ 的 $x \in L$中， $b \in L$ 和 c 具有最小编码，那么可推出 $c \in L_\beta$，从而得到 $c = a$。但这样一来，我们有 $b \in N^\beta(a)$。使得对于某个适当的 $a \in L$， $L_\beta = \{a\}$ 成立的最小序数 β，称为 L 的豪斯多夫秩。下面我们将 $[11, \text{引理 } 3.4]$ 的证明调整为适合我们的形式。

定理 2.4 (ATR_0). 每个弱良序 L都存在康托尔标准形，也就是说，存在一个良序 α 和一个 $\sigma \in \omega(\alpha)$，使得 L 同构于 $\omega[\sigma]$。

证明。若 L 是弱良序，则由引理 2.1 可知它是稀疏的。因此，我们可以使用 ATR_0 来定义序列 $(\sim_\beta)_{\beta<\alpha}$，其中 α 满足定理 2.3。以该序列为参数，我们为所有 $\beta < \alpha$ 定义 L_β。我们的目标是为所有 $\beta < \alpha$ 和所有 $a \in L_\beta$ 定义序列 $\sigma \in \omega(\beta+1)$，以及 $N^\beta(a)$ 与初始段 $\omega[\sigma]$ 之间的同构。由于定理 2.3 证明了存在 $\beta < \alpha$ 和 $a \in L$，使得 $L = N^\beta(a)$，因此我们在该情形下找到的序列 σ 列出了 L 的康托尔标准形中的指数。

我们再次以 $(\sim_\beta)_{\beta<\alpha}$ 为参数，通过算术超限递归继续进行。取一个后继序数 $\beta+1$，并假设我们已经定义了截至层级 β 的所有所需序列和同构。考察 $b \in L_\beta \cap N^{\beta+1}(a)$：其中所有这些 b 与 a 相隔至多有限多个 L_β 中的点，因此它们彼此之间也至多相隔有限多个这样的点。因此，它们可由某个 $M \subseteq \mathbb{Z}$ 中的指标枚举，于是我们可以写成 $N^{\beta+1}(a) = \sum_{i\in M} N^\beta(b_i)$。归纳地，对每个 $i \in M$，我们都有一个序列 $\sigma_i \in \omega(\beta+1)$，以及 $N^\beta(b_i)$ 与 $\omega[\sigma_i]$ 之间的同构。若 M 是有限的，就将其写作 $\{0,\dots,n\}$。在这种情形下，我们考虑拼接 $\tau = \sigma_0 \frown \ldots \frown \sigma_n$。令 σ 为从 τ 中删除所有小于后续项的项后得到的序列。根据序数算术的基本性质，我们可以计算地得到 $\sum_{i\in M} \omega[\sigma_i]$ 与 $\omega[\sigma]$ 之间的同构。这与以下事实有关：该记号系统表示加法不可分良序的有限和，其中每个形如 $\omega^\gamma + \omega^\delta$ 且满足 $\gamma < \delta$ 的序都同构于 ω^δ。

现在假设 M 是无限的。我们声称，经过指标的重新编号后，我们有 $M = \omega$。事实上，假设 M' 是 M 的一个初始段，且它是一个无限下降序列：在这种情形下，归纳假设将给出 $N^{\beta+1}(a)$ 的一个初始段，它与 $\sum_{i\in\omega^*} \omega^{X(i)}$ 同构，其中 X 是由 $j \in M'$ 的有限序列向左拼接而得到的、由 $\beta+1$ 的元素构成的无限序列。我们注意到，存在一个指标 J 和一个递增映射 $h\colon [J,+\infty[\to [J+1,+\infty[$，使得对于所有 $i \geq J$，都有 $X(i) \leq_\alpha X(h(i))$。事实上，如果不存在这样的 J 和 h，那么对于任意大的 i，我们都会发现，除有限多个 j 外，$X(i)$ 都大于 $X(j)$。但这将意味着 $\beta+1$ 不是良基的。现在我们看到，$\sum_{i\leq^* J} \omega^{X(i)}$ 嵌入 $\sum_{i\leq^* J+1} \omega^{X(i)}$。由于同构保持弱良序和区间，因此 $N^{\beta+1}(a)$ 包含一个不是弱良序的区间。但 $N^{\beta+1}(a)$ 是 L 的一个区间，而 L 是弱良序，因此这与备注 2.2 矛盾。这就证明了我们的断言：$M = \omega$。

现在我们处于这样的情形：$N^{\beta+1}(a)$与 $\sum_{i\in\omega} \omega^Y(i)$同构，其中 $Y = \sigma_0 \frown \sigma_1 \frown \sigma_2 \ldots$ 是一个具有 $\beta+1$中元素的无限序列。我们区分两种情形。假设存在一个指标 j，使得对于所有 $k > j$，都有 $\beta \notin \mathrm{rng}(\sigma_k)$，并记 $Y = \sigma_0 \frown \ldots \frown \sigma_j \frown Y'$。如果存在一个 $\gamma < \beta$使得 $\gamma \geq \sup Y'$，那么对于所有 i，$\omega^{Y'}(i)$中的所有点都是 γ-邻点。在这种情形下，$\sum_{i\in\omega} \omega^{Y'}(i)$的 γ阶导数$\cong \sum_{k>j} \omega[\sigma_k]$ 将会是 ω，因此 $\sum_{k>j} \omega[\sigma_k]$ 中的所有点都是 β-邻点。这与M是无限的假设相矛盾。因此必有$\sup Y' = \beta$：在这种情形下，我们得到 $N^{\beta+1}(a)$与 $\sum_{i\leq j} \omega[\sigma_i] + \omega^\beta$同构，于是可以像在 M 为有限的情形中那样进行论证。在另一种情形中，β 在 Y中无限次出现。在这种情形下，我们得到$N^{\beta+1}(a)$与 $\omega^{\beta+1}$同构。至此，后继情形的讨论结束。

现在考虑一个极限序数 λ 和 $a \in L_\lambda$。取一个递增序列的后继序数 $\beta(i) < \lambda$，使得 $\lambda = \sup_{i\in\omega} \beta(i)$。于是 $N^\lambda(a) = \bigcup_{i<\omega} N^{\beta(i)}(a)$，并且并集中每一项都同构于某个适当的 $\omega[\sigma_i]$ $\sigma_i \in \omega(\beta(i)+1)$。我们声称存在一个 I，使得 $N^{\beta(I)}(a)$ 是 $N^\lambda(a)$ 的一个初始段。反设不然：那么我们可以找到指标的一个严格递增子序列 i_n，使得 $N^{\beta(i_{n+1})}(a)$ 向左延伸了 $N^{\beta(i_n)}(a)$。换句话说，我们可以找到一些区间 C_n，使得 $C_n + N^{\beta(i_n)}(a)$ 是 $N^{\beta(i_{n+1})}(a)$ 的一个初始段。因此，C_n 同构于 $\omega[\sigma_{i_{n+1}}] \subseteq \omega^{\beta(i_{n+1})+1}$ 的一个初始段。另一方面，该初始段的序型至少为 $\omega^{\beta(i_n)}$，否则 C_n 中的点将是$\beta(i_n)$ 中那些点的邻点，$N^{\beta(i_n)}(a)$。此外，由于涉及的所有序列

都是严格递增的，我们可以找到一个严格递增映射 $h\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$，满足$\beta(i_{n+1})+1\le\beta(i_{h(n)})$，对所有 n 均成立。于是得到 $\mathrm{otp}(C_n)\le\omega^{\beta(i_{n+1})+1}\le\mathrm{otp}(C_{h(n)})$，因此 C_n 嵌入 $C_{h(n)}$。由此，区间 $\sum_{n\in\omega^*}C_n$ 嵌入 $\sum_{n\le^*1}C_n$，这与备注 2.2 矛盾。

仍处于极限情形，现在我们知道，对充分大的 i，$N^{\beta(i)}(a)$ 是 $N^{\lambda}(a)$ 的初始段。因而对于较大的 $i<j$，同构 $N^{\beta(i)}(a)\cong\omega[\sigma_i]\subseteq\omega[\sigma_j]$和 $N^{\beta(j)}(a)\cong\omega[\sigma_j]$ 必须在 $N^{\beta(i)}(a)$ 上一致，因为良序的初始段之间的嵌入必然唯一。因此我们可以将它们拼接起来，得到 $N^{\lambda}(a)$ 与 ω^{λ} 的某个初始段之间的同构；对于适当的 $\sigma\in\omega(\lambda+1)$，它具有所需的形式 $\omega[\sigma]$。□

如上所述，我们可以得出以下结论：

推论 2.5（ATR_0）。每个弱良序都是良序。

反过来，当然可以从给出的推论以及 Hirst [7]的上述结果推导出定理 2.4。同时，我们发现有趣的是，通过豪斯多夫秩给出的证明确实直接导出了康托尔标准形。

3. Provable and unprovable cases of weak well foundedness

在本节中，我们证明以下结果，并推导出若干推论。变换 $X\mapsto\omega(X)$ 的定义已在上一节中回顾。

定理 3.1（RCA_0）。线性序 X 是良序，当且仅当 $\omega(X)$ 是弱良序。

证明。首先假设 X 不是良序。固定 X中的一个 $x_0>x_1>\dots$。为证明 $\omega(X)$不是弱良序，我们将其嵌入到 $\langle x_0\rangle$以下的真初始段中。对于证明命题 1.4 时所用的 ω^*，我们有一个嵌入

$$\omega(\omega^*)\to\{\sigma\in\omega(X)\mid\sigma<_{\omega(X)}\langle x_0\rangle\},$$
$$\langle i(0),\dots,i(n-1)\rangle\mapsto\langle x_{1+i(0)},\dots,x_{1+i(n-1)}\rangle.$$

我们断言，$\omega(X)$嵌入到 $\omega(\omega^*)$中。鉴于逆向数学中所考虑的序是可数的，只需证明 $Y:=\omega(\omega^*)\backslash\{\langle\rangle\}$ 是一个（有效地）稠密的、无端点的线性序，即与 $\mathbb{Q}$ 同构（参见引理 2.1）。为了说明任意 $\sigma\in Y$ 都不是端点，我们注意到

$$\langle\sigma_0+1\rangle<_Y\sigma<_Y\langle\sigma_0,\dots,\sigma_{l(\sigma)-1},\sigma_{l(\sigma)-1}\rangle.$$

现在考虑一个不等式 $\sigma<_Y\tau$。如果我们有 $\sigma_i=\tau_i$，对于 $i<l(\sigma)<l(\tau)$，我们得到

$$\sigma<_Y\langle\sigma_0,\dots,\sigma_{l(\sigma)-1},\tau_{l(\sigma)}+1\rangle<_Y\tau.$$

在剩下的情形中，我们有 $j<\min\{l(\sigma)\ l(\tau)\}$，其中对所有 $i<j$ 都有 $\sigma_i=\tau_i$，并且还有 $\sigma_j<^*\tau_j$（这意味着 $\mathbb{N}$ 中的 $\sigma_j>\tau_j$）。在这里我们得到

$$\sigma<_Y\langle\sigma_0,\dots,\sigma_{l(\sigma)-1},\sigma_{l(\sigma)-1}\rangle<_Y\tau.$$

为了证明定理的另一个方向，我们现在假设 X 是一个良序。在上一节中，我们使用 $\omega[\sigma]$ 作为 $\{\rho\in\omega(X)\mid\rho<\sigma\}$的记号。为简化记号，我们现在约定，$\omega[\sigma]$ 也可以记作 σ。对于 $\sigma,\tau\in\omega(X)$，我们置 $\sigma+\tau=\langle\sigma_0,\dots,\sigma_{i-1},\tau_0,\dots,\tau_{l(\tau)-1}\rangle$，其中 $i<l(\sigma)$ 是满足 $\sigma_i<\tau_0$ 的最小者；若不存在这样的指标，则取 $i=l(\sigma)$。我们还定义 $\omega^x\cdot n$，满足 $x\in X$ 和 $n\in\mathbb{N}$，即将 $\sigma\in\omega(X)$作为满足对所有 $i<l(\sigma)=n$ 都有 $\sigma_i=x$ 的元素。我们将 ω^x 写在

$\omega^x \cdot 1$的位置。在下文中，我们使用一些在我们的情形下很容易证明的基本序数算术（参见 [18]）。为了说明不存在嵌入到初始段中的映射，我们首先考虑以下特殊情形：

断言。不存在从 f 到 $\omega^x \to \omega^y \cdot n$ 、关于 $x >_X y$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 的嵌入。

断言的证明。为导出矛盾，我们假设 f 是断言中所述的嵌入。根据鸽巢原理，我们找到 k、$m < n$，使得

$$\omega^y \cdot m \leq f(\omega^y \cdot k) < f(\omega^y \cdot (k+1)) < \omega^y \cdot (m+1).$$

这使我们可以写成

$$f(\omega^y \cdot (k+1)) = \omega^y \cdot m + \omega^{y'} \cdot n' + \sigma \quad \text{with } y' < y \text{ and } \sigma < \omega^{y'}.$$

为便于后续引用，我们注意到，相对于给定的 f，可以计算出 y' 和 n'。现在我们得到一个映射

$$f' : \omega^y \to \omega^{y'} \cdot (n'+1) \quad \text{with} \quad f(\omega^y \cdot k + \tau) = \omega^y \cdot m + f'(\tau).$$

思路是迭代这一构造以找到 $y > y' > \ldots$，这与 X 是良基的假设相矛盾。为了在 RCA_0，中进行迭代，我们不构造函数序列 f、f'、.....，而是通过递归计算元素 $y_i \in X$ 以及编码相关信息的数 k_i、m_i。在递归的基步中，我们规定 y_0、k_0、m_0 分别与上文的 y、k、m 相同。在递归步骤中，我们引入以下简写

$$\eta_i = \omega^{y_0} \cdot m_0 + \ldots + \omega^{y_{i-1}} \cdot m_{i-1} \quad \text{and} \quad \xi_i = \omega^{y_0} \cdot k_0 + \ldots + \omega^{y_{i-1}} \cdot k_{i-1}.$$

让我们归纳地假设我们已经有了

$$\eta_i + \omega^{y_i} \cdot m_i \leq f(\xi_i + \omega^{y_i} \cdot k_i) < f(\xi_i + \omega^{y_i} \cdot (k_i+1)) < \eta_i + \omega^{y_i} \cdot (m_i+1).$$

注意，我们已经证明这对 $i = 0$ 成立。如上所述，现在我们找到 $y_{i+1} < y_i$ 和 $n'' \in \mathbb{N}$，使得

$$f(\xi_i + \omega^{y_i} \cdot (k_i+1)) < \eta_i + \omega^{y_i} \cdot m_i + \omega^{y_{i+1}} \cdot (n''+1).$$

对于 $\eta_{i+1} = \eta_i + \omega^{y_i} \cdot m_i$ 和 $\xi_{i+1} = \xi_i + \omega^{y_i} \cdot k_i$，我们得知任何 $k \in \mathbb{N}$ 都验证了

$$\eta_{i+1} \leq f(\xi_{i+1} + \omega^{y_{i+1}} \cdot k) < f(\xi_i + \omega^{y_i} \cdot (k_i+1)) < \eta_{i+1} + \omega^{y_{i+1}} \cdot (n''+1).$$

根据鸽巢原理，有界搜索因此将得到 k_{i+1}、$m_{i+1} \leq n''$，并带有

$$\begin{aligned}\eta_{i+1} + \omega^{y_{i+1}} \cdot m_{i+1} &\leq f(\xi_{i+1} + \omega^{y_{i+1}} \cdot k_{i+1}) < \\ &< f(\xi_{i+1} + \omega^{y_{i+1}} \cdot (k_{i+1}+1)) < \eta_{i+1} + \omega^{y_{i+1}} \cdot (m_{i+1}+1),\end{aligned}$$

根据需要完成递归步骤。 ◇

更一般地，我们现在从假设 $f\colon I \to I_0$是初始段 $I_0 \subsetneq I \subseteq \omega(X)$ 之间的嵌入出发推导出矛盾。取一个 $\sigma \in I \setminus I_0$，并注意到 $f(\sigma) \in I_0$ 蕴含 $f(\sigma) < \sigma$。对于 $j \leq l(\sigma)$，我们记作 $\sigma[j] = \langle \sigma_0, \ldots, \sigma_{j-1} \rangle$。我们对 j 进行归纳，以证明 $\sigma[j] \leq f(\sigma[j])$。鉴于 $\sigma[l(\sigma)] = \sigma$，当我们到达 $j = l(\sigma)$ 时，这就给出了所需的矛盾。对于 $j = 0$，我们注意到 $\sigma[0] = \langle\rangle$ 是 $\omega(X)$的最小元素。在归纳步骤中，我们有 $\sigma[j+1] = \sigma[j] + \omega^{\sigma_j}$。如果有 $f(\sigma[j+1]) < \sigma[j+1]$，我们就会找到 $y < \sigma_j$ 和 $n \in \mathbb{N}$，使得

$$\sigma[j] \leq f(\sigma[j]) < f(\sigma[j] + \omega^{\sigma_j}) < \sigma[j] + \omega^y \cdot n.$$

这将产生一个嵌入

$$f' : \omega^{\sigma_j} \to \omega^y \cdot n \quad \text{with} \quad f(\sigma[j] + \tau) = \sigma[j] + f'(\tau),$$

这与上文证明的断言相矛盾。 □

下面这个特例很有意思，因为 $\omega^\omega = \omega(\omega)$ 是 RCA_0，的证明论序数，因此后者无法证明它是良基的（参见 [8]）。

推论 3.2（RCA_0）。序 ω^ω 是弱良序。

我们的下一个结果将用于降低定理3.5中的基理论，届时该定理将取代这个结果。

推论 3.3（RCA_0）。算术概括可由“每个弱良序都是良序”这一陈述推出。

证明。根据定理 3.1，给定的陈述蕴含：只要 X 是良序，$\omega(X)$ 就是良序。正如 J.-Y. Girard [6] 和 J. Hirst [7] 所证明的，后者蕴含算术概括。□

结合命题 1.3，我们得到如下结论。

推论3.4(RCA_0)。弗拉¨伊斯´的猜想蕴含算术概括。

前一个推论填补了 Shore的证明中的一个小缺口：该证明表明，Fra¨ıss´e猜想蕴含算术超限递归，这一点已在引言中提及。需要指出的是，我们的论证使用的是关于任意线性序的 Fra¨ıss´e 猜想，而 Shore考虑的是关于良序的该猜想的受限版本。在下一节中，我们将说明如何同样填补这些版本中的上述缺口。现在我们完成本文一个主要结果的证明。

定理3.5（RCA_0）。以下各项等价：

(i) 算术超限递归，(ii) 每个弱良序都是良序。

证明。正向蕴含由推论2.5 得出。对于另一个蕴含，推论 3.3 允许我们在ACA_0 中进行论证。在后者中，根据Shore [16] 先前提到的结果，算术超限递归由Fra¨ıss´e关于不可分解良序的猜想推出。由命题 1.4 即可得出结论。□

当我们有 $X \cong \omega(X)$时，定理3.1告诉我们，X 是良序，当且仅当它是弱良序。我们希望在表面上更弱的假设下得出同样的结论，即 $\omega(X)$嵌入到 X中。这并不是所引用定理的直接推论（尽管我们将看到它是该定理证明的推论），因为没有初等证明能够表明弱良序在嵌入（或子序）下保持不变，正如我们的下一个观察所示。

引理 3.6（RCA_0）。以下各项等价：

(i)每个弱良序都是良序。(ii)若 $X \leq_w Y$ 和 Y 是弱良序，那么 X 也是如此。

证明。在假设(i)及(ii)的前提下，我们得知 Y，因而 X 是良序。由引理1.2可知，X 是弱良序。现在我们假设(ii)，并推导出(i) 的逆否命题。假设 X 不是良基的：任意下降序列都见证了 $\omega^* \leq_w X$，而 $\omega^* \ni i \mapsto i+1$ 是到一个真初始段中的嵌入。因此，ω^* 不是弱良序，并且根据 (ii)，X 也同样如此。□

关于以下结果，我们注意到，满足 $\omega(X) \leq_w X$ 的良序就是 ε-数。

命题 3.7（RCA_0）。设 X 是一个线性序。若有 $\omega(X) \leq_w X$，那么 X 是良序当且仅当它是弱良序。

证明。由引理 1.2，正向蕴含成立。反过来，假设我们有 $\omega(X) \leq_w X$，且 X 不是良基的。与定理 3.1 的证明类似，我们发现 $\mathbb{Q}$ 嵌入 $\omega(X)$，因而也嵌入 X。由引理 2.1 可知，X 不是弱良序。□

人们或许曾希望，推论 3.3 证明中采用的方法可以推广。具体而言，H. Friedman 已证明，在 RCA_0 中，算术超限递归等价于如下陈述：对于任意良序 X，$\varphi_X(0)$ 都是良基的（已发表的证明见 [10, 15]）。这里，$\varphi_X(0)$ 是一个与韦布伦层级相关的记号系统。鉴于命题 1.4，似乎可以设想 RCA_0 能证明，对于任意良序 X，$\varphi_X(0)$ 都是弱良序。在推论 2.5 得出之前，人们甚至可能尝试证明 $\Gamma_0 = \min\{\alpha \mid \varphi_\alpha(0) = \alpha\}$ 是弱良序；或许在 RCA_0 中可以证明，至少在证明论序数为 Γ_0 的 ATR_0, 中可以证明。与推论 3.4 的情形类似，这将带来一个惊人的结果：ATR_0 不能证明弗雷斯的猜想。然而，下面的结果表明，所指出的这些可能性无一能够实现。这与推论 3.2 形成了有趣的对照。

推论 3.8。以下结论适用于证明论序数的标准记号系统（例如参见 [13]）：

(a) 在ACA_0 one中无法证明 $\varepsilon_0 = \varphi_1(0)$是弱良序。(b) 在 ATR_0 one 中无法证明 Γ_0 是弱良序。

证明。关键在于，标准记号系统中隐含了嵌入 $\omega(\varepsilon_0) \leq_w \varepsilon_0$ 和 $\omega(\Gamma_0) \leq_w \Gamma_0$。因此，根据命题 3.7，结果归结为如下断言：$\mathrm{ACA}_0$ 和 ATR_0 分别不能证明 ε_0 和 Γ_0 的良基性。这是因为后者是所指出理论的证明论序数（再次参见 [13]）。需要指出的是，为了证明 (b)，我们本可以援引推论 2.5，而不是命题 3.7。□

4. Fraïssé's conjecture and Σ^0_2-induction

在本节中，我们证明了弗拉¨伊塞´猜想对于良序蕴含Σ^0_2-归纳（在RCA_0中）。更确切地说，只需假设弗拉¨伊塞´猜想的两个推论中的任意一个即可；这两个推论分别断言，可数良序中不包含无限下降序列，也不包含无限反链。正如引言中所指出的，这填补了Shore的 [16] 证明中的一个小缺口：弗拉¨伊塞´猜想蕴含 RCA_0中的算术超限递归。该证明的问题在于，它使用了 ω^ω 的良基性，而 RCA_0 无法证明这一点。

对于任意线性序（不一定是良基的）中的Fra¨ıss´e 猜想，上述空缺由我们的推论3.2 与命题 1.3一起填补（或者由更强的推论3.4 填补）。为了适应 Fra¨ıss´e 猜想对良序的限制，我们给出一个类似于Shore 的论证，但所处理的是更小的序数。这必然需要一些新的想法（我们将在证明之后对此加以解释），因为Shore 使用了无穷多不可分解的良序，而这些良序不可能被限制在自然数集以下。我们首先考虑良序下降序列上的Fra¨ıss´e 猜想，Shore 将其记作（$\mathcal{WF}1$）。

定理4.1（RCA_0）。 Σ^0_2-归纳原理由以下Fra¨ıss´e 猜想的限制所蕴含：对于任意无限序列的良序 $L_0, L_1, \ldots$，使得每个 L_{n+1} 嵌入到 L_n 中，都存在 $i < j$ 使得 L_i 嵌入到 L_j 中。

注意，只要知道可嵌入性在任意有限长度的链上具有传递性，我们就能得到 $j + 1 = i$ 。不过，这一事实的显然证明需要大量使用归纳或选择。或者，我们可以要求更强的条件：对于所有 $m < k$， L_k 都嵌入 L_m ，而下述构造满足这一条件。

证明。考虑一个 Σ^0_2-公式 $\psi(x) \equiv \exists u \forall v\, \phi(x, u, v)$。对于任意 $n \in \mathbb{N}$，我们将构造良序 $N_0, N_1, \ldots$，使得对于所有 $m < k$， N_k 都嵌入 N_m，并且任意嵌入 $F\colon N_i \to N_j$ 满足 $i < j$ 时，都能让我们计算出一个集合 $X \subseteq \mathbb{N}$，使得

$$\forall x < n\big(\psi(x) \leftrightarrow x \in X \vee \exists u \leq i \forall v\, \phi(x, u, v)\big).$$

根据强 Σ^0_1-有界原理（参见 [17] 的练习 II.3.14），这里的 $\exists u \leq i \forall v\, \phi(x, u, v)$ 等价于 $\forall w \exists u \leq i \forall v \leq w\, \phi(x, u, v)$。因此，将 $\psi(x)$ 的归纳进行到 n，可化归为一个 Π^0_1-归纳实例；RCA_0 中可以使用这种归纳。

我们希望有 $N_i = \sum_{y<2n} 1 + M_{i,y}$，满足 $M_{i,2x+1} = \omega$，并且

$$M_{i,2x} \cong \begin{cases} \max(0, u - i) & \text{if } \psi(x) \text{ holds and } u \text{ is minimal with } \forall v\, \phi(x, u, v), \\ \omega & \text{if } \neg\psi(x) \text{ holds.} \end{cases}$$

然而，这一对 $M_{i,2x}$ 的刻画不能作为我们的定义，因为情形区分是不可判定的。为了解决这一问题，我们首先定义一个可计算函数 $(x, u) \mapsto k_x(u)$，它可能是部分函数。当 $k_x(u-1)$有定义时（其中，基情形我们将 $k_x(-1) = 0$ 读作），如果能够找到这样的 $v \leq k$，我们令 $k_x(u)$ 为满足存在某个 $v \leq k$ 使得 $\neg\phi(x, u, v)$的最小 $k > k_x(u-1)$。如果不存在这样的 v，或者 $k_x(u-1)$ 无定义，则 $k_x(u)$无定义。注意， $k_x(u)$ 无定义，当且仅当存在某个 $u' \leq u$ 使得 $\forall v\, \phi(x, u', v)$。虽然后一性质作为 u 的性质是不可判定的，但我们可以判定给定的数是否具有 $k_x(u)$ 的形式，因为我们有 $k_x(0) < k_x(1) < \ldots$，从而有 $u \leq k_x(u)$。这使我们能够构造

$$M_{i,2x} = \{k \in \mathbb{N} \mid \text{we have } k = k_x(u) \text{ for some } u \geq i\},$$

我们将其视为 $\mathbb{N}$ 的子序。为确认上述刻画，首先假设 u 是满足 $\forall v\, \phi(x, u, v)$ 的极小元素。如上所述，这意味着 $k_x(u')$ 恰好在 $u' < u$ 时有定义，这显然推出 $M_{i,2x} \cong \min(0, u - i)$。现在假设我们有 $\neg\psi(x)$。那么 $k_x(u)$ 对所有 u 都有定义，因此确实得到 $M_{i,\,2x} \cong \omega$。特别地，由此可得 $N_i = \sum_{y<2n} 1 + M_{i,\,y}$ 是良序。当我们有 $m < k$ 时，显然对所有 $x < n$ 都有 $M_{k,\,2x} \subseteq M_{m,\,2x}$，这意味着 N_k 嵌入 N_m。因此，弗雷谢猜想的这一推论给出一个嵌入 $F\colon N_i \to N_j$，其中某个 $i < j$。

为简化 N_l中元素的记号，我们写作$1 + M_{l,2x} = \{0\} \cup M_{l,2x}$并将$1 + M_{l,2x+1} = 1 + \omega$与 ω视为相同。每个 $k \in 1 + M_{l,y}$都会在 $N_l = \sum_{y<2n} 1 + M_{l,y}$ 的第 y 个直和项中产生一个元素 (y, k)。利用 $M_{j,y}$ 嵌入到$M_{i,y}$ 中，以及没有任何良序能够嵌入自身的真初始段，可以对 $y < 2n$ 进行归纳，从而建立 $F(y, 0) \geq (y, 0)$。我们构造的一个关键特征是，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，我们还得到 $F(2x + 1, k) < (2x + 2, 0)$，这意味着 F将$M_{i,2x+1} \cong \omega$ 映射到 $M_{j,\,2x+1}$中。直观地说，这是因为 N_i 和 N_j 具有相同数量的直和项 ω。形式上，我们从 $x = n - 1$ 开始进行归纳

下降到 $x = 0$，其中我们将 $(2n, 0)$ 解释为位于 N_j 之上的一个额外点，因此 $x = n - 1$ 的结论显然成立。对于归纳步骤，我们从假设出发导出矛盾，即我们有

$$(2x, 0) \leq F(2x - 1, k) \quad \text{and} \quad F(2x + 1, 0) < (2x + 2, 0).$$

这些不等式意味着 F 将 $\omega + 1 + M_{i,\ 2x}$ 嵌入到 $1 + M_{j,\ 2x} + \omega$的真初始段中。因此，$M_{j,\ 2x}$ 必定是无限的，而这只有在满足 $\neg\psi(x)$，从而满足 $M_{i,\ 2x} \cong \omega \cong M_{j,\ 2x}$时才可能成立。但这样一来，我们就得到了一个将 $\omega + \omega$ 嵌入其自身真初始段的嵌入，这是不可能的。

注意，F可以将 $M_{i,\ 2x}$ 中的元素映射到 $M_{j,\ 2x+1} \cong \omega$ 中，而非映射到 $M_{j,\ 2x}$中。为控制这一现象，我们构造集合

$$X = \{x < n \,|\, \text{there is a } k \in M_{i,2x} \text{ with } F(2x, k) \geq (2x + 1, 0)\},$$

这依赖于 RCA_0 中的有界 Σ^0_1-概括公理（见 [17] 的定理 II.3.9）。若有 $x \in X$，则存在一个非空终段 $S \subseteq M_{i,2x}$，使得 F 将 $S + M_{i,2x+1}$ 嵌入到 $M_{j,2x+1} \cong \omega$ 中（回忆上文的 $F(2x + 1, k) < (2x + 2, 0)$）。但这样一来，$M_{i,2x}$ 就不可能与 ω 同构，这意味着必有 $\psi(x)$。为确认本证明开头所述的等价性，现在假设有 $\psi(x)$，但没有 $x \notin X$。于是我们可以考虑满足 $\forall v\, \phi(x, u, v)$ 的最小 u。由 $x \notin X$ 可推知，F 将 $M_{i,2x}$嵌入到$M_{j,2x}$中。因此我们得到

$$M_{i,2x} \cong \min(0, u - i) \leq \min(0, u - j) \cong M_{j,2x}.$$

鉴于我们有 $i < j$，只有在我们有 $u \leq i$ 时这才成立。换言之，我们可以得出 $\exists u \leq i \forall v\, \phi(x, u, v)$，正如所需的等价关系。□

Shore 的原始论证在各个被加项$1 + M_{i,2x} + \omega$ 处使用了与前一个证明不同的不可分解序数。我们的主要新想法是：如果使用一个集合 X 来恢复当某个被加项映射到分隔项中时丢失的信息，就可以将 ω的副本用作被加项 $1 + M_{i,2x}$之间的分隔项。现在我们考虑良序反链上的 Fra¨ıss´e 猜想，Shore 将其记作 $(\mathcal{WF}2)$。我们的修改带来了一个很好的副作用：与 Shore 的原论文相比，$(\mathcal{WF}1)$ 和 $(\mathcal{WF}2)$ 的证明变得更加相似。

定理 4.2（RCA_0）。 Σ^0_2-归纳原理可由 Fra¨ıss´e 猜想的以下限制推出：对于任意良序 $L_0, L_1, \ldots$ 的无限序列，都存在 $i \neq j$，使得 L_i 嵌入 L_j。

证明。固定一个Σ^0_2-公式 $\psi(x) \equiv \exists u \forall v\, \phi(x, u, v)$ 以及某个 $n \in \mathbb{N}$。如同前面的证明，我们找到良序 $N'_i = \sum_{y<4n} 1 + M'_{i,y}$，满足 $M'_{i,4x+1} = M'_{i,4x+3} = \omega$以及

$$M'_{i,4x} \cong \begin{cases} \max(0, u - i) & \text{if } \psi(x) \text{ holds and } u \text{ is minimal with } \forall v\, \phi(x, u, v), \\ \omega & \text{if } \neg\psi(x) \text{ holds,} \end{cases}$$

$$M'_{i,4x+2} \cong \begin{cases} i + u & \text{if } \psi(x) \text{ holds and } u \text{ is minimal with } \forall v\, \phi(x, u, v), \\ \omega & \text{if } \neg\psi(x) \text{ holds.} \end{cases}$$

我们得到一个嵌入 $F' \colon N'_i \to N'_j$对于某些指标 $i \neq j$。

再次记 $1 + M'_{l,2y} = \{0\} \cup M'_{l,2y}$，并将$1 + M'_{l,2y+1} = 1 + \omega$与 ω 等同。对于每个 $y < 2n$，序 $M'_{i,2y} + \omega$和 $M'_{j,2y} + \omega$同构。因此，通过对 y 归纳，我们得到 $F'(2y, 0) \geq (2y, 0)$。与前一个证明不同，不等式 $F'(2y + 1, 0) \geq (2y + 1, 0)$ 仅对每隔一个 y 成立，其中

可容许 y 的奇偶性对应于 i 和 j之间的序关系。尽管如此，对于任意 $y < 2n$ 及所有 $k \in \mathbb{N}$，我们仍然得到 $F'(2y+1,k) <(2y+2,0)$。

如果我们有 $i < j$，就可以像之前一样得出结论。因此现在假设 $i > j$。我们令

$$X' := \{x < n \mid \text{there is a } k \in M'_{i,4x+2} \text{ with } F'(4x+2,k) \geq (4x+3,0)\}.$$

仍然有 $x \in X'$ 蕴含 $\psi(x)$。为完成证明，我们要证明逆向蕴含对任意 $x < n$都成立。为导出矛盾，假设我们有 $\psi(x)$，同时也有 $x \notin X'$。后者蕴含 F' 诱导了一个从 $M'_{i,4x+2}$到 $M'_{j,4x+2}$的嵌入。因此，对于满足 $\forall v\, \phi(x,u,v)$ 的最小 u，必有

$$M'_{i,4x+2} \cong i+u \leq j+u \cong M'_{j,4x+2}.$$

然而，这与我们有 $i > j$ 这一假设矛盾。 □

我们现在重申，Shore 的以下结果 [16] 在所示的基理论下成立。当 Fra¨ıss´e 关于良序的猜想被限制为上述原理 $(\mathcal{WF}1)$ 和 $(\mathcal{WF}2)$ 中的任意一个时，该结果仍然成立。要证明 $(\mathcal{WF}1)$ 这一点，可利用我们的定理 4.1 和 Shore 的定理 1.2 得出算术概括。由此即可根据 Shore 对其定理 3.7 的证明得出结论（Shore 所引用的所有结果见 [16] ）。对于 $(\mathcal{WF}2)$，则可参照 Shore 定理 3.8 的证明；在该证明中，我们的定理 4.2 恢复了他的定理 3.1(ii)。

定理4.3（Shore [16]）。在RCA_0, 中，算术超限递归等价于关于良序的 Fra¨ıss´e 猜想，即：任意无限序列的良序 L_0、L_1、.....都存在 $i < j$，使得 L_i 嵌入到 L_j 中。

我们以讨论序的“自然”描述作结。

注 4.4. 给定任意强度的公理系统，都可以构造一个递归指标，使其对应的序与 ω 同构，而该公理系统无法证明这个指标描述的是一个良序；这一点已由 G. Kreisel 指出（例如参见 [14]）。在证明论中，这引发了关于良序的“自然”或“规范”描述的讨论。虽然我们或许无法对“自然”给出明确的阐释，但可以提炼出相关特征，并论证某些特定描述（例如 ε_0 的标准记号系统）是自然的（参见 [3] 或较近的 [1]）。对于有限序，主张正整数提供了规范代表，应该不会引起太大争议。在定理 4.1 的证明中，我们并未使用这些代表来定义序$M_{i,\ 2x}$。事实上，使用“非标准”描述至关重要，因为我们无法判定由此得到的序是否有限。Shore 证明 Fra¨ıss´e 猜想蕴含算术超限递归时的其他部分，也出现了类似现象。鉴于这一观察，不禁会想：若我们只允许采用序的“自然”描述，Fra¨ıss´e 猜想还保留多少力量？目前尚不清楚这个问题能否得到回答，甚至能否以完全令人满意的方式表述。与此同时，上一节的正反结果似乎提供了一些相关见解。从正面来看，定理 3.1 正向的证明基于序数乘方的自然性质。由于这一方向是通往推论 3.4 的关键步骤，因此似乎有理由得出结论：对于“自然”的线性序，Fra¨ıss´e 猜想蕴含算术概括。从反面来看，推论 3.8 表明，所给出的论证思路无法扩展到算术概括之外。其背后的关键性质是

该推论是对乘方封闭（参见命题 3.7），可视为关于更大证明论序数的自然记法的最小条件。

References

[1] Lev Beklemishev. 可证性代数与证明论序数，I. *Annals of Pure and Applied Logic* 128 103 123, 2004 , : – . [2] P. Clote. 散线性序的元数学。 *Archive for Mathematical Logic*, 29 9: –20, 1989. [3] Solomon Feferman. 谓词性分析系统，II：序数的表示。 *The Journal of Symbolic Logic* 33 2 193 220, 1968 , ( ): – . [4] Harvey Friedman. 若干二阶算术系统及其用途。载于 Ralph Duncan James 编, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians Vancouver* , , volume *1974* 1, 235 242 1975 pages – . 加拿大数学大会，. [5] Harvey M. Friedman 和 Jeffry L. Hirst. 良序的弱可比性与逆向数学。 *Annals of Pure and Applied Logic*, 47(1):11–29, 1990. [6] Jean-Yves Girard. *Proof Theory and Logical Complexity, Volume 1*. 证明论研究。Bibliopolis，那不勒斯，1987. [7] Jeffry L. Hirst. 逆向数学与序数乘方。 *Annals of Pure and Applied Logic* 66 1 18, 1994 , : – . [8] Alexander P. Kreuzer 和 Keita Yokoyama. 关于介于 Σ_1-归纳与 Σ_2-归纳之间的原理，以及单调枚举。 *Journal of Mathematical Logic*, 16(1), 2016. [9] Richard Laver. 关于 Fra¨ıss´e 的序型猜想。, *Annals of Mathematics* 93 1 89 111, 1971 ( ): – . [10] Alberto Marcone 和 Antonio Montalb´an. 面向可计算性理论学家的 Veblen 函数。 *The Journal of Symbolic Logic*, 76:575–602, 2011. [11] A. Montalb´an. Fra¨ıss´e 猜想与 Jullien定理之间的等价性。, ( ): – . [12] A. Montalb´an. Π^1_1-概括公理下的 Fra¨ıss´e 猜想。 *Annals of Pure and Applied Logic* 139 1 1 42, 2006 *Journal of Mathematical Logic*, 17 02 1750006, 2017 ( ): . [13] Wolfram Pohlers. *Proof Theory. The First Step into Impredicativity*. 施普林格，柏林，2009. [14] Michael Rathjen. 序数分析的领域。载于 S. Barry Cooper 和 John Truss 编，*Sets and Proofs*, *London Mathematical Society Lecture Note Series* 第 258 卷，第 219–279 页。剑桥大学出版社，1999. [15] Michael Rathjen 和 Andreas Weiermann. 逆向数学与良序原理，载于 S. Barry Cooper 和 Andrea Sorbi 编, *Computability in Context: Computation and Logic in the Real World* 351 370 2011 ，第 – 页。帝国理工学院出版社，. [16] Richard A. Shore. 关于 Fra¨ıss´e 猜想的强度。载于 J. Crossley、J. Remmel、R. Shore 和 M. Sweedler 编， *Logical Methods: In Honor of Anil Nerode's Sixtieth Birthday*，第 782–813 页。Birkh¨auser Boston，波士顿，MA，1993. [17] Stephen G. Simpson. *Subsystems of Second Order Arithmetic*. 逻辑视角丛书。剑桥大学出版社，2009. [18] Richard Sommer. 皮亚诺算术中的超限归纳。 *Annals of Pure and Applied Logic* 76 231 289, 1995 , : – .

University of Würzburg, Institute of Mathematics, Emil-Fischer-Strasse 40, 97074 Würzburg, Germany*Email address*: anton.freund@uni-wuerzburg.de, davide.manca@uni-wuerzburg.de