arXiv:2304.03032v1 [math-ph] 6 Apr 2023

拓扑递归中 $x-y$ 辛变换公式的拉普拉斯变换

Alexander Hock

Abstract. 拓扑递归中的 $x-y$ 辛变换所导出的泛函关系有许多应用，例如，它是自由概率中的高阶矩-累积量关系，也可用于计算复曲线模空间上的交数。我们推导了这一泛函关系的拉普拉斯变换，它具有非常优美而紧凑的形式，是关于 $\hbar$ 的形式幂级数。我们将拉普拉斯变换后的公式应用于 Airy 曲线和朗伯曲线。

1. Introduction

拓扑递归（TR）是一种通用结构，它从所谓的谱曲线生成谱曲线（黎曼曲面）上的一族多微分$\omega_{g,\,n}$。拓扑递归似乎与数学和数学物理中看似不同的领域相关。举一个不完整的列表，它与模空间的体积、Hurwitz数、模空间的交数、格罗莫夫-维滕理论、枚举组合学、随机矩阵理论、非交换空间上的量子场论、自由概率和量子结理论相关 [Eyn14]。

了解对任意谱曲线普遍成立的性质，因而可以为拓扑递归的应用带来新的见解。例如，多微分形式$\omega_{g,\,n}$ 具有对称性，但它们是通过一个非对称公式生成的。在几乎所有应用中，这种对称性一开始就显而易见。对谱曲线施加辛变换，可以使$\omega_{g,\,n}$ 保持不变。由此可以推知，例如随机矩阵理论中的某些模型是等价的。然而，有一种非常特殊的辛变换—— $x-y$辛变换——它实际上保持谱曲线不变，却会生成完全不同的多微分。最近，人们找到了这两族不同多微分之间关系的最简表示 [Hoc22a, ABDB+22]。其结果是一种泛函关系，它已经推广了自由概率中的高阶矩-累积量关系 [BCGF+21b]。等价地，这种泛函关系联系了枚举组合学中的全简单映射与普通映射 [BCGF21a, BDBKS21]。借助自由概率，可以将其理解为矩-累积量关系的量子化版本。 $x-y$ 辛变换还重新证明了1的已知结果。

复曲线模空间上的交数$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 并可能给出计算它们的新算法或闭式公式。

TR 中的另一个重要工具是拉普拉斯变换。在 [Eyn11a, Eyn11b], 中，已经证明 $\omega_{g.n}$ 的拉普拉斯变换可以直接解释为 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$上的交数。在格罗莫夫-维滕理论，或更一般地说，在拓扑弦理论中，拉普拉斯变换作为 TR 的一种应用，可以解释为镜像对称。更准确地说，A-模型和 B-模型是研究拓扑弦理论中卡拉比–丘流形几何的两种不同方法。它们通过镜像对称相互关联。基于 [BKMP09], 中的观察， A-模型和 B-模型与TR 相关，而镜像映射可以解释为拉普拉斯变换（有关详细信息，另请参见 [EMS09, Mul12] ）。

因此，将 $x-y$ 辛变换的泛函关系与拉普拉斯变换结合起来是完全自然的。实际上，我们观察到，泛函关系在拉普拉斯变换下表现得非常好。泛函关系中的微分算子经过拉普拉斯变换后变为乘法，而这种乘法能够用形式幂级数完美地求和。$\omega_{g,\ n}$ 及其不一定连通的对应对象的拉普拉斯变换见推论 2.9和命题 2.6。

对于具有对数奇点的谱曲线，泛函关系通常并不成立。不过，我们考察编码 Hurwitz 数的朗伯曲线[BM08], 这一例子。对这条曲线进行小幅变换后，我们成功应用辛变换的拉普拉斯变换公式来计算 Hurwitz 数。这是将辛变换推广到具有对数奇点的谱曲线的第一步，此举将应用于拓扑弦理论和量子结理论。

致谢。本研究得到了 Walter-Benjamin 奖学金[1]的资助。

2. Formula for $x-y$ Symplectic Transformation in TopologicalRecursion

我们首先更详细地回顾拓扑递归的理论及其在 $x-y$ 辛变换下的性质。拓扑递归是一种算法，它根据一些初始数据——即所谓的谱曲线——递归计算负欧拉示性数 $-\chi=2g+n-2$ 下的一族多微分形式，记作$\omega_{g,\ n}$；这些形式通常也称为关联函数。

更准确地说，谱曲线是一个四元组 (Σ,x,y,B)，其中 Σ 是一个带有 x,y 的紧黎曼曲面：$\Sigma\to\mathbb{C}$ 是具有简单且

[1]“由德国研究联合会（DFG）资助——项目编号 465029630

不同分歧点的亚纯函数，定义在 Σ上。多微分形式 $\omega_{g,\,n}$ 定义在 Σ^n 上，且满足 $\omega_{0,\,1}(z) = y(z)\,dx(z)$，以及 $\omega_{0,\,2} = B$，其中 B 关于对角线对称，在对角线上有二阶极点且留数为零，双留数为 1，并经过归一化，使 A-周期为零。特别地，当 $\Sigma = \mathbb{P}^1$ 为复射影直线（黎曼球面）时，双线性微分为 $B(z_1, z_2) = \frac{dz_1\,dz_2}{(z_2-z_2)^2}$。

那么，对于负欧拉示性数 $\chi < 0$，所有 $\omega_{g,\,n}$ 均通过 [EO07a 定义。]

$$\omega_{g,n+1}(I, z) \tag{2.1}$$
$$:= \sum_{\beta_i} \operatorname*{Res}_{q\to\beta_i} K_i(z,q)\left(\omega_{g-1,n+2}(I,q,\sigma_i(q)) + \sum_{\substack{g_1+g_2=g\\ I_1\uplus I_2=I\\ (g_i,I_i)\neq(0,\emptyset)}} \omega_{g_1,|I_1|+1}(I_1,q)\omega_{g_2,|I_2|+1}(I_2,\sigma_i(q))\right).$$

使用以下记号:

- $I = \{z_1, \ldots, z_n\}$ 是一组 n 变量 z_j
- β_i 的分歧点 x 由 $dx(\beta_i) = 0$定义。
  局部伽罗瓦对合 $\sigma_i \neq \mathrm{id}$与 $x(q) = x(\sigma_i(q))$ 定义于 β_i 附近，具有不动点 β_i
- 递归核 $K_i(z, q)$ 也在 β_i 附近局部定义，具体为

$$K_i(z,q) = \frac{\frac{1}{2}\int_{\sigma_i(q)}^{q} B(z,\bullet)}{\omega_{0,1}(q) - \omega_{0,1}(\sigma_i(q))}.$$

从定义中并不明显，但事实证明，所有$\omega_{g,n}$ 在其变量中都是对称的，并且对于 $\chi < 0$ 所有$\omega_{g,n}$ 的极点都恰好位于分歧点，且留数为零。换句话说，对于 $\chi < 0$ 这些 $\omega_{g,n}$ 在每个变量中都是恰当的 1-形式。我们定义原函数

$$\Phi_{g,n}(x_1(z_1), ..., x_n(z_n)) := \int_o^{z_1} ... \int_o^{z_n} \omega_{g,n}(z_1, ..., z_n) \tag{2.2}$$

以基点 o 为起点，而基点不会起任何作用。注意，$\Phi_{0,\,1}$ 和$\Phi_{0,\,2}$ 在 Σ上可能并非全局定义，因为它们可能存在一些分支切割。

特殊情形 $n = 0$ 通常记作 $\mathcal{F}^{(g)} = \omega_{g,\,0}$，即所谓的亏格 g自由能。它们可由 $\Phi_{0,\,1}(z)$ 得到。对于负欧拉示性数 $\chi < 0$，自由能定义如下:

$$\sum_{\beta_i} \mathrm{Res}_{z\to\beta_i}\, \Phi_{0,1}(z)\omega_{g,1}(z) = (2-2g)\mathcal{F}^{(g)} \qquad g > 1. \tag{2.3}$$

自由能 $\mathcal{F}_{(0)}$和 $\mathcal{F}^{(1)}$满足一个更为复杂的公式，参见 [EO07a]。

为后续使用，我们还通过$W_{g,n}$

$$W_{g,n}(x_1(z_1), ..., x_n(z_n))dx_1(z_1)...dx_n(z_n) := \omega_{g,n}(z_1, ..., z_n). \tag{2.4}$$

带有形式参数 $\hbar$ 的亏格求和将记为

$$W_n(x_1, ..., x_n) := \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g+n-2} W_{g,n}(x_1, ..., x_n) \tag{2.5}$$

$$\Phi_n(x_1,...,x_n) := \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g+n-2} \Phi_{g,n}(x_1,...,x_n). \tag{2.6}$$

示例2.1. 对于 $\Sigma = \mathbb{P}^1$ 和 x 非分歧的，即 x 没有分歧点，则所有 $W_{g,n} = 0$ 对于 $\chi = 2g + n - 2 < 0$。具有正欧拉示性的关联函数为

$$\begin{aligned} W_{0,1}(x(z)) =& y(z), \\ W_{0,2}(x_1(z_1), x_2(z_2)) =& \frac{1}{x_1'(z_1)x_2'(z_2)(z_1 - z_2)^2}. \end{aligned}$$

2.1. $x - y$ 辛变换。辛变换在拓扑递归理论中发挥着非常重要的作用。所有保持辛形式的变换

$$|dx \wedge dy|$$

不变量由三个变换生成：

- $(x, y) \to (x, y + R(x))$, where $R(x)$ is a rational fun x 中的作用
- $(x, y) \to (\frac{ax+b}{cx+d}, \frac{(cx+d)^2}{ad-bc} y)$ with $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$
- $(x, y) \to (y, x)$.

在 [EO07b,EO13] 中已证明，对于亚纯 x、y，自由能在所有辛变换下均保持不变（除一个已知的归一化常数外）。

对于$\omega_{g,n}$，情况并非如此！不过请注意，上面列出的前两个辛变换确实使 $\omega_{g,n}$ 对于 $\chi < 0$ 保持不变。这是因为在（2.1）中，x and y 仅通过递归核以及 x的分歧点 β_i 进入递归，而这两者均保持不变。最近，关于第三个辛变换，即所谓的 $x - y$辛变换，取得了新的进展。

在一系列论文 [BDBKS20, BDBKS22b, BDBKS22a], 中，Bychkov 等人推导出了一个复杂公式，涉及来自拓扑配分函数的两组不同的连通矩。这两族矩之间的泛函关系被证明是某一类矩阵模型的 $x-y$ 辛变换 [BDBKS21]。由于随机矩阵理论与自由概率之间的联系，该泛函关系被证明 [BCGF$^+$21b] 给出了自由概率中的矩-累积量关系。借助环插入算子，通过一种完全不同的技巧，在 [Hoc22b] 中推导出了亏格 $g = 0$ 下同一泛函关系的一个相当简单的版本，并在 [Hoc22a]中推广到了所有亏格。不久之后，Alexandrov 等人 [ABDB$^+$22]证明， [Hoc22a] 中的简化版本确实是任意亚纯 x, y的辛变换。

为表述泛函关系，我们为谱曲线 (Σ, y, x, B)（现在 x and y 已互换）定义相应的多微分形式，其中$\omega^{\vee}_{g,n}$。更确切地说，$\omega^{\vee}_{0,1}(z) = x(z)dy(z)$，$\omega^{\vee}_{0,2}(z_1, z_2) = B(z_1, z_2)$，以及所有 $\omega^{\vee}_{g,n}$，均通过互换 x 与 y 的角色后由 (2.1) 给出。这意味着 $\omega^{\vee}_{g,n}$ 的极点仅位于 y 的分歧点处，其中 $\chi < 0$。类似地，在此设定下，我们定义

$$W^{\vee}_{g,n}(y_1(z_1), ..., y_n(z_n))dy_1(z_1)...dy_n(z_n) := \omega^{\vee}_{g,n}(z_1, ..., z_n) \tag{2.7}$$

$$W^{\vee}_n(y_1, ..., y_n) := \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g+n-2} W^{\vee}_{g,n}(y_1, ..., y_n) \tag{2.8}$$

$$\Phi^{\vee}_{g,n}(y_1(z_1), ..., y_n(z_n)) := \int_o^{z_1} ... \int_o^{z_n} \omega^{\vee}_{g,n}(z_1, ..., z_n) \tag{2.9}$$

$$\Phi^{\vee}_n(y_1, ..., y_n) := \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g+n-2} \Phi^{\vee}_{g,n}(y_1, ..., y_n). \tag{2.10}$$

接下来，我们需要以下描述泛函关系结构的图：

定义 2.2.令 $\mathcal{G}_n$ 为连通双色图 Γ 的集合，其中包含 n ◯-顶点和 •-顶点，且满足以下条件：

- ◯-顶点的编号为1, ...， n-边仅连接 •-顶点与 ◯-顶点 - •-顶点的度为 ≥ 2。

对于图 $\Gamma \in \mathcal{G}_n$，令 $r_i(\Gamma)$ 表示 i^{th} ◯-顶点的度。

令 $I \subset \{1, ..., n\}$ 为与一个 •-顶点相关联的集合，其中 I 是与该 •-顶点相连的 ◯-顶点的集合标记。令 $\mathcal{I}(\Gamma)$ 为给定图 $\Gamma \in \mathcal{G}_n$ 的所有 I 集合的集合。

Γ 的自同构群 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 由保持 Γ 结构的边置换组成，其中考虑了标记。图 $\Gamma \in \mathcal{G}_n$ 在自同构意义下完全由集合 $\mathcal{I}(\Gamma)$ 表征。

根据上述定义和函数，泛函关系可用非常简洁的形式表示为：

定理 2.3（[Hoc22a，ABDB+22]）。设 x, y 是紧黎曼曲面上的两个亚纯函数，它们具有互不相同的简单分歧点，并通过拓扑递归 (2.1) 生成上述多微分形式 $\omega_{g,\ n}$ 和 $\omega^{\vee}_{g,\ n}$。设$\Phi_n, \Phi^{\vee}_n, W_n, W^{\vee}_n$如上所述，由 $\omega_{g,\ n}$和 $\omega^{\vee}_{g,\ n}$定义。对于 $I = \{i_1, ..., i_n\}$，令

$$\hat{\Phi}^{\vee}_n(y_I; \hbar, u_I) := \sum_{(\varepsilon_{i_1}, ..., \varepsilon_{i_n}) \in \{1,-1\}^n} (-1)^{\#(\varepsilon_i = -1)} \Phi^{\vee}_n \left(y_{i_1} + \varepsilon_{i_1} \frac{\hbar u_{i_1}}{2}, ..., y_{i_n} + \varepsilon_{i_n} \frac{\hbar u_{i_n}}{2} \right) \tag{2.11}$$

并且对于 $I=\{i,i\}$（以及亏格为零的谱曲线）的特殊情况

$$\hat{\Phi}_n^\vee(y_I;\hbar,u_I) := \sum_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in\{1,-1\}^2}(-1)^{\#(\varepsilon_i=-1)}\Bigg[\Phi_2^\vee\left(y_i+\varepsilon_1\frac{\hbar u_i}{2}, y_j+\varepsilon_2\frac{\hbar u_i}{2}\right) - \log\left(y_i+\varepsilon_1\frac{\hbar u_i}{2}-y_j-\varepsilon_2\frac{\hbar u_i}{2}\right)\Bigg]_{j=i} \tag{2.12}$$

（对于更高亏格的谱曲线，对数必须替换为适当的 Θ 函数）。进一步设 $\hat{O}$ 是一个从左侧作用的微分算子

$$\hat{O}(y_i) := \sum_m \left(-\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^m \left(-\frac{dy_i}{dx_i}\right)[u_i^m]\frac{\exp\left(\hat{\Phi}_1^\vee(y_i;\hbar,u_i)-x_iu_i\right)}{\hbar u_i}. \tag{2.13}$$

于是，泛函关系在 $\hbar$ 中作为形式展开成立

$$\boxed{W_n(x_1(z_1),...,x_n(z_n)) = \sum_{\Gamma\in\mathcal{G}_n}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(\Gamma)|}\prod_{i=1}^n \hat{O}(y_i(z_i))\prod_{I\in\mathcal{I}(\Gamma)}\hat{\Phi}_n^\vee(y_I(z_I);\hbar,u_I).}$$

证明。定理中陈述的泛函关系与 [Hoc22a, ABDB+22]中的略有不同。首先，与 [Hoc22a]相比，我们改变了 x 和 y的作用。接下来，作为关于 $\hbar$的形式展开，权函数$\hat{\Phi}_n^\vee(y_I;\hbar,u_I)$可以写成

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_n^\vee(y_I;\hbar,u_I) &= \sum_{(\varepsilon_{i_1},...,\varepsilon_{i_n})\in\{1,-1\}^n}(-1)^{\#(\varepsilon_i=-1)}\Phi_n^\vee\left(y_{i_1}+\varepsilon_{i_1}\frac{\hbar u_{i_1}}{2},...,y_{i_n}+\varepsilon_{i_n}\frac{\hbar u_{i_n}}{2}\right)\\ &= \left(\prod_{i\in I}\hbar u_i S(\hbar u_i\partial_{x_i})\right)\left(W_n(x_I)\right),\end{aligned}$$

其中 $S(u)=\frac{e^{u/2}-e^{-u/2}}{u}$，详见 [Hoc22a] 以了解更多详情。展开 $\hbar$ 中的左端和右端，可得到每个系数满足 [Hoc22a, ABDB+22]中所述的关系。□

现在，我们仍然希望进一步了解定理 2.3 的泛函关系的更多性质。

例 2.4. 考虑将 x,y 互换后的例 2.1，即 y 是非分歧的。对于 $2g+n-2>0$, 所有$W_{g,n}^\vee=0$。因此，对于 $n>2$，所有 $\hat{\Phi}_n^\vee(y_I(z_I);\hbar,u_I)=0$。令$\mathcal{G}_n^2\subset\mathcal{G}_n$ 为定义 2.2 中定义的、仅含 2-价 •-顶点的图的集合，则

$$W_n(x_1(z_1),...,x_n(z_n)) = \sum_{\Gamma\in\mathcal{G}_n^2}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(\Gamma)|}\prod_{i=1}^n \hat{O}(y_i(z_i))\prod_{I\in\mathcal{I}(\Gamma)}\hat{\Phi}_2^\vee(y_I(z_I);\hbar,u_I).$$

注意，式 (2.12) 中定义的所有对角线 $\hat{}\ \Phi_2^\vee(y_i(z_i)\ y_i(z_i);\ \hbar, u_i, u_i)$都可以包含在式 (2.13)中定义的算子 O 的指数函数中。其他带有 $i \neq j$ 的 $\hat{}\Phi_2^\vee(y_i(z_i)\ y_j(z_j);\hbar, u_i, u_j)$也可以汇集为指数函数，从而通过该指数函数的展开生成连接相同 ◯-顶点的多个 ●-顶点（这在 [ABDB$^+$22, §7] 中已经讨论过）。对称因子因而变得多余。因此，我们得到另一种形式

$$W_n(x_1(z_1),...,x_n(z_n)) = \prod_{i=1}^n \hat{O}^2(y_i(z_i)) \sum_{\Gamma\in\tilde{\mathcal{G}}_n^2} \prod_{I\in\mathcal{I}(\Gamma)} \left(e^{\hat{\Phi}_2^\vee(y_I(z_I);\hbar,u_I)} - 1 \right),$$

其中，$\tilde{\mathcal{G}}_n^2 \subset \mathcal{G}_n^2 \subset \mathcal{G}_n$ 是由定义 2.2 定义的图的集合，这些图具有二价 ●-顶点仅连接两个不同的 ◯-顶点，且至多有一个 ●-顶点连接同一组 ◯-顶点。等价地，$\tilde{\mathcal{G}}_n^2$ 是具有 n 个顶点的连通标号图集合（A001187）。修改后的算子为

$$\hat{O}^2(y_i) := \sum_m \left(-\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^m \left(-\frac{dy_i}{dx_i} \right) [u_i^m] \frac{\exp\left(\hat{\Phi}_1^\vee(y_i;\hbar,u_i) - x_i u_i + \frac{1}{2}\hat{\Phi}_2^\vee(y_i,y_i;\hbar,u_i,u_i) \right)}{\hbar u_i}.$$

指数函数内部的对称因子$_{1\ 2}$ 来自自同构 Aut(Γ)：它交换连接到同一 ◯-顶点的单个 ●-顶点的两条边。连接到同一 ◯-顶点的 k ●-顶点的排列数为 $k!$，这也是 Aut(Γ)中的一个自同构，并已计入指数函数的展开中。

这个例子表明，来自图展开的项可以很好地收集到一个指数函数中。这并不令人意外，因为原始推导确实来自不一定连通的关联函数 [BDBKS22a]。将这些计算步骤反向重述，可以得到一个更加紧凑的公式：

◦为不一定连通的关联函数 W_n 所提供，其定义为

$$\mathring{W}_n(x_I) := \sum_{\lambda\vdash I} \prod_{i=1}^{l(\lambda)} W_{|\lambda_i|}(x_{\lambda_i}), \tag{2.14}$$

其中 $\lambda \vdash I$ 是 $I = \{1,...,n\}$的一个集合划分，即长度为 $\lambda = \{\lambda_1,...,\lambda_{l(\lambda)}\}$ ◭(λ)，其分块为 $\lambda_i \subset I$。请注意，对于所有 $n > 1$ 以及在$\hbar$ 的每个阶数上，$W_n(x_I)$通常在变量 z_i、z_j的对角线上有极点。

◦推论 2.5. 不一定连通的关联函数 W_n 满足如下函数关系，作为关于 $\hbar$ 的形式展开

$$\mathring{W}_n(x_I(z_I)) = \sum_{m_1,...,m_n} \prod_{i=1}^n \left(-\frac{\partial}{\partial x_i(z_i)} \right)^{m_i} \left(-\frac{dy_i(z_i)}{dx_i(z_i)} \right) [u_i^{m_i}] \frac{1}{\hbar u_i} \tag{2.15}$$

$$\times \exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n}\hat{\Phi}_k^{\vee}(y_{i_1}(z_{i_1}),\dots,y_{i_k}(z_{i_k});\hbar,u_{i_1},\dots,u_{i_k}) - \sum_{i=1}^{n}u_i x_i(z_i)\right).$$

证明. 由于 $W_n(x_I)$ 包含所有不一定连通的关联函数，因此指数函数由连通关联函数生成这些关联函数，是一个相当经典的结果（与例 2.4 中的讨论非常相似）。自同构分为两组。第一组生成对称因子 $\frac{1}{k_i!}$，它将一个与 k_i 条边相连的 $\bullet$-顶点置换到第 $\bigcirc$ 个 i-顶点。第二组置换相同的 $\bullet$-顶点，这些顶点以相同数量的边连接到某些 $\bigcirc$-ˆ 顶点；这部分包含在指数函数的展开中。由于所有 $\Phi_k^{\vee}$ 都是对称的，我们可以重新排列指数函数中的求和（通过多项式定理），得到

$$\sum_{\substack{k_1,\dots,k_n\geq 0\\ k_1+\dots+k_n=k>0}}\frac{\hat{\Phi}_k^{\vee}(\overbrace{y_1(z_1),\dots,y_1(z_1)}^{k_1},\dots,\overbrace{y_n(z_n),\dots,y_n(z_n)}^{k_n};\hbar,u_1,\dots)}{k_1!\dots k_n!}$$
$$=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n}\hat{\Phi}_k^{\vee}(y_{i_1}(z_{i_1}),\dots,y_{i_k}(z_{i_k});\hbar,u_{i_1},\dots,u_{i_k}),$$

并得到所述结果。 □

我们注意到，由谱曲线 (x,y) 生成的非必然连通关联函数 W_n，与谱曲线 (y,x) 生成的连通关联函数 $W_{g,\,n}^{\vee}$之间的关系，可由作用于指数函数上的微分算子来描述。然而，在 u 展开中取 m 阶导数的 m 次微分算子的形式，可以得到更直观的解释。此外，我们还将通过一些形式观察来阐释因子 $\left(-\frac{dy_i}{dx_i}\right)$。

2.2. $x-y$ 辛变换的拉普拉斯变换。下面考察式（2.15）的拉普拉斯变换。黎曼曲面上的积分路径 γ 取决于 $x(z)$ $y(z)$。我们不打算精确描述这条路径，而是希望考察以下形式运算：

命题 2.6. 假设存在路径 $\gamma_i \ni z_i$，使得 $W_n(x_1(z_1)\dots,x_n(z_n))$ 在 γ_i 上解析，且被积函数在边界值处足够快地趋于零。

进一步假设沿路径 γ_i 的 $W_n(x_I)$ 的拉普拉斯变换收敛

对于 $\hbar$ 中的每个系数，拉普拉斯变换作为关于 $\hbar$ 的形式展开为

$$\begin{aligned}&\int_{\gamma_1} dx_1(z_1)e^{-\mu_1 x_1(z_1)}...\int_{\gamma_n} dx_n(z_n)e^{-\mu_n x_n(z_n)}\mathring{W}_n(x_1(z_1),...,x_n(z_n))\\ =&\int_{\gamma_1}\frac{dy_1(z_1)}{\hbar\mu_1}...\int_{\gamma_n}\frac{dy_n(z_n)}{\hbar\mu_n}\exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,...,i_k=1}^{n}\hat{\Phi}_k^\vee(y_{i_1}(z_{i_1}),...,y_{i_k}(z_{i_k});\hbar,-\mu_{i_1},...,-\mu_{i_k})\right).\end{aligned}$$

证明。取推论 2.5，将其与 $\prod_{i=1}^n e^{-\mu_i x_{i(z_i)}}dx_i(z_i)$相乘，并对每个变量 z_i 在 γ_i 上积分。根据这些假设，我们可以对每个变量 $x_i(z_i)$ 分部积分恰好 m_i 次，使得所有边界项都消失。于是得到

$$\begin{aligned}&\int_{\gamma_1} dx_1(z_1)e^{-\mu_1 x_1(z_1)}...\int_{\gamma_n} dx_n(z_n)e^{-\mu_n x_n(z_n)}\mathring{W}_n(x_1(z_1),...,x_n(z_n))\\ =&\int_{\gamma_1} dx_1(z_1)e^{-\mu_1 x_1(z_1)}...\int_{\gamma_n} dx_n(z_n)e^{-\mu_n x_n(z_n)}\sum_{m_1,...,m_n\geq 0}\prod_{i=1}^{n}\left(-\mu_i\right)^{m_i}\left(-\frac{dy_i(z_i)}{dx_i(z_i)}\right)[u_i^{m_i}]\\ &\times\frac{1}{\hbar u_i}\exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,...,i_k=1}^{n}\hat{\Phi}_k^\vee(y_{i_1}(z_{i_1}),...,y_{i_k}(z_{i_k});\hbar,u_{i_1},...,u_{i_k})-\sum_{i=1}^{n}u_i x_i(z_i)\right).\end{aligned}$$

作为关于 u_i 的形式表达式，我们可以直接将所有 u_i 替换为 $-\mu_i$，并忽略 m_i 求和。因子 $e^{-\mu_1 x_{1(z_1)}}$ 被 $e^{-\sum_{i=1}^n u_i x_{i(z_i)}}$ 抵消，其中 $u_i=-\mu_i$。改变积分变量 $dx_i(z_i)\to dy_i(z_i)$ 即完成证明。□

该命题给出了通过拓扑递归（TR）分别由谱曲线（x,y）和（y,x）生成的关联函数$W_{g,n}$和$W_{g,n}^\vee$之间最紧凑且最透明的关系。我们明确看到，对形式展开式的第 m_i 个系数取 m_i 阶导数，是对其进行拉普拉斯变换的一种非常自然的操作。因子 $-^{dy_{i(z_i)}\ dx_i(z_i)}$ 的出现给出了最终的积分变量变换。然而，拉普拉斯变换取决于不同的路径 γ_i，而在某个置换下交换它们 $\gamma_i\to\gamma_{\sigma(i)}$ 首先会产生一个差-

ent 拉普拉斯变换，因为 $\mathring{W}_n$ 在对角线上有极点，而对角线处的留数不一定为零。

例 2.7。命题 2.6 的 $\hbar$ 领先阶为 $\hbar^{-n}$。方程的左端展开为 $\mathring{W}_n(x_1(z_1)...,x_n(z_n))=\prod_{i=1}^n y_{i(\hbar}^{z_i}+\mathcal{O}_)(\hbar^{-n+1})$，而对于右端，指数函数的自变量在领先阶展开为

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\hat{\Phi}_1^\vee(y_i(z_i);\hbar;-\mu_i)+\mathcal{O}(\hbar)\\ =&\frac{1}{\hbar}\sum_{i=1}^{n}\left(\Phi_1^\vee\left(y_i(z_i)-\frac{\hbar\mu_i}{2}\right)-\Phi_1^\vee\left(y_i(z_i)+\frac{\hbar\mu_i}{2}\right)\right)+\mathcal{O}(\hbar)\end{aligned}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i(z_i) + \mathcal{O}(\hbar).$$

将所有结果合并后，领先阶为

$$\int_{\gamma_1} dx_1(z_1) e^{-\mu_1 x_1(z_1)} y_1(z_1) ... \int_{\gamma_n} dx_n(z_n) e^{-\mu_n x_n(z_n)} y_n(z_n)$$
$$= \int_{\gamma_1} \frac{dy_1(z_1)}{\mu_1} e^{-\mu_1 x_1(z_1)} ... \int_{\gamma_n} \frac{dy_n(z_n)}{\mu_n} e^{-\mu_n x_n(z_n)}$$

在这些假设和分部积分成立的条件下，该式是正确的。

例2.8。考虑与例 2.1 和2.4 中相同的情形，这是 y是非分歧的，因此所有 $W_{g,}^{\vee}$ $_n = 0$ 对于 $2g + n - 2 > 0$。如前所述，这意味着ˆ所有 $\Phi_k^{\vee} = 0$ 对于 $k > 2$。对于这种情况，我们由命题 2.6 得出

$$\int_{\gamma_1} dx_1(z_1) e^{-\mu_1 x_1(z_1)} ... \int_{\gamma_n} dx_n(z_n) e^{-\mu_n x_n(z_n)} \overset{\circ}{W}_n(x_1(z_1), ..., x_n(z_n))$$
$$= \int_{\gamma_1} \frac{dy_1(z_1)}{\hbar\mu_1} ... \int_{\gamma_n} \frac{dy_n(z_n)}{\hbar\mu_n} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{\Phi}_1^{\vee}(y_i(z_i); \hbar; -\mu_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \hat{\Phi}_2^{\vee}(y_i(z_i), y_j(z_j); \hbar; -\mu_i, -\mu_j) \right).$$

ˆ 注意，在对角线 $\Phi_2^{\vee}(y_i(z_i)\ y_i(z_i);\ \hbar;\ \mu_i, \mu_i)$ 上，我们必须取归一化原函数 (2.12)。

上述推导对于连通关联函数 W_n 同样有效，步骤完全相同。我们仅陈述结果：

推论2.9. 假设存在路径 γ_i，使得 $W_n(x_1(z_1) ..., x_n(z_n))$在 γ_i 上解析，并且被积函数在其边界值处衰减得足够快。假设沿路径 γ 对 $W_n(x_I)$ 的拉普拉斯变换对 $\hbar$ 中的每个系数都收敛，则作为关于 $\hbar$ 的形式展开，拉普拉斯变换为

$$\int_{\gamma_1} dx_1(z_1) e^{-\mu_1 x_1(z_1)} ... \int_{\gamma_n} dx_n(z_n) e^{-\mu_n x_n(z_n)} W_n(x_1(z_1), ..., x_n(z_n))$$
$$= \int_{\gamma_1} \frac{dy_1(z_1)}{\hbar\mu_1} ... \int_{\gamma_n} \frac{dy_n(z_n)}{\hbar\mu_n} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{\Phi}_1^{\vee}(y_i(z_i); \hbar, -\mu_i) \right) \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}_n} \frac{\prod_{I \in \mathcal{I}(\Gamma)} \hat{\Phi}_{|I|}^{\vee}(y_I(z_I); \hbar, -\mu_I)}{|\mathrm{Aut}(\Gamma)|}.$$

例 2.10. 继续例 2.1、2.4 和 2.8 中的级数，其中 y 是非分歧的。连通关联函数的拉普拉斯变换为

$$\int_{\gamma_1} dx_1(z_1) e^{-\mu_1 x_1(z_1)} ... \int_{\gamma_n} dx_n(z_n) e^{-\mu_n x_n(z_n)} W_n(x_1(z_1), ..., x_n(z_n))$$
$$= \int_{\gamma_1} \frac{dy_1(z_1)}{\hbar\mu_1} ... \int_{\gamma_n} \frac{dy_n(z_n)}{\hbar\mu_n} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{\Phi}_1^{\vee}(y_i(z_i); \hbar, -\mu_i) + \frac{1}{2} \hat{\Phi}_2^{\vee}(y_i(z_i), y_i(z_i); \hbar, -\mu_i, -\mu_i) \right)$$

$$\times \sum_{\Gamma\in\tilde{\mathcal{G}}_n^2}\prod_{I\in\mathcal{I}(\Gamma)}\left(e^{\hat{\Phi}_2^\vee(y_I(z_I);\hbar,-\mu_I)}-1\right),$$

其中 $\tilde{\mathcal{G}}_n^2\subset\mathcal{G}_n$ 是这样一组图：具有2价 $\bullet$-顶点，这些顶点连接两个不同的$\bigcirc$-顶点，且至多带有一个 $\bullet$-顶点；这无非就是具有 n 个标记顶点的连通图集合（A001187）。

注 2.11。多变量拉普拉斯变换的定义表明，它可能依赖于不同的路径 γ_i。将两条路径 γ_i、γ_j 彼此置换或沿着对方进行几何移动，会在对角线 $z_i=z_j$处产生非平凡的留数。然而，事实证明，在计算完所有路径积分后，这些留数会相互抵消。这与定理2.3 的函数关系左端在对角线处没有极点这一事实有关，尽管右端表明那里存在极点。

2.3. 对数型 x,y。在上一小节中，排除了 x 或y 的对数行为。然而，拓扑递归本身也可以应用于对数型 x和 y。事实上，许多非常重要的例子（例如与格罗莫夫-维滕理论相关的例子）都含有对数。为了验证对数型 x,y 的泛函关系通常不成立，我们以所谓的朗伯曲线[BM08, EMS09] 为例。这条曲线编码了 Hurwitz 数，稍后将对此作更详细的解释。该曲线定义为

$$x(z)=-z+\log(z),\qquad y(z)=z. \tag{2.16}$$

谱曲线的亏格为零，因此双线性微分为$\omega_{0,2}(z_1,z_2)=\frac{dz_1\,dz_2}{(z_1-z_2)^2}$。以这两个函数为起点，拓扑递归公式（2.1）会生成所有的$W_{g,n}$ 以及$W_g^\vee{}_{,n}$。可以检查一下某些例子是否满足泛函关系。

由于 y 是非分歧的，该曲线体现了前一小节中的例子，即$W_g^\vee{}_{,\,n}=0$ 对所有 $-\chi<2g+n-2$。对（2.1）的简短计算例如给出

$$W_{1,1}(x(z))=\frac{1}{x'(z)}\operatorname*{Res}_{q\to1}K_i(z,q)\omega_{0,2}(q,\sigma_i(q))=\frac{z^2(z-4)}{24(z-1)^5}.$$

另一方面，泛函关系的（g，n）$=$(1, 1)-示例是

$$\begin{aligned}W_{1,1}(x(z))=&-\frac{dy(z)}{dx(z)}W_{1,1}^\vee(y(z))+\frac{1}{2}\frac{d}{dx(z)}\left(\frac{dy(z)}{dx(z)}\hat{W}_{2,0}^\vee(y(z),y(z))\right)-\frac{1}{24}\frac{d^3}{dx(z)^3}\left(\frac{1}{\frac{dy(z)}{dx(z)}}\right)\\=&-\frac{1}{24}\frac{d^3}{dx(z)^3}\left(\frac{1}{\frac{dy(z)}{dx(z)}}\right)\\=&\frac{-6z^2+4z-1}{24z(z-1)^5}\end{aligned}$$

其中 $W_{1,1}^{\vee}(y(z)) = 0$ 以及 $\hat{W}_{2,0}^{\vee}(y_1,y_2) = W_{2,0}^{\vee}(y_1,y_2) - \frac{1}{(y_1-y_2)_2} = 0$ 均消失，因此只有最后一项有贡献。这与直接计算明显不一致。

然而，如果我们考察通过变换对这条曲线进行的辛变换，

$$y \to \tilde{y} = y + x, \tag{2.17}$$

泛函关系的有效性可以得到挽救。这意味着我们从曲线开始

$$x(z) = -z + \log(z), \qquad \tilde{y}(z) = \log(z). \tag{2.18}$$

~我们将相应的关联函数记为$W_{g,\ n}$，由于辛变换，它们等于曲线（2.16）的$W_{g,\ n}$。因此，拓扑递归的公式显然再次

$$\tilde{W}_{1,1}(x(z)) = \frac{z^2(z-4)}{24(z-1)^5}$$

由于核在此变换下保持不变。经过 $x-y$ 辛-~ ~对偶变换，即考察关联函数 $W_{g,n}^{\vee}$，我们看到 $W_{g,n}^{\vee} = 0$ 对所有 $-\chi < 2g+n-2$ 均成立，因为 y 再次是非分歧的。然而，对角线上的正则化 ^ 关联函数 $W_{0,2}^{\vee}$ 并不消失。它是

$$\lim_{z'\to z} \frac{1}{\tilde{y}'(z)\tilde{y}'(z')(z-z')^2} - \frac{1}{(\tilde{y}(z)-\tilde{y}(z'))^2} = -\frac{1}{12}.$$

将所有内容代入关于 $(g,n) = (1,1)$ 的泛函关系中，我们得到

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_{1,1}(x(z)) =& -\frac{d\tilde{y}(z)}{dx(z)}\tilde{W}_{1,1}^{\vee}(y(z)) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx(z)}\left(\frac{d\tilde{y}(z)}{dx(z)}\hat{\tilde{W}}_{2,0}^{\vee}(\tilde{y}(z),\tilde{y}(z))\right) - \frac{1}{24}\frac{d^3}{dx(z)^3}\left(\frac{1}{\frac{d\tilde{y}(z)}{dx(z)}}\right) \\
=& -\frac{1}{24}\frac{d}{dx(z)}\left(\frac{d\tilde{y}(z)}{dx(z)}\right) - \frac{1}{24}\frac{d^3}{dx(z)^3}\left(\frac{1}{\frac{d\tilde{y}(z)}{dx(z)}}\right) \\
=& \frac{z^2(z-4)}{24(z-1)^5}
\end{aligned}$$

这与直接从拓扑递归得出的计算结果一致。

这个例子表明，考虑对数 x,y 的 $x-y$ 辛变换通常并不成立。但另一方面，采用之前的正确辛变换（2.17）后，它实际上可以成立。人们可能会问：如果泛函关系对于 x,y 像对于曲线（2.18）那样，包含对数项并得到满足，那么命题 2.6和推论（2.9）的拉普拉斯变换是否仍然有效。

注 2.12. 对于 x、y 的对数行为，围道 γ 可能会穿过对数的分支切割。例 2.7 的观察为我们提供了另一种理解拉普拉斯变换的方式，即使对于包含 x、y 对数项的 $(g,n) = (0,1)$ 也是如此。因此，我们定义了

$$\int_\gamma dx(z)e^{-\mu x(z)}y(z) := \int_\gamma \frac{dy(z)}{\mu}e^{-\mu x(z)},$$

如果 y 有对数，且 γ 穿过分支切割线。这就避免了在切割线上拆分积分围道，并通过加入边界项使左端正则化；左端定义良好，原则上可以这样处理。

3. Application to Intersection Numbers on $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$

本节回顾拓扑递归与 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 上的交叉理论之间联系的一些例子，并应用推导出的公式。更多信息请参阅[Eyn11a, Eyn11b]。

设 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 为亏格为 g、带有 n 个标记点的复曲线紧化模空间。它是按照 Deligne 和 Mumford[DM69]的意义紧化的。$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 是一个维数为 $d_{g,n} = 3g-3+n$的复轨形。其点 $(C, p_1, ..., p_n) \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 是复曲线 C 及其 n 个标记点的同构类，这些标记点记作 $p_1, ..., p_n$。设 L_i 是定义在 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 上的线丛，其纤维为 $TC^\vee(p_i)$ 在 p_i处的余切空间。该线丛的第一陈类称为 ψ-类

$$\psi_i = c_1(L_i).$$

ψ 类是$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 中最简单的 tautological 类。通过将多个 ψ 类楔积，可以构造交数。

$$\langle \psi_1^{d_1} ... \psi_n^{d_n} \rangle_{g,n} = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{d_1} ... \psi_n^{d_n} \tag{3.1}$$

当存在 $d_{g,n} = \sum_{i=1}^n d_i$ 时，否则将其定义为零。Witten [Wit91] 提出了这一猜想，随后不久 Kontsevich [Kon92] 证明生成函数 (3.1) 满足 KdV 方程，更多细节可参见 [LZ04, Eyn16]。

Kontsevich 证明了，带外场的厄米矩阵模型会生成交数 (3.1)，前提是将其生成函数的参数与矩阵模型的某些系数对应起来。在发展出拓扑递归（TR）之后，Kontsevich 建立的矩阵模型与交叉理论之间的联系，促成了拓扑递归（TR）与一般交叉理论之间的联系。相关谱曲线的 ψ-类交数以Airy 曲线或 Witten-Kontsevich 曲线之名为人所知，定义为 $(\mathbb{P}^1, , x = \frac{z^2}{2}, y = z, \frac{dz_1\, dz_2}{(z_1-z_2)^2})$ [EO07a]。

我们还将讨论由 ψ- 和 Hodge 类构成的更一般的交数。令 $\pi : \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 为忘却态射，它忘掉

最后一个带标记点，而 ω_π 是相对对偶化层。于是，Hodge 类定义为

$$\Lambda(\alpha) = 1 + \sum_{k=1}^{g} (-1)^k \alpha^{-k} c_k(\mathbb{E}), \tag{3.2}$$

其中， c_k 是第 k个陈类，而 $\mathbb{E}$ 是由相对对偶化层的推前给出的 Hodge 丛，即 $\mathbb{E} = \pi_*(\omega_\pi)$。

过去人们曾研究并广泛关注 ψ-类与Hodge 类混合后的交数。特别是在Hurwitz数的背景下， ψ-类与Hodge 类的交数，与在 $\mathbb{P}^1$ 上计数具有无穷远点处特定分歧剖面的分歧覆盖的问题之间存在一种关系。这一关系就是著名的 ELSV 公式 [ELSV99]。更确切地说，设 $h_{g;k\mu_1,\ldots,\mu_n}$ 表示拓扑上不等价的分歧覆盖 $f : C \to \mathbb{P}^1$的等价类数量，其中 C 是亏格为 g的紧致连通复曲线，并且 f 在无穷远点处具有分歧剖面（μ_1,...., μ_n），在其他位置具有简单分歧。ELSV 公式将 Hurwitz 数$h_{g;\mu_1,\ldots,\mu_n}$ 与下面的线性 Hodge 积分联系起来

$$h_{g;\mu_1,\ldots,\mu_n} = \frac{(2g+\mu+n-2)!}{|\mathrm{Aut}(\mu_1,\ldots,\mu_n)|} \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu_i^{\mu_i}}{\mu_i!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \frac{\Lambda(1)}{\prod_{i=1}^{n}(1-\mu_i\psi_i)}, \tag{3.3}$$

其中， |Aut(μ_1, ..., μ_n)| 是对相同的 μ_i进行置换的置换数，以及$\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_n$。

Bouchard 和 Marino 猜想， [BM08] 出现在 ELSV 公式中的这些线性霍奇积分（因此也包括 Hurwitz 数）实际上可以通过采用所谓朗伯曲线的拓扑递归来计算。该猜想在[EMS09], 中得到了证明，其中谱曲线为 ($\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{R}_-, x = -z + \log(z)$ $y = \log(z)$ $\frac{dz_1\, dz_2}{(z_1-z_2)^2}$)。注意，根据第 2.3 节中的观察，我们在谱曲线中对 y作了平移，这不会改变 [EMS09]的结果。

将推论 2.9 的拉普拉斯变换应用于 Airy 曲线和/或朗伯曲线，可得到用于计算 ψ-和 Hodge 类交数的简易公式。

3.1. Airy 曲线。对于 Airy 曲线，关联函数$\omega_{g,n}$ 与交数之间的显式关系如下：

[{"id": 0, "input": "Theorem 3.1 ([EO07a]). Let the Airy spectral curve be ($\mathbb{P}^1, x(z) = z^2, y(z) = z, \frac{dz_1\, dz_2}{(z_1-z_2)^2}$), then the correlator $\omega_{g,n}$ computed by TR generates the ψ-class integral", "layout_label": "plain text"}]

$$\omega_{g,n}(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{k_1+\ldots+k_n=d_{g,n}} \langle \psi_1^{k_1} \ldots \psi_n^{k_n} \rangle_{g,n} \prod_{i=1}^{n} \frac{(2k_i+1)!!}{z_i^{2k_i+2}} dz_i. \tag{3.4}$$

第一步是通过拉普拉斯变换从 $\omega_{g,n}$ 中提取交数：

引理 3.2。设 $\mu_i \in \mathbb{N}$ 和 $2g+n-2>0$，对于由定理 3.1 的 Airy 曲线生成的 $\omega_{g,n}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{i\varepsilon-\infty}^{i\varepsilon+\infty} e^{-\mu_1 x_1(z_1)\ldots-\mu_n x_n(z_n)}\omega_{g,n}(z_1,\ldots,z_n)=\left\langle \prod_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{\mu_i}}{1-\mu_i\psi_i}\right\rangle_{g,n}. \tag{3.5}$$

For $2g+n-2\le 0$, *we get* $\left\langle \frac{1}{(1-\mu\psi)}\right\rangle_{0,1}=\frac{1}{\mu^2}$ *and* $\left\langle \frac{1}{(1-\mu_1\psi_1)(1-\mu_2\psi_2)}\right\rangle_{0,2}=\frac{1}{\mu_1+\mu_2}$.

证明。对于 $2g+n-2>0$ 和每个 μ_i，我们将积分应用于定理 3.1 的结果。该积分通过一种著名高斯积分的变体计算得出

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{i\varepsilon-\infty}^{i\varepsilon+\infty} dz\frac{e^{-\mu z^2/2}}{z^{2k+2}}=\frac{\mu^{k+1/2}}{(2k+1)!!}. \tag{3.6}$$

对 $k_1+\ldots+k_n = d_{g,\ n}$ 的求和可以扩展为对所有 k_i ≥0 的求和，因为除非满足条件$k_1+\ldots+k_n=d_{g,\ n}$，否则所有交数均定义为零。对于每个 k_i 求和，我们都有一个几何级数$\sum_{k_i=0}^{\infty}\mu_i^{k_i}\psi^{k_i}=\frac{1}{1-\mu_i\psi_i}$。

对于 $2g+n-2\le 0$，计算也很直接。首先将伯格曼核展开为几何级数 $\frac{1}{(z_1-z_2)^2}=\frac{1}{z_1^2}\sum_n n(\frac{z_2}{z_1})^{n-1}$，然后将高斯积分与$\frac{1}{(2k-1)!!(-2k-1)!!}=(-1)^k$ 一起应用，并再次将其写成几何级数。□

现在，我们可以将第 2.2 节中推导出的公式应用于 Airy 曲线。首先注意到，Airy曲线 $x(z)=z^2, y(z)=z$ 不会通过 y分歧。我们可以直接沿用第 2.2 节中讨论的示例，只需计算以下原函数：

$$\Phi_1^{\vee}(y(z))=\frac{1}{\hbar}\int x(z)dy(z)=\frac{z^3}{6\hbar} \tag{3.7}$$

$$\hat{\Phi}_1^{\vee}(y(z);\hbar,u)=\Phi_1^{\vee}\left(y(z)+\frac{\hbar u}{2}\right)-\Phi_1^{\vee}\left(y(z)-\frac{\hbar u}{2}\right)=u\frac{z^2}{2}+\frac{\hbar^2u^3}{24} \tag{3.8}$$

$$\Phi_2^{\vee}(y_1(z_1),y_2(z_2))=\log(z_1-z_2) \tag{3.9}$$

$$e^{\hat{\Phi}_2^{\vee}(y_1(z_1),y_2(z_2);\hbar,u_1,u_2)}-1=\frac{\hbar^2u_1u_2}{(z_1-z_2)^2-\frac{\hbar^2}{4}(u_1+u_2)^2}. \tag{3.10}$$

考虑到例 2.10 和引理 3.2，我们得出：

推论 3.3。 ψ-类交数可通过关于 $\hbar$ 的形式展开计算：

$$\left\langle \prod_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{\mu_i}}{1-\mu_i\psi_i}\right\rangle_{g,n}$$

$$=[\hbar^{2g+n-2}]\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\frac{\hbar^2\mu_i^3}{24}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{i\varepsilon-\infty}^{i\varepsilon+\infty}dz_i\frac{e^{-\mu_i\frac{z_i^2}{2}}}{\hbar\mu_i}\sum_{\Gamma\in\tilde{\mathcal{G}}_n^2}\prod_{\substack{I\in\mathcal{I}(\Gamma)\\ \{i,j\}=I}}\frac{\hbar^2\mu_i\mu_j}{(z_i-z_j)^2-\frac{\hbar^2}{4}(\mu_i+\mu_j)^2},$$

其中， $\tilde{\mathcal{G}}_n^2 \subset \mathcal{G}_n$ 是由具有二价 $\bullet$-顶点的图组成的子集，这些顶点连接两个不同的 $\bigcirc$-顶点，且至多带有一个 $\bullet$-顶点；这实际上就是具有 n 个标记顶点的连通图集合（A001187）。

对于不一定连通的关联函数，我们可以由例 2.8 和引理 3.2 得出：

推论 3.4。对所有 ψ类交数分拆求和，满足关于 $\hbar$的形式展开。

$$\sum_{\lambda\vdash I}\prod_{j=1}^{l(\lambda)}\sum_{g_j=0}\hbar^{2g_j+|\lambda_j|-2}\left\langle\prod_{i=1}^{|\lambda_j|}\frac{\sqrt{\mu_{\lambda_j^i}}}{(1-\mu_{\lambda_j^i}\psi_{\lambda_j^i})}\right\rangle_{g_j,|\lambda_j|}$$
$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\frac{\hbar^2\mu_i^3}{24}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{i\varepsilon-\infty}^{i\varepsilon+\infty}dz_i\frac{e^{-\mu_i\frac{z_i^2}{2}}}{\hbar\mu_i}\prod_{i<j}\frac{\hbar^2\mu_i\mu_j}{(z_i-z_j)^2-\frac{\hbar^2}{4}(\mu_i+\mu_j)^2},$$

其中， $\lambda\vdash I$是 I的一个集合划分，含有 l个（λ）块 $\lambda_j\subset I$，即 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_{l(\lambda)})$。每个块写作 $\lambda_j=(\lambda_j^1,\ldots,\lambda_j^{|\lambda_j|})$，其基数为 $|\lambda_j|$，元素为 $\lambda_j^i\in I$。

推论 3.3和 3.4的结果并未声称是新公式，因为这些公式等价于 [ABDB$^+$22 的 §7] 中给出的公式，正如第2.2 节所解释的，在应用拉普拉斯变换之后。因此，执行高斯积分时，通常通过导数来处理被积函数，从而得到类似于(3.6)的公式；我们只是直接得到了由定理3.1 与定理2.3 共同诱导的公式，正如 [ABDB$^+$22的 §7] 中所述。然而，我们仍然从高斯积分的角度，对 ψ-类交数的计算获得了新的认识。

我们还想强调，推论 3.3 和 3.4 中积分的先后顺序并不重要。这与关联函数 $\omega_{g,n}$ 对于 $2g+n-2>0$ 仅在分歧点处有极点、而在对角线处没有极点这一事实有关。揭示这一性质的深层代数结构尚未得到理解，但它始终存在于所有这些公式的背景之中。

3.2. 朗伯曲线。本小节中，我们将第 2.2 节的公式应用于朗伯曲线。请注意，这些公式仅针对亚纯的 x,y 得到证明。然而，第 2.3 节的讨论表明，对于朗伯曲线，某种特定的 y 选择实际上可行。在本小节中，我们为那些假设形如 (2.18) 的朗伯曲线满足 $x-y$ 辛变换的推论加上了星号。通过计算机代数进行的大量检验证实了这一假设。

关联函数$\omega_{g,n}$ 与线性霍奇积分（或 Hurwitz 数）之间的精确关系如下：

定理 3.5([EMS09])。令朗伯谱曲线为($\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{R}_-, x(z) = -z + \log(z)$ $y(z) = \log(z)$ $\frac{dz_1\, dz_2}{(z_1-z_2)^2}$)，则由拓扑递归计算得到的关联函数 $\omega_{g,n}$ 生成线性霍奇积分

$$\omega_{g,n}(z_1,...,z_n) = \sum_{k_1,...,k_n \geq 0} \prod_{i=1}^{n} \frac{k_i^{k_i+1}}{k_i!} \left\langle \frac{\Lambda(1)}{\prod_{i=1}^{n}(1-k_i\psi_i)} \right\rangle_{g,n} e^{k_i x_i(z_i)} dx_i(z_i) \quad (3.11)$$

计算式 (3.11) 的拉普拉斯变换，其中 γ 是一条环绕原点的围道，将分离式 (3.11) 中的各项：

引理 3.6。设 $\mu_i \in \mathbb{N}$ 和 $2g+n-2>0$，对于由定理 3.5 的朗伯曲线生成的 $\omega_{g,\,n}$，我们有

$$\mathrm{Res}_{z_i=0}\, e^{-\mu_1 x_1(z_1)-\ldots-\mu_n x_n(z_n)} \omega_{g,n}(z_1,...,z_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu_i^{\mu_i+1}}{\mu_i!} \left\langle \frac{\Lambda(1)}{\prod_{i=1}^{n}(1-\mu_i\psi_i)} \right\rangle_{g,n}. \quad (3.12)$$

对于 $2g+n-2 \leq 0$，我们令式 (3.12) 的左端由该方程定义，其中 $\left\langle \frac{\Lambda_{(1)}(}{1-\mu\psi)} \right\rangle_{0,1} = \frac{1}{\mu^2}$ 以及 $\left\langle \frac{\Lambda_{(1)}()(}{(1-\mu_1\psi_1)(1-\mu_2\psi_2)} \right\rangle_{0,2} = \frac{1}{\mu_1+\mu_2}$。

证明。对于 $2g+n-2>0$ 和每个 μ_i，我们有相同的计算。

$$\mathrm{Res}_{z=0}\, dx(z) e^{(k-\mu)x(z)} = \mathrm{Res}_{z=0} \frac{(1-z)dz}{z} \frac{e^{(\mu-k)z}}{z^{\mu-k}} = \delta_{\mu,k}.$$

对于 $2g+n-2<0$，0 处的留数没有定义。因此，我们将拉普拉斯变换定义为与经典已知结果相符。情形 $(g,n) = (0,1)$ 与注 2.12 有关。□

现在，我们可以将第 2.2 节中推导出的公式应用于朗伯曲线。首先注意，由 $x(z) = -z + \log(z)$ $y(z) = \log(z)$ 参数化的朗伯曲线，即

$$x = -e^y + y, \quad (3.13)$$

不会通过 y 发生分歧。我们可以直接沿用第 2.2 节中讨论的示例，只需计算以下原函数：

$$\Phi_1^\vee(y(z)) = \frac{1}{\hbar}\int x(z)dy(z) = \frac{-z+\frac{\log(z)^2}{2}}{\hbar} = \frac{-e^{y(z)}+\frac{y(z)^2}{2}}{\hbar} \quad (3.14)$$

$$\hat{\Phi}_1^\vee(y(z);\hbar,u) = \Phi_1^\vee\left(y(z)+\frac{\hbar u}{2}\right) - \Phi_1^\vee\left(y(z)-\frac{\hbar u}{2}\right) = \quad (3.15)$$

$$= -zuS(\hbar u) + \log(z)u$$

$$\Phi_2^\vee(y_1(z_1), y_2(z_2)) = \log(z_1-z_2) \quad (3.16)$$

$$\hat{\Phi}_2^\vee(y_1(z_1),y_2(z_2);\hbar,u_1,u_2)=\log\left(\frac{(z_1e^{\hbar u_1/2}-z_2e^{\hbar u_2/2})(z_1e^{-\hbar u_1/2}-z_2e^{-\hbar u_2/2})}{(z_1e^{-\hbar u_1/2}-z_2e^{\hbar u_2/2})(z_1e^{\hbar u_1/2}-z_2e^{-\hbar u_2/2})}\right) \tag{3.17}$$

$$\hat{\Phi}_2^\vee(y(z),y(z);\hbar,u,u)=-2\log(S(u\hbar)), \tag{3.18}$$

其中，由于对角线上的 (2.12)， $S(u)=\frac{e^{u/2}-e^{-u/2}}{u}$ 和 $\Phi_2^\vee$ 需要进行正则化。

注记 3.7。注意，我们选择了 $y(z)=\log(z)$，而不是 $y(z)=z$，这是 [BM 08]，中提出的，因为第2.3节已经表明，对于 $y(z)=z$，泛函关系并不成立。实际上，将 $y(z)=z\mapsto y(z)+x(z)=\log(z)$进行变换，是第 2.2 节开头提到的谱曲线的第一次辛变换。因此，除了 $\omega_{0,1}$ 之外，两条曲线具有相同的$\omega_{g,n}$'s，并因此生成了定理3.5 中所述的线性霍奇积分。出现在 Hurwitz数和线性霍奇积分中的重要因子 $S(u\hbar)$（例如参见 [FP00]）由我们选取的谱曲线 (3.13) 以及 $x-y$ 辛变换公式直接在 (3.15) 和 (3.18) 中产生。

考虑例 2.10 和引理 3.6，我们得出：

*推论 3.8。线性霍奇积分通过 $\hbar$的形式展开计算。

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^n\frac{k_i^{k_i+1}}{k_i!}\left\langle\frac{\Lambda(1)}{\prod_{i=1}^n(1-k_i\psi_i)}\right\rangle_{g,n}\\&=\mathrm{Res}_{z_i=0}[\hbar^{2g+n-2}]\prod_{i=1}^n\frac{dz_ie^{k_iz_iS(\hbar k_i)}}{z_i^{1+k_i}\hbar k_iS(\hbar k_i)}\\&\qquad\times\sum_{\Gamma\in\tilde{\mathcal{G}}_n^2}\prod_{\substack{I\in\mathcal{I}(\Gamma)\\\{i,j\}=I}}\left(\frac{(z_ie^{\hbar k_i/2}-z_je^{\hbar k_j/2})(z_ie^{-\hbar k_i/2}-z_je^{-\hbar k_j/2})}{(z_ie^{-\hbar k_i/2}-z_je^{\hbar k_j/2})(z_ie^{\hbar k_i/2}-z_je^{-\hbar k_j/2})}-1\right),\end{aligned}$$

其中，$\tilde{\mathcal{G}}_n^2\subset\mathcal{G}_n$ 是由以下图组成的子集：具有 2-价的 •-顶点，这些顶点至多通过一个 •-顶点连接两个不同的 ◯-顶点；该子集无非就是具有 n 个标记顶点的连通图集合（ A001187）。

使用计算机代数对推论 3.8 进行的显式计算，与 [EMS09, Tab. 2] 中列出的所有 Hurwitz 数均相符。

对于不一定连通的关联函数，我们可以从例 2.8 和引理 3.6 得出结论：

*推论 3.9. 所有分拆对应的线性霍奇积分之和满足关于 $\hbar$ 的形式展开

$$\prod_{i=1}^n\frac{k_i^{k_i+1}}{k_i!}\sum_{\lambda\vdash I}\prod_{j=1}^{l(\lambda)}\sum_{g_j=0}\hbar^{2g_j+|\lambda_j|-2}\left\langle\frac{\Lambda(1)}{\prod_{i=1}^{|\lambda_j|}(1-k_{\lambda_j^i}\psi_{\lambda_j^i})}\right\rangle_{g_j,|\lambda_j|}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_i=0} \frac{dz_i e^{k_i z_i S(\hbar k_i)}}{z_i^{1+k_i} \hbar k_i S(\hbar k_i)} \prod_{i<j} \frac{(z_i e^{\hbar k_i/2} - z_j e^{\hbar k_j/2})(z_i e^{-\hbar k_i/2} - z_j e^{-\hbar k_j/2})}{(z_i e^{-\hbar k_i/2} - z_j e^{\hbar k_j/2})(z_i e^{\hbar k_i/2} - z_j e^{-\hbar k_j/2})},$$

其中，$\lambda \vdash I$ 是 I 的一个集合划分，包含 l 个（λ）块 $\lambda_j \subset I$，即 $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{l(\lambda)})$。每个块写作 $\lambda_j = (\lambda_j^1, ..., \lambda_j^{|\lambda_j|})$，其基数为 $|\lambda_j|$，元素为 $\lambda_j^i \in I$。

REFERENCES

[ABDB+22] A. Alexandrov、B. Bychkov、P. Dunin-Barkowski、M. Kazarian 和 S. Shadrin。拓扑递归中 $x-y$ 的通用公式。2022 年 12 月，2212.00320。[BCGF21a] G. Borot、S. Charbonnier 和 E. Garcia-Failde。由带睫毛映射得到全简单映射的拓扑递归。2021 年 6 月，2106.09002。[BCGF+21b] G. Borot、S. Charbonnier、E. Garcia-Failde、F. Leid 和 S. Shadrin。高阶自由累积量的解析理论。2021 年 12 月，2112.12184。[BDBKS20] B. Bychkov、P. Dunin-Barkowski、M. Kazarian 和 S. Shadrin。超几何型 Kadomtsev-Petviashvili τ 函数的拓扑递归。2020 年 12 月，2012.14723。[BDBKS21] B. Bychkov、P. Dunin-Barkowski、M. Kazarian 和 S. Shadrin。n 点函数的一般化普通与全简单对偶性及 Borot–Garcia-Failde猜想的证明。2021 年 6 月，2106.08368。[BDBKS22a] B. Bychkov、P. Dunin-Barkowski、M. Kazarian 和 S. Shadrin。Orlov–Scherbin n 点函数的显式闭代数公式。《综合理工学院数学杂志》，9:1121–1158，2022，2008.13123。doi:10.5802/jep.202。[BDBKS22b] B. Bychkov、P. Dunin-Barkowski、M. Kazarian 和 S. Shadrin。拓扑递归的辛对偶性。2022 年 6 月，2206.14792。[BKMP09] V. Bouchard、A. Klemm、M. Marino 和 S. Pasquetti。重塑 B 模型。《数学物理通讯》，287:117–178，2009，0709.1453。doi:10.1007/s00220-008-0620-4。[BM08] V. Bouchard 和 M. Marino。Hurwitz 数、矩阵模型与枚举几何。《纯数学研讨会论文集》，78:263–283，2008，0709.1458。doi:10.1090/pspum/078/2483754。[DM69] P. Deligne 和 D. Mumford。给定亏格的曲线空间的不可约性。《高等科学研究所数学出版物》，(36):75–109，1969。网址：http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1969__36__75_0。[ELSV99] T. Ekedahl、S. Lando、M. Shapiro 和 A. Vainshtein。关于 Hurwitz 数与 Hodge积分。《法国科学院报告——数学系列 I》，328(12):1175–1180，1999。doi:https://doi.org/10.1016/S0764-4442(99)80435-2。[EMS09] B. Eynard、M. Mulase 和 B. Safnuk。切割-连接方程的拉普拉斯变换及关于 Hurwitz 数的 Bouchard-Marino猜想。《数理科学研究所刊物》，47:629–670，2009。[EO07a] B. Eynard 和 N. Orantin。代数曲线不变量与拓扑展开。《数论与物理通讯》，1:347–452，2007，math-ph/0702045。doi:10.4310/CNTP.2007.v1.n2.a4。[EO07b] B. Eynard 和 N. Orantin。厄米二矩阵模型中混合关联函数的拓扑展开，以及 x-y 对称性与 F_g 代数不变量。《物理学杂志 A：数学与理论》，41(1):015203，2007，0705.0958。doi:10.1088/1751-8113/41/1/015203。

[EO13] B.Eynard和N.Orantin。关于 F_g 代数不变量的 x-y对称性。11 2013，1311.4993。[Eyn11a] B.Eynard。谱曲线的交数。4 2011，1104.0176。[Eyn11b] B.Eynard。谱曲线的不变量与复曲线模空间的交叉理论。《数论与物理通讯》，8:541–588，2011，1110.2949。doi:10.4310/CNTP.2014.v8.n3.a4。[Eyn14] B. Eynard。《拓扑递归》简述。12 2014，1412.3286。[Eyn16] B.Eynard。《曲面计数》，《数学物理进展》第70卷。Birkh¨auser/施普林格出版社，2016。doi:10.1007/978-3-7643-8797-6。[FP00] C. Faber和R. Pandharipande。Hodge积分与格罗莫夫-维滕理论。《数学新进展》，139(1):173–199，2000，math/9810173。doi:10.1007/s002229900028。[Hoc22a] A.Hock。拓扑递归中 x-y 辛变换的一个简单公式。112022，2211.08917。[Hoc22b] A.Hock。通过环插入算子研究拓扑递归中关联函数的 x-y 对称性。1 2022，2201.05357。[Kon92] M. Kontsevich。曲线模空间上的交叉理论与矩阵艾里函数。《数学物理通讯》，147:1–23，1992。doi:10.1007/BF02099526。[LZ04] S.K. Lando 和 A.K. Zvonkin。《曲面上的图及其应用》，《数学科学百科全书》第141卷。施普林格出版社，柏林，2004。doi:10.1007/978-3-540-38361-1。附录由Don B. Zagier撰写。[Mul12] M. Mulase。拉普拉斯变换、镜像对称与 Eynard–Orantin 的拓扑递归。载于第31届物理几何方法研讨会，127–142页，102012，1210.2106。doi:10.1007/978-3-0348-0645-911。[Wit91] E. Witten。二维引力与模空间上的交叉理论。载于《微分几何综述》（马萨诸塞州剑桥，1990），243–310页。Lehigh Univ.，Bethlehem，PA，1991。doi:10.4310/SDG.1990.v1.n1.a5。

MATHEMATICAL INSTITUTE, UNIVERSITY OF OXFORD, ANDREW WILESBUILDING, WOODSTOCK ROAD, OX2 6GG, OXFORD, UK 电子邮箱地址：alexander.hock@maths.ox.ac.uk