arXiv:2304.03049v1 [math.NT] 6 Apr 2023

V. V. Iudelevich

关于卡拉楚巴除数问题

我们得到和 $\Phi_a(x) = \sum_{p\leqslant x} 1/(\tau(p+a))$ 的一个上界，其中 $\tau(n)$ 是除数函数，$a \geqslant 1$ 是一个固定整数，而 p 遍历不超过 x 的素数。

参考文献：14篇。

关键词和短语：除数函数，平移素数。

引言

2004年，A. A. Karatsuba 在其“解析数论及其应用”研讨会上提出了以下问题：求该求和的渐近公式

$$\Phi_a(x) = \sum_{p\leqslant x} \frac{1}{\tau(p+a)}, \qquad x \to +\infty,$$

其中 $\tau(n)$ 表示除数函数，a 是一个固定整数，求和遍历所有不超过 x 的素数。

这个问题源于 A. A. Karatsuba 与 V. I. Arnold 之间的讨论。注意到，它包含以下两个解析数论问题的特征。第一个是蒂奇马什除数问题，它研究该求和的渐近行为

$$F_a(x) = \sum_{p\leqslant x} \tau(p+a).$$

1930年，蒂奇马什 [1] 证明了估计式

$$\sum_{p\leqslant x} \tau(p-1) = O(x).$$

他还在广义黎曼猜想的前提下证明了

$$\sum_{p\leqslant x} \tau(p-1) \sim cx, \qquad c = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}.$$

第一个无条件结果由 Yu. V. Linnik [2] 获得。他利用离散法证明了

$$\sum_{p\leqslant x} \tau(p-1) = cx + R(x), \qquad c = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)},$$
$$R(x) \ll \frac{x}{(\ln x)^\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

该论文发表于《俄罗斯科学院学报》（2022年），**86(5)**，第169—196页。

© V. V. Iudelevich

随后，许多作者对这一结果进行了完善（见 [3]–[7]）。第二个问题是求和的渐近公式

$$T(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\tau(n)}.$$

1916年，S. Ramanujan [8] 证明了

$$T(x) = \frac{x}{\sqrt{\ln x}}\left(a_0 + \frac{a_1}{\ln x} + \cdots + \frac{a_n}{(\ln x)^n} + O_n\left(\frac{1}{(\ln x)^{n+1}}\right)\right),$$

其中 a_n 是一些常数；特别是，

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_p \sqrt{p^2 - p}\, \ln \frac{p}{p-1}.$$

本文旨在求和 $\Phi_a(x)$ 的一个上界。由于

$$\frac{1}{x} \sum_{p \leqslant x} 1 \asymp \frac{1}{\ln x},$$

and

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\tau(n+a)} \asymp \frac{1}{\sqrt{\ln x}},$$

因此，自然可以预期

$$\frac{1}{x}\Phi_a(x) \asymp \frac{1}{(\ln x)\sqrt{\ln x}} = \frac{1}{(\ln x)^{3/2}}.$$

本文得到了上界

$$\Phi_a(x) \ll_a \frac{x}{(\ln x)^{3/2}}.$$

更准确地说，我们证明如下定理。

定理 1。 设 $a \geqslant 1$ 为一个固定整数。那么我们有

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{\tau(p+a)} \leqslant 4K(a) \frac{x}{(\ln x)^{3/2}} + O\left(\frac{x \ln\ln x}{(\ln x)^{5/2}}\right),$$

其中

$$K(a) = K\beta(a), \qquad K = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_p \sqrt{\frac{p}{p-1}} \left(p \ln \frac{p}{p-1} - \frac{1}{p-1}\right),$$

$$\beta(a) = \prod_{p \mid a} \left(1 + \frac{1}{p(p-1)\ln(p/(p-1)) - 1}\right).$$

因此，上界与$\Phi_a(x)$的猜想数量级一致。

在本文中，我们采用塞尔伯格筛法。这一方法的核心如下。我们需要估计和

$$S(\mathcal{A}, z) = \sum_{(n, P(z))=1} a_n,$$

其中 $\mathcal{A} = (a_n)$ 是给定的非负实数序列，而 $P(z) = \prod_{p \leqslant z} p$是所有不超过 z 的素数的乘积。由于

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 1, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

由此可知

$$S(\mathcal{A}, z) = \sum_n a_n \sum_{d \mid (n, P(z))} \mu(d).$$

引入任意数 ρ_d（其中 $d \leqslant z$、 $d \mid P(z)$），使得 $\rho_1 = 1$。那么，对于所有 $n \geqslant 1$，$\sum_{d \mid n} \mu(d) \leqslant \left(\sum_{d \mid n} \rho_d\right)^2$。因此，我们得到

$$S(\mathcal{A}, z) \leqslant \sum_n a_n \left(\sum_{d \mid (n, P(z))} \rho_d \right)^2 = \sum_{d_1, d_2 \mid P(z)} \rho_{d_1} \rho_{d_2} A_{[d_1, d_2]},$$

其中

$$A_d = \sum_{n \equiv 0 \pmod{d}} a_n.$$

此外，假设对于所考虑的 d，我们有 $A_d = Xg(d) + r_d$，其中 $g(d)$是乘法函数，X 与 d相互独立，且 r_d 在平均意义下很小。系数 ρ_d 的选取使二次型最小。

$$B = \sum_{d_1, d_2 \mid P_a(z)} \rho_{d_1} \rho_{d_2} g([d_1, d_2]). \tag{1}$$

在我们的情况下， A_d 具有更复杂的形式

$$A_d = X_0 g_0(d) + X_1 g_1(d) + \cdots + X_m g_m(d),$$

其中， $g_k(d)$是一些函数（一般来说， $g_k(d)$对于$k \geqslant 1$并不是积性的），且 X_k 的值与 d无关。系数 ρ_d 仅根据与函数 $g = g_0$相对应的第一个二次型（1）构造。在这种情况下，我们观察到以下现象。这些系数同时使与函数 g_k相对应的其余二次型达到最小，至少就数量级而言。

注意，蒂奇马什除数问题的解法基于 Bombieri-Vinogradov 定理。在本文中，我们主要使用 M. A. Korolev 得到的 Bombieri-Vinogradov 定理的类似结果（见 [9, 引理 13]）。我们注意到，本文的方法也可应用于其他求和。例如，可以证明，如果

$$T_a(x) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p,\, p+2 \text{ primes}}} \frac{1}{\tau(p + a)},$$

其中求和是对孪生素数进行的，然后

$$T_a(x) \leqslant \frac{c(a)x}{(\ln x)^{5/2}}(1+o(1)).$$

致谢。 本研究得到了“BASIS”理论物理与数学促进基金会的支持。

§1. 辅助结果

引理 1。 由展开式确定系数 c_k

$$\frac{x}{-(\ln(1-x))} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k, \qquad |x| < 1. \tag{2}$$

于是 $c_0 = 1$，且当 $k \geqslant 1$时有 $|c_k| \leqslant 1$ 。

证明。这立即由众所周知的恒等式（见 [10]）得到：

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k| = 1. \tag{3}$$

引理的证明完成。

注：这些数字

$$G_n = (-1)^n c_n, \qquad n \geqslant 1,$$

被称为格雷戈里系数。有关格雷戈里系数的更精确估计，参见 [10]。

引理 2。 对于 $0 < \varepsilon < 1$ 和 $d \geqslant 1$ ，我们有

$$\sum_{p \mid d} \frac{1}{p^{1-\varepsilon}} \leqslant \frac{2\omega(d)^{\varepsilon}}{\varepsilon}, \tag{4}$$

其中， $\omega(d)$ 是素因子个数函数。

证明。若 d 是素数幂或 $d = 1$，显然成立。假设 $\omega(d) \geqslant 2$，则对于 $X \geqslant 2$ ，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{p \mid d} \frac{1}{p^{1-\varepsilon}} &= \Bigg(\sum_{p \mid d,\, p \leqslant X} + \sum_{p \mid d,\, p > X}\Bigg) \frac{1}{p^{1-\varepsilon}} \leqslant \sum_{p \mid d,\, p \leqslant X} \frac{1}{p^{1-\varepsilon}} + \frac{1}{X^{1-\varepsilon}} \sum_{p \mid d} 1 \\ &\leqslant \sum_{2 \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{n^{1-\varepsilon}} + \frac{\omega(d)}{X^{1-\varepsilon}} \leqslant \int_1^X \frac{du}{u^{1-\varepsilon}} + \frac{\omega(d)}{X^{1-\varepsilon}} \leqslant \frac{X^{\varepsilon}}{\varepsilon} + \frac{\omega(d)}{X^{1-\varepsilon}}.\end{aligned}$$

选取 $X = \omega(d) \geqslant 2$ ，我们便完成了证明。

我们通过以下等式定义函数 $G_d(s)$

$$G_d(s) = H(s)J_d(s). \tag{5}$$

Here

$$H(s) = \frac{1}{s}\sqrt{\zeta(s)(s-1)}\prod_p \sqrt{p^{2s}-p^s}\,\ln\frac{p^s}{p^s-1},$$

$$J_d(s) = \prod_{p\,|\,d}\left(p^s\ln\frac{p^s}{p^s-1}\right)^{-1}, \tag{6}$$

其中我们取$\sqrt{z}$ 与$\ln z$的主支。众所周知（参见 [11,第四章第 3 节，定理 1]），黎曼ζ函数在该区域内没有零点

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_0}{(\ln|t|)^{2/3}(\ln\ln|t|)^{1/3}}, \qquad t \geqslant t_0, \tag{7}$$

对于某个 $c_0 > 0$。因此，函数 $G_d(s)$ 在区域 (7) 内正则。

引理 3. 集合

$$\varepsilon_d = \big(3\ln(\omega(d)+2)\big)^{-1}. \tag{8}$$

若$\operatorname{Re} s \geqslant 1-\varepsilon_d/2$ 且 $l \geqslant 0$，则对于在(6)中定义的 $J_d(s)$的第 l阶导数，有

$$J_d^{(l)}(s) \ll_l (\omega(d)+2)^{10}.$$

证明。我们有，

$$J_d(s) = \prod_{p\,|\,d}\frac{p^{-s}}{-\ln(1-p^{-s})} = \prod_{p\,|\,d}(1 + c_1p^{-s} + c_2p^{-2s} + \cdots),$$

其中系数 c_k 定义见式（2）。因此，我们得到

$$J_d(s) = \sum_{\delta\,|\,d^\infty}\frac{j(\delta)}{\delta^s},$$

其中符号 $\delta\,|\,d^\infty$ 表示对其素因子均整除 d 的那些数求和，而 $j(\delta)$ 是乘法函数，满足 $j(p^k) = c_k$。因此，我们得到

$$J_d^{(l)}(s) = \sum_{\delta\,|\,d^\infty}\frac{j(\delta)(-\ln\delta)^l}{\delta^s} \ll \sum_{\delta\,|\,d^\infty}\frac{(\ln\delta)^l}{\delta^\sigma},$$

其中 $s = \sigma + it$。注意到

$$\frac{(\ln\delta)^l}{\delta^\varepsilon} \leqslant \left(\frac{l}{e}\right)^l\frac{1}{\varepsilon^l},$$

对于 $\varepsilon > 0$、 $l \geqslant 1$ 和 $\delta \geqslant 1$。因此，选取 $\varepsilon = \varepsilon_d/2$ 并利用不等式 $\sigma \geqslant 1-\varepsilon_d/2$，可得

$$J_d^{(l)}(s) \ll_l \frac{1}{\varepsilon_d^l}\prod_{p\,|\,d}\left(1 + \frac{1}{p^{1-\varepsilon_d}} + \frac{1}{p^{2(1-\varepsilon_d)}} + \cdots\right).$$

注意，所得不等式对 $l=0$ 也成立。因为

$$2(1-\varepsilon_d)\geqslant 2\biggl(1-\frac{1}{3\ln 2}\biggr)>1,$$

由引理 2 可知

$$J_d^{(l)}(s)\ll\frac{1}{\varepsilon_d^l}\prod_{p\mid d}\biggl(1+\frac{1}{p^{1-\varepsilon_d}}\biggr)\leqslant\frac{1}{\varepsilon_d^l}\exp\biggl(\sum_{p\mid d}\frac{1}{p^{1-\varepsilon_d}}\biggr)\ll\frac{1}{\varepsilon_d^l}\exp\biggl(\frac{2\omega(d)^{\varepsilon_d}}{\varepsilon_d}\biggr)$$
$$\ll_l(\omega(d)+2)^{6\exp(1/3)}\bigl(\ln(\omega(d)+2)\bigr)^l\ll_l\bigl(\omega(d)+2\bigr)^{10}.$$

证明到此结束。

引理 4. 设 $d\leqslant x$ 为整数， $m\geqslant 0$ 为一个固定数，则

$$\sum_{\substack{k\leqslant x\\(k,d)=1}}\frac{1}{\tau(k)}=\frac{x}{\sqrt{\pi\ln x}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{4^k}\,\frac{G_d^{(k)}(1)}{(\ln x)^k}+R_m(x;d),\tag{9}$$

其中 $G_d(s)$ 在(5)中定义，且

$$R_m(x;d)\ll_m\kappa(d)\frac{x}{(\ln x)^{m+3/2}},\qquad\kappa(d)=(\omega(d)+2)^{10}.$$

证明。考虑生成级数

$$F_d(s)=\sum_{\substack{n=1\\(n,d)=1}}^{+\infty}\frac{1}{\tau(n)}\,n^{-s}.$$

于是我们有

$$F_d(s)=\prod_{p\nmid d}\biggl(1+\frac{1}{2}p^{-s}+\frac{1}{3}p^{-2s}+\cdots\biggr)=\prod_{p\nmid d}p^s\ln\frac{p^s}{p^s-1}$$
$$=\frac{\prod_p\bigl(p^s\ln(p^s/(p^s-1))(1-p^{-s})^{1/2}(1-p^{-s})^{-1/2}\bigr)}{\prod_{p\mid d}\bigl(p^s\ln(p^s/(p^s-1))\bigr)}$$
$$=\frac{\sqrt{\zeta(s)}\,\prod_p\bigl(\sqrt{p^{2s}-p^s}\,\ln(p^s/(p^s-1))\bigr)}{\prod_{p\mid d}\bigl(p^s\ln(p^s/(p^s-1))\bigr)},$$

其中 $\sqrt{z}>0$ 对于 $z>0$。利用Perron公式（参见 [12, 第IV章，第1节，定-理 1]）对于 T、 $x\geqslant 2$和 $b=1+1/\ln x$，我们得到

$$\sum_{\substack{k\leqslant x\\(k,d)=1}}\frac{1}{\tau(k)}=j+O\biggl(\frac{x\ln x}{T}\biggr),$$

其中

$$j=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}F_d(s)\frac{x^s}{s}\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{G_d(s)x^s}{\sqrt{s-1}}\,ds,$$

$$G_d(s)=\frac{1}{s}\sqrt{\zeta(s)(s-1)}\prod_p\biggl(\sqrt{p^{2s}-p^s}\ln\frac{p^s}{p^s-1}\biggr)\prod_{p\mid d}\biggl(p^s\ln\frac{p^s}{p^s-1}\biggr)^{-1}=H(s)J_d(s).$$

Put

$$a = 1 - c_0(\ln T)^{-2/3}(\ln\ln T)^{-1/3},$$

其中 c_0 按式（7）选取。考虑顶点为 $a \pm iT$、 $b \pm iT$的矩形 Γ，并沿水平方向从点 $s = a$ 直线切割至点 $s = 1$。于是根据柯西定理

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{G_d(s)x^s}{\sqrt{s-1}}\,ds &= \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{b-iT}^{b+iT} + \int_{b+iT}^{a+iT} + \int_{a+iT}^{a+i0} \\ &\quad + \int_{a+i0}^{1+i0} + \int_{1-i0}^{a-i0} + \int_{a-i0}^{a-iT} + \int_{a-iT}^{b-iT}\Big)\frac{G_d(s)x^s}{\sqrt{s-1}}\,ds \\ &= j + j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + j_5 + j_6 = 0\end{aligned}$$

（其中符号 j_1、 ...、 j_6 的定义显而易见），因此

$$j = -(j_3 + j_4) - j_1 - j_2 - j_5 - j_6.$$

我们来计算 $J = -(j_3 + j_4)$。有

$$\begin{aligned}j_3 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{a+i0}^{1+i0}\frac{G_d(s)x^s}{\sqrt{s-1}}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_a^1 \frac{G_d(\sigma)x^\sigma}{\sqrt{\sigma-1+i0}}\,d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{1-a}\frac{G_d(1-u)x^{1-u}}{\sqrt{u}\,\sqrt{-1+i0}}\,du = -\frac{x}{2\pi}\int_0^{1-a}\frac{G_d(1-u)x^{-u}}{\sqrt{u}}\,du.\end{aligned}$$

类似地，我们得到

$$j_4 = -\frac{x}{2\pi}\int_0^{1-a}\frac{G_d(1-u)x^{-u}}{\sqrt{u}}\,du,$$

因此，

$$J = \frac{x}{\pi}\int_0^{1-a}\frac{G_d(1-u)x^{-u}}{\sqrt{u}}\,du.$$

由带有拉格朗日余项的泰勒公式，我们得到

$$G_d(1-u) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k G_d^{(k)}(1)\frac{u^k}{k!} + O_m\big(G_d^{(m+1)}(\theta)u^{m+1}\big), \qquad a \leqslant 1-u \leqslant \theta \leqslant 1.$$

因此，

$$\begin{aligned}J &= \frac{x}{\pi}\int_0^{1-a}\sum_{k=0}^{m}\frac{G_d^{(k)}(1)(-1)^k}{k!}\,\frac{u^k x^{-u}}{\sqrt{u}}\,du + O_m\Big(xG_{m+1}\int_0^{1-a}u^{m+1/2}x^{-u}\,du\Big) \\ &= \frac{x}{\pi}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k G_d^{(k)}(1)j_k(a)}{k!} + O_m\big(xG_{m+1}j_{m+1}(a)\big),\end{aligned}$$

其中

$$G_r = \max_{a\leqslant\theta\leqslant 1}|G_d^{(r)}(\theta)|, \qquad r \leqslant m+1,$$

$$j_k(a) = \int_0^{1-a}u^{k-1/2}x^{-u}\,du = \int_0^{+\infty}u^{k-1/2}x^{-u}\,du - \int_{1-a}^{+\infty}u^{k-1/2}x^{-u}\,du = J_k - r_k.$$

此外，我们选择 $T = e^{(\ln x)^\alpha}$, $\alpha > 0$。由于 $\omega(d) \ll \ln x$ 对于 $x \geqslant x_0$，因此有 $a \geqslant 1 - \varepsilon_d/2$，其中数值 ε_d 在(8)中定义。

因此，对于 $a \leqslant \theta \leqslant 1$，我们有

$$G_d^{(r)}(\theta) = \sum_{l=0}^{r} \binom{r}{l} H^{(r-l)}(\theta) J_d^{(l)}(\theta) \ll_m \sum_{l=0}^{r} |J_d^{(l)}(\theta)| \ll_m \big(\omega(d)+2\big)^{10},$$

从而对于 $r \leqslant m+1$ 我们得到

$$G_r \ll_m \big(\omega(d)+2\big)^{10}. \tag{10}$$

对于值 J_k 我们有

$$\begin{aligned} J_k &= \int_0^{+\infty} u^{k-1/2} x^{-u}\, du = \frac{1}{(\ln x)^{k+1/2}} \int_0^{+\infty} w^{k-1/2} e^{-w}\, dw \\ &= \frac{\Gamma(k+1/2)}{(\ln x)^{k+1/2}} = \sqrt{\pi} \binom{2k}{k} \frac{k!}{4^k} \frac{1}{(\ln x)^{k+1/2}}. \end{aligned}$$

此外，

$$r_k = \int_{1-a}^{+\infty} u^{k-1/2} x^{-u}\, du = \frac{1}{(\ln x)^{k+1/2}} \int_{(1-a)\ln x}^{+\infty} w^{k-1/2} e^{-w}\, dw.$$

利用估计

$$I_k(\lambda) = \int_\lambda^{+\infty} w^{k-1/2} e^{-w}\, dw \ll k!\, e^{-\lambda} \lambda^{k-1/2}, \quad (\lambda > 1),$$

通过反复分部积分可得，

$$\begin{aligned} r_k &\ll \frac{k!}{(\ln x)^{k+1/2}} e^{(a-1)\ln x} (1-a)^{k-1/2} (\ln x)^{k-1/2} \\ &= \frac{k!\, x^{a-1} c_0^{k-1/2}}{(\ln T)^{(2/3)(k-1/2)} (\ln\ln T)^{(1/3)(k-1/2)} \ln x}, \end{aligned}$$

其中，符号 $\ll$ 中的常数是绝对常数。因此，

$$j_k(a) = \sqrt{\pi} \binom{2k}{k} \frac{k!}{4^k} \frac{1}{(\ln x)^{k+1/2}} + O\bigg(\frac{k!\, x^{a-1} c_0^{k-1/2}}{(\ln T)^{(2/3)(k-1/2)} (\ln\ln T)^{(1/3)(k-1/2)} \ln x} \bigg)$$

and

$$\begin{aligned} J = {} & \frac{x}{\sqrt{\pi \ln x}} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k \binom{2k}{k}}{4^k} \frac{G^{(k)}(1)}{(\ln x)^k} \\ & + O_m\bigg(\frac{x^a}{\ln x} \sum_{k=0}^{m} \frac{|G^{(k)}(1)|}{(\ln T)^{(2/3)(k-1/2)} (\ln\ln T)^{(1/3)(k-1/2)}} \bigg) \\ & + O_m\bigg(G_{m+1} \frac{x}{(\ln x)^{m+3/2}} \bigg). \end{aligned}$$

最后，由估计式（10）可得

$$J = \frac{x}{\sqrt{\pi \ln x}} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k \binom{2k}{k}}{4^k} \frac{G^{(k)}(1)}{(\ln x)^k} + O_m\left(\kappa_d \frac{x^a (\ln T)^{1/3} (\ln \ln T)^{1/6}}{\ln x} + \kappa_d \frac{x}{(\ln x)^{m+3/2}}\right).$$

现在我们估计积分 j_1, j_2, j_5, j_6。众所周知，

$$\zeta(\sigma + it) \ll (\ln |t|)^{2/3},$$

其中 $\sigma \geqslant 1 - c/(\ln t)^{2/3}$, $c > 0$, $|t| \geqslant 10$, （见 [11, 第四章§ 2，第3 页，定理 2]）。然后利用这一估计、引理 3 以及不等式

$$\prod_p \sqrt{p^{2s} - p^s} \, \ln \frac{p^s}{p^s - 1} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{24p^{2s}} - \frac{1}{24p^{3s}} - \cdots\right) \ll 1,$$

对于满足 $3/4 \leqslant \mathrm{Re}\, s \leqslant 2$ 的情况，我们得到人片在线观看

$$j_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{b+iT}^{a+iT} \frac{1}{s} \sqrt{\zeta(s)} \prod_p \left(\sqrt{p^{2s} - p^s} \ln \frac{p^s}{p^s - 1}\right) \prod_{p \mid d} \left(p^s \ln \frac{p^s}{p^s - 1}\right)^{-1} x^s \, ds \ll \big(\omega(d) + 2\big)^{10} \frac{x (\ln T)^{1/3}}{T}.$$

类似地，我们得到

$$j_6 \ll \big(\omega(d) + 2\big)^{10} \frac{x (\ln T)^{1/3}}{T}.$$

此外，

$$j_2 + j_5 = \frac{1}{2\pi i} \int_{a+iT}^{a-iT} \frac{1}{s} \sqrt{\zeta(s)} \prod_p \left(\sqrt{p^{2s} - p^s} \, \ln \frac{p^s}{p^s - 1}\right) \prod_{p \mid d} \left(p^s \ln \frac{p^s}{p^s - 1}\right)^{-1} x^s \, ds \ll \big(\omega(d) + 2\big)^{10} (\ln T)^{1/3} x^a \int_{-T}^{T} \frac{dt}{\sqrt{a^2 + t^2}} \ll \big(\omega(d) + 2\big)^{10} (\ln T)^{4/3} x^a.$$

取 $T = e^{(\ln x)^{3/5}}$，证明完成。

备注。利用引理 6以及由不等式(4) 得出的一些估计，可以改进(9)中余项对 d 的依赖关系。

用 $I(s)$ 表示式 (6) 中定义的函数 $J_d(s)$ 的对数导数，则有

$$\frac{J_d'(s)}{J_d(s)} = I(s), \tag{11}$$

哪里

$$I(s) = \sum_{p \mid d} f(s; p) = \sum_{p \mid d} \left\{ \frac{\ln p}{(p^s - 1) \ln(p^s/(p^s - 1))} - \ln p \right\}. \tag{12}$$

引理 5. 设 $f(s;\,p)$ 在 (12)中定义，则对于 $m \geqslant 0$ 有

$$\frac{d^m}{ds^m} f(1;p) \ll_m \frac{(\ln p)^{m+1}}{p}.$$

证明。我们根据展开式定义序列 d_k

$$\frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k x^k, \qquad |x| < 1,$$

于是 $d_0 = 1$，对于 $k \geqslant 1$，我们有 $d_k = c_0 + c_1 + \cdots + c_k$，其中系数 c_k由式 (2) 定义。由式 (3) 可得 $|d_k| \leqslant 2$，其中 $k \geqslant 1$。此外，我们有

$$\frac{1}{(p^s-1)\ln(p^s/(p^s-1))} = \frac{p^{-s}}{(1-p^{-s})(-\ln(1-p^{-s}))} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{p^{ks}}.$$

因此，由于 $d_1 = 1/2$，可得

$$f(s;p) = \frac{\ln p}{2p^s} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{d_k \ln p}{p^{ks}}.$$

取 m 阶导数，得到

$$f^{(m)}(s;p) = (-1)^m \frac{(\ln p)^{m+1}}{2p^s} + (-1)^m (\ln p)^{m+1} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{d_k k^m}{p^{ks}},\ m \geqslant 0.$$

那么，对于 $s = 1$，不等式 $|d_k| \leqslant 2$ 意味着

$$\begin{aligned} f^{(m)}(1;p) &= (-1)^m \frac{(\ln p)^{m+1}}{2p} + (-1)^m (\ln p)^{m+1} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{d_k k^m}{p^k} \\ &= (-1)^m \frac{(\ln p)^{m+1}}{2p} + O_{m,\varepsilon}\left(\frac{1}{p^{2-\varepsilon}}\right) \ll_m \frac{(\ln p)^{m+1}}{p}. \end{aligned}$$

引理的证明完成。

引理 6. 设 $J_d(s)$ 由 (6) 定义，且 $I(s)$ 由 (12)定义，则对于 $l \geqslant 1$以下表示成立

$$J_d^{(l)}(s) = J_d(s) Q_l,$$

其中 $Q_l = Q_l(I, I', \ldots, I^{(l-1)})$ 是一个关于 l 个变量的次数为 l 的多项式，具有整数系数。

证明。我们证明 Q_l 具有该形式

$$Q_l = I^l + R_l,$$

其中

$$R_l = R_l(I, I', \ldots, I^{(l-1)}) \in \mathbb{Z}[I, I', \ldots, I^{(l-1)}]$$

和 $\deg R_l \leqslant l-1$。

通过对 l 进行归纳法证明。根据 (11)，对于 $l=1$，我们有 $J_d'(s) = J_d(s)I$。因此，我们得到 $R_1=0$，故引理在此情形下成立。

假设引理对 $l=r\geqslant 1$ 成立，现证明它对 $l=r+1$ 也成立。我们有

$$J_d^{(r+1)}(s) = J_d(s)(I^{r+1} + IR_r + rI^{r-1}I' + R_r') = J_d(s)(I^{r+1} + R_{r+1}).$$

由于 $\deg R_r' \leqslant r-1$、$\deg IR_r \leqslant r$ 和 $\deg I^{r-1}I' = r$，可得

$$\deg R_{r+1} \leqslant r.$$

结论得证。

设 $g(n)$ 是一个乘法函数，使得对任意素数 p

$$0 \leqslant g(p) < 1. \tag{13}$$

此外，设 $h(n)$ 是一个乘法函数，使得对于任意素数 p

$$h(p) = \frac{g(p)}{1-g(p)}. \tag{14}$$

对于 $z\geqslant 2$ 和 $a\geqslant 1$，定义 $H_a = H_a(z)$ 为以下求和

$$H_a = \sum_{\substack{k\leqslant z\\(k,a)=1}} \mu^2(k)h(k). \tag{15}$$

我们还需要如下定义的乘积 $P_a(z)$

$$P_a(z) = \prod_{\substack{p\leqslant z\\(p,a)=1}} p. \tag{16}$$

最后，考虑数列

$$\rho_d = \frac{\mu(d)h(d)}{H_a g(d)} \sum_{\substack{k\leqslant z/d\\ kd \mid P_a(z)}} \mu^2(k)h(k), \qquad d\geqslant 1. \tag{17}$$

根据塞尔伯格筛法（参见 [13, 第 3], 章；另见 [14, 第 7]章），这些系数使二次型达到最小值

$$B = \sum_{d_1,d_2 \mid P_a(z)} \rho_{d_1}\rho_{d_2} g([d_1,d_2])$$

实变量 ρ_{d_1}、ρ_{d_2}，对于这些变量，有 $\rho_1 = 1$。系数 ρ_d 定义于(17) 中，满足以下性质：$B = 1/H_a(z)$，$|\rho_d| \leqslant 1$，$\rho_d = 0$ 对于 $d > z$ 或$d \nmid P_a(z)$。下面我们证明关于这些系数的一些引理。

引理 7. 令 $g(n)$ 和 $h(n)$ 为积性函数，其满足条件(13)、(14)，且 H_a 定义于(15)。此外，令 p 为素数，且$a \geqslant 1$为整数。那么对于$(d,p) = 1$和$(dp,a) = 1$，我们有

$$\rho_{dp} = -\rho_d + \frac{\mu(d)h(d)}{H_a g(d)} \sum_{\substack{z/(dp)<k\leqslant z/d \\ (k,dpa)=1}} \mu^2(k)h(k).$$

证明。利用 (17)，我们得到

$$\rho_{dp} = -\frac{h(p)}{g(p)} \frac{\mu(d)h(d)}{H_a g(d)} \sum_{\substack{l\leqslant z/(dp) \\ (l,dpa)=1}} \mu^2(l)h(l) = -\frac{h(p)}{g(p)} \frac{\mu(d)h(d)}{H_a g(d)} S. \tag{18}$$

对于和 S，我们有

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\substack{l\leqslant z/d \\ (l,dpa)=1}} \mu^2(l)h(l) - \sum_{\substack{z/(dp)<l\leqslant z/d \\ (l,dpa)=1}} \mu^2(l)h(l) \\ &= \sum_{\substack{l\leqslant z/d \\ (l,da)=1}} \mu^2(l)h(l) - \sum_{\substack{l\leqslant z/d \\ (l,da)=1 \\ p\,|\,l}} \mu^2(l)h(l) - R, \end{aligned}$$

其中

$$R = \sum_{\substack{z/(dp)<l\leqslant z/d \\ (l,dpa)=1}} \mu^2(l)h(l).$$

此外，我们有

$$\sum_{\substack{l\leqslant z/d \\ (l,da)=1 \\ p\,|\,l}} \mu^2(l)h(l) = h(p) \sum_{\substack{k\leqslant z/(dp) \\ (kp,\,da)=1 \\ (k,p)=1}} \mu^2(k)h(k) = h(p) \sum_{\substack{k\leqslant z/(dp) \\ (k,dpa)=1}} \mu^2(k)h(k) = h(p)S.$$

因此，

$$S = \frac{1}{1+h(p)} \left(\sum_{\substack{l\leqslant z/d \\ (l,da)=1}} \mu^2(l)h(l) - R \right).$$

将所得等式代入（18），并利用对于素数 p 有

$$\frac{h(p)}{g(p)} = 1 + h(p),$$

我们得出证明。

引理 8. 假设函数 $g(n)$ 和 $h(n)$ 分别满足条件 (13)和 (14)，并令 H_a 由 (15) 定义。此外，设 $p_1, \ldots, p_k$ 为互异素数，并且

$$(d, p_1 \cdots p_k) = (dp_1 \cdots p_k, a) = 1.$$

Then

$$\rho_{dp_1\cdots p_k}=(-1)^k\bigg(\rho_d-\frac{\mu(d)h(d)}{H_ag(d)}R\bigg),$$

其中

$$R=\sum_{m=1}^{k}\bigg(\prod_{i=1}^{m-1}\frac{h(p_i)}{g(p_i)}\bigg)\sum_{\substack{z/(d\alpha_m)<l\leqslant z/(d\alpha_{m-1})\\(l,\,d\alpha_m a)=1}}\mu^2(l)h(l),\qquad \alpha_m=\prod_{i=1}^{m}p_i.$$

证明。对 k 作归纳法。由前面的引理可知，这对 $k=1$ 成立。假设该引理对 $k=r\geqslant 1$ 成立，并证明它对 $k=r+1$ 也成立。我们有

$$\rho_{dp_1\cdots p_{r+1}}=(-1)^r\bigg(\rho_{dp_1}+\frac{\mu(d)h(d)}{H_ag(d)}\,\frac{h(p_1)}{g(p_1)}R\bigg),$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{h(p_1)}{g(p_1)}R&=\frac{h(p_1)}{g(p_1)}\sum_{m=1}^{r}\bigg(\prod_{i=2}^{m}\frac{h(p_i)}{g(p_i)}\bigg)\sum_{\substack{z/(d\alpha_{m+1})<l\leqslant z/(d\alpha_m)\\(l,d\alpha_{m+1}a)=1}}\mu^2(l)h(l)\\&=\sum_{m=2}^{r+1}\bigg(\prod_{i=1}^{m-1}\frac{h(p_i)}{g(p_i)}\bigg)\sum_{\substack{z/(d\alpha_m)<l\leqslant z/(d\alpha_{m-1})\\(l,\,d\alpha_m a)=1}}\mu^2(l)h(l).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\rho_{dp_1\cdots p_{r+1}}=(-1)^r\Bigg(&-\rho_d+\frac{\mu(d)h(d)}{H_ag(d)}\sum_{\substack{z/(dp_1)<l\leqslant z/d\\(l,dp_1a)=1}}\mu^2(l)h(l)\\&+\frac{\mu(d)h(d)}{H_ag(d)}\sum_{m=2}^{r+1}\bigg(\prod_{i=1}^{m-1}\frac{h(p_i)}{g(p_i)}\bigg)\sum_{\substack{z/(d\alpha_m)<l\leqslant z/(d\alpha_{m-1})\\(l,\,d\alpha_m a)=1}}\mu^2(l)h(l)\Bigg).\end{aligned}$$

证明完毕。

引理 9.令 P，M，q，a，δ 为满足以下条件的无平方因子整数：$(q,M)=1$；$qM\mid P$；$(P,a)=(P,\delta)=1$。令 $h(n)$ 为一个乘法函数，且 $q=r_1r_2\cdots r_s$ 为 q 的素因数分解。设

$$\begin{aligned}R_k(M,\delta)&=R_k(M,\delta,z,q,a)\\&=\sum_{\substack{d\leqslant z\\(d,a)=1\\(d,P)=M\\d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta)}}\mu(d)h(d)\sum_{\substack{z/(d\alpha_k)<l\leqslant z/(d\alpha_{k-1})\\(l,d\alpha_k a)=1}}\mu^2(l)h(l),\qquad \alpha_k=\prod_{i=1}^{k}r_i,\quad(19)\end{aligned}$$

then

$$R_k(M,\delta)\ll\mu^2(M\delta)h(M\delta)\prod_{p\,\mid\,P}(1+h(p)).$$

特别地，如果 $P = p_1 p_2 \cdots p_m$ 是 m 个互异素数的乘积，且 $h(p) \ll 1$，那么

$$R_k(M,\delta) \ll_m \mu^2(M\delta) h(M\delta).$$

证明。由于 $(l,d) = 1$ 属于和式 (19)，引入记号 $n = dl$ 后，我们得到

$$R_k(M,\delta) = \sum_{z/\alpha_k < n \leqslant z/\alpha_{k-1}} \mu^2(n) h(n) \sum_{\substack{d \mid n \\ d \leqslant z \\ (d,a)=1 \\ (d,P)=M \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta) \\ (n/d, d\alpha_k a)=1}} \mu(d), \qquad \alpha_k = \prod_{i=1}^{k} r_i.$$

由于 $d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)$，我们有 $n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)$。由于 $(d,a) = 1$ 且 $(n/d, a) = 1$，可得 $(n,a) = 1$。此外，由于 $(d,P) = M$，我们有 $n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ M)$。最后，注意到 $(d, \alpha_k) = \left(d, \prod_{i=1}^{k} r_i\right) = 1$。反设，若 $r_i \mid (d, \alpha_k)$，那么一方面，$r_i \mid q$ 且 $r_i \mid P$；另一方面，$r_i \mid (d,P) = M$。由于 $(M,q) = 1$，这就产生了矛盾。由于 $(n/d, \alpha_k) = 1$，可得 $(n, \alpha_k) = 1$。因此，我们得到

$$\begin{aligned} R_k(M,\delta) &= \sum_{\substack{z/\alpha_k < n \leqslant z/\alpha_{k-1} \\ n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, M\delta) \\ (n, a\alpha_k)=1}} \mu^2(n) h(n) \sum_{\substack{d \mid n \\ d \leqslant z \\ (d,a)=1 \\ (d,P)=M \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta) \\ (n/d, d\alpha_k a)=1}} \mu(d) \\ &= \sum_{\substack{z/\alpha_k < n \leqslant z/\alpha_{k-1} \\ n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, M\delta) \\ (n, a\alpha_k)=1}} \mu^2(n) h(n) \sum_{\substack{d \mid n \\ (d,P)=M \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)}} \mu(d) \\ &= \sum_{\substack{z/\alpha_k < n \leqslant z/\alpha_{k-1} \\ n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, M\delta) \\ (n, a\alpha_k)=1}} \mu^2(n) h(n) W_n(M,\delta). \end{aligned} \tag{20}$$

由于 $M \mid P$ 且 $(\delta, P) = 1$，我们有

$$W_n(M,\delta) = \sum_{\substack{d \mid n \\ (d,P)=M \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)}} \mu(d) = \mu(M) \sum_{\substack{d \mid (n/M) \\ (d, P/M)=1 \\ (d,M)=1 \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)}} \mu(d) = \mu(M) \sum_{\substack{d \mid n \\ (d,P)=1 \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)}} \mu(d),$$

这里用到了条件 $d \mid (n/M)$ 等价于 $d \mid n$ and $(d,M) = 1$ 这一事实。因此，我们得到

$$W_n(M,\delta) = \mu(M) \sum_{\substack{d \mid n \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)}} \mu(d) \sum_{\Delta \mid (d,P)} \mu(\Delta) = \mu(M) \sum_{\Delta \mid (n,P)} \mu(\Delta) \sum_{\substack{d \mid n \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta) \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \Delta)}} \mu(d).$$

此外，由于 $\Delta \mid P$and $(\delta, P) = 1$，我们得到 $(\delta, \Delta) = 1$，由此可得

$$\begin{aligned} W_n(M,\delta) &= \mu(M) \sum_{\Delta \mid (n,P)} \mu(\Delta) \sum_{\substack{d \mid n \\ d \equiv 0 \pmod{\delta\Delta}}} \mu(d) \\ &= \mu(M) \sum_{\Delta \mid (n,P)} \mu(\Delta) \sum_{d \mid (n/(\delta\Delta))} \mu(\delta\Delta d) \\ &= \mu(M\delta) \sum_{\Delta \mid (n,P)} \mu^2(\Delta) \sum_{d \mid (n/(\delta\Delta))} \mu(d) \\ &= \mu(M\delta) \sum_{\Delta \mid (n,P)} \mu^2(\Delta)\, \mathbf{1}\left(\Delta = \frac{n}{\delta}\right) = \mu(M\delta)\, \mathbf{1}\left(\frac{n}{\delta} \;\middle|\; P\right), \end{aligned}$$

其中我们采用如下记号

$$\mathbf{1}(A) = \begin{cases} 1, & \text{if condition } A \text{ holds,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

将所得的 $W_n(M,\delta)$ 的表达式代入 (20)，得到

$$\begin{aligned} R_k(M,\delta) &= \mu(M\delta) \sum_{\substack{z/\alpha_k < n \leqslant z/\alpha_{k-1} \\ n \equiv 0 \pmod{\delta M} \\ (n, a\alpha_k) = 1 \\ n/(\delta \mid P)}} \mu^2(n) h(n) \\ &= \mu(M\delta) h(M\delta) \sum_{\substack{z/(\delta M\alpha_k) < n \leqslant z/(\delta M\alpha_{k-1}) \\ (n, a\alpha_k \delta M) = 1 \\ n \mid (P/M)}} \mu^2(n) h(n) \\ &\ll \mu^2(M\delta) h(M\delta) \sum_{n \mid P} \mu^2(n) h(n) = \mu^2(M\delta) h(M\delta) \prod_{p \mid P} (1 + h(p)), \end{aligned}$$

由此得到该引理。

现在我们证明主要引理。

引理 10. 设 $m \geqslant 1$ 是任意固定的整数。此外，设 $\{f\}_{i=1}^m$ 是一组函数，使得对于任意素数 $f_i(p) \ll_m (\ln p)^{m+1}/p$。令

$$T_m(z;a) = \sum_{\substack{p_1 \leqslant z \\ p_1 \nmid a}} f_1(p_1) \cdots \sum_{\substack{p_m \leqslant z \\ p_m \nmid a}} f_m(p_m) \sum_{\substack{d_1, d_2 \mid P_a(z) \\ d_1, d_2 \leqslant z \\ [d_1,d_2] \equiv 0 \pmod{[p_1,\ldots,p_m]}}} \frac{\rho_{d_1}\rho_{d_2}}{\varphi([d_1,d_2])} J_{[d_1,d_2]}(1),$$

其中，函数 $J_d(s)$ 由(6)定义，系数 ρ_d 由(17)定义，乘积 $P_a(z)$ 由(16)定义。则和 $T_m(z;a)$ 满足估计式

$$T_m(z;a) \ll_m \frac{1}{H_a(z)},$$

其中 $H_a(z)$由(15)定义。

证明。记 $g(d) = J_d(1)/\varphi(d)$，则

$$g(p) = \frac{1}{p(p-1)\ln(1/(1-1/p))}$$

并且对于任意 $p \geqslant 3$ 我们有

$$\frac{1}{p} \leqslant g(p) \leqslant \frac{1}{p-1}. \tag{21}$$

因此， $g(p) \leqslant 1/2$ 对于 $p \geqslant 3$。然后，由于 $g(2) = 1/(2\ln 2)$，可知对于任意素数

$$0 < g(p) \leqslant \frac{1}{2\ln 2} < 1. \tag{22}$$

此外，根据 $g(d)$ 的定义，我们有

$$T_m(z;a) = \sum_{\substack{p_1 \leqslant z \\ p_1 \nmid a}} f_1(p_1) \cdots \sum_{\substack{p_m \leqslant z \\ p_m \nmid a}} f_m(p_m) \sum_{\substack{d_1, d_2 \mid P_a(z) \\ d_1, d_2 \leqslant z \\ [d_1,d_2] \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, [p_1,\ldots,p_m])}} \rho_{d_1}\rho_{d_2} g([d_1,d_2]).$$

利用对 $p \geqslant 3$ 的估计式 (21)，我们得到变态另类

$$\frac{1}{p-1} \leqslant h(p) \leqslant \frac{1}{p-2}.$$

根据 (14) 我们得到

$$g(p) = \frac{h(p)}{h(p)+1}.$$

因此，对于无平方因子 d ，我们有

$$\frac{1}{g(d)} = \prod_{p \mid d}\left(1 + \frac{1}{h(p)}\right) = \sum_{\delta \mid d} \frac{1}{h(\delta)}.$$

由于 $g(n)$ 是积性的，且 d_1 和 d_2 是无平方因子，我们有

$$g([d_1,d_2]) = \frac{g(d_1)g(d_2)}{g((d_1,d_2))} = g(d_1)g(d_2) \sum_{\delta \mid (d_1,d_2)} \frac{1}{h(\delta)}.$$

于是，

$$\begin{aligned} &T_m(z;a) \\ &= \sum_{\substack{p_1 \leqslant z \\ p_1 \nmid a}} f_1(p_1) \cdots \sum_{\substack{p_m \leqslant z \\ p_m \nmid a}} f_m(p_m) \sum_{\substack{\delta \mid P_a(z) \\ \delta \leqslant z}} \frac{1}{h(\delta)} \sum_{\substack{d_1, d_2 \mid P_a(z) \\ d_1, d_2 \leqslant z \\ [d_1,d_2] \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, [p_1,\ldots,p_m]) \\ d_1, d_2 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)}} \rho_{d_1} g(d_1) \rho_{d_2} g(d_2). \end{aligned}$$

不失一般性，我们可以假设所有 $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 两两不同。事实上，若 $p_1 = p_2$，则

$$f_1(p_1)f_2(p_1) \ll \frac{(\ln p_1)^{2m+2}}{p_1^2} \ll_m \frac{\ln p_1}{p_1}, \qquad [p_1, p_2, \ldots, p_m] = [p_1, p_3, \ldots, p_m],$$

对和式 $T_m(z;a)$ 的估计可归结为对同类型和式的估计，但参数 m的值更小。因此，

$$T_m(z;a)=\sum_{\substack{p_1\leqslant z\\ p_1\nmid a}} f_1(p_1)\sum_{\substack{p_2\leqslant z\\ p_2\nmid a\\ p_2\neq p_1}} f_2(p_2)\cdots\sum_{\substack{p_m\leqslant z\\ p_m\nmid a\\ p_m\notin\{p_1,p_2,\dots,p_{m-1}\}}} f_m(p_m)\times S, \tag{23}$$

其中

$$S=\sum_{\substack{\delta\mid P_a(z)\\ \delta\leqslant z}}\frac{1}{h(\delta)}\sum_{\substack{d_1,d_2\mid P_a(z)\\ d_1,d_2\leqslant z\\ [d_1,d_2]\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p_1\cdots p_m)\\ d_1,d_2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta)}}\rho_{d_1}g(d_1)\rho_{d_2}g(d_2).$$

设 $P_m=p_1\cdots p_m$。注意，条件

$$[d_1,d_2]\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,P_m)$$

等价于

$$([d_1,d_2],P_m)=[(d_1,P_m),(d_2,P_m)]=P_m.$$

设 $A=(d_1,P_m)$ 和 $B=(d_2,P_m)$。那么，

$$\sum_{\substack{d_1,d_2\mid P_a(z)\\ d_1,d_2\leqslant z\\ [d_1,d_2]\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,P_m)\\ d_1,d_2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta)}}\rho_{d_1}g(d_1)\rho_{d_2}g(d_2)=\sum_{A\mid P_m}\sum_{\substack{B\mid P_m\\ [A,B]=P_m}}S_\delta(A)S_\delta(B),$$

对于整数 N，令

$$S_\delta(N)=\sum_{\substack{d\leqslant z\\ d\mid P_a(z)\\ (d,P_m)=N\\ d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta)}}\rho_d g(d).$$

进一步，设 $D=(A,B)$，则

$$\begin{aligned}S&=\sum_{\substack{\delta\mid P_a(z)\\ \delta\leqslant z}}\frac{1}{h(\delta)}\sum_{A\mid P_m}\sum_{\substack{B\mid P_m\\ [A,B]=P_m}}S_\delta(A)S_\delta(B)\\ &=\sum_{D\mid P_m}\sum_{\substack{A\mid P_m\\ A\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,D)}}\sum_{\substack{\delta\mid P_a(z)\\ \delta\leqslant z}}\frac{1}{h(\delta)}S_\delta(A)S_\delta(B),\end{aligned}$$

其中，数值 A、B 和 D 满足关系 $AB=DP_m$。

注意，$(\delta,P_m/D)=1$。事实上，若存在一个素数 p，使得 $p\mid(\delta,P_m/D)$，则 $p\mid\delta$、$p\mid P_m$，并且 $(p,D)=1$。由此可知，$(p,A)=1$，或者 $(p,B)=1$。不失一般性，假设 $(p,A)=1$。那么，和 $S_\delta(A)$ 中各项对应的所有 d 都能被 p 整除。由于 $p\mid P_m$，由 ..... 可得。

条件 $(d, P_m) = A$ 在和式 $S_\delta(A)$ 中，$p \mid A$。这是矛盾。因此，

$$\begin{aligned} S &= \sum_{D \mid P_m} \sum_{\substack{A \mid P_m \\ A \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, D)}} \sum_{\substack{\delta \mid P_a(z) \\ \delta \leqslant z \\ (\delta, P_m/D)=1}} \frac{1}{h(\delta)} S_\delta(A) S_\delta(B) \\ &= \sum_{D \mid P_m} \sum_{\substack{A \mid P_m \\ A \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, D)}} \sum_{q \mid D} \sum_{\substack{\delta \mid P_a(z) \\ \delta \leqslant z \\ (\delta, P_m/D)=1 \\ (\delta, D)=q}} \frac{1}{h(\delta)} S_\delta(A) S_\delta(B) \\ &= \sum_{D \mid P_m} \sum_{\substack{A \mid P_m \\ A \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, D)}} \sum_{q \mid D} \frac{1}{h(q)} \sum_{\substack{\delta \mid P_a(z) \\ \delta \leqslant z/q \\ (\delta, P_m)=1}} \frac{1}{h(\delta)} S_{\delta q}(A) S_{\delta q}(B). \end{aligned} \tag{24}$$

我们将值 $S_{\delta q}(A)$ 用值 $S_\delta(1)$ 表示。我们有

$$S_{\delta q}(A) = \sum_{\substack{d \leqslant z \\ d \mid P_a(z) \\ (d, P_m)=A \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta q)}} \rho_d g(d) = \sum_{\substack{d \leqslant z/q \\ d \mid (P_a(z)/q) \\ (d, P_m/q)=A/q \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)}} \rho_{dq} g(dq).$$

由于条件 $d \mid (P_a(z)/q)$ 等价于该条件

$$d \mid P_a(z), \qquad (d, q) = 1,$$

并且对于 $d > z$，我们得到 $\rho_d = 0$

$$S_{\delta q}(A) = g(q) \sum_{\substack{d \leqslant z \\ d \mid P_a(z) \\ (d, P_m/q)=A/q \\ (d,q)=1 \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)}} \rho_{dq} g(d) = g(q) \sum_{\substack{d \leqslant z \\ d \mid P_a(z) \\ (d, P_m)=A/q \\ (d,q)=1 \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)}} \rho_{dq} g(d).$$

由于对于 $(d, q) > 1$，我们有 $\rho_{dq} = 0$，因此上述求和中的条件 $(d, q) = 1$ 可以省略。于是，我们得到

$$S_{\delta q}(A) = g(q) \sum_{\substack{d \leqslant z \\ d \mid P_a(z) \\ (d, P_m)=A/q \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)}} \rho_{dq} g(d).$$

此外，由于 $(\delta, P_m) = 1$ 且 $Aq^{-1} \mid P_m$，我们得出 $(\delta, Aq^{-1}) = 1$。因此，

$$S_{\delta q}(A) = g(q) \sum_{\substack{d \leqslant z/(Aq^{-1}) \\ d \mid (P_a(z)/(Aq^{-1})) \\ (d, P_m/(Aq^{-1}))=1 \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)}} \rho_{dA} g(Aq^{-1}d) = g(A) \sum_{\substack{d \leqslant z \\ d \mid P_a(z) \\ (d, P_m)=1 \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)}} \rho_{dA} g(d). \tag{25}$$

设 A 的因式分解为 $A > 1$ 和 $A = r_1 r_2 \cdots r_s$。那么，$(-1)^s = \mu(A)$。由于 $(d, A) = (dA, a) = 1$，引理 8 蕴含着。

$$\rho_{dA} = \mu(A) \left(\rho_d - \frac{\mu(d) h(d)}{H_a(z) g(d)} R \right),$$

哪里

$$R=\sum_{k=1}^{\omega(A)}\Big(\prod_{i=1}^{k-1}\frac{h(r_i)}{g(r_i)}\Big)\sum_{\substack{z/(d\alpha_k)<l\leqslant z/(d\alpha_{k-1})\\(l,d\alpha_k a)=1}}\mu^2(l)h(l),\qquad \alpha_k=\prod_{i=1}^{k}r_i.$$

由 (25) 得

$$S_{\delta q}(A)=\mu(A)g(A)\bigg(S_\delta(1)-\frac{R'}{H_a(z)}\bigg),$$

其中

$$R'=\sum_{k=1}^{\omega(A)}\Big(\prod_{i=1}^{k-1}\frac{h(r_i)}{g(r_i)}\Big)\sum_{\substack{d\leqslant z\\ d\mid P_a(z)\\(d,P_m)=1\\ d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta)}}\mu(d)h(d)\sum_{\substack{z/(d\alpha_k)<l\leqslant z/(d\alpha_{k-1})\\(l,d\alpha_k a)=1}}\mu^2(l)h(l).$$

由引理 9 及等式 $h(p)/g(p)=1+h(p)$，我们得到 R' 的如下估计：

$$R'=\sum_{k=1}^{\omega(A)}\bigg(\prod_{i=1}^{k-1}(1+h(r_i))\bigg)R_k(1,\delta)\ll\omega(A)\prod_{p\mid P_m}(1+h(p))^2\mu^2(\delta)h(\delta)\ll_m\mu^2(\delta)h(\delta).$$

因此，对于 $A>1$，有

$$S_{\delta q}(A)=\mu(A)g(A)\bigg(S_\delta(1)+O_m\bigg(\frac{\mu^2(\delta)h(\delta)}{H_a}\bigg)\bigg).\tag{26}$$

由 (25)，对于 $A=1$，得 $S_{\delta q}(1)=S_\delta(1)$，因此等式 (26) 对$A=1$也成立。

然后由（24）式可得

$$\begin{aligned}S=&\sum_{D\mid P_m}\sum_{\substack{A\mid P_m\\A\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,D)}}\sum_{q\mid D}\frac{1}{h(q)}\sum_{\substack{\delta\mid P_a(z)\\\delta\leqslant z/q\\(\delta,P_m)=1}}\frac{1}{h(\delta)}\mu(A)g(A)\mu(B)g(B)\\&\times\bigg(S_\delta(1)+O_m\bigg(\frac{\mu^2(\delta)h(\delta)}{H_a(z)}\bigg)\bigg)^2\\=&\,\mu(P_m)g(P_m)\sum_{D\mid P_m}\mu(D)g(D)\sum_{\substack{A\mid P_m\\A\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,D)}}\sum_{q\mid D}\frac{1}{h(q)}\\&\times\sum_{\substack{\delta\mid P_a(z)\\\delta\leqslant z/q\\(\delta,P_m)=1}}\frac{1}{h(\delta)}\bigg(S_\delta(1)+O_m\bigg(\frac{\mu^2(\delta)h(\delta)}{H_a(z)}\bigg)\bigg)^2.\end{aligned}$$

由于对任意无平方因子 d，我们有

$$\frac{g(d)}{h(d)}\leqslant 1,$$

由此可得

$$\begin{aligned} S &\ll_m g(P_m) \sum_{D \mid P_m} \frac{g(D)}{h(D)} \sum_{\substack{A \mid P_m \\ A \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, D)}} \sum_{q \mid D} h\left(\frac{D}{q}\right) \\ &\quad \times \sum_{\substack{\delta \mid P_a(z) \\ \delta \leqslant z/q \\ (\delta, P_m)=1}} \frac{1}{h(\delta)} \left(S_\delta(1) + \frac{\mu^2(\delta) h(\delta)}{H_a(z)} \right)^2 \\ &\ll_m g(P_m) W \sum_{\substack{\delta \mid P_a(z) \\ \delta \leqslant z \\ (\delta, P_m)=1}} \frac{1}{h(\delta)} \left(S_\delta^2(1) + \frac{\mu^2(\delta) h^2(\delta)}{H_a^2(z)} \right), \end{aligned} \tag{27}$$

其中和 W 由等式定义

$$W = \sum_{D \mid P_m} \sum_{\substack{A \mid P_m \\ A \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, D)}} \sum_{d \mid D} h(d).$$

注意， $W \ll 4^m$。事实上,

$$\begin{aligned} W &= \sum_{D \mid P_m} \prod_{p \mid D} (1 + h(p)) \sum_{\substack{A \mid P_m \\ A \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, D)}} 1 = \sum_{D \mid P_m} \prod_{p \mid D} (1 + h(p)) \frac{\tau(P_m)}{\tau(D)} \\ &= \tau(P_m) \sum_{D \mid P_m} \prod_{p \mid D} \frac{1 + h(p)}{2} = \tau(P_m) \prod_{p \mid P_m} \frac{3 + h(p)}{2} = \prod_{p \mid P_m} (3 + h(p)) \ll 4^m. \end{aligned}$$

然后，由（27）和（15）可得

$$S \ll_m g(P_m) \left(\sum_{\substack{\delta \mid P_a(z) \\ \delta \leqslant z \\ (\delta, P_m)=1}} \frac{S_\delta^2(1)}{h(\delta)} + \frac{1}{H_a(z)} \right). \tag{28}$$

请注意

$$\begin{aligned} S_\delta(1) &= \sum_{\substack{d \leqslant z \\ d \mid P_a(z) \\ (d, P_m)=1 \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)}} \rho_d g(d) = \sum_{\substack{d \leqslant z \\ d \mid P_a(z) \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)}} \rho_d g(d) - \sum_{\substack{\Delta \mid P_m \\ \Delta > 1}} S_\delta(\Delta) \\ &= x_\delta - \sum_{\substack{\Delta \mid P_m \\ \Delta > 1}} \mu(\Delta) g(\Delta) \left(S_\delta(1) + O_m\left(\frac{\mu^2(\delta) h(\delta)}{H_a(z)} \right) \right) \\ &= x_\delta - S_\delta(1) \sum_{\substack{\Delta \mid P_m \\ \Delta > 1}} \mu(\Delta) g(\Delta) + O_m\left(\frac{\mu^2(\delta) h(\delta)}{H_a(z)} \sum_{\substack{\Delta \mid P_m \\ \Delta > 1}} \mu^2(\Delta) g(\Delta) \right). \end{aligned}$$

然后，我们得到

$$S_\delta(1)\sum_{\Delta\mid P_m}\mu(\Delta)g(\Delta)=x_\delta+O_m\left(\frac{\mu^2(\delta)h(\delta)}{H_a(z)}\right).$$

由于对于任意素数 p，$0<g(p)\leqslant 1/(2\ln 2)$，因此可得

$$\sum_{\delta\mid P_m}\mu(\Delta)g(\Delta)=\prod_{p\mid P_m}(1-g(p))\gg_m 1.$$

因此，我们得到

$$S_\delta^2(1)\ll_m x_\delta^2+\frac{\mu^2(\delta)h^2(\delta)}{H_a^2(z)}.$$

注意到

$$\sum_{\substack{\delta\mid P_a(z)\\ \delta\leqslant z}}\frac{1}{h(\delta)}x_\delta^2=\frac{1}{H_a(z)}.$$

事实上，

$$\begin{aligned}\frac{1}{H_a(z)}&=\sum_{d_1,d_2\mid P_a(z)}\rho_{d_1}\rho_{d_2}g(d_1)g(d_1)\frac{1}{g((d_1,d_2))}\\&=\sum_{\substack{\delta\mid P_a(z)\\ \delta\leqslant z}}\frac{1}{h(\delta)}\left(\sum_{\substack{d\leqslant z\\ d\mid P_a(z)\\ d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta)}}\rho_d g(d)\right)^2=\sum_{\substack{\delta\mid P_a(z)\\ \delta\leqslant z}}\frac{1}{h(\delta)}x_\delta^2.\end{aligned}$$

因此，由 (28) 可得

$$S\ll_m\frac{g(P_m)}{H_a(z)}=\frac{g(p_1)g(p_2)\cdots g(p_m)}{H_a(z)}\ll_m\frac{1}{p_1p_2\cdots p_mH_a(z)}.$$

将此估计代入（23），我们得到

$$T_m(z;a)\ll\sum_{p_1\leqslant z}\frac{f_1(p_1)}{p_1}\sum_{p_2\leqslant z}\frac{f_1(p_2)}{p_2}\cdots\sum_{p_m\leqslant z}\frac{f_m(p_m)}{p_m}|S|\ll_m\frac{1}{H_a(z)}.$$

该断言得证。

引理 11. 设 $g(n)$ 为一个乘法函数，对其而言
– 对于某个常数 $A_1\geqslant 1$ 和任意素数 p

$$0\leqslant g(p)\leqslant 1-\frac{1}{A_1};\tag{29}$$

– 对于某些值 κ, L, $A_2>0$，以下不等式成立。

$$-L\leqslant\sum_{u\leqslant p<v}g(p)\ln p-\kappa\ln\left(\frac{v}{u}\right)\leqslant A_2.\tag{30}$$

那么对于 $W(z) = \prod_{p<z}(1-g(p))$ 我们有

$$W(z) = \prod_p (1-g(p))\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-\kappa} \frac{e^{-\gamma\kappa}}{(\ln z)^\kappa}\left(1+O\left(\frac{L}{\ln z}\right)\right),$$

其中 γ 为欧拉–马歇罗尼常数。

证明见 [13, § 5, 引理 5.3]。

引理 12. 设 $g(n)$ 和 $h(n)$ 为积性函数，且

$$0 \leqslant g(p) < 1, \qquad h(p) = \frac{g(p)}{1-g(p)}$$

对于任意素数 p。进一步，设条件 (29) 和 (30) 成立。置

$$H(z) = \sum_{k\leqslant z} \mu^2(k)h(k), \qquad W(z) = \prod_{p<z}(1-g(p)). \tag{31}$$

于是，我们有

$$\frac{1}{H(z)} = W(z)e^{\gamma\kappa}\Gamma(\kappa+1)\left(1+O\left(\frac{L}{\ln z}\right)\right),$$

其中 γ 是欧拉–马歇罗尼常数。

证明见 [13, § 5, 引理 5。4]

由引理 11 和 12，对于在 (31) 中定义的 $H(z)$，可得

$$\frac{1}{H(z)} = \prod_p (1-g(p))\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-\kappa} \frac{\Gamma(\kappa+1)}{(\ln z)^\kappa}\left(1+O\left(\frac{L}{\ln z}\right)\right). \tag{32}$$

我们需要 [9]的主要引理。

引理 13. 设 $d \geqslant 1$ 为一个固定整数， $f(q)$ 为一个正函数，使得

$$\sum_{q\leqslant x} f(q) \ll x(\ln x)^\kappa$$

对于某个常数 $\kappa > 0$成立。则对任意固定的 $B > 0$ ，存在 $A(B) > 0$ ，使得不等式

$$R = \sum_{q\leqslant Q} \frac{f(q)}{\varphi(q)} \sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi\neq\chi_0}} \left| \sum_{\substack{n\leqslant N \\ (n,d)=1}} \frac{\chi(n)}{\tau(n)} \right| \ll x(\ln x)^{-B}$$

对于任意 Q、 N，只要 $Q \leqslant \sqrt{x}\,(\ln x)^{-A}$、 $N \leqslant x$，该结论均成立，且隐含常数效率不高，仅依赖于 B、 d 和 f。

证明见 [9, 引理 13]。

§2. 定理证明

我们有

$$\Phi_a(x)=\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{\tau(p+a)}\leqslant\sum_{\substack{n+a\leqslant x\\(n,P_a(z))=1}}\frac{1}{\tau(n+a)}+r_1,$$

其中，$r_1=r_1(z;a)$表示满足 $n+a$ 为素数的 $n\leqslant z$ 的个数，因此

$$r_1\ll\frac{z}{\ln z}+a.$$

进一步，令 ρ_d 如（17）中所选，则对于 $d>z$，$\rho_1=1$、$\rho_d=0$ 或 $d\nmid P_a(z)$；并且$|\rho_d|\leqslant 1$。于是我们得到

$$\begin{aligned}\Phi_a(x)&\leqslant\sum_{\substack{n+a\leqslant x\\(n,P_a(z))=1}}\frac{1}{\tau(n+a)}+r_1\leqslant\sum_{n+a\leqslant x}\frac{1}{\tau(n+a)}\Bigg(\sum_{d\mid(n,P_a(z))}\rho_d\Bigg)^2+r_1\\&=\sum_{\substack{d\mid P_a(z)\\d\leqslant z^2}}\lambda_d\sum_{\substack{n+a\leqslant x\\n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d)}}\frac{1}{\tau(n+a)}+r_1,\end{aligned}$$

其中 $\lambda_d=\sum_{[d_1,d_2]=d}\rho_{d_1}\rho_{d_2}$。注意

$$|\lambda_d|\leqslant\sum_{[d_1,d_2]=d}1=3^{\omega(d)}.$$

由于（d，a）$=1$，我们有

$$\sum_{\substack{n+a\leqslant x\\n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d)}}\frac{1}{\tau(n+a)}=\sum_{\substack{k\leqslant x\\k\equiv a\,(\mathrm{mod}\,d)}}\frac{1}{\tau(k)}=\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\chi\bmod d}\overline{\chi}(a)\sum_{k\leqslant x}\frac{\chi(k)}{\tau(k)},$$

其中，求和遍历模 d 的所有狄利克雷特征。分离出主特征的贡献，并将其余特征的贡献记为 r_2，我们得到

$$\Phi_a(x)\leqslant\sum_{\substack{d\mid P_a(z)\\d\leqslant z^2}}\frac{\lambda_d}{\varphi(d)}\sum_{\substack{k\leqslant x\\(k,d)=1}}\frac{1}{\tau(k)}+r_2+r_1,$$

其中

$$r_2=r_2(x,z;a)\ll\sum_{d\leqslant z^2}\frac{|\lambda_d|}{\varphi(d)}\sum_{\substack{\chi\bmod d\\\chi\neq\chi_0}}\Bigg|\sum_{k\leqslant x}\frac{\chi(k)}{\tau(k)}\Bigg|\ll\sum_{d\leqslant z^2}\frac{3^{\omega(d)}}{\varphi(d)}\sum_{\substack{\chi\bmod d\\\chi\neq\chi_0}}\Bigg|\sum_{k\leqslant x}\frac{\chi(k)}{\tau(k)}\Bigg|.$$

考虑一个整数 $m_0\geqslant 1$。然后由引理 4 得到

$$\begin{aligned}\Phi_a(x)&\leqslant\sum_{\substack{d\mid P_a(z)\\d\leqslant z^2}}\frac{\lambda_d}{\varphi(d)}\Bigg(\frac{x}{\sqrt{\pi\ln x}}\sum_{k=0}^{m_0}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{4^k}\frac{G_d^{(k)}(1)}{(\ln x)^k}+R_{m_0}(x;d)\Bigg)+r_2+r_1\\&=\frac{x}{\sqrt{\pi\ln x}}\sum_{k=0}^{m_0}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{4^k(\ln x)^k}\sum_{\substack{d\mid P_a(z)\\d\leqslant z^2}}\frac{\lambda_d G_d^{(k)}(1)}{\varphi(d)}+r_3+r_2+r_1,\end{aligned}\tag{33}$$

哪里

$$r_3 \ll_{m_0} \frac{x}{(\ln x)^{m_0+3/2}} \sum_{d\leqslant z^2} \frac{|\lambda_d|}{\varphi(d)}(\omega(d)+2)^{10}$$
$$\ll \frac{x}{(\ln x)^{m_0+3/2}} \sum_{d\leqslant z^2} \frac{(3+1/2)^{\omega(d)}}{\varphi(d)} \ll \frac{x(\ln z)^{3+1/2}}{(\ln x)^{m_0+3/2}}.$$

代入等式

$$G_d^{(k)}(s) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} H^{(k-l)}(s) J_d^{(l)}(s)$$

对（33）求和，并交换变量 d 和 l 的求和顺序，得到

$$\Phi_a(x) \leqslant \frac{x}{\sqrt{\pi \ln x}} \sum_{k=0}^{m_0} \frac{a_k}{(\ln x)^k} \sum_{l=0}^{k} b_l(k) S_l(z;a) + r_3 + r_2 + r_1, \tag{34}$$

其中

$$a_k = \frac{(-1)^k \binom{2k}{k}}{4^k}, \qquad b_l(k) = \binom{k}{l} H^{(k-l)}(1),$$
$$S_l(z;a) = \sum_{\substack{d \mid P_a(z) \\ d\leqslant z^2}} \frac{\lambda_d J_d^{(l)}(1)}{\varphi(d)}.$$

让我们估计 $S_l(z;a)$ 的值。令 $g(d) = J_d(1)/\varphi(d)$，则对于 $l=0$，我们得到

$$S_0(z;a) = \sum_{\substack{d_1,d_2 \mid P_a(z) \\ d_1,d_2\leqslant z}} \rho_{d_1}\rho_{d_2} g([d_1,d_2]) = \frac{1}{H_a(z)}. \tag{35}$$

令 $l \geqslant 1$，则由引理 6 可得

$$S_l(z;a) = \sum_{\substack{d \mid P_a(z) \\ d\leqslant z^2}} \frac{\lambda_d}{\varphi(d)} J_d(1) Q_l. \tag{36}$$

这里，Q_l 是关于变量 $I(1)$ $I'(1)$.....、$I^{(l-1)}(1)$ 的 l 次多项式，其系数为整数：

$$Q_l = \sum_{m=0}^{l} \sum_{|\mathbf{i}|=m} a_{\mathbf{i}} \prod_{r=1}^{l} \big(I^{(r-1)}(1)\big)^{i_r},$$

其中，$\mathbf{i} = (i_1,\dots,i_l)$ 是一个整数向量，$i_r \geqslant 0$，$|\mathbf{i}| = i_1 + \cdots + i_l$，且 $I(s)$ 定义见 (12)。对于 $1 \leqslant r \leqslant l$，我们有

$$I^{(r-1)}(1) = \sum_{p \mid d} \mathfrak{f}_r(p),$$

其中 $\mathfrak{f}_r(p) = f^{(r-1)}(1;\, p)$。引理 5 表明，对于任意素数 p

$$\mathfrak{f}_r(p) \ll_r \frac{(\ln p)^{r+1}}{p} \ll_{m_0} \frac{(\ln p)^{m_0+1}}{p}.$$

为方便起见，对于每个 $r \geqslant 1$ ，我们考虑 i_r 个索引不同的相同函数。

$$f_{r1} = f_{r2} = \cdots = f_{ri_r} = \mathfrak{f}_r.$$

因此，使用此记号，我们得到

$$(I^{(r-1)}(1))^{i_r} = \sum_{p_{r1} \mid d} f_{r1}(p_{r1}) \cdots \sum_{p_{ri_r} \mid d} f_{ri_r}(p_{ri_r}) = \sum_{p_{r1},\, \ldots,\, p_{ri_r} \mid d} f_{r1}(p_{r1}) \cdots f_{ri_r}(p_{ri_r}).$$

设 $j_1, j_2, \ldots, j_R$ 是向量 $\mathbf{i}$ 的所有非零坐标的指标序列。那么 $j_1 < j_2 < \cdots < j_R$，$R \leqslant l$，当且仅当 $r \in \{j_1, j_2, \ldots, j_R\}$。于是，我们有

$$\begin{aligned}\prod_{r=1}^{l} \big(I^{(r-1)}(1)\big)^{i_r} &= \prod_{\substack{r=1 \\ i_r \neq 0}}^{l} \sum_{p_{r1},\ldots,p_{ri_r} \mid d} f_{r1}(p_{r1}) \cdots f_{ri_r}(p_{ri_r}) \\ &= \sum_{p_{j_1 1},\ldots,p_{j_R i_{j_R}} \mid d} f_{j_1 1}(p_{j_1 1}) \cdots f_{j_R i_{j_R}}(p_{j_R i_{j_R}}).\end{aligned}$$

我们将每一对 (j_ν, t)（其中 $1 \leqslant t \leqslant i_{j_\nu}$）与数值相对应。

$$i = i_{j_1} + \cdots + i_{j_{\nu-1}} + t.$$

按此编号， $f_{j_\nu t}(p_{j_\nu t})$ 将改写为 $f_i(p_i)$，其中 $1 \leqslant i \leqslant m$。然后，我们得到

$$\prod_{r=1}^{l} \big(I^{(r-1)}(1)\big)^{i_r} = \sum_{p_1, p_2, \ldots, p_m \mid d} f_1(p_1) f_2(p_2) \cdots f_m(p_m).$$

因此，对于 Q_l ，我们有

$$Q_l = \sum_{m=0}^{l} \sum_{|\mathbf{i}|=m} a_{\mathbf{i}} \sum_{p_1, p_2, \ldots, p_m \mid d} f_1(p_1) f_2(p_2) \cdots f_m(p_m). \tag{37}$$

将（37）代入（36）并改变求和顺序，我们得到

$$\begin{aligned}S_l(z;a) = \sum_{m=0}^{l} \sum_{|\mathbf{i}|=m} a_{\mathbf{i}} \sum_{\substack{p_1 \leqslant z \\ p_1 \uparrow a}} f_1(p_1) \cdots \sum_{\substack{p_m \leqslant z \\ p_m \uparrow a}} f_m(p_m) \\ \times \sum_{\substack{d_1, d_2 \mid P_a(z) \\ d_1, d_2 \leqslant z \\ [d_1,d_2] \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, P)}} \frac{\rho_{d_1}\rho_{d_2}}{\varphi([d_1,d_2])} J_{[d_1,d_2]}(1),\end{aligned}$$

其中 P 是素数 p_1、p_2、……、p_m 的最小公倍数。对 $m=0$ 应用（35），并对 $m \geqslant 1$ 应用引理 10，我们得到

$$S_l(z;a) \ll_{m_0} \frac{1}{H_a(z)}. \tag{38}$$

现在我们将和式（34）中对应于 $k=0$ 的项单独取出，并对和式中的其余项应用（38）。于是，我们得到

$$\Phi_a(x) \leqslant \frac{H(1)}{\sqrt{\pi}} \frac{x}{\sqrt{\ln x}\, H_a(z)} + r_4 + r_3 + r_2 + r_1,$$

其中

$$r_4 \ll_{m_0} \frac{x}{(\ln x)^{3/2} H_a(z)}.$$

让我们求出 $1/H_a(z)$ 的渐近公式。为此我们应用等式 (32)。对于素数 p，令

$$g_0(p) = \begin{cases} g(p), & \text{if } p \nmid a, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad h_0(p) = \frac{g_0(p)}{1-g_0(p)},$$

并通过乘法性定义 square-free d 上的 $g_0(d)$、$h_0(d)$。由函数 h_0 的定义可得

$$H_a(z) = \sum_{k \leqslant z} \mu^2(k) h_0(k).$$

现在我们求出与函数 g_0 对应的参数 A_1, A_2, L, κ。由 (22) 可知，可以取 $A_1 = 4$。对 $p \geqslant 2$ 的估计 (21) 意味着

$$g(p) = \frac{1}{p} + \frac{\theta}{p(p-1)}, \qquad |\theta| \leqslant 1.$$

由此我们得到 $\kappa = 1$ 和 $A_2, L = O_a(1)$。由 (32) 得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_a(z)} &= \prod_p \Big(1-g_0(p)\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-1} \frac{1}{\ln z}\Big(1+O\Big(\frac{1}{\ln z}\Big)\Big) \\ &= \frac{C\beta(a)}{\ln z}\Big(1+O\Big(\frac{1}{\ln z}\Big)\Big), \end{aligned}$$

其中

$$C = \prod_p (1-g(p))\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-1},$$

$$\beta(a) = \prod_{p \,|\, a} \Big(1 + \frac{1}{p(p-1)\ln(p/(p-1)) - 1}\Big).$$

因此，我们得到和 $\Phi_a(x)$ 的如下估计：

$$\Phi_a(x) \leqslant K\beta(a) \frac{x}{\sqrt{\ln x}\, \ln z}\Big(1+O\Big(\frac{1}{\ln z}\Big)\Big) + r_4 + r_3 + r_2 + r_1, \tag{39}$$

哪里

$$K = \frac{H(1)C}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_p \sqrt{p^2-p}\, \ln\frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{1}{p(p-1)\ln(p/(p-1))}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_p \sqrt{\frac{p}{p-1}}\left(p\ln\frac{p}{p-1} - \frac{1}{p-1}\right).$$

还需估计余项。现在取

$$f(q) = 3^{\omega(q)}, \qquad B = \frac{5}{2}, \qquad d = 1, \qquad Q = \frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^A}, \qquad N = x.$$

我们取 $m_0 = 5$ 和

$$z = \sqrt{Q} = \frac{\sqrt[4]{x}}{(\ln x)^{A/2}},$$

于是由引理 13 可得 $r_2 \ll x/(\ln x)^{5/2}$。对于余项 r_4、r_3、r_1，我们得到

$$r_4 \ll \frac{x}{(\ln x)^{5/2}}, \qquad r_3 \ll \frac{x}{(\ln x)^3}, \qquad r_1 \ll \sqrt[4]{x}.$$

由 (39) 可得

$$\Phi_a(x) \leqslant 4K\beta(a)\frac{x}{(\ln x)^{3/2}}\left(1 + O\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right)\right),$$

由此完成定理 1 的证明。

参考文献

1.E.C. 蒂奇马什，“一个除数问题”，巴勒莫数学学会学报，**54** (1930年)，414–429。2. Yu.V. Linnik，“二元加法问题中离散法的新版本及新用途”，《苏联数学文献》，**2** (1961)，468–471。3. G. Rodriquez，“关于蒂奇马什除数问题”，《意大利数学联合会通报》（第*3*辑），**20** (1965)，358–366。4.H.Halberstam，“蒂奇马什–Linnik除数问题补注”，《美国数学学会会刊》，**18** (1967)，187–188。5. E. Bombieri,J.B.Friedlander, H. Iwaniec，“大模数等差数列中的素数”，《数学学报》，**156**:3-4 (1986)，203–251。6. ´E. Fouvry，“关于蒂奇马什除数问题”，《莱因应用数学杂志》，**1985**:357 (1985)，51–76。7.S. Drappeau,B.Topacogullari，“乘法函数的组合恒等式与蒂奇马什的除-数问题”，《代数与数论》，**13**:10 (2019)，2383–2425。8. S. Ramanujan，“数论解析理论中的一些公式”，《数学信使》，**45** (1916)，81–84。9. M. A. Korolev，“关于涉及除数函数的卡拉楚巴问题”，《数学月刊》，**168**:3-4 (2012)，403–441。10. V. Kowalenko，“倒数对数数的性质与应用”，《应用数学学报》，**109**:2 (2010)，413–437。

11. A. A. Karatsuba, S. M. Voronin，黎曼ζ函数，De Gruyter Exp. Math.，**5**，Walter de Gruyter & Co.，柏林，1992，xii+396页。12. A. A. Karatsuba，解析数论基础，Springer-Verlag，柏林，1993，xiv+222 页。13. H. Halberstam，H.-E. Richert，筛法，1974 年原版的重印版，Dover Publ., Inc.，纽约州米尼奥拉，2011，490 页。14. J. Friedlander，H. Iwaniec，筛法之作，Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.，**57**，Amer. Math. Soc.，普罗维登斯，罗得岛州，2010，xx+527 页。