arXiv:2304.03061v2 [math.NT] 9 Jun 2023

余长度一变形环

DANIEL LE、BAO V. LE HUNG、STEFANO MORRA、CHOL PARK 和 ZICHENG QIA N

Abstract. 设 $K/\mathbb{Q}_p$ 是一个有限非分歧扩张，$\overline{\rho}:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)\to\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ 是一个连续表示，且 τ 是一个维数为 n 的驯惯性类型。在对 τ 施加温和的正则性条件时，我们明确确定了潜在晶体变形环 $R^{\eta}_{\overline{\rho}}{}^{\tau}$，其平行霍奇–泰特权重为 $\eta=(n-1,\cdots,1,0)$，惯性类型为 τ；这里，$\overline{\rho}$ 关于 τ 的 *shape* 余长至多为一。这一结果应用于塞尔猜想权重部分中一类影子权重的模性。与此同时，我们使 [PQ22] 的局部-整体相容性结果成为无条件结论。

1. Introduction

近年来，对各种潜在晶体变形空间的计算已在模 p 和 p-进朗兰兹计划中的局部-整体相容性问题上得到诸多应用。这包括塞尔猜想的权重部分、模 p 重数的确定、Breuil关于 K型中整结构的猜想，以及 Colmez函子的推广（参见例如 [EGS15、LLHLM18、LLHLM20、DL21、LLHLMb、LLHM$^+$、LLHLMc、LLHLMa、HW22、BHH$^+$b、BHH$^+$a]）。在某种颇为特殊的一般性条件下， [LLHLMb]表明，温和潜在晶体变形空间与 Pappas–Zhu局部模型的某些闭子簇具有相同的奇异性。总体而言，人们对这些用于伽罗瓦变形空间的局部模型的几何性质知之甚少。此外，在实践中很难明确表述一般性条件，或处理它们的自然表示。

1.1. 主要结果。局部模型具有一个按扩展仿射魏尔群的容许元素（称为形状）编索引的分层，其几何的复杂性会随着形状的长度减小而增加。 [LLHLMa] 表明，当形状是极端的，即具有最大长度时（$\binom{n+1}{3}$ 对于 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ 的 n 维表示），相应的温和潜在结晶变形环是形式光滑的。本文的主要结果（在引言中我们仅针对 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ 的表示陈述）如下：

定理 1.1.1（定理 5.2.3）。设 E 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张，其整数环为 $\mathcal{O}$，剩余域为 $\mathbb{F}$。设 $\overline{\rho}:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 是一个连续的伽罗瓦表示， τ 是一个 $3n-7$-一般驯惯性类型， $\eta=(n-1,\cdots,1,0)\in\mathbb{Z}^n$，且 $R^{\tau}_{\overline{\rho}}$ 是类型 (η,τ) 的潜在晶体表示的提升环。如果 $R^{\eta}_{\overline{\rho}}{}^{\tau}$ 非零，且形状 $\tilde{w}(\overline{\rho},\tau)$ 的长度至少为 $\binom{n+1}{3}-1$（即形状的余长至多为一），那么 $R^{\eta}_{\overline{\rho}}{}^{\tau}$ 在 $\mathcal{O}$ 或 $\mathcal{O}[\![X,Y]\!]/(XY-p)$ 上形式光滑。

注 1.1.2. (1) 将 $\mathbb{Q}_p$ 替换为有限非分歧扩张 K，并要求形状在每个嵌入 $K\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_p$处均具有余长为一的形状，我们证明变形环在形如 $\mathcal{O}[\![X,Y]\!]/(XY-p)$ 的环的完备张量积上形式光滑。此外，张量积中此类因子的数量还可以明确计算。

(2) 具有抛物结构的余长度一变形空间已在 [LLHLM a] 中计算。在一般情况下，余长度一变形空间不具有抛物结构，这使得其计算困难得多。(3) 当 $n = 3$ 时，具有余长为一形状的温和惯性类型足以证明 GL_3 [LLHLM18、LLHLM20、LLHLMc] 的 Serre 权猜想。我们将这些思想推广到在 [LLHLMa], 的假设下证明缺陷至多为一的 Serre 权的模性，特别是在一个明确的组合泛性条件下。(4) 使用标准的 Taylor–Wiles 技术，定理 1.1.1 给出了类似于 [LLHLMb、定理 9.2.1] 的模性提升结果（改进了该文献中多项式泛性和 p 处的温和性条件，但对相对于温和惯性类型的形状施加了特定条件）。

尽管定理 1.1.1 推广了一些先前的结果，但其证明或许出人意料地微妙，尽管该形状的长度接近最大值。我们不认为我们的方法能够推广到长度更小的形状。这表明，伽罗瓦变形空间的局部模型确实是复杂的几何对象，难以得到简单明确的描述。

撰写本文的主要动机，是将定理 1.1.1 用于证明权消去和模 p重数一结果，从而使 [PQ22] 的局部-整体相容性结果成为无条件结果。该结果大致指出，可以从定定幺正群模 p 完备上同调的 Hecke 等型部分上的 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$-作用中恢复 p 处的局部模 p 伽罗瓦表示。虽然 [PQ22] 的结果后来被[LLHM$^+$] 的结果取代，但[LLHM$^+$] 仅使用极端形状的方法不适用于 $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_p)$；而 [PQ22] 的方法（该方法在小秩情形下建立在 [BD14、HLM17、LMP18、MP17] 的基础上）应该可以推广到许多 p-进域上的约化群。事实上，这已经对 $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_p)$ 实现了，见 [EL]。对于 [LLHM$^+$] 的推广，定理 1.1.1 的类似结果应当会很有用。我们希望在未来的工作中继续研究这一问题。

1.2. 整体与局部应用。如备注 1.1.2(3) 所述，作为定理 1.1.1 一个更直接的整体应用，我们得到了缺陷至多为一的权的模性。温和伽罗瓦表示 $\overline{\rho}$ 的 Serre 权 σ 的缺陷这一概念最早由 [LLHLMb, §8.6] 引入。该概念纯粹是组合性的，刻画了满足 $\sigma \in W^?(\overline{\rho}) \cap \mathrm{JH}(\sigma(\tau))$ 的形状 $\tilde{w}(\overline{\rho}, \tau)$ 的最大长度。本文将缺陷的概念推广到任意 $\overline{\rho}$，并以特化来刻画（如 [LLHLMa] 对极端权所做的那样）；我们还证明，在存在模性显然权的条件下，缺陷至多为一时它们具有模性。结果如下；对于任何未定义的概念，请参阅本文正文：

定理1.2.1（定理6.3.1）。设 F/F^+ 为一个CM域。假设 $F^+ \neq \mathbb{Q}$，且 F^+ 中位于 p 之上的所有赋值在 $\mathbb{Q}_p$ 上非分歧，并在 F 中完全分裂。设 $\overline{r}\colon G_{F^+} \to \mathcal{G}(\mathbb{F})$ 为一个连续表示，按照 [LLHLMa 的定义 5.5.1], 的意义，它是自守的，其模权集合为 $W(\overline{r})$。设 $\overline{r}_p$ 为与集合 $\{\overline{r}|_{G_{F_v^+}}\}_{v|p}$ 相关联的 L-同态，并分别以 $W^g_{\leq \underline{0}}(\overline{r}_p)$ 和 $W^g_{\leq \underline{1}}(\overline{r}_p)$ 表示 $\overline{r}_p$ 的极端权集合和缺陷至多为一的权集合。进一步假设：

- $\overline{r}(G_{F(\zeta_p)}) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 是 adequate；并且
- $\overline{r}_p$ 是 $6(n-1)$-一般。

那么，以下各项是等价的：

(1) $W^g_{\leq \underline{0}}(\overline{r}_p) \cap W(\overline{r}) \neq \emptyset$; 和

(2) $W^{g}_{\leq \underline{1}}(\overline{r}_p) \subset W(\overline{r})$ 。

与 [LLHLMa相比，定理5.5.5], 定理1.2.1假设 F^+ 在p之上是非分歧的，但它给出了缺陷一权的模性。（对于 GL_3, ，这足以证明一般 Serre 权猜想。）

1.3. 致谢。部分工作是在访问帕多瓦大学（Università degli Studi di Padova，2019年）期间完成的，我们谨向该校致以诚挚谢意，感谢其为我们提供了优良的工作条件。

D.L. 得到了美国国家科学基金会协议编号 DMS-1128155 和 DMS-1703182 项目以及 AMS-Simons 旅行资助的支持。B.LH. 感谢美国国家科学基金会资助（项目编号 DMS-1128155、DMS-1802037）以及 Alfred P. Sloan 基金会的支持。S.M. 得到了 ANR-18-CE40-0026（CLap CLap）项目和法国大学研究院的支持。C.P. 得到了三星科学技术基金会 SSTF-BA2001-02 项目的支持。

1.4. 记号。对于域 K，我们用 $\overline{K}$ 表示 K 的一个固定可分闭包，并令 $G_K \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ 。如果 K 被定义为某个代数闭域的子域，那么我们令 $\overline{K}$ 为该域。

如果 K 是一个非阿基米德局部域，我们记 $I_K \subset G_K$ 为惯性子群，并记 $W_K \subset G_K$ 为韦伊群。我们固定一个素数 $p \in \mathbb{Z}_{>0}$。设 $E \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ 是一个在 $\mathbb{Q}_p$上有限维的子域。我们记 $\mathcal{O}$ 表示其整数环，固定一个一致化元 $\varpi \in \mathcal{O}$ ，并令$\mathbb{F}$ 表示 E 的剩余域。我们始终假设 E 足够大。

1.4.1. 约化群。令 G 表示一个分裂连通约化群（定义在某个环上），并配备一个 Borel 子群 B、一个极大分裂环面 $T \subset B$，以及 $Z \subset T$ G 的中心。令 $d = \dim G - \dim B$。当 G 是若干个 GL_n 的乘积时，我们取 B 为上三角 Borel 子群，取 T 为对角环面。令 $\Phi^+ \subset \Phi$ （分别为 $\Phi^\vee$、$^+ \subset \Phi^\vee$）表示 (G,B,T) 的根（分别为余根）集合中的正根（分别为正余根）子集。我们用记号 $\alpha > 0$（分别为 $\alpha < 0$）表示正（分别为负）根 $\alpha \in \Phi$。令 Δ （分别为 $\Delta^\vee$）为简单根（分别为简单余根）的集合。令 $X^*(T)$ 为 T 的特征群，并令 $X^0(T)$ 为由满足以下条件的特征 $\lambda \in X^*(T)$ 组成的子群：对所有 $\alpha^\vee \in \Delta^\vee$， $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 0$。令 $W(G)$ 表示 (G,T) 的魏尔群。令 w_0 表示 $W(G)$ 的最长元素。有时，在 $\widetilde{\ }$ 不会引起混淆时，我们将 $W(G)$ 记作 W。令 W_a （分别为 W）表示仿射魏尔群和扩张仿射魏尔群

$$W_a = \Lambda_R \rtimes W(G) \quad \text{and} \quad \widetilde{W} = X^*(T) \rtimes W(G)$$

$\widetilde{\ }$ 分别对应 G。我们使用 $t_\nu \in W$ 表示 $\nu \in X^*(T)$的像。

魏尔群 $W(G)$

W和 W_a在 $X^*(T)$上自然作用。若 A是任意环，则上述魏尔群通过标量扩张在 $X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} A$ 上自然作用。设 M为一个有限秩自由 $\mathbb{Z}$-模（例如 $M = X^*(T)$）。 M与其 $\mathbb{Z}$-线性对偶 M^*之间的对偶配对记作 $\langle\ ,\ \rangle$。若 A 是任意环，则配对 $\langle\ ,\ \rangle$ 可通过 A-线性扩张为 $M \otimes_{\mathbb{Z}} A$ 与 $M^* \otimes_{\mathbb{Z}} A$之间的配对；滥用记号，仍记作 $\langle\ ,\ \rangle$。

我们将由根数据（$X_*(T)$ $X^*(T)$ $\Phi^\vee, \Phi$）确定的、定义在 $\mathbb{Z}$ 上的分裂连通约化群记为 $G^\vee = G^\vee_{/\mathbb{Z}}$ 。这定义了一个极大分裂环面 $T^\vee \subseteq G^\vee$，使得我们有典范同一化 $X^*(T^\vee) \cong X_*(T)$ 和 $X_*(T^\vee) \cong X^*(T)$。

令 $V \overset{\text{def}}{=} X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$。对于 $(\alpha, k) \in \Phi \times \mathbb{Z}$，我们有根超平面 $H_{\alpha,k} \overset{\text{def}}{=} \{x \in V \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = k\}$。阿尔科夫是 $V \setminus \left(\bigcup_{(\alpha,n)} H_{\alpha,n}\right)$ 的一个连通不可约分支，我们用 $\mathcal{A}$ 表示该顶点。

阿尔科夫的集合。若对于所有 $\alpha\in\Delta$， A 都满足 $0<\langle\lambda、\alpha^\vee\rangle<1$，且 $\lambda\in A$，则称阿尔科夫 A 为受限的。我们用 A_0 表示（支配的）基本阿尔科夫，即满足对于所有 $\alpha\in\Phi^+$， $0<\langle\lambda、\alpha^\vee\rangle<1$ 的 $\lambda\in X^*(T)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ 的集合。回想一下， W 在阿尔科夫集合上具有传递作用，且 $W\cong W_a\rtimes\Omega$，其中 Ω 是 A_0 的稳定子。我们定义

$$\widetilde{W}^+\overset{\text{def}}{=}\{\widetilde{w}\in\widetilde{W}\mid\widetilde{w}(A_0)\text{ is dominant}\}\quad\text{and}\quad\widetilde{W}_1^+\overset{\text{def}}{=}\{\widetilde{w}\in\widetilde{W}^+\mid\widetilde{w}(A_0)\text{ is restricted}\}.$$

我们固定一个元素 $\eta\in X^*(T)$，使得 $\langle\eta、\alpha^\vee\rangle=1$ 对所有正单根 α 成立，并令 $\widetilde{w}_h$ 为 $w_0t_{-\eta}\in\widetilde{W}_1^+$。

当 $G=\mathrm{GL}_n$时，我们按标准方式固定一个同构 $X^*(T)\cong\mathbb{Z}^n$，其中右侧的标准第 i 个基元素 $\varepsilon_i\overset{\text{定义}}{=}(0,\ldots,1,\ldots,0)$（1 位于第 i 个位置）对应于提取对角矩阵的第 i个对角元素。特别地，我们可以将任意根 $\beta\in\Phi$ 写成 $\beta=\varepsilon_i-\varepsilon_j$，其中 $1\le i、 j\le n$、 $i\ne j$ 是唯一选取的。

给定有限集合 $\mathcal{J}$ 和同构 $G\xrightarrow{\sim}\mathrm{GL}_n^{\mathcal{J}}$，我们在上述记号中使用上标，例如 $\Phi^{+,\mathcal{J}}\subset\Phi^{\mathcal{J}}$, $\Delta^{\mathcal{J}}$, $X^*(T)^{\mathcal{J}}$, $W^{\mathcal{J}}$ 等，其中现在 $\Phi^+,\Phi,\Delta,X^*(T)$ W 等均相对于 GL_n。为避免记号过于繁复，我们不对 $\Phi^{\mathcal{J}}$,$X^*(T)^{\mathcal{J}}$, $W^{\mathcal{J}}$ 等的元素使用带下划线的记号，因此例如，根 $\alpha\in\Phi^{\mathcal{J}}$ 实际上是根的集合 $(\alpha^{(j)})_{j\in\mathcal{J}}$，其中每个 $\alpha^{(j)}$ 都是 GL_n 的根。最后，我们取 $\eta\in X^*(T)^{\mathcal{J}}$ 对应于上述识别中的元素 $(n-1,n-2,\ldots,0)_{j\in\mathcal{J}}\in(\mathbb{Z}^n)^{\mathcal{J}}$。固定元素 $j\in\mathcal{J}$ 时，我们将滥用记号，使用同一符号 η 表示在 j 处对应于元组 $(n-1,\ldots,1,0)$ 的元素。

设 F_p^+ 是一个有限非分歧 ´etale $\mathbb{Q}_p$-代数，使得 F_p^+ 同构于有限集合 S_p 上的乘积 $\prod_{S_p}F_v^+$；其中对每个 $v\in S_p$， F_v^+ 都是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限非分歧扩张。对每个 $v\in S_p$，令 $\mathcal{O}_{F_v^+}$ 为 F_v^+ 的整数环， k_v 为剩余域，并令 $\mathcal{O}_p$（分别为 k_p）为乘积 $\prod_{v\in S_p}\mathcal{O}_{F_v^+}$（分别为 $\prod_{v\in S_p}k_v$）。（这将在全局应用中使用；在该情形下， S_p 将是数域 F^+ 中整除 p 的一组有限赋值。）

若 G 是域 $\mathbb{F}_p$上的分裂连通约化群，具有Borel 子群 B 和极大环面 T，我们令$G_0\overset{\text{def}}{=}\mathrm{Res}_{k_p/\mathbb{F}_p}G_{/k_p}$，并类似地定义 B_0、 T_0。我们总是假设 $\mathbb{F}$ 包含任意环同态 $k_p\to\overline{\mathbb{F}}_p$ 的像，从而我们可以并且确实固定一个同构 $\left(G_0\times_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_p}\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}\right)\xrightarrow{\sim}(G\times_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_p}\mathrm{Spec}\ \mathbb{F})^{\mathcal{J}_p}$，其中 $\mathcal{J}_p$ 表示环同态 $k_p\to\mathbb{F}$ 的集合。为方便记号起见，我们写作 $\underline{G}\overset{\text{def}}{=}G_0\times_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_p}\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}$，并类似地记作 $\underline{B}$、 $\underline{T}$。记号 $\underline{W}$、 $\underline{\widetilde{W}}$、 $\underline{\widetilde{W}^+}$、 $\underline{\widetilde{W}_1^+}$ 等，以及同一化 $\underline{W}\xrightarrow{\sim}W^{\mathcal{J}_p}$、 $\underline{\widetilde{W}}\xrightarrow{\sim}\widetilde{W}^{\mathcal{J}_p}$、 $\underline{\widetilde{W}^+}\xrightarrow{\sim}(\widetilde{W}^+)^{\mathcal{J}_p}$、 $\underline{\widetilde{W}_1^+}\xrightarrow{\sim}(\widetilde{W}_1^+)^{\mathcal{J}_p}$ 等，应当是清楚的。

1.4.2. 伽罗瓦理论。设 K 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张，其剩余域 k 在 $\mathbb{F}_p$ 上的次数为 f。我们假设 $K/\mathbb{Q}_p$ 非分歧，并用 $W(k)$ 表示 Witt 向量环，它也是 K 的整数环。 $W(k)$ 上的算术 Frobenius 自同构记为 φ，它在剩余域上的作用是提升至 p 次幂。我们固定一个嵌入 σ_0，将 K 嵌入E（等价地，将 k 嵌入 $\mathbb{F}$），并定义 $\sigma_j=\sigma_0\circ\varphi^{-j}$。这给出了 $\mathcal{J}=\mathrm{Hom}(k,\mathbb{F})$ 与 $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$ 之间的一个对应。

我们将 Artin 互反映射 $\mathrm{Art}_K:\ K^\times\to W_K^{\mathrm{ab}}$ 规范化，使得一致化子映到几何 Frobenius 元素。我们一次性固定一个满足 $p_{m+1}^p=p_m$、 $p_0\overset{\text{定义}}{=}-p\in K$ 的序列 $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}\in\overline{K}^{\mathbb{N}}$，并令 K_∞ 为 $\bigcup_{m\in\mathbb{N}}K(p_m)$。

给定一个元素 $\pi_1 \text{定义}= (-p)^{\frac{1}{p^f-1}} \in \overline{K}$，我们有一个特征 $\omega_K\colon\ I_K \to W(k)^\times$，它由条件 $g(\pi_1) = \omega_K(g)\pi_1$ 定义。根据我们对嵌入 σ_0 的选择，这给出了一个 niveau f 的基本特征

$$\omega_f := \sigma_0 \circ \omega_K : I_K \to \mathcal{O}^\times.$$

设 $\rho\colon G_K \to \mathrm{GL}_n(E)$ 是一个 p-进 de Rham 伽罗瓦表示。对于 $\sigma\colon K \hookrightarrow E$，我们将 $\mathrm{HT}_\sigma(\rho)$ 定义为 ρ 的 σ- 标记霍奇 – 泰特权重多重集，即满足 $\dim_E \left(\rho \otimes_{\sigma,K} \mathbb{C}_p(-i)\right)^{G_K} \neq 0$ 的整数集合 i（这里采用 Tate 扭 twist 的通常记号）。特别地，圆分特征 ε 对所有嵌入 $\sigma\colon K \hookrightarrow E$ 的霍奇–泰特权重均为 1。对于 $\mu = (\mu^{(j)})_j \in X^*(\underline{T})$，若对所有 $j \in \mathcal{J}$，ρ 的霍奇 – 泰特权重为 μ，则称其具有霍奇 – 泰特权重 μ

$$\mathrm{HT}_{\sigma_j}(\rho) = \{\mu_1^{(j)}, \mu_2^{(j)}, \dots, \mu_n^{(j)}\}.$$

ρ 的惯性类型是 $\mathrm{WD}(\rho)|_{I_K}$ 的同构类，其中 $\mathrm{WD}(\rho)$ 是按照 [CDT99, 附录 B.1 中的方式与 ρ 相关联的 Weil–Deligne 表示（特别地，$\rho \mapsto \mathrm{WD}(\rho)$ 是协变的）。惯性类型是一个态射 $\tau\colon I_K \to \mathrm{GL}_n(E)$，其核是开的，并且可延拓到 G_K 的 Weil 群 W_K。若 ρ 的霍奇–泰特权重为 μ，且其惯性类型由（同构类）τ 给出，则称 ρ 具有类型 (μ, τ)。

1.4.3. 其他。最后，δ_P 表示条件 P 下的克罗内克 δ 函数。我们也用 δ 表示 §6.2 中的缺陷函数。这不会造成混淆。

2. Preliminaries

2.1. 仿射魏尔群、驯惯性类型、Serre 权。

2.1.1. 仿射魏尔群。我们在此汇集必要的背景知识，以便对可容许集中的余长为一元素进行分类（命题 2.1.2）。

回顾 §1.4.1，G 是一个分裂约化群，其分裂极大环面为 T。我们将与 (G,T) 相关联的魏尔群记为 W，并将 (G,T) 的公寓记为 $V \text{定义为}= X^*(T)\otimes\mathbb{R} \cong X_*(T^\vee)\otimes\mathbb{R}$，魏尔群 $\widetilde{W} \text{定义为}= X^*(T) \rtimes W$ 在其上作用。我们将 V 中的支配魏尔室记为 $\mathcal{C}_0$。

回忆一下，$\mathcal{A}$ 表示 $X^*(T)\otimes\mathbb{R}$，而 $A_0 \in \mathcal{A}$ 表示支配的基本阿尔科夫。我们用 $\uparrow$ 表示阿尔科夫上的上箭头序，如 [Jan03, §II.6.5] 中所定义，它通过由 $\widetilde{w} \mapsto \widetilde{w}(A_0)$ 给出的双射 $W_a \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$ 在 W_a 上诱导出序 $\uparrow$。支配的基本阿尔科夫 A_0 在 W_a 中定义了一组简单反射，从而在 W_a 上定义了一个 Coxeter 长度函数，记作 $\ell(-)$，以及一个 Bruhat 序，记作 $\leq$。给定 $\lambda \in X^*(T)$，我们考虑 W 中的 $\sim\lambda$-可容许元素集合：

$$\mathrm{Adm}(\lambda) \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ \widetilde{w} \in \widetilde{W} \mid \widetilde{w} \leq t_{w(\lambda)} \text{ for some } w \in W \right\}. \tag{1}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$如果 $\Omega \subset W$ 是基本阿尔科夫的稳定子，那么 $W = W_a \rtimes \Omega$ 因而 W 以标准方式继承了布鲁哈特序：对于 $\widetilde{w}_1$、$\widetilde{w}_2 \in W_a$ 和 $\delta \in \Omega$，$\widetilde{w}_1\delta \leq \widetilde{w}_2\delta$ 当且仅当 $\widetilde{w}_1 \leq \widetilde{w}_2$，而不同右 W_a-陪集中的元素不可比较。我们将 $\ell(-)$ 扩展到 W，规定 $\ell(\widetilde{w}\delta) \text{定义}= \ell(\widetilde{w})$ 对任意 $\widetilde{w} \in W_a$、$\delta \in \Omega$。

设 $(\widetilde{W}^\vee, \leq)$ 是如下偏序群：$\widetilde{W}^\vee$ 被识别为 $\widetilde{\ }$

W 作为一个群，而 $\ell(-)$ 和 $\leq$ 是相对于反支配基阿尔科夫定义的。若 $\widetilde{w} = t_\nu w \in W$ 满足 $w \in W$ 和 $\nu \in X^*(T)$，我们定义 $\widetilde{w}^* \text{定义}= w^{-1}t_\nu \in \widetilde{W}^\vee$。（赋值 $\widetilde{w} \mapsto \widetilde{w}^*$ 定义了一个保持长度和 Bruhat 序的双射，参见 [LLHL19，引理 2.1.3]；我们也用同一符号表示其逆双射

。）给定 $\lambda \in X^*(T)$，我们通过将 (1) 右侧的 W 替换为 $W^\vee$，定义集合 $\mathrm{Adm}^\vee(\lambda)$。

我们还重新称，给定 $m \in \mathbb{Z}$ 和 $\alpha \in \Phi$，m 个 α-条带是由 V 定义的 b y

$$\{x \in V \mid m < \langle x, \alpha^\vee \rangle < m+1\}.$$

最后，如果 $\widetilde{w} \in W$ 符合 [LLHLMb，定义 2.1.3] 中的含义，则称其为正则。

命题 2.1.2. 假设 $\widetilde{w} \in \mathrm{Adm}(\eta)$，使得 $\ell(\widetilde{w}) = \ell(t_\eta) - 1$。那么以下情况之一成立：

(1) $\widetilde{w} = w t_\eta s_\alpha w^{-1}$ 其中 $w \in W$ 且 $\alpha > 0$ 是一个正根，满足 $w(\alpha) > 0$，并且不存在分解 $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ 满足 $\beta_i > 0$ 且 $w(\beta_i) > 0$；(2) $\widetilde{w} = w t_{\eta - \alpha} s_\alpha w^{-1}$ 其中 $w \in W, \alpha \in \Phi^+ \backslash \Delta$ 满足 $w(\alpha) < 0$，并且对于任意分解$\alpha = \beta_1 + \beta_2$ 满足 $\beta_i > 0$，我们都有 $w(\beta_i) < 0$。

我们称余长为一的元素 $\widetilde{w} \in$Adm(η) 属于第一种形式（分别地，第二种形式），如果它如命题 2.1.2 的第 (1) 项（分别地，第 (2) 项）所述。回顾 [LLHLMb，定义 2.1.3]，我们注意到，余长为一的元素 $\widetilde{w} \in$Adm(η) 不规则，当且仅当它属于第一种形式，并且 (1) 中出现的根 α 是一个单根。

注 2.1.3. 如果 $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j \in \Phi^+ \setminus \Delta$，那么

(1) 第 (1) 项中的条件意味着 w 保持 i 与 j 的顺序，并且 w 不将任何元素 $k \in (i, j)$ 映射到 $(w(i)\ w(j))$ 中的元素；(2) 第 (2) 项中的条件意味着 w 颠倒 i 与 j 的顺序，并将任意 $k \in (i, j)$ 映射到 $(w(j)\ w(i))$ 中的元素。

证明。我们假设 $\widetilde{w}(A_0)$ 位于室 $w(C_0)$ 中。于是存在一条从 A_0 到 $\widetilde{w}(A_0)$、沿 w 正方向的画廊（参见 [HC02，第 2 节，定义 5.2]），因此 [HH17，推论 4.4] 表明$\widetilde{w} < w t_\eta w^{-1}$。于是 $\widetilde{u} \overset{\text{定义}}{=} w^{-1}\widetilde{w}$ 是支配的，因此 $w\widetilde{u}$ 是 $\widetilde{w}$ 的一个约化表达式，这由 [LLHLMa，引理 2.2.1] 可知（关于约化表达式的概念，参见该文献中的定义 2.1.2）。我们得出结论：$\widetilde{u} \le t_\eta w^{-1}$ 和 $\ell(\widetilde{u}) = \ell(t_\eta w^{-1}) - 1$。由于 $\widetilde{u}$ 和 $t_\eta w^{-1}$ 都是支配的，且它们的长度相差 1，因此根据[GHS18，推论 A.1.2]，它们必相差一个沿某个正根 $\alpha > 0$ 方向的仿射反射，其中 α。我们声称，包含 $\widetilde{u}$的 α-带是包含 $t_\eta w^{-1}$的α-带的下邻带。

反设结论不成立。那么，对于 A_0 的每个顶点 v，连接 $v(\widetilde{u})$ 与 $v(t_\eta w^{-1})$ 的线段都位于支配 Weyl 室内，且包含 $v(t_\alpha \widetilde{u})$。这表明 $A_0(t_\alpha \widetilde{u})$ 是支配的，且 $\widetilde{u} \uparrow t_\alpha \widetilde{u} \uparrow t_\eta w^{-1}$。 [Wan87，定理 4.3] 蕴含 $\widetilde{u} < t_\alpha \widetilde{u} < t_\eta w^{-1}$，这与 $\ell(\widetilde{u}) = \ell(t_\eta w^{-1}) - 1$ 矛盾。

分为两种情况：

A_0(• $\widetilde{u}$) 与 $A_0(t_\eta w^{-1})$ 共享顶点 η。在此情况下 $\widetilde{u} = t_\eta s_\alpha w^{-1}$。条件 $\widetilde{u} \le t_\eta w^{-1}$ 和 $\widetilde{u}(\ell) = \ell(t_\eta w^{-1}) - 1$ 等价于 $s_\alpha w^{-1}(\ell) = \ell(w^{-1}) + 1$，也就是说，等价于 $w s_\alpha(\ell) = \ell(w) + 1$。但这一条件恰好对应于条目 (1) 中的条件。

• $\widetilde{u}(A_0)$以 $\eta - \alpha$ 作为顶点。在这种情况下，我们必须有 $\widetilde{u} = t_{\eta-\alpha} s_\alpha w^{-1}$。为了考察关于 w 的条件，我们注意到，对于每个正根 β，$t_{\eta-\alpha} s_\alpha w^{-1}$ 和 $t_\eta w^{-1}$ 的 β-高度之差是

$$\langle \eta, \beta^\vee \rangle + \delta_{w(\beta)>0} - 1 - (\langle \eta, \beta^\vee \rangle - \langle \alpha, \beta^\vee \rangle + \delta_{w s_\alpha(\beta)>0} - 1) = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle + \delta_{w(\beta)>0} - \delta_{w s_\alpha(\beta)>0}.$$

因此，余长度为 1 的条件变为

$$\sum_{\beta \neq \alpha, \beta > 0} -\delta_{w(\beta)>0} + \delta_{w s_\alpha(\beta)>0} = 2\langle \eta, \alpha \rangle - 2$$

由此得到条目 (2) 中的条件。

证明至此完成。 □

引理 2.1.4. 设 $\widetilde{w} \in \mathrm{Adm}^{\mathrm{reg}}(\eta)$ 满足 $\ell(\widetilde{w}) \geq \ell(t_\eta) - 1$，并设 $\widetilde{w}_2^{-1} w_0 t_\nu \widetilde{w}_1$ 是 $\widetilde{w}$ 的唯一（在 $X^0(T)$ 意义下）分解，且满足 $\widetilde{w}_1$、$\widetilde{w}_2 \in \widetilde{W}_1^+$ 和 $\nu \in X^+(T)$（见 [LLHLMb，命题 2.1.5]）。假设 $\widetilde{w} = \widetilde{x}_2^{-1} s \widetilde{x}_1$ 满足 $\widetilde{x}_1$、$\widetilde{x}_2 \in \widetilde{W}^+$、$s \in W$，且 $\widetilde{x}_1 \uparrow \widetilde{x} \uparrow \widetilde{w}_h^{-1}\widetilde{x}_2$ 满足$\widetilde{x} \in \widetilde{W}_1^+$。那么 $s = w_0$，且 $\widetilde{x} = \widetilde{x}_1 \in \widetilde{w}_1 X^0(T)$ 或 $\widetilde{x} = \widetilde{w}_h^{-1}\widetilde{x}_2 \in \widetilde{w}_h^{-1}\widetilde{w}_2 X^0(T)$。此外，若 $\ell(\widetilde{w}) = \ell(t_\eta)$，则还有 $\widetilde{x} = \widetilde{x}_1 = \widetilde{w}_h^{-1}\widetilde{x}_2$ 和 $\nu \in X^0(T)$。

证明。令 $\widetilde{w}$、$\widetilde{x}_1$、$\widetilde{x}_2$、s 和 $\widetilde{x}$ 如上。由于 $\widetilde{x}_1 \uparrow \widetilde{x} \uparrow \widetilde{w}_h^{-1}\widetilde{x}_2$，根据 [LLHL19，定理 4.1.1，命题 4.1.2]，可得 $\widetilde{x}_1 \leq \widetilde{x}$ 且 $\sim\widetilde{x}_2 \leq \widetilde{w}_h\widetilde{x}$，正如 $\widetilde{w}_h\widetilde{x} \in W^+$。于是我们有

$$\begin{aligned} 1 &\geq \ell(t_\eta) - \ell(\widetilde{w}) \\ &\geq \ell((\widetilde{w}_h\widetilde{x})^{-1} w_0 \widetilde{x}) - [\ell(\widetilde{x}_2^{-1}) + \ell(s) + \ell(\widetilde{x}_1)] \\ &= [\ell(\widetilde{w}_h\widetilde{x}) - \ell(\widetilde{x}_2)] + [\ell(w_0) - \ell(s)] + [\ell(\widetilde{x}) - \ell(\widetilde{x}_1)] \end{aligned}$$

其中最后一个等号由 [LLHL19，引理 4.1.9] 得出。由于最后一个表达式中的每一项都非负，我们立即得到 $\widetilde{x} = \widetilde{x}_1$ 或 $\widetilde{w}_h^{-1}\widetilde{x}_2$。（此外，若 $\ell(\widetilde{w}) = \ell(t_\eta)$，则进一步有 $s = w_0$ 且 $\widetilde{x}_1 = \widetilde{x} = \widetilde{w}_h^{-1}\widetilde{x}_2$。）只需证明前一种情况下 $\widetilde{x}_1 \in \widetilde{w}_1 X^0(T)$，后一种情况下 $\widetilde{x}_2 \in \widetilde{w}_2 X^0(T)$。

接下来我们证明 $s = w_0$。反设不然，则 $\widetilde{x}_1 = \widetilde{x} = \widetilde{w}_h^{-1}\widetilde{x}_2$ 且 $s = w_0 s_\alpha$，其中 $\alpha \in \Delta^+$。由命题 2.1.2 及其后的段落可知，$\widetilde{w}$ 不是正则的，这就产生了矛盾。

现在设 $\widetilde{x} = \widetilde{x}_1$，从而我们有 $\widetilde{x}_2^{-1} w_0 \widetilde{x}_1 = \widetilde{w}_2^{-1} w_0 t_\nu \widetilde{w}_1$。[LLHLMb，命题 2.1.5] 中的唯一性保证了 $\widetilde{x}_1 \in \widetilde{w}_1 X^0(T)$（并且，若此外 $\ell(t_\eta) = \ell(\widetilde{w})$，则 $\nu \in X^0(T)$）。类似地，若 $\widetilde{x} = \widetilde{w}_h^{-1}\widetilde{x}_2$，则 $\widetilde{x}_2 \in \widetilde{W}_1^+$，唯一性再次保证了 $\widetilde{x}_2 \in \widetilde{w}_2 X^0(T)$。□

对于下面的引理，该引理明确描述了引理 2.1.4 中提到的余长为一的正则可容许元素在 $X^0(T)$-分解意义下的唯一性（相差 $X^0(T)$），我们将情形特化为 $G = \mathrm{GL}_n$。回忆在此情形下，对于 $i = 1$，我们有元素 $\varepsilon_i \in X^*(T)$，……，n 以及基本权 $\omega'_{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}} \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{k=1}^{i} \varepsilon_i$（其中 $1 \leq i \leq n-1$）。我们有包含关系

$$W \hookrightarrow \widetilde{W}_1^+, \quad w \longmapsto t_{\eta_w} w \tag{2}$$

其中 t_{η_w} 是由下式定义的支配权

$$t_{\eta_w} \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{\beta \in \Delta,\, w^{-1}(\beta) < 0} \omega'_\beta \tag{3}$$

（见 [Her09，公式 (5.1)]）。给定 $w \in W$，我们将 $\widetilde{w}$ 记作 w 经由包含映射（2）所得的像。

引理 2.1.5. 设 $\widetilde{w} \in \mathrm{Adm}^{\mathrm{reg}}(\eta)$ 满足 $\ell(\widetilde{w}) = \ell(t_\eta) - 1$。那么在引理 2.1.4 的分解 $\widetilde{w} = \sim\sim\sim(\widetilde{w}_2)^{-1} w_0 t_\nu \widetilde{w}_1$ 中，我们可以取 $\widetilde{w}_1 = (s_\alpha w^{-1})\sim$、$\widetilde{w}_2 = \widetilde{w}_h w^{-1}$ 和 $\nu = \eta_{w^{-1}} - \eta_{s_\alpha w^{-1}} - \varepsilon\alpha$，其中若属于命题 2.1.2 的情形（2）（分别为情形（1））， 则 ε 等于 1（分别为 0）。

证明。令 $\widetilde{w} = w t_{\eta - \varepsilon\alpha} s_\alpha w^{-1}$，其中 $\varepsilon \in \{0, 1\}$ 等于 1（若处于情形 (2)）或 0（若处于命题 (1)) 2.1.2 的情形），我们有

$$\widetilde{w} = (\widetilde{w}_h \widetilde{w^{-1}})^{-1} w_0 t_\nu \widetilde{s_\alpha w^{-1}}$$

由 (2)和 $\widetilde{w}_h$ 的定义。因此，只需证明 ν 是支配的，即利用方程 (3) 证明

$$\delta_{w(\beta)>0} - \delta_{ws_\alpha(\beta)>0} - \varepsilon\langle\alpha, \beta^\vee\rangle \geq 0$$

对所有 $\beta \in \Delta$。这是一个初等的分情况验证，依据 $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle \in \{-1, 0, 1\}$ 的取值以及注 2.1.3，我们将其留给读者。□

2.2. 局部模型、仿射图与单值化条件。对于任意诺特 $\mathcal{O}$-代数 R，定义

$$L\mathcal{G}(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathrm{GL}_n(R(\!(v+p)\!)) \mid A \text{ is upper triangular modulo } v\};$$
$$L^+\mathcal{M}(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathrm{Mat}_n(R[\![v+p]\!]) \mid A \text{ is upper triangular modulo } v\}.$$

2.2.1. 仿射图。设 $\widetilde{z} = zt_\nu \in \widetilde{W}^\vee$。给定整数 $h \geq 0$，定义子函子 $\mathcal{U}(\widetilde{z})^{\det,\leq h} \subset L\mathcal{G}$，其定义在诺特 $\mathcal{O}$-代数 R 上如下：$\mathcal{U}(\widetilde{z})^{\det,\leq h}(R)$ 是满足下列条件的矩阵 $A \in L\mathcal{G}(R)$ 的集合：对所有 $1 \leq i, k \leq n$，均有：

- $(v+p)^h A_{ik} \in v^{\delta_{i>k}} R[v]$;
- $\deg\left((v+p)^h A_{ik}\right) \leq h + \nu_k + \delta_{i>k} - \delta_{i<z(k)}$;
- $(v+p)^h A_{z(k)k}$ 是一个首一多项式；并且
- $\det(A) = \det(z)(v+p)^{\|\nu\|}$.

其中，我们写成 $\nu = (\nu_\ell)_{1\leq\ell\leq n} \in X^*(T)$ 和 $\|\nu\| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\ell=1}^n \nu_\ell$。

现在我们引入子函子和 $T^\vee$-挠子，这些对象与我们对变形环的分析相关。在上述设定中，定义 $\mathcal{U}(\widetilde{z})^{\det,\leq 0}$ 的以下子函子：

- $U^{[0,n-1]}(\widetilde{z}) \subseteq \mathcal{U}(\widetilde{z})^{\det\leq 0}$ 作为其子函子，其 R-值点是满足以下条件的那些 $A \in \mathcal{U}(\widetilde{z})^{\det\leq 0}$：$A$ 和 $(v+p)^{n-1}A^{-1}$ 均属于 $L^+\mathcal{M}(R)$；注意到，$U^{[0,n-1]}(\widetilde{z})$ 可表示为 $\mathcal{O}$ 上的仿射概形；
- $U(\widetilde{z}, \leq\eta) \subseteq U^{[0,n-1]}(\widetilde{z})$，即 $U^{[0,n-1]}(\widetilde{z})$ 的闭、$\mathcal{O}$-平坦且既约的子概形，其 R-值点由满足初等因子有界于 $(v+p)^\eta$ 的 $A \in U^{[0,n-1]}(\widetilde{z})(R)$ 构成（即 A 的每个 $k\times k$ 子式都能被 $(v+p)^{(k-1)}{}^{k}_{2}$ 整除）；并且
- $\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq\eta) \stackrel{\text{定义}}{=} T^\vee U(\widetilde{z}, \leq\eta)$，作为 $L\mathcal{G}$ 的子概形，其 R-值点具有 $D\widetilde{A}$ 的形式，其中 $D \in T^\vee(R)$ 且 $A \in U(\widetilde{z}, \leq\eta)(R)$；注意到 $U(\widetilde{z}, \leq\eta)$ 带有一个由矩阵的左乘诱导的 $T^\vee_{\mathcal{O}}$-作用，并且我们有 $\left[T^{\vee,\mathcal{J}}\backslash\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq\eta)\right] \cong U(\widetilde{z}, \leq\eta)$。

$A \in U^{[0,n-1]}(\widetilde{z})(R)$ 的条目通常会写成如下形式

$$A_{ik} = v^{\delta_{i>k}}\left(\sum_{\ell=0}^{\nu_k - \delta_{i<z(k)}} a_{ik,\ell}(v+p)^\ell\right)$$

因此 $U^{[0,n-1]}(\widetilde{z})$ 是一个仿射 $\mathcal{O}$-概形，其整体函数是变量 $a_{ik,\ell}$ 上的多项式$\mathcal{O}$-代数模去由条件 $\det(A) = \det(z)(v+p)^{\|\nu\|}$确定的理想所得的商（$\ell$ 的适当取值范围由 $\widetilde{z}$ 和 (i,k) 决定）。接着，$U(\widetilde{z}, \leq\eta)$ 是 $U^{[0,n-1]}(\widetilde{z})$ 的一个闭子概形，由每个 k 乘 k 子式都能被 $(v+p)^{\frac{(k-1)k}{2}}$ 整除这一条件的 p-饱和给出。一般而言，这些概形可能较难描述；不过在命题 3.1.2 和命题 3.2.2 中，我们将给出 $\widetilde{z}$ 余长为一时它们的显式表示。

2.2.2. 代数单值条件。设 $\mathbf{a} \in \mathcal{O}^n$。我们定义一个算子 $\nabla_{\mathbf{a}}$，作用于 $L\mathcal{G}$，其定义为 $\nabla_{\mathbf{a}}(A) \overset{\text{def}}{=} \left(v\frac{d}{dv}(A) - [\mathrm{Diag}(\mathbf{a})\ A]\right)$，并定义一个闭子函子 $L\mathcal{G}^{\nabla_{\mathbf{a}}} \subseteq L\mathcal{G}$，其定义为

$$L\mathcal{G}^{\nabla_{\mathbf{a}}}(R) \overset{\text{def}}{=} \left\{ A \in L\mathcal{G}(R) \mid \nabla_{\mathbf{a}}(A)A^{-1} \in \frac{1}{(v+p)} L^+\mathcal{M}(R) \right\}.$$

（我们将 $[M,N]$ 记作 $L\mathcal{G}$ 上通常的李括号，其定义为 $[M,N] \overset{\text{定义}}{=} MN - NM$。）

我们定义 U 的以下闭子概形 $\widetilde{z}, \leq\eta)$:

- $U_{\mathrm{nv}}(\widetilde{z}, \leq\eta, \nabla_{\mathbf{a}}) \overset{\text{def}}{=} U(\widetilde{z}, \leq\eta) \cap L\mathcal{G}^{\nabla_{\mathbf{a}}}$; 和

将 $\bullet\ U(\widetilde{z}, \leq\eta, \nabla_{\mathbf{a}}) \subseteq U_{\mathrm{nv}}(\widetilde{z}, \leq\eta, \nabla_{\mathbf{a}})$ 定义为 p-平坦闭包，即 $U_{\mathrm{nv}}(\widetilde{z}, \leq\eta, \nabla_{\mathbf{a}})_E$ 在 $U(\widetilde{z}, \leq\eta)$ 内的闭包。

因此，$U(\widetilde{z}, \leq\eta, \nabla_{\mathbf{a}})$ 是闭子概形 $U(\widetilde{z}, \leq\eta)$，其整体函数环是 $\mathcal{O}(U(\widetilde{z}, \leq\eta))$ 关于理想 $I_{\nabla_{\mathbf{a}}}$ 的 p-饱和化所得商环；其中理想 $I_{\nabla_{\mathbf{a}}}$ 由施加泛矩阵

$$A^{\mathrm{univ}} \in U(\widetilde{z}, \leq\eta)\big(\mathcal{O}(U(\widetilde{z}, \leq\eta)\big)$$

满足

$$\big(\nabla_{\mathbf{a}}(A^{\mathrm{univ}})\big)\big(A^{\mathrm{univ}}\big)^{-1} \in \frac{1}{(v+p)} L^+\mathcal{M}(\mathcal{O}(U(\widetilde{z}, \leq\eta)),$$

参见 [LLHLMb，定义 7.1。8]，其中给出了该理想的一组生成元。命题 4.3.2 和命题 4.3.1 给出了关于仿射概形 $U(\widetilde{z}, \leq\eta, \nabla_{\mathbf{a}})$ 的显式表示的一些结果，其中 $\widetilde{z}$ 的余长度至多为一。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$我们类似地定义闭子概形 $U(\widetilde{z}, \leq\eta, \nabla_{\mathbf{a}}) \subseteq U^{\mathrm{nv}}(\widetilde{z}, \leq\eta, \nabla_{\mathbf{a}}) \subseteq U(\widetilde{z}, \leq\eta)$，$\widetilde{\ }$在上述各项中用 $U(\widetilde{z}, \leq\eta)$ 替换 $U(\widetilde{z}, \leq\eta)$。注意，我们还有

$$\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq\eta, \nabla_{\mathbf{a}}) = T^{\vee}U(\widetilde{z}, \leq\eta, \nabla_{\mathbf{a}}), \tag{4}$$

与 $\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq\eta) \overset{\text{定义}}{=} T^{\vee}U(\widetilde{z}, \leq\eta)$ 相容。

2.2.3. 单值化条件与伽罗瓦表示。我们沿用 [LLHLMb 第 2.4] 节中关于驯惯性类型及其最低胞腔表示的记号和术语。特别地，给定 $(s,\mu) = (s^{(j)}, \mu^{(j)})_{j\in\mathcal{J}} \in W^{\mathcal{J}} \times (X^*(T) \cap C_0)^{\mathcal{J}}$，[LLHLMb 的例 2.4.1 中的等式 (5.2)、(5.1)] 给出一个驯惯性类型 $\tau(s, \mu+\eta)$ 以及 n-元组 $\mathbf{a}'^{(j')} \in \mathbb{Z}^n$，其中 $0 \leq j' \leq fr-1$（r 是元素 $s^{(0)}s^{(1)}\cdots s^{(f-2)}s^{(f-1)} \in W$ 的阶）。若 μ 在 $\underline{C}_0$ 中是 1-deep 的，则对每个 $0 \leq j' \leq fr-1$，我们定义 $s'_{\mathrm{or},\ j'}$ 为 W 中满足 $(s'_{\mathrm{or},\ j'})^{-1}(\mathbf{a}'^{(j')}) \in \mathbb{Z}^n$ 为支配的那个元素，并令

$$\mathbf{a}^{(j)} \overset{\text{def}}{=} (s'^{(j)}_{\mathrm{or}})^{-1}(\mathbf{a}'^{(j)})/(1-p^{fr}) \tag{5}$$

对于 $0 \leq j \leq f$。

回顾 [LLHLMb, §7.2] 中定义在 $\mathrm{Spf}\mathcal{O}$ 上的 p-进形式代数栈 $\mathcal{X}^{\leq\eta,\ \tau}$。它是 p-平坦的，等维，维数为 $(1+[K:\ \mathbb{Q}_p]\binom{n}{2})$；此外，若 $\overline{\rho}\colon G_K \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 是一个连续伽罗瓦表示，则 $R^{\leq\eta,\ \tau}_{\overline{\rho}}$ 是 $\mathcal{X}^{\leq\eta,\ \tau}$ 在对应于 $\overline{\rho}$ 的点处的一个 versal 环（见 [EG, §4.8]）。令 $\widetilde{z} = (\widetilde{z}^{(j)})_{j\in\mathcal{J}} \in \widetilde{W}^{\vee,\ \mathcal{J}}$。

令 $N \geq n+1$，并假设 μ 在阿尔科夫 $\underline{C}_0$ 中是 N-深的。根据 [LLHLMb 的定理 7.2.3、定理 7.3.2]，我们有一个开子叠 $\mathcal{X}^{\leq\eta,\tau}(\widetilde{z}) \hookrightarrow \mathcal{X}^{\leq\eta,\tau}$，一个 $\mathcal{O}$-平坦的闭 p-进形式子概形 $\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq\eta, \nabla_{\tau,\infty})$，它属于 $\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq\eta)^{\wedge_p}$（其中 $\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq\eta) \overset{\text{定义}}{=} \prod_{j\in\mathcal{J}} \widetilde{U}(\widetilde{z}^{(j)}, \leq\eta)$，且上标 $\wedge_p$ 表示 p-进完备化），以及一个形式光滑态射

$$\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq\eta, \nabla_{\tau,\infty}) \to \mathcal{X}^{\leq\eta,\tau}(\widetilde{z}) \tag{6}$$

相对维数为 $n\#\mathcal{J}$。

进一步假设 $N \geq 2n-5$ and μ 在阿尔科夫 $\underline{C}_0$中是 N-深的。那么 [LLHLMb, 命题 7.1.10] 表明，形式概形 $U(\widetilde{z}, \leq\eta, \nabla_\tau, \infty)$ 是 p-平坦闭包，来自 $\prod_{j\in\mathcal{J}} \widetilde{U}(\widetilde{z}^{(j)}, \leq\eta, \nabla_{\mathbf{a}^{(j)}})$的一个自然变形，具体如下：令 $I^{(j)}_{\nabla_{\mathbf{a}^{(j)}}}$ 为在 $\widetilde{U}(\widetilde{z}^{(j)}, \leq\eta)$ 中切出 $\widetilde{U}(\widetilde{z}^{(j)}, \leq\eta, \nabla_{\mathbf{a}^{(j)}})$的理想，则 $\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq\eta, \nabla_\tau, \infty)$由一个理想 $I_{\nabla_\tau,\infty}$ 的 p-饱和化切出；该理想由 $\sum_{j\in\mathcal{J}} I^{(j)}_{\nabla_{\mathbf{a}^{(j)}}}$ 得到，方法是在其自然生成元集中每个元素上加上一个可被 p^{N-2n+5} 整除的元素（特别地，$I_\nabla \subset \sum_j (I^{(j)}_{\nabla_{\mathbf{a}^{(j)}}}, p^{N-2n+5})$。）这一性质可以（滥用地）表述如下：给定一个 p-进完备的诺特 $\mathcal{O}$-代数 R，$\widetilde{\quad}$，如果 $A \in U(\widetilde{z}, \leq\eta)^{\wedge_p}(R)$ 满足 $I_{\nabla_\tau,\infty}$ 中的方程，那么

$$\big(\nabla_{\mathbf{a}^{(j)}}(\widetilde{A}^{(j)})\big)\big((v+p)^{n-1}\widetilde{A}^{(j)}\big)^{-1} \in (v+p)^{n-2}\mathrm{M}_n(R[v]) + p^{N-2n+5}\mathrm{M}_n(R[\![v]\!]). \tag{7}$$

最后，我们回顾一下对 $\mathcal{X}^{\leq\eta,\ \tau}(\widetilde{z})$ 有贡献的伽罗瓦表示的刻画：如果 $\overline{\rho} \in \mathcal{X}^{\leq\eta,\ \tau}(\widetilde{z})(\mathbb{F})$，那么其 ´etale φ模 $\mathcal{M}_{\overline{\rho}} = \mathbb{V}^*_K(\overline{\rho}|_{G_{K_\infty}})$（参见 [LLHLMb，第 5 节）5], 具有一个基，使得相对于该基，Frobenius 矩阵属于 $\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq\eta)(\mathbb{F})\ \prod_{j\in\mathcal{J}} s_j^{-1} v^{\mu_j+\eta_j}$。如果进一步地，Frobenius 矩阵属于 $\prod_{j\in\mathcal{J}} \mathcal{I}\widetilde{z}^{(j)}\mathcal{I}s_j^{-1} v^{\mu_j+\eta_j}$，我们就称 $\overline{\rho}$ 相对于 τ 具有形状 $\widetilde{z}$。（这里，$\mathcal{I}$表示 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}((v)))$ 的 Iwahori 子群，该子群对应于上三角矩阵的 Borel 子群。）

由 [LLHLMb，命题 5.4.7] 可知，任意 $\overline{\rho} \in \mathcal{X}^{\leq\eta,\ \tau}(\mathbb{F})$ 在 $\mathrm{Adm}(\eta)$ 中都有唯一的形状，我们将其记为 $\widetilde{w}(\overline{\rho}, \tau)^*$。

3. Finite height conditions

在本节中，当 $\widetilde{w}^* \in \mathrm{Adm}(\eta)$ 的余长为一时，我们描述 $U(\widetilde{w}, \leq\eta)$。在本小节中，$R$ 表示一个诺特 $\mathcal{O}$-平坦 $\mathcal{O}$-代数，并且对于每个 $\beta \in \Phi^-$，我们使用记号 $u_\beta : \mathbb{G}_a \hookrightarrow w_0 U w_0$ 表示到 β-项的嵌入，其中 U 是 GL_n 中上三角幺幂矩阵构成的子群。此外，给定 $A \in \mathrm{Mat}_n(R)$ 和 $\beta = \varepsilon_i - \varepsilon_j \in \Phi$，我们将 A_β 和$A_{\beta,\ \ell}$ 分别记作 A_{ij} 和 $a_{ik,\ \ell}$。

3.1. 有限高度条件：第一种形式。设 $\widetilde{w}^* \in \mathrm{Adm}(\eta)$ 是第一种形式的余长度一形状。因此，根据命题 2.1.2 和 $\widetilde{w} \mapsto \widetilde{w}^*$ 的定义，我们有 $\widetilde{w} = w s_\alpha t_\eta w^{-1}$，其中 $w \in W$ 满足 $w(\alpha) > 0$，且对于所有 $i_0 < k < j_0$，$w(k)$ 都不属于区间 $(w(i_0)\ w(j_0))$，若我们设 $\alpha = \alpha_{i_0 j_0} \in \Phi^+ \setminus \Delta$。为方便记号，我们设 $s \overset{\text{定义}}{=} s_\alpha$ 和 $w' \overset{\text{定义}}{=} w s$。

着眼于单值化条件，我们引入以下内容。

定义 3.1.1. 我们称负根 $\beta \in \Phi^-$ 是坏的（相对于 $\widetilde{w}$），如果以下任一条件成立：

- β 与 α共享同一行或同一列；
- $\delta_{w(\beta)<0} \neq \delta_{w'(\beta)<0}$.

命题 3.1.2. 设 $A \in U(\widetilde{w}, \leq\eta)(R)$.

那么对于某些 $c \in R$，有 $A_{w(j_0)w(j_0)} = (w^{-1}Aw)_{j_0 j_0} = c(v+p)^{n-j_0}$ and

$$s \cdot u_{-\alpha}(-c) \cdot (w^{-1}Aw) = (v+p)^\eta \cdot V \tag{8}$$

其中 V 是一个下三角幺幂矩阵，其元素属于 $R[v]$。

此外，对于每个 $\beta \in \Phi^-$，条目 V_β 都可写为 $v^{\kappa_\beta} \cdot f_\beta(v)$，其中多项式 $f_\beta(v) \in R[v]$ 的形式为 $\sum_k c_{\beta,\ k}(v+p)^k$，其中

(1) 如果 β 不好，那么 $\kappa_\beta = \delta_{w(\beta)<0} = 0$ 和 $\deg(f_\beta) < |\langle \eta,\ \beta^\vee\rangle| + 1$;

(2) 如果 β 与 α 同行或同列，但不是坏的，那么 $\kappa_\beta = \delta_{w(\beta)<0}$ 且 $\deg(f_\beta) \lhd \langle \eta, \beta^\vee \rangle|$; (3) 如果 β 与 $-\alpha$ 同行，那么 $\kappa_\beta = \delta_{w'(\beta)<0}$ 且 $\deg(f_\beta) < |\langle \eta, \beta^\vee \rangle|$; (4) 如果 β 与 $-\alpha$ 同列且与 $\beta \neq -\alpha$ 一起，那么 $\kappa_\beta = \delta_{w(\beta)<0}$ 且 $\deg(f_\beta) < |\langle \eta, \beta^\vee \rangle| - \delta_{w(-\alpha)<w(\beta)<0}$; (5) 对于所有其他根 $\beta \in \Phi^-$, $\kappa_\beta = \delta_{w(\beta)<0}$ 且 $\deg(f_\beta) < |\langle \eta, \beta^\vee \rangle|$。

证明。容易看出，$(w^{-1}Aw)_{j_0 j_0}$ 是一个次数小于 $n - j_0 + 1$的多项式。令 $c \in R$为$(w^{-1}Aw)_{j_0 j_0}$中 v^{n-j_0} 的系数，并按（8）定义 $C \overset{\text{def}}{=} su_{-\alpha}(-c)(w^{-1}Aw)$。容易得到以下次数界：

- 对所有 $1 \le l \le n$, $\deg(C_{ll}) \le n - l$;
- 对于满足 $l, m \notin \{i_0, j_0\}$, $C_\beta = v^{\delta_{w(\beta)<0}} f_\beta(v)$且$\deg(f_\beta) \le n - m - 1$的 $\beta = \alpha_{lm} \in \Phi$;
- 对于 $\beta = \alpha_{i_0 m} \in \Phi$, $C_\beta = v^{\delta_{w(\beta)<0}} f_\beta(v)$且$\deg(f_\beta) \le n - m - 1 + \delta_{w'(\beta)<0<w(\beta)}$;
- 对于 $\beta = \alpha_{j_0 m} \in \Phi$、 $C_\beta = v^{\delta_{w'(\beta)<0}} f_\beta(v)$, 其中 $\deg(f_\beta) \le n - m - 1$;
- 对于 $\beta = \alpha_{l i_0} \in \Phi$ 与 $l \neq j_0$, $C_\beta = v^{\delta_{w(\beta)<0}} f_\beta(v)$且 $\deg(f_\beta) \le n - i_0 - \delta_{w(\beta)<0} - \delta_{w(\beta)>w(-\alpha)}$;
- 对于 $\beta = \alpha_{l j_0} \in \Phi$, $C_\beta = v^{\delta_{w(\beta)<0}} f_\beta(v)$, 其中 $\deg(f_\beta) \le n - j_0 - \delta_{w(\beta)>w(\alpha)} - \delta_{w(\beta)<0}$.

我们将反复以下列方式使用有限高度条件：

(1) 假设 C 的大小为 $k \times k$ 的右下块具有以下形式 m

$$\begin{pmatrix} C_{(n+1-k)(n+1-k)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ C_{n(n+1-k)} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix},$$

并且$(v+p)^{n-l} \mid C_{lm}$ 如果 C_{lm} 位于上面的 $(k \times k)$-块上；

(2) 对于满足 $1 \le l$、 $m \le n-k$ 的 l 和 m，假设由 C_{lm} 及其上方的 $k \times k$ 块确定的 $(k+1) \times (k+1)$ 子矩阵也是下三角的；(3) 将有限高度条件 $(v+p)^{\frac{k(k+1)}{2}} \mid$ （$(k+1) \times (k+1)$ 子式）应用于上述 $(k+1) \times (k+1)$ 子矩阵，可得 $(v+p)^{n-k} \mid C_{lm}$。

我们首先证明， C 上的有限高度条件蕴含 C 右下方的 $(n-i_0+1) \times (n-i_0+1)$ 块具有陈述中所描述的形式。结合次数界，利用归纳法即可证明如下。由次数界可知，当 $l < n$ 时，对于 $\beta = \alpha_{ln}$，显然有 $C_\beta = 0$。现在通过归纳使用上面的条目 (1)、(2)、(3)，可得 C 右下方的 $(n - i_0 + 1) \times (n - i_0 + 1)$ 块具有陈述中所描述的形式。此外，通过归纳使用上面的条目 (1)、(2)、(3)，还可直接得出：当 $1 \le l < m$ 且 $j_0 < m \le n$ 时， $C_{lm} = 0$；当 $i_0 \le l \le n$ 且$1 \le m \le l$时，$(v+p)^{n-l} \mid C_{lm}$。

现在我们验证：若 $\beta = \alpha_{lm}$，则 $C_\beta = 0$，其中 $1 \le l < i_0$ 且 $l < m \le j_0$。注意，一般而言，我们不能仅凭由上述 (1)、(2)、(3) 项对 $1 \le l < i_0$ 所诱导的事实 $(v+p)^{n-j_0} | C_{lj_0}$，就推出 $C_{lj_0} = 0$，因为当 $w(i_0) < w(l) < w(j_0)$ 时，多项式 C_{lj_0} 的次数界比通常高一。令 $\beta = \alpha_{lj_0}$ 为这样一个根，并假设 C 的右下 $(n-l) \times (n-l)$ 块如陈述中所述。根据 (1)、(2)、(3) 项以及次数界，我们可令 $C_\beta = x(v+p)^{n-j_0}$，其中 $x \in R$。考察 $C' \overset{\text{定义}}{=} u_\beta(-x)C$。于是我们有 $C'_\beta = 0$；此外，有限高度条件与次数界表明，对所有 $i_0 \le m < j_0$，都有 $C'_{lm} = 0$。特别地，我们有

$$C'_{li_0} = C_{li_0} - xC_{-\alpha} = 0.$$

考察 C'_{li_0} 的常数部分；由于它与 $-xC_{-\alpha}$ 的常数部分相同（因为 $v \mid C_{li_0}$），我们在 R 中有 $p^{|\langle \eta,\ -\alpha^\vee\rangle|-1}xc_{-\alpha}=0$，其中我们令 $p^{|\langle \eta,\ -\alpha^\vee\rangle|-1}c_{-\alpha}$ 为 $C_{-\alpha}$ 的常数部分。另一方面，根据引理 3.1.6 $c_{-\alpha}$ 是 $R[\frac{1}{p}]$ 中的一个单位，因此我们得出 $x=0$。（注意，证明引理 3.1.6 时，我们只用到了 C 的右下 $(n-i_0+1)\times(n-i_0+1)$ 块如陈述中所述这一事实，而这一点已在上一段中证明。）现在，将上述 (1)、(2)、(3) 项与次数界反复结合使用，我们得出：若 $l<m\le j_0$，则 $C_{lm}=0$。重复这一论证，我们得出：若 $\beta=\alpha_{lm}$，且 $1\le l<i_0$ 和 $l<m\le j_0$，则 $C_\beta=0$；并且若 $1\le m\le l\le n$，则 $(v+p)^{n-l}\mid C_{lm}$。

最后，我们指出 $(w^{-1}Aw)_{j_0j_0}=c(v+p)^{n-j_0}$，由于次数界限，这一点在归纳步骤中很容易看出。至此，证明完成。□

在本小节余下部分，我们考察命题 3.1.2 中定义的 $\kappa_\beta\in\{0,1\}$ 的一些必要性质，以及由有限高度条件得出的 V 的系数的一些恒等式。首先固定一些记号：

- 对于 $\beta\in\Phi^-$，我们用 $\mathfrak{D}_\beta$ 表示将 β 分解为两个负根 (β_1,β_2) 的分解集合，其中 β_1 与 β 共列（且 β_2 与 β 共行）。
- 对于坏根 $\beta\in\Phi^-$，我们用 $\mathfrak{A}_\beta$ 表示集合 $\{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{D}_\beta\mid \kappa_\beta=\kappa_{\beta_1}+\kappa_{\beta_2}\}$。

该 f 以下是命题 3.1.2 的直接推论，其将频 地使用 d:

- 若 β 与 α 共享同一行，则有$\kappa_\beta=\kappa_{s(\beta)}$;
- 如果 β 是与 α 共享列的坏根，那么 $\deg(v^{-\kappa_{s(\beta)}}V_{s(\beta)})<|\langle\eta,s(\beta)^\vee\rangle|-1$ 和$\kappa_{s(\beta)}=1+\kappa_\beta$;
- 如果 $(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{D}_{-\alpha}$ 则 $\kappa_{\beta_1}+\kappa_{\beta_2}=1$;
- $\kappa_{-\alpha}=0$。

引理 3.1.3。设 $\beta=\alpha_{lm}\in\Phi^-$。那么，如果 $l\le j_0$ 或 $m>i_0$，则 κ_β 是次可加的，即$\kappa_\beta\le\kappa_{\beta_1}+\kappa_{\beta_2}$ 对所有 $(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{D}_\beta$。

此外，如果 β 有一个分解 $(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{D}_\beta$，且满足 $\kappa_\beta>\kappa_{\beta_1}+\kappa_{\beta_2}$，那么

- $l>j_0$ 和 $m\le i_0$;
- $\kappa_\beta=1$ 和 $\kappa_{\beta_1}=\kappa_{\beta_2}=0$;
- β_1 与 $-\alpha$ 共行，使得 β_2 是坏的，并且 $s(\beta_1)$ 是坏的或 $\beta_1=-\alpha$。

证明。显然可以观察到

- 如果 $\beta=\alpha_{lm}$ 与 $l\notin\{i_0,j_0\}$ 那么 $\kappa_\beta=\delta_{w(\beta)<0}$;
- 如果 $\beta=\alpha_{i_0m}$ 那么 $\kappa_\beta=\delta_{w(\beta)<0}$;
- 如果 $\beta=\alpha_{j_0m}$ 那么 $\kappa_\beta=\delta_{w'(\beta)<0}$。

第一部分由结合这三个观察结果以及以下事实得出：$\delta_{w(\beta)<0}\le\delta_{w(\beta_1)<0}+\delta_{w(\beta_2)<0}$ if $(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{D}_\beta$，逐个情形讨论。

对于第二部分，如果 β 有一个分解（β_1，β_2）$\in\mathfrak{D}_\beta$ 且 $\kappa_\beta>\kappa_{\beta_1}+\kappa_{\beta_2}$，那么很容易看出 β_1 与 $-\alpha$ 共享同一行，因此如果 $\beta_1\neq-\alpha$，那么我们有 w'（β_1）>0 以及 w（β_1）<0，所以 s（β_1）是不好的。β_2 也不好，因为 w'（β_2）<0。□

引理3.1.4。设 $\beta\in\Phi^-$ 是与 α共享同一行的坏根。则映射$(\beta_1,\beta_2)\mapsto(\beta_1,s(\beta_2))$在以下集合之间给出一个双射：

- 集合 $\mathfrak{A}_\beta$;
- 元素集合(β_1,β_2)属于 $\mathfrak{A}_{s(\beta)}$，具有 $\beta_2\neq-\alpha$。

此外，当（β_1,β_2）$\in\mathfrak{A}_\beta$时，$\beta_2\in\Phi^-$ 是不好的。

证明。对于 $(\beta_1,\beta_2) \in \mathfrak{D}_\beta$，容易看出，$\kappa_\beta = \kappa_{\beta_1} + \kappa_{\beta_2}$当且仅当 $\kappa_{\beta_1} = 0 = \kappa_{\beta_2}$，当且仅当 $w(\beta_1) > 0$、$w(\beta_2) > 0$以及 $w'(\beta_2) < 0$，当且仅当$\kappa_{\beta_1} = 0 = \kappa_{s(\beta_2)}$，当且仅当$\kappa_{s(\beta)} = \kappa_{\beta_1} + \kappa_{s(\beta_2)}$。此外，如果 $(\beta_1,\beta_2) \in \mathfrak{A}_\beta$，那么 $w(\beta_2) > 0$ 且 $w'(\beta_2) < 0$，因此 β_2 是不好的。证明完毕。□

引理 3.1.5. 设 $\beta \in \Phi^-$ 是一个与 α共享列的根。如果 β 是坏的，那么映射 $(\beta_1,\beta_2) \mapsto (s(\beta_1)\ \beta_2)$ 在以下集合之间给出一个双射:

- 集合 $\mathfrak{A}_\beta$;
- $\mathfrak{A}_s$ 中的元素 (β)，使得 $s(\beta_1)$ 为坏的集合。

此外，如果 β 不是坏的，且 $(\beta_1,\beta_2) \in \mathfrak{A}_{s(\beta)}$，那么 $s(\beta_1)$ 也不是坏的。

证明。假设 β 是不好的。那么我们有 $\kappa_\beta = 0$ 和 $\kappa_{s(\beta)} = 1$。此外，对于(β_1,β_2)，$\in \mathfrak{D}_\beta$ 很容易看出，$\kappa_{s(\beta)} = \kappa_{\beta_1} + \kappa_{\beta_2}$ 和 $s(\beta_1)$是不好的，当且仅当 $\kappa_{\beta_1} = 1$、$\kappa_{s(\beta_1)} = 0$，并且 $\kappa_{\beta_2} = 0$，当且仅当$\kappa_\beta = \kappa_{s(\beta_1)} + \kappa_{\beta_2}$。这就完成了第一部分的证明。

对于第二部分，如果 $\kappa_\beta = 0$，这是显然的。如果 $\kappa_\beta = 1$ 那么 $\kappa_{s(\beta)} = 1$，因为 β 并不坏，因此我们有$\kappa_{\beta_2} = 1$ 或 $\kappa_{\beta_1} = 1$。如果$\kappa_{\beta_2} = 1$ 那么 $\kappa_{\beta_1} = 0$，因此 $s(\beta_1)$并不坏。如果$\kappa_{\beta_2} = 0$ 那么$\kappa_{\beta_1} = 1$，且$\kappa_{s(\beta_1)} = 1$，因此 $s(\beta_1)$并不坏。证明完毕。□

对于每个 $\beta \in \Phi^-$，令 c_β 为 V_β 中 v^{κ_β} 的系数。对于每个满足 $l \le j_0$ 或 $i_0 \le m$ 的 $\beta = \alpha_{lm} \in \Phi^-$，令 c^i_β 为 V^i_β 中 $v^{\kappa_\beta - 1}$（分别为 v^{κ_β}）的系数，当 $l > j_0$ 且 $m = i_0$ 时（分别在其他情况下），其中 $V^i \overset{\text{def}}{=} V^{-1}$。

引理3.1.6. 如果 β 是一个与 α 共享同一行的坏根，那么

$$c_\beta \cdot p^{|\langle \eta, \alpha^\vee \rangle|} = -c \cdot c_{s(\beta)}.$$

此外，我们有 $-c \cdot c_{-\alpha} = p^{|\langle \eta,\ \alpha^\vee \rangle|}$。

证明。这直接由 (8) 中的初等运算以及有限高度条件得出。例如，我们有 $C_{i_0,i_0} = v(v+p)^{n-i_0-1} - cC_{-\alpha} = (v+p)^{n-i_0}$ 其中 C 在命题 3.1.2 的证明中定义。现在，对该恒等式提取常数项，我们得到 $-c \cdot c_{-\alpha} = p^{|\langle \eta, \alpha^\vee \rangle|}$。□

引理 3.1.7. 设 $\beta \in \Phi^-$ 是一个坏根。

(1) 如果 $\beta \in \Phi^-$ 与 α 共享同一行，那么我们有

$$c_{s(\beta)} + \sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{A}_\beta} c_{s(\beta_2)} c^i_{\beta_1} + c_{-\alpha} c^i_\beta + c^i_{s(\beta)} = 0.$$

(2) 如果 $\beta \in \Phi^-$ 共享 α 所在的列，那么我们有

$$c_\beta c^i_{-\alpha} + \sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{A}_\beta} c_{\beta_2} c^i_{s(\beta_1)} + c^i_{s(\beta)} = 0.$$

证明。(1) 由引理 3.1.4 和引理 3.1.3 立即得出，只需提取等式 $(V \cdot V^i)_{s(\beta)} = 0$ 中的常数项。

显然，若 $\beta' \in \Phi^-$ 与 $\beta' \neq -\alpha$ 共享 $-\alpha$ 的列，且 $s(\beta')$ 不差，则 $V^i_{\beta'}$ 中 $v^{\kappa_{\beta'}-1}$ 的系数为零，因为若 $s(\beta')$ 不差，则 $\kappa_{\beta'}$ 是次可加的。结合引理 3.1.5 和引理 3.1.3，通过提取方程 $(V \cdot V^i)_{s(\beta)} = 0$ 中的常数项，即可得出 (2)。□

3.2. 有限高度条件：第二种形式。令 $\widetilde{w}^* \in \mathrm{Adm}(\eta)$ 为第二种形式的余长度一形状。记 $\widetilde{w} = ws_\alpha t_{\eta-\alpha} w^{-1}$，其中 $w \in W$ 满足 $w(\alpha) < 0$ 以及 $w(j_0) < w(k) < w(i_0)$ 对所有 $i_0 < k < j_0$，若我们设 $\alpha = \alpha_{i_0 j_0} \in \Phi^+ \setminus \Delta$。为方便记号起见，设 $w' \overset{\text{def}}{=} ws_\alpha$ 以及 $s \overset{\text{def}}{=} s_\alpha$，从而我们可以写成 $\widetilde{w} = w' t_{\eta-\alpha} s w'^{-1}$。

With 为了应用单值化条件，我们引入以下内容。 g:

Defi定义 3.2.1. 我们称负根 $\beta \in \Phi^-$ 是坏的（相对于 $\widetilde{w}$），如果

- β 与 α同行或同列;
- β 满足 $\delta_{w(\beta)<0} = \delta_{w'(\beta)<0}$。

命题 3.2.2. 设 $A \in U(\widetilde{w}, \leq_\eta)(R)$.

然后 $A_{w'(i_0)w'(i_0)} = (w'^{-1}Aw')_{i_0 i_0} = c(v+p)^{n-j_0}$ 对于某个 $c \in R$ 和

$$u_\alpha(-c) \cdot v^{\varepsilon_{i_0}} \cdot (w'^{-1}Aw') \cdot s = (v+p)^\eta \cdot V' \tag{9}$$

其中 V' 是一个元素属于 $R[v]$的下三角矩阵。

此外，$V \overset{def}{=} v^{-\varepsilon_{j_0}} \cdot V'$ 是幺幂的，并且对于每个 $\beta \in \Phi^-$，条目 V'_β 都可以写成$v^{\kappa'_\beta} \cdot f_\beta(v)$ 的形式，其中多项式 $f_\beta(v) \in R[v]$ 具有$\sum_k c_{\beta,\ k}(v+p)^k$ 的形式，其中

(1) 如果 β 是坏的，则 $\kappa'_\beta = \delta_{w'(\beta)<0}$ 且$\deg(f_\beta) < |\langle \eta, \beta^\vee \rangle| + 1$; (2) 如果 β与 α 位于同一行或同一列，但不是坏的，则 $\kappa'_\beta = 1 + \delta_{w'(\beta)<0} = \delta_{w(\beta)<0} = 1$且 $\deg(f_\beta) < |\langle \eta, \beta^\vee \rangle|$;(3) 如果 β 与 $-\alpha$ 位于同一列，则 $\kappa'_\beta = \delta_{w(\beta)<0}$ 且 $\deg(f_\beta) < |\langle \eta, \beta^\vee \rangle| - \delta_{w(\beta)>w'(\alpha)} - \delta_{w(\beta)<0}$; (4) 对于所有其他根 $\beta \in \Phi^-$, $\kappa'_\beta = \delta_{w'(\beta)<0}$ 且 $\deg(f_\beta) < |\langle \eta, \beta^\vee \rangle|$.

证明。容易看出，$(w'^{-1}Aw')_{i_0 i_0}$是次数小于 $n - j_0 + 1$的多项式。设 $c \in R$是$(w'^{-1}Aw')_{i_0 i_0}$中v^{n-j_0} 的系数，并按式（9）设 $C \overset{\text{定义}}{=} u_\alpha(-c)v^{\varepsilon_{i_0}}(w'^{-1}Aw')s$。容易得到以下次数界：

- 若 $l \neq j_0$，则 $\deg(C_{il}) \leq n - l$；且 $\deg(C_{j_0 j_0}) \leq n - l + 1$，$C_{j_0 j_0} \in vR[v]$;
- 对于满足 $l \neq i_0$ 和 $m \notin \{i_0, j_0\}$的 $\beta = \alpha_{lm} \in \Phi$，$C_\beta = v^{\delta_{w'(\beta)<0}} f_\beta(v)$的次数满足 $\deg(f_\beta) \leq n-m-1$;
- 对于$\beta = \alpha_{li_0} \in \Phi$，$C_\beta = v^{\delta_{w(\beta)<0}} f_\beta(v)$，其中 $\deg(f_\beta) \leq n - i_0 - 1 - \delta_{w(\beta)>w'(\alpha)} - \delta_{w(\beta)<0}$;
- 对于 $\beta = \alpha_{lj_0} \in \Phi$ 具有 $\beta \neq \alpha$，$C_\beta = v^{\delta_{w(\beta)<0}} f_\beta(v)$，其$\deg(f_\beta)$ 为 $\leq n - j_0 + 1 - \delta_{w(\beta)>w'(-\alpha)} - \delta_{w(\beta)<0}$;
- 当 $\beta = \alpha_{i_0 m} \in \Phi$、$C_\beta = v^{\delta_{w(\beta)<0}} f_\beta(v)$ 的 $\deg(f_\beta)$ 为 $\leq n - m$（若 $\beta \neq \alpha$），且 $C_\alpha = v f_\beta(v)$ 的 $\deg(f_\beta)$ 为 $\leq n - j_0$。

现在，证明的其余部分与命题 3.1.2 类似，细节留给读者。 □

在本小节的其余部分，我们将考察 $\kappa'_\beta \in \{0, 1\}$ 的一些必要性质（其定义见命题 3.2.2），以及由有限高度条件得到的 V' 的系数（因而也是 V 的系数）的一些恒等式。我们首先固定一些记号：

对于 $\beta \in \Phi^-$，我们用 $\mathfrak{D}_\beta$ 表示 β 分解为两个负根(β_1, β_2)的分解集合，其中 β_1 与 β 共享同一列（而 β_2 与 β 共享同一行）。

- 对于坏根 $\beta \in \Phi^-$，我们将 $\mathfrak{A}_\beta$ 记作集合 $\{(\beta_1, \beta_2) \in \mathfrak{D}_\beta \mid \kappa'_\beta = \kappa'_{\beta_1} + \kappa'_{\beta_2}\}$。
- 为了描述 V 中每个条目的底部次数，我们设定 $\kappa_\beta \overset{\text{定义}}{=} \kappa'_\beta - 1$ 如果 $\beta \in \Phi^-$ 与 $-\alpha$ 共享同一行，并在其他情况下设定 $\kappa_\beta \overset{\text{定义}}{=} \kappa'_\beta$。

以下 是命题 3.2.2 的直接推论，该命题将被频繁使用 d:

- 如果 β 是坏的，那么我们有 $\kappa'_\beta = \kappa'_{s(\beta)}$；
- 如果 β 是一个与 α 共享同一列的坏根，那么 $\deg(v^{-\kappa'_{s(\beta)}}V'_{s(\beta)}) < |\langle \eta, s(\beta)^\vee\rangle| - 1$;
- 如果 $\beta = \alpha_{j_0 m}$ 与 $i_0 < m \le j_0$ 那么 $\kappa'_\beta = 1$;
- 若 $\beta = \alpha_{l i_0}$ 与 $i_0 < l \le j_0$，则 $\kappa'_\beta = 0$，尤其是 $\kappa_{-\alpha} = -1$。

引理3.2.3.设 $\beta = \alpha_{lm} \in \Phi^-$。则 κ'_β 是次可加的，即 $\kappa'_\beta \le \kappa'_{\beta_1} + \kappa'_{\beta_2}$ 对所有 $(\beta_1, \beta_2) \in \mathfrak{D}_\beta$。

此外，如果 β 具有分解 $(\beta_1, \beta_2) \in \mathfrak{D}_\beta$，且 $\kappa_\beta > \kappa_{\beta_1} + \kappa_{\beta_2}$，那么

- $l > j_0$ 和 $m \le i_0$;
- β_1 与 $-\alpha$ 在同一行，使得 β_2 是坏的，并且 $s(\beta_1)$ 是坏的或 $\beta_1 = -\alpha$。

证明。证明与引理 3.1.3 非常相似。注意到

- 若 $\beta = \alpha_{lm}$ 满足 $l \ne i_0$ 且 $m \notin \{i_0, j_0\}$，则 $\kappa'_\beta = \delta_{w'(\beta)<0}$;
- 若 $\beta = \alpha_{lm}$ 满足 $m \in \{i_0, j_0\}$，则 $\kappa'_\beta = \delta_{w(\beta)<0}$;
- 若 $\beta = \alpha_{i_0 m}$，则 $\kappa'_\beta = \delta_{w(\beta)<0}$。

κ'_β 的次可加性可由上述三个观察结果与以下事实相结合得出：$\delta_{w'(\beta)<0} \le \delta_{w'(\beta_1)<0} + \delta_{w'(\beta_2)<0}$，如果 $(\beta_1, \beta_2) \in \mathfrak{D}_\beta$。当 $l \le j_0$ 或 $i_0 < m$ 时，κ_β 的次可加性也可由 κ'_β 的次可加性以及 w 的余长为一性质轻易得出。

假设 β 有一个分解 $(\beta_1, \beta_2) \in \mathfrak{D}_\beta$，其中 $\kappa_\beta > \kappa_{\beta_1} + \kappa_{\beta_2}$。由于 κ'_β 是次可加的，且当 $m > i_0$ 时 κ_β 是次可加的，我们可知 β_1 与 $-\alpha$ 同行，因此 β_2 与 α 同列。也容易看出 β_2 是坏的，并且当 $\beta_1 \ne -\alpha$ 时，$s(\beta_1)$ 是坏的。□

引理 3.2.4。设 $\beta \in \Phi^-$ 是与 α 共享同一行的坏根。那么，映射 $(\beta_1, \beta_2) \mapsto (\beta_1, s(\beta_2))$ 在以下集合之间给出一个双射：

- 集合 $\mathfrak{A}_\beta$;
- 集合 $\mathfrak{A}_{s(\beta)}$ 中满足 $\beta_2 \ne -\alpha$ 的元素 (β_1, β_2)。

此外，如果 $(\beta_1, \beta_2) \in \mathfrak{A}_\beta$，$\beta_2 \in \Phi^-$ 是不好的。

证明。论证与引理 3.1.4 非常相似。细节留给读者。 □

引理 3.2.5。令 $\beta \in \Phi^-$ 是与 α 共享同一列的根。如果 β 是坏的，则映射 $(\beta_1, \beta_2) \mapsto (s(\beta_1)\ \beta_2)$ 在以下集合之间给出一个双射：

- 集合 $\mathfrak{A}_\beta$;
- 满足 $s(\beta_1)$ 为坏根的 $\mathfrak{A}_{s(\beta)}$ 的元素 (β_1, β_2) 集合。

此外，如果 β 不是坏根且 $(\beta_1, \beta_2) \in \mathfrak{A}_{s(\beta)}$，那么 $s(\beta_1)$ 不是坏根。

证明。论证与引理 3.1.5 非常相似。细节留给读者。 □

对于每个 $\beta \in \Phi^-$，令 c_β 为 V'_β 中 $v^{\kappa'_\beta}$ 的系数。对于每个满足 $l \le j_0$ 或 $i_0 \le m$ 的 $\beta = \alpha_{lm} \in \Phi^-$，令 $c^\imath_\beta$ 为 $V^\imath_\beta$ 中 $v^{\kappa'_\beta - 1}$（分别为 $v^{\kappa'_\beta}$）的系数，其中 $l = j_0$ 或 $l > j_0$ 且 $m = i_0$（分别为其他情况），定义如下：$V^\imath \xrightarrow{定义} V^{-1}$。

引理 3.2.6. 如果 β 是与 α 共享同一行的坏根，那么

$$c_\beta \cdot p^{|\langle \eta, \alpha^\vee\rangle|} = -c \cdot c_{s(\beta)}.$$

此外，我们有 $-c \cdot c_{-\alpha} = p^{|\langle \eta,\ \alpha^\vee\rangle|}$。

证明。采用引理 3.1.6 中的相同论证也同样适用，即使用（9）中的初等运算以及有限高度条件。□

引理 3.2.7。设 $\beta \in \Phi^-$ 是一个坏根

(1) 如果 $\beta \in \Phi^-$ 与 α 处于同一行，则有

$$c_{s(\beta)} + \sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{A}_\beta} c_{s(\beta_2)} c'_{\beta_1} + c_{-\alpha} c'_{\beta} + c'_{s(\beta)} = 0.$$

(2) 如果 $\beta \in \Phi^-$ 与 α 处于同一列，则有

$$c_{\beta} c'_{-\alpha} + \sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{A}_\beta} c_{\beta_2} c'_{s(\beta_1)} + c'_{s(\beta)} = 0.$$

证明。证明与引理 3.1.7 的证明类似。唯一的区别是，我们分别使用引理 3.2.4、引理 3.2.3 和引理 3.2.5，而不是引理 3.1.4、引理 3.1.3 和引理 3.1.5。□

3.3. $U(\widetilde{w},\leq\eta)$ 在余长为一情形下的描述。设 V 为命题 3.1.2 或命题 3.2.2 中引入的矩阵。对于每个 $\beta \in \Phi^-$，我们令 $m_\beta \overset{定义}{=} |\langle \eta、 \beta^\vee\rangle| - 1$，并回顾条目 V_β 的形式为

$$v^{\kappa_\beta} \sum_{k=0}^{m'_\beta} c_{\beta,k} (v+p)^k$$

其中

$$m'_\beta = \begin{cases} m_\beta + 1 \text{ 如果 } \beta \text{ 不佳；如果 } \beta \text{ 与 } -\alpha \text{ 位于同一列，使得 } s(\beta) \in \Phi^- \text{ 不佳；否则。} \\ m_\beta - 1 \\ m_\beta \end{cases} \tag{10}$$

命题3.3.1. 设 $\widetilde{w}^* \in$Adm(η) 是一种余长度一形状。那么存在一个闭浸入

$$U(\widetilde{w},\leq\eta) \hookrightarrow \mathrm{Spec}\mathcal{O}[\{c_{\beta,k} \mid \beta \in \Phi^- \ and \ 0 \leq k \leq m'_\beta\} \cup \{c\}].$$

证明。这立即由命题 3.1.2 和 3.2.2 得出。 □

4. Monodromy conditions

在本节中，我们推导出某些恒等式和性质，这些恒等式和性质对于描述$U(\widetilde{w},\leq\eta,\nabla_{\mathbf{a}})$而言是必要的：当 $\widetilde{w}^* \in$ Adm(η)的余长为一时，对于一个 $\in \mathcal{O}^n$。在本节中，我们始终用 R表示一个诺特 $\mathcal{O}$-平坦 $\mathcal{O}$-代数。我们沿用第§3节的记号。

我们固定一些记号。令 γ_β def= $\kappa_\beta + m'_\beta$，其中 m'_β 在 (10) 中定义。对于每个 $\beta \in \Phi^-$，我们记 F$_{\geq\beta}$（分别记 F$_{>\beta}$）为由单项式 $c_{\beta_1,k_1} \cdots c_{\beta_s,k_s}$ 生成的自由 $\mathbb{Z}$-模，其中 $k_1, \cdots, k_s$ 取遍所有满足 $\sum_{i=1}^s k_i \leq \gamma_\beta + 1$ 的非负整数，且 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 取遍所有满足$\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_s$ 的负根（分别满足 $\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_s$ 和 $s > 1$）。对于满足 $\beta' > \beta$ 的 $\beta' \in \Phi^-$，我们记 $\mathrm{F}^{\beta'}_{>\beta}$ 为 F$_{>\beta}$ 的子模，它由对所有 i满足 $\beta_i \neq \beta'$ 的单项式 $c_{\beta_1,k_1} \cdots c_{\beta_s,k_s}$ 生成。我们将通过命题 3.3.1 的闭浸入，把所有这些自由 $\mathbb{Z}$-模视为环 $\mathcal{O}(U(\widetilde{w},\leq\eta))$ 的子模。最后，如果 $A \in U(\widetilde{w},\leq\eta)(R)$，我们滥用记号，将 F$_{\geq\beta}$、F$_{>\beta}$、$\mathrm{F}^{\beta'}_{>\beta}$ 记作上述自由$\mathbb{Z}$-模在 $R[v]$ 中的像（经由与 A对应的映射 $\mathcal{O}(U(\widetilde{w},\leq\eta)) \to R$）。

令 $A \in U(\widetilde{w}, \leq \eta)(R)$，并令 V 为根据命题 3.1.2（分别根据命题 3.2.2）得到的对应矩阵，其中 $\widetilde{w}$ 为第一种形式（分别地，$\widetilde{w}$ 为第二种形式）。那么，经过简单计算可知，$A \in U^{\mathrm{nv}}(\widetilde{w}, \leq \eta, \nabla_{\mathbf{a}})(R)$ 当且仅当对每个 $\beta \in \Phi^-$

$$V_\beta^\sharp \overset{\text{def}}{=} (\nabla_{\mathbf{a}_w} V)_\beta + \sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{D}_\beta} (\nabla_{\mathbf{a}_w} V)_{\beta_2} V_{\beta_1}^\iota \in (v+p)^{m_\beta} \mathrm{M}_n(R[v]) \tag{11}$$

其中，$\mathsf{a}_w \in \mathcal{O}^n$ 满足 $w(\mathsf{a}_w) = \mathsf{a}$。在本小节中，我们假设对于所有$\beta \in \Phi^-$，(11)均成立，并将 $\nabla_{\mathbf{a}_w}$ 记作 ∇，以简化记号。

4.1. 单值化条件：第一种形式。设 $\widetilde{w}^* \in \mathrm{Adm}(\eta)$ 是第一种形式的余长度一形状（如命题 2.1.2 所述），并沿用 §3.1 的记号。特别地，我们沿用命题 3.1.2 的记号。

引理 4.1.1. 设 $\beta = \alpha_{lm} \in \Phi^-$ with $l \leq j_0$ or $i_0 \leq m$。则我们有

(1) if β is not bad then

$$V_\beta^\sharp \in v^{\widetilde{\kappa}_\beta}(v+p)^{m_\beta}\big(X_\beta + \mathbf{F}_{>\beta}\big)$$

where $X_\beta = (m_\beta + \kappa_\beta - \langle \mathbf{a}_w, \beta^\vee\rangle) c_{\beta,m'_\beta}$ *and*

$$\widetilde{\kappa}_\beta \overset{def}{=} \begin{cases} \kappa_\beta & \text{if either } l \leq j_0,\ i_0 < m, \text{ or } i_0 = m \text{ and } s(\beta) \in \Phi^- \text{ is not bad;} \\ \kappa_\beta - 1 & \text{if } i_0 = m \text{ and } s(\beta) \in \Phi^- \text{ is bad,} \end{cases}$$

(2) 如果 β 不好，那么

$$V_\beta^\sharp \in v^{\kappa_\beta}(v+p)^{m_\beta}\big(Y_\beta + vX_\beta + \mathbf{F}_{>\beta}\big)$$

其中

$$\begin{cases} X_\beta &= (m'_\beta + \kappa_\beta - \langle \mathbf{a}_w, \beta^\vee\rangle) c_{\beta,m'_\beta}; \\ Y_\beta &= (m_\beta + \kappa_\beta - \langle \mathbf{a}_w, \beta^\vee\rangle + m_\beta + \kappa_\beta) c_{\beta,m_\beta} + p(\kappa_\beta - \langle \mathbf{a}_w, \beta^\vee\rangle) c_{\beta,m'_\beta}. \end{cases}$$

证明。假设 $\beta = \alpha_{lm} \in \Phi^-$ 不是坏的。如果 $l \leq j_0$、$i_0 < m$或 $i_0 = m$ 和 $s(\beta)$ 不是坏的，那么由命题 3.1.2 以及引理3.1.3，很容易验证(1)中的方程。如果 $l > j_0$、$i_0 = m$和 $s(\beta) \in \Phi^-$是坏的，那么κ_β不是次可加的，并且根据命题3.1.2的第(3)部分，$\deg(V_\beta/v^{\kappa_\beta}) < |\langle \eta, \beta^\vee\rangle| - 1$，因此 $v^{\kappa_\beta} \nmid \sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{D}_\beta} (\nabla V)_{\beta_2} V_{\beta_1}^\iota$，而 $v^{\kappa_\beta} \mid (\nabla V)_\beta$。因此，在这种情况下，我们得到带有方程中 $\widetilde{\kappa}_\beta = \kappa_\beta - 1$ 的(1)中的方程。

假设 β 是坏的。根据命题 3.1.2 的第 (1) 部分，$\deg V_\beta < |\langle \eta, \beta^\vee\rangle| + 1$（作为 $\kappa_\beta = 0$）是次可加的，因此我们得到式 (2)。□

对于 $\beta \in \Phi^-$，以及每个整数 $s \geq 1$，我们将 $I_{\beta,\ s}$ 定义为满足以下条件的负根元组 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$ 的集合：

- $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_s$ 和 β_1 与 β 共列；
- $\beta_i + \beta_{i+1} \in \Phi^-$ 对于 $i \in \{1, \cdots, s-1\}$；
- $\sum_{i=1}^s \delta_{w(\beta_i)<0} = s - \delta_{w(\beta)>0}$。

此外，我们定义

$$I_\beta \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{s\geq 1} I_{\beta,s}.$$

引理 4.1.2。设 $\beta \in \Phi^-$ 与 $\beta \geq -\alpha$。

(1) 如果 $(\beta_1, \beta_2) \in \mathfrak{D}_\beta$ 则 $\gamma_\beta \geq \gamma_{\beta_1} + \gamma_{\beta_2}$；(2) $(\beta_1, \beta_2) \in \mathfrak{D}_\beta$ 满足 $\gamma_\beta = \gamma_{\beta_1} + \gamma_{\beta_2}$ 当且仅当 $\kappa_\beta < \kappa_{\beta_1} + \kappa_{\beta_2}$。

特别地，如果 $(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{D}_{-\alpha}$ 则 $\gamma_{\beta_1}+\gamma_{\beta_2}=\gamma_{-\alpha}$，$\deg V^{\imath}_{\beta_1}=\gamma_{\beta_1}=m_{\beta_1}+\kappa_{\beta_1}$，并且

$$\frac{1}{(\gamma_{\beta_1})!}\frac{d^{\gamma_{\beta_1}}V^{\imath}_{\beta_1}}{dv^{\gamma_{\beta_1}}}=\sum_{(\beta'_1,\cdots,\beta'_s)\in I_{\beta_1}}(-1)^{\ell+j_0-s}c_{\beta'_1,m_{\beta'_1}}c_{\beta'_2,m_{\beta'_2}}\cdots c_{\beta'_s,m_{\beta'_s}}$$

其中 $\beta_1=\alpha_{\ell i_0}$。

证明。回想一下，γ_β 表示 V_β的次数。根据 w的定义，如果 $\beta=\alpha_{li_0}$且 $i_0<l<j_0$，或 $\beta=\alpha_{i_0m}$ 且 $i_0<m<j_0$，则 $\kappa_\beta=\kappa_{s(\beta)}$。现在逐一检查各种情况，即可轻易验证 (1) 和 (2)。

对于第二部分，令 $(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{D}_{-\alpha}$。由 (2) 可知 $\gamma_{\beta_1}+\gamma_{\beta_2}=\gamma_{-\alpha}$，由 (1) 也可知 $\deg V^{\imath}_{\beta_1}=\gamma_{\beta_1}$。最后，$I_\beta$ 的元素与 $V^{\imath}_{\beta_1}$ 中次数最高为 γ_{β_1} 的单项式相对应。证明至此完成。□

引理 4.1.3. 我们有

$$p^{m_{-\alpha}+1}\cdot\langle\mathbf{a}_w,-\alpha^\vee\rangle=p^{m_{-\alpha}}\cdot c\cdot Z_{-\alpha}$$

其中

$$\begin{aligned}Z_{-\alpha}\overset{def}{=}&\left(m_{-\alpha}-\langle\mathbf{a}_w,-\alpha^\vee\rangle\right)c_{-\alpha,m_{-\alpha}}\\&+\sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{D}_{-\alpha}}\left(m_{\beta_2}+\kappa_{\beta_2}-\langle\mathbf{a}_w,\beta_2^\vee\rangle\right)c_{\beta_2,m_{\beta_2}}\sum_{(\beta'_1,\cdots,\beta'_s)\in I_{\beta_1}}(-1)^{\ell+j_0-s}c_{\beta'_1,m_{\beta'_1}}\cdots c_{\beta'_s,m_{\beta'_s}}\end{aligned}$$

若我们写作 $\beta_1=\alpha_{\ell i_0}$。

证明。由引理 4.1.2 可知，对于所有 $(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{D}_{-\alpha}$，$\deg((\nabla V)_{\beta_2}V^{\imath}_{\beta_1})=\gamma_{\beta_2}+\gamma_{\beta_1}=\gamma_{-\alpha}=m_{-\alpha}$。因此，若将单值化条件 (11) 应用于 $V_{-\alpha}$，则有

$$\begin{aligned}V^{\sharp}_{-\alpha}=&(m_{-\alpha}-\langle\mathbf{a}_w,-\alpha^\vee\rangle)c_{-\alpha,m_{-\alpha}}(v+p)^{m_{-\alpha}}\\+&\sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{D}_{-\alpha}}(m_{\beta_2}+\kappa_{\beta_2}-\langle\mathbf{a}_w,\beta_2^\vee\rangle)c_{\beta_2,m_{\beta_2}}\sum_{(\beta'_1,\cdots,\beta'_s)\in I_{\beta_1}}(-1)^{\ell+j_0-s}c_{\beta'_1,m_{\beta'_1}}\cdots c_{\beta'_s,m_{\beta'_s}}(v+p)^{m_{-\alpha}}\end{aligned}$$

由引理 4.1.2 的第二部分可得。由于根据引理 3.1.3，$V^{\sharp}_{-\alpha}$ 的常数项仅出现在 $(\nabla V)_{-\alpha}$，提取常数项可得

$$-\langle\mathbf{a}_w,-\alpha^\vee\rangle c_{-\alpha}=p^{m_{-\alpha}}Z_{-\alpha}.$$

由引理 3.1.6 的第二部分，我们得到所需的恒等式。□

我们进一步消去坏根 $\beta\in\Phi^-$ 对应的变量 Y_β。

引理 4.1.4。设 $\beta\in\Phi^-$ 是一个坏根。

(1) 如果 β 与 α 同行，则有

$$p^{m_{s(\beta)}}\cdot(Y_\beta+c\cdot X_{s(\beta)})\in p^{m_{s(\beta)}}\cdot\left(c\cdot c_{\beta,m'_\beta}\cdot\mathbf{F}_{\geq-\alpha}+\mathbf{F}_{>\beta}+c\cdot\mathbf{F}^{\beta}_{>s(\beta)}\right).$$

(2) 如果 β 与 α 同列，则有

$$p^{m_{s(\beta)}}\cdot(Y_\beta-c\cdot X_{s(\beta)})\in p^{m_{s(\beta)}}\cdot\left(c\cdot c_{\beta,m'_\beta}\cdot\mathbf{F}_{\geq-\alpha}+\mathbf{F}_{>\beta}+c\cdot\mathbf{F}^{\beta}_{>s(\beta)}\right).$$

证明。我们首先处理情形(1)。根据引理 3.1.4，在关于 $s(\beta)$的引理 4.1.1 的第 (1) 部分中的单- 值化方程中提取常数项，会得到

$$\langle\mathbf{a}_w,s(\beta)^\vee\rangle c_{s(\beta)}+\sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{A}_\beta}\langle\mathbf{a}_w,s(\beta_2)^\vee\rangle c_{s(\beta_2)}c^{\imath}_{\beta_1}+\langle\mathbf{a}_w,-\alpha^\vee\rangle c_{-\alpha}c^{\imath}_{\beta}\in-p^{m_{s(\beta)}}(X_{s(\beta)}+\mathbf{F}_{>s(\beta)}).\tag{12}$$

由于 $\deg(V_\beta V_{-\alpha}^\imath) = m'_\beta + m_{-\alpha} = m_\beta + 1 + m_{-\alpha} = m_{s(\beta)} = \widetilde{\kappa}_{s(\beta)} + m_{s(\beta)}$，式 (12) 中的量实际上属于

$$-p^{m_{s(\beta)}}(X_{s(\beta)} + c_{\beta,m'_\beta} \cdot \mathbf{F}_{\geq -\alpha} + \mathbf{F}^\beta_{>s(\beta)}).$$

乘以 $-c$，然后结合引理 3.1.6 和引理 3.1.4，我们得到

$$p^{|\langle \eta,\alpha^\vee\rangle|}\langle \mathbf{a}_w, s(\beta)^\vee\rangle c_\beta + \sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{A}_\beta} p^{|\langle \eta,\alpha^\vee\rangle|}\langle \mathbf{a}_w, s(\beta_2)^\vee\rangle c_{\beta_2} c^\imath_{\beta_1} + p^{|\langle \eta,\alpha^\vee\rangle|}\langle \mathbf{a}_w, -\alpha^\vee\rangle c^\imath_\beta$$

$$\in c \cdot p^{m_{s(\beta)}}(X_{s(\beta)} + c_{\beta,m'_\beta} \cdot \mathbf{F}_{\geq -\alpha} + \mathbf{F}^\beta_{>s(\beta)}).$$

应用由 $(V \cdot V^\imath)_\beta = 0$ 导出的恒等式 $c_\beta + \sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{A}_\beta} c_{\beta_2} c^\imath_{\beta_1} + c^\imath_\beta = 0$，以及 $s(\beta) = \beta - \alpha$ 和 $s(\beta_2) = \beta_2 - \alpha$，我们得到

$$p^{|\langle \eta,\alpha^\vee\rangle|}\langle \mathbf{a}_w, \beta^\vee\rangle c_\beta + \sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{A}_\beta} p^{|\langle \eta,\alpha^\vee\rangle|}\langle \mathbf{a}_w, \beta_2^\vee\rangle c_{\beta_2} c^\imath_{\beta_1} \in c \cdot p^{m_{s(\beta)}}(X_{s(\beta)} + c_{\beta,m'_\beta} \cdot \mathbf{F}_{\geq -\alpha} + \mathbf{F}^\beta_{>s(\beta)}). \tag{13}$$

但通过提取引理4.1.1 第(2) 部分中针对 β 的单值方程的常数项，(13) 中的量也属于

$$-p^{|\langle \eta,-\alpha^\vee\rangle|+|\langle \eta,\beta^\vee\rangle|-1}(Y_\beta + \mathbf{F}_{>\beta})$$

因此，我们得到了所需的结果。

现在我们处理情形（2）。通过提取方程 $(V \cdot V^\imath)_\beta = 0$中 v^{κ_β} 的系数，我们有$c_\beta + \sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{A}_\beta} c_{\beta_2} c^\imath_{\beta_1} + c^\imath_\beta = 0$，这与引理 3.2.7第（2）部分中的方程一起导出

$$\sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{A}_\beta} c_{\beta_2}(c^\imath_{s(\beta_1)} - c^\imath_{-\alpha} c^\imath_{\beta_1}) + (c^\imath_{s(\beta)} - c^\imath_{-\alpha} c^\imath_\beta) = 0.$$

这个方程结合引理 3.2.5，归纳地推出了

$$c^\imath_{s(\beta)} - c^\imath_{-\alpha} c^\imath_\beta = 0 \tag{14}$$

对于任何与 α 共享同一列的坏根 β。

通过提取 v^{κ_β} 在引理 4.1.1 的第 (2) 部分中关于 β 的单值化方程中的系数，我们有

$$(\kappa_\beta - \langle \mathbf{a}_w, \beta^\vee\rangle) c_\beta + \sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{A}_\beta} (\kappa_{\beta_2} - \langle \mathbf{a}_w, \beta_2^\vee\rangle) c_{\beta_2} c^\imath_{\beta_1} \in p^{m_\beta}(Y_\beta + \mathbf{F}_{>\beta}).$$

类似地，通过提取引理 4.1.1 第 (1) 部分中关于 $s(\beta)$ 的单值方程里 $v^{\kappa_{s(\beta)}-1}$ 的系数，我们得到

$$(\kappa_\beta - \langle \mathbf{a}_w, \beta^\vee\rangle) c_\beta c^\imath_{-\alpha} + \sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{A}_\beta} (\kappa_{\beta_2} - \langle \mathbf{a}_w, \beta_2^\vee\rangle) c_{\beta_2} c^\imath_{s(\beta_1)} \in p^{m_{s(\beta)}}(X_{s(\beta)} + \mathbf{F}_{>s(\beta)}). \tag{15}$$

当 $\deg(V_\beta V_{-\alpha}^\imath) = \gamma_\beta + \gamma_{-\alpha} = m'_\beta + m_{-\alpha} = m_\beta + 1 + m_{-\alpha} = m_{s(\beta)} = \widetilde{\kappa}_{s(\beta)} + m_{s(\beta)}$ 时，(15) 中的量实际上属于

$$p^{m_{s(\beta)}}(X_{s(\beta)} + c_{\beta,m'_\beta} \cdot \mathbf{F}_{\geq -\alpha} + \mathbf{F}^\beta_{>s(\beta)}).$$

通过恒等式 (14) 比较这两个方程，我们得到

$$p^{m_{s(\beta)}} X_{s(\beta)} - c^\imath_{-\alpha} p^{m_\beta} Y_\beta \in p^{m_{s(\beta)}}(c_{\beta,m'_\beta} \cdot \mathbf{F}_{\geq -\alpha} + \mathbf{F}^\beta_{>s(\beta)}) + p^{m_\beta} \cdot c^\imath_{-\alpha} \cdot \mathbf{F}_{>\beta}.$$

作为 $c_{-\alpha}=-c'_{-\alpha}$，通过应用引理 3.1.6 的第二部分，我们有

$$-cp^{m_{s(\beta)}}X_{s(\beta)}+p^{m_\beta+m_{-\alpha}}Y_\beta\in c\cdot p^{m_{s(\beta)}}(c_{\beta,m'_\beta}\cdot\mathbf{F}_{\geq-\alpha}+\mathbf{F}^{\beta}_{>s(\beta)})+p^{m_\beta+m_{-\alpha}+1}\cdot\mathbf{F}_{>\beta}.$$

由于 $s(\beta)=\beta-\alpha$，我们得到了所需结果。 □

最后，我们讨论 $\beta=\alpha_{lm}\in\Phi^-$ 与 $l>j_0$ 及 $m<i_0$的情形。在这种情况下，κ_β 一般并非次可加，因此下面的引理并非显然。

引理 4.1.5。对于 $\beta=\alpha_{lm}\in\Phi^-$，其中 $l>j_0$ 和 $m<i_0$,

$$V^\sharp_\beta\in v^{\kappa_\beta}(v+p)^{|\langle\eta,\beta^\vee\rangle|-1}(X_\beta+\mathbf{F}_{>\beta})$$

其中 $X_\beta=(m_\beta+\kappa_\beta-\langle\mathfrak{a}_w,\beta^\vee\rangle)c_{\beta,m'_\beta}$.

证明。我们首先断言，$V'_{s(\beta_0)}\in vR[v]$ 对于与 α同行的坏根 $\beta_0\in\Phi^-$。根据引理3.1.7 的第 (1) 部分，连同引理 3.1.4 和引理 3.1.6，我们有

$$p^{|\langle\eta,\alpha^\vee\rangle|}\left(c_{\beta_0}+\sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{A}_{\beta_0}}c_{\beta_2}c'_{\beta_1}+c'_{\beta_0}\right)-cc'_{s(\beta_0)}=0.$$

由于 $c_{\beta_0}+\sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{A}_{\beta_0}}c_{\beta_2}c'_{\beta_1}+c'_{\beta_0}=0$ 由提取 $(V\cdot V')_{\beta_0}=0$ 的常数项得到，我们有 $cc'_{s(\beta_0)}=0$。因此，我们得出结论：$c'_{s(\beta_0)}=0$，因为根据引理 3.1.6，c是 $R[\frac{1}{p}]$中的一个单位，并且 R 是 $\mathcal{O}$-平坦的。

令 $\beta'=\alpha_{l'm'}\in\Phi^-$ 满足 $m'<i_0$。我们断言，当 $l'\neq j_0$时 $V'_{\beta'}\in v^{\kappa_{\beta'}}R[v]$。显然，当 $l'<j_0$时 $V'_{\beta'}\in v^{\kappa_{\beta'}}R[v]$，由引理 3.1.3。假设 $j_0<l'$。考虑以下恒等式

$$0=(V\cdot V')_{\beta'}=V_{\beta'}+\sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{D}_{\beta'}}V_{\beta_2}\cdot V'_{\beta_1}+V'_{\beta'},$$

并记为 $\beta_1:=\alpha_{km'}$。显然，$V_{\beta'}\in v^{\kappa_{\beta'}}R[v]$，并且根据引理3.1.3，$V_{\beta_2}\cdot V'_{\beta_1}\in v^{\kappa_{\beta'}}R[v]$ 对于 $m'<k<j_0$，因此只需检验$V_{\beta_2}\cdot V'_{\beta_1}\in v^{\kappa_{\beta'}}R[v]$ 对于 $j_0\leq k<l'$。

假设 $k=j_0$。如果 $s(\beta_1)$ 是坏的，那么根据第一个断言，$V'_{\beta_1}\in vR[v]$，因此我们在这种情况下得出$V_{\beta_2}\cdot V'_{\beta_1}\in v^{\kappa_{\beta'}}R[v]$。如果 $s(\beta_1)$不是坏的，那么显然 $V'_{\beta_1}\in v^{\kappa_{\beta_1}}R[v]$，因此根据引理 3.1.3，我们也有 $V_{\beta_2}\cdot V'_{\beta_1}\in v^{\kappa_{\beta'}}R[v]$。注意，这也意味着

$$(\nabla V)_{\beta_2}V'_{\beta_1}\in v^{\kappa_{\beta'}}R[v] \tag{16}$$

在这种情况下。现在假设 $j_0<k<l'$。根据归纳假设，我们有 $V'_{\beta_1}\in v^{\kappa_{\beta_1}}R[v]$，因此根据引理 3.1.3，我们得出 $V_{\beta_2}\cdot V'_{\beta_1}\in v^{\kappa_{\beta'}}R[v]$，这就完成了第二个断言的证明。

现在，令 $\beta=\alpha_{lm}\in\Phi^-$ 满足 $l>j_0$ 和 $m<i_0$。对于 $(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{D}_\beta$，若记 $\beta_1=\alpha_{km}$，则由上述断言以及引理 3.1.3，显然有 $(\nabla V)_{\beta_2}V'_{\beta_1}\in v^{\kappa_\beta}R[v]$ 对于 $k\neq j_0$。若 $k=j_0$，则根据 (16) 还有 $(\nabla V)_{\beta_2}V'_{\beta_1}\in v^{\kappa_\beta}R[v]$，从而证明完毕。□

4.2. 单值化条件：第二种形式。设 $\widetilde{w}^*\in$Adm(η) 是第二种形式的余长度一形状（参见命题 2.1.2），并沿用 §3.2 的记号。特别地，我们沿用命题 3.2.2 的记号。

引理 4.2.1. 设 $\beta=\alpha_{lm}\in\Phi^-$ with $l\leq j_0$ or $i_0\leq m$。那么我们有

(1) 如果 β 不差，那么

$$V_\beta^\sharp \in v^{\widetilde{\kappa}_\beta}(v+p)^{m_\beta}\left(X_\beta + \mathbf{F}_{>\beta}\right)$$

其中 $X_\beta = (m_\beta + \kappa_\beta - \langle \mathbf{a}_w, \beta^\vee\rangle)c_{\beta,m'_\beta}$ 且

$$\widetilde{\kappa}_\beta \overset{def}{=} \begin{cases} \kappa_\beta \text{ 如果 } l < j_0, \ i_0 < m \text{ 或 } i_0 = m \text{ 以及 } s(\beta) \in \Phi^- \text{ 不是坏的；如果 } i_0 = m \text{ 以及 } s(\beta) \in \Phi^- \text{ 是坏的，或者 } l = j_0, \end{cases}$$

(2) 如果 β 不好，那么

$$V_\beta^\sharp \in v^{\kappa_\beta}(v+p)^{m_\beta}\left(Y_\beta + vX_\beta + \mathbf{F}_{>\beta}\right)$$

其中

$$\begin{cases} X_\beta &= (m'_\beta + \kappa_\beta - \langle \mathbf{a}_w, \beta^\vee\rangle)c_{\beta,m'_\beta}; \\ Y_\beta &= (m_\beta + \kappa_\beta - \langle \mathbf{a}_w, \beta^\vee\rangle)c_{\beta,m_\beta} + p(\kappa_\beta - \langle \mathbf{a}_w, \beta^\vee\rangle)c_{\beta,m'_\beta}. \end{cases}$$

证明。证明与引理 4.1.1 类似，只需分别用命题 3.2.2 和引理 3.2.3 替代命题 3.1.2 和引理 3.1.3。细节留给读者。□

对于 $\beta \in \Phi^-$ 以及每个整数 $s \geq 1$，我们将 $I_{\beta,s}$ 定义为满足以下条件的负根元组 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$ 的集合：

- $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_s$ 和 β_1 共享 β 的列；
- $\beta_i + \beta_{i+1} \in \Phi^-$ 对于 $i \in \{1, \cdots, s-1\}$；
- $w'(\beta_i) < 0$ 对所有 $i \in \{1, \cdots, s\}$。

此外，我们设定了

$$I_\beta \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{s \geq 1} I_{\beta,s}.$$

引理 4.2.2. 设 $\beta \in \Phi^-$ with $\beta \geq -\alpha$.

(1) 若 $(\beta_1, \beta_2) \in \mathfrak{D}_\beta$ 则 $\gamma_\beta \geq \gamma_{\beta_1} + \gamma_{\beta_2}$；

(2) $(\beta_1, \beta_2) \in \mathfrak{D}_\beta$ 满足 $\gamma_\beta = \gamma_{\beta_1} + \gamma_{\beta_2}$ 当且仅当 $\kappa_\beta < \kappa_{\beta_1} + \kappa_{\beta_2}$。

特别地，如果 $(\beta_1, \beta_2) \in \mathfrak{D}_{-\alpha}$ 那么 $\gamma_{\beta_1} + \gamma_{\beta_2} = \gamma_{-\alpha}$，$\deg V_{\beta_1}^i = \gamma_{\beta_1} = m_{\beta_1}$，一个 d

$$\frac{1}{(\gamma_{\beta_1})!}\frac{d^{\gamma_{\beta_1}} V_{\beta_1}^i}{dv^{\gamma_{\beta_1}}} = \sum_{(\beta'_1,\cdots,\beta'_s)\in I_{\beta_1}} (-1)^{\ell+j_0-s} c_{\beta'_1,m_{\beta'_1}} c_{\beta'_2,m_{\beta'_2}} \cdots c_{\beta'_s,m_{\beta'_s}}$$

其中 $\beta_1 = \alpha_{\ell i_0}$。

证明。证明与引理 4.1.2 的证明类似。细节留给读者。□

引理 4.2.3. 我们有

$$p^{m_{-\alpha}+1} \cdot (\langle \mathbf{a}_w, -\alpha^\vee\rangle + 1) = p^{m_{-\alpha}} \cdot c \cdot Z_{-\alpha}$$

其中

$$\begin{aligned} Z_{-\alpha} \overset{def}{=} &\left(m_{-\alpha} - 1 - \langle \mathbf{a}_w, -\alpha^\vee\rangle\right) c_{-\alpha,m_{-\alpha}} \\ &+ \sum_{(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{D}_{-\alpha}} \left(m_{\beta_2} - \langle \mathbf{a}_w, \beta_2^\vee\rangle\right) c_{\beta_2,m_{\beta_2}} \sum_{(\beta'_1,\cdots,\beta'_s)\in I_{\beta_1}} (-1)^{\ell+j_0-s} c_{\beta'_1,m_{\beta'_1}} \cdots c_{\beta'_s,m_{\beta'_s}} \end{aligned}$$

若我们写作 $\beta_1 = \alpha_{\ell i_0}$。

证明。由引理 4.2.2 可知，对于所有的 $(\beta_1,\beta_2)\in\mathfrak{D}_{-\alpha}$，$\deg((\nabla V)_{\beta_2}V^{\imath}_{\beta_1})$ $=\gamma_{\beta_2}+\gamma_{\beta_1}=m_{\beta_2}+m_{\beta_1}=m_{-\alpha}-1$。仿照引理 4.1.3 中的论证，对$v\cdot V^{\sharp}_{-\alpha}$ 提取常数项即可得到所需结果。细节留给读者。□

我们进一步消去坏根 $\beta\in\Phi^-$ 对应的变量 Y_β。

引理 4.2.4. 设 $\beta\in\Phi^-$ 是一个坏根。

(1) 若 β 与 α 位于同一行，则有

$$p^{m_{s(\beta)}}\cdot(Y_\beta+c\cdot X_{s(\beta)})\in p^{m_{s(\beta)}}\cdot\left(c\cdot c_{\beta,m'_\beta}\cdot\mathbf{F}_{\geq-\alpha}+\mathbf{F}_{>\beta}+c\cdot\mathbf{F}^{\beta}_{>s(\beta)}\right).$$

(2) 若 β 与 α 位于同一列，则

$$p^{m_{s(\beta)}}\cdot(Y_\beta-c\cdot X_{s(\beta)})\in p^{m_{s(\beta)}}\cdot\left(c\cdot c_{\beta,m'_\beta}\cdot\mathbf{F}_{\geq-\alpha}+\mathbf{F}_{>\beta}+c\cdot\mathbf{F}^{\beta}_{>s(\beta)}\right).$$

证明。证明方法与引理 4.1.4 类似。唯一的区别是，我们使用引理 3.2.6、3.2.4、4.2.1、3.2.7、3.2.5 和 3.2.6，分别代替引理 3.1.6、3.1.4、4.1.1、3.1.7、3.1.5 和 3.1.6。细节留给读者。□

最后，我们处理 $\beta=\alpha_{lm}\in\Phi^-$ 满足 $l>j_0$ 且 $m<i_0$ 的情形。在这种情况下，κ_β 通常并非次可加，因此下面的引理并非显然。

引理 4.2.5. 假设对于一个与 α 共行的坏根 $\beta\in\Phi^-$，有 $V^{\imath}_{s(\beta)}\in v^{\kappa_\beta}R[v]$。对于满足 $l>j_0$ 和 $m<i_0$ 的 $\beta=\alpha_{lm}\in\Phi^-$，我们有

$$V^{\sharp}_{\beta}\in v^{\kappa_\beta}(v+p)^{m_\beta}\left(X_\beta+\mathbf{F}_{>\beta}\right)$$

其中 $X_\beta=(\langle\mathsf{a}_w,\beta^\vee\rangle+m_\beta+\kappa_\beta)c_{\beta,\ m'_\beta}$。

证明。我们首先断言，对于每个与 α 共享同一行的坏根 $\beta_0\in\Phi^-$，$V^{\imath}_{s(\beta_0)}\in v^{\kappa_{\beta_0}}R[v]$ 其证明与引理4.1.5的证明中的第一个断言几乎完全相同。证明的其余部分也与引理 4.1.5的证明类似。唯一的区别是，我们使用引理 3.2.3 而不是引理 3.1.3。细节留给读者。□

4. $U(\widetilde{w},\leq\eta,\nabla_{\mathbf{a}})$在余长度 ≤ 1中的描述。本小节中，我们描述 $U(\widetilde{w},\leq\eta,\nabla_{\mathbf{a}})^{\sim}$，当 $\widetilde{w}^*\in W$ 具有余长度 ≤ 1时。

我们首先给出余长度为零的 $\widetilde{w}^*$ 的 $U(\widetilde{w},\leq\eta,\nabla_{\mathbf{a}})$ 的上界。

命题4.3.1. 设 $\widetilde{w}^*\in\mathsf{Adm}(\eta)$ 是一个余长为零的形状，并设 $\mathsf{a}\in\mathcal{O}^n$。假设 a是 n-一般的（[LLHLMb，定义 4.2.2]）。那么存在一个闭浸入

$$U(\widetilde{w},\leq\eta,\nabla_{\mathbf{a}})\hookrightarrow\mathrm{Spec}\mathcal{O}[\{X_\beta\mid\beta\in\Phi^-\}].$$

证明。这可由 [LLHL19, §3.4], 中的论证得到，具体而言，是由 [LLHL19, 命题3.4.12] 的证明得到的。（注意，上引文中的论证是针对完备局部诺特$\mathcal{O}$-代数撰写的，但在我们所处的 $\mathcal{O}$-平坦诺特 $\mathcal{O}$-代数情形下同样成立。）□

现在我们给出 $\widetilde{w}^*$余长为一的 $U(\widetilde{w},\leq\eta,\nabla_{\mathbf{a}})$ 的一个上界。回顾一下，如果 $\widetilde{w}^*$ 是第一种形式（分别为第二种形式）的余长为一，则 $Z_{-\alpha}$ 是在引理 4.1.3（分别在引理 4.2.3）中构造的。

命题 4.3.2. 设 $\widetilde{w}^*\in\mathsf{Adm}(\eta)$ 是一个余长度一形状，且 $\mathsf{a}\in\mathcal{O}^n$。假设 a 是 n-一般的（定义见 [LLHLMb, §4.2]）。那么存在一个闭浸入。

$$U(\widetilde{w},\leq\eta,\nabla_{\mathbf{a}})\hookrightarrow\mathrm{Spec}\frac{\mathcal{O}[\{X_\beta\mid\beta\in\Phi^-\}\cup\{c\}]}{(c\cdot Z_{-\alpha}-p)}.$$

证明。根据命题 3.3.1， $\mathcal{O}(U(\widetilde{w},\leq\eta,\nabla_{\mathbf{a}}))$ 由 $c_{\beta,\,k}$（其中有 $\beta\in\Phi^-$ 和 $0\leq k\leq m'_\beta$）以及 c 生成。但引理 4.1.1 、 4.1.5 、 4.2.1 和 4.2.5 表明，我们也可以使用 c 、 $X_\beta(\beta\in\Phi^-)$ 和 Y_β (β 坏) 来生成。接着，引理 4.1.4 和 4.2.4 表明，我们只需使用 c 和 X_β 即可生成。最后，引理 4.1.3 和 4.2.3（以及 p-平坦性）给出关系 $c\cdot Z_{-\alpha}-p$。□

5. Colength one deformation rings

在本节中，我们应用 §3 和 §4 的结果，计算具有霍奇–泰特权重 η、且 $\overline{\rho}$ 足够一般的潜在晶体变形环；对于满足 $\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)$ 在每个嵌入下余长度至多为一的驯惯性类型 τ ，也计算相应的环。

5.1. 乘积结构和误差项。我们首先扩展§4.1和~ ~§4.2 的技术结果，使其能够用于描述闭浸入 $U(\widetilde{z},\leq\eta,\nabla_{\tau,\infty})\hookrightarrow U(\widetilde{z},\leq\eta)^{\wedge_p}$，其中 $\widetilde{z}=(\widetilde{z}^{(j)})_{j\in\mathcal{J}}$ 的余长度至多为一。这需要通过允许乘积结构、非平凡的对角元以及一个考虑 §2.2.3 中定义的单值化条件的“误差项”，来修改先前的一些公式。

沿用 §3 的记号，并令 R 为一个 p-进完备、拓扑有限型的诺特$\mathcal{O}$-代数。令 $\widetilde{w}^*\in\mathrm{Adm}(\eta)$ 为第一种形式（分别为第二~ ~种形式）的余长为一形状，并令 $A\in U(\widetilde{w},\leq\eta)(R)$，其在自然态射$\widetilde{U}(\widetilde{w},\leq\eta)\to U(\widetilde{w},\leq\eta)$ 下的像为 $A\in U(\widetilde{w},\leq\eta)(R)$。我们可以将 $w^{-1}\widetilde{A}w=sD_0s\cdot w^{-1}Aw$（分别将 $w'^{-1}\widetilde{A}w'=D_0\cdot w'^{-1}Aw'$）写成某个 $D_0=\mathrm{Diag}(a_1,\cdots,a_n)\in T^\vee(R)$。令 $V\in\frac{1}{v}\mathrm{Mat}_n(R[v])$ 为将命题 3.1.2（分别为命题 3.2.2）应用于 $A\in U(\widetilde{w},\leq\eta)(R)$ 所得到的矩阵，并设 $\widetilde{V}\overset{\mathrm{def}}{=}D_0\cdot V$。那么，依照命题 3.1.2（分别为命题 3.2.2）中的相同论证，我们可以将 $(w^{-1}\widetilde{A}w)_{j_0j_0}=a_{j_0j_0}(v+p)^{n-j_0}$（分别将 $(w'^{-1}\widetilde{A}w')_{i_0i_0}=a_{i_0i_0}(v+p)^{n-j_0}$）写成某个 $a_{j_0j_0}\in R$（分别为某个 $a_{i_0i_0}\in R$），并且有如下恒等式：

$$s\cdot u_{-\alpha}(-\frac{a_{j_0j_0}}{a_{j_0}})\cdot(w^{-1}\widetilde{A}w)=(v+p)^\eta\cdot\widetilde{V}\tag{17}$$
$$\big(\text{resp. } u_\alpha(-\frac{a_{i_0i_0}}{a_{j_0}})\cdot v^{\varepsilon_{i_0}}\cdot(w'^{-1}\widetilde{A}w')\cdot s=(v+p)^\eta\cdot v^{\varepsilon_{j_0}}\cdot\widetilde{V}\big).$$

注意，我们可以将 c（在命题 3.1.2 中定义（分别在命题 3.2.2中定义））与$\backsim a_{j_0j_0}/a_{i_0}$（分别与 $a_{i_0i_0}/a_{i_0}$）对应起来。我们还注意到， V 中每个条目的次数描述与 V的完全相同，正如 $V=D_0\cdot V$所示。

我们固定一个驯惯性类型 τ，其带有一个 N-一般的最低胞腔表示（s， μ），以及一个属于 $\widetilde{z}\in\mathrm{Adm}(\eta)^\vee$ 的元素，我们将其记为 $\widetilde{z}=(\widetilde{z}^{(j)})_{j\in\mathcal{J}}$。

在本小节结束之前，假设 $j\in\mathcal{J}$满足 $\ell(\widetilde{z}^{(j)})=\ell(t_\eta)-1$，并令$A^{(j)}\in U(\widetilde{z}^{(j)},\leq\eta)(R)$为 $\widetilde{A}^{(j)}\in\widetilde{U}(\widetilde{z}^{(j)},\leq\eta)(R)$的像。令 $\widetilde{V}_{(j)}\in\frac{1}{v}\mathrm{Mat}_n(R[v])$为根据 $\widetilde{z}^{(j)}$的两种可能形式将（17）应用于 $\widetilde{A}^{(j)}\in\widetilde{U}(\widetilde{z}^{(j)},\leq\eta)(R)$所得的矩阵。（我们调整了命题 3.1.2 和命题 3.2.2 的记号以及我们语境中的条件（17），为其添加上标(j)，因此例如，第二种形式的余长度一形状具有分解 $w^{(j)}s_{\alpha^{(j)}}t_{\eta-\alpha^{(j)}}{w^{(j)}}^{-1}$。）容易看出，条件（11）表明条件（7）具有以下形式

$$\widetilde{V}^{(j),\sharp}_{\beta^{(j)}}\overset{\mathrm{def}}{=}\Big((\nabla_{\mathbf{a}_w}\widetilde{V}^{(j)})\cdot\widetilde{V}^{(j)\,\imath}\Big)_{\beta^{(j)}}\in(v+p)^{m_{\beta^{(j)}}}R[v]+p^{N-2n+5}R[\![v]\!]\tag{18}$$

对于所有 $\beta^{(j)}\in\Phi^-$，其中 $\mathsf{a}_w\in\mathbb{Z}^n$ 由 $w^{(j)}(\mathsf{a}_w)=\mathsf{a}^{(j)}$ 定义。

由于 $\widetilde{V}^{(j)}=D_0\cdot V^{(j)}$ 对于某个 $D_0\overset{\text{def}}{=}\mathrm{Diag}(a_1,\cdots,a_n)\in T^\vee(R)$，若令 $\beta^{(j)}=\alpha_{lm}\in\Phi^-$，则很容易看出

$$a_m\cdot\widetilde{V}^{(j),\sharp}_{\beta^{(j)}}=a_l\cdot V^{(j),\sharp}_{\beta^{(j)}}.$$

因此，由于 D_0 的对角元 a_k 在 R中是单位，将条件 (18) 应用于 $\widetilde{V}^{(j)}$ 即可导出 §4.1 和 §4.2 中所有相关引理，同时追踪“误差项” p^{N-2n+5}。更确切地说，

- 在引理 4.1.1（分别地，在引理 4.2.1）中，我们有
  (1) $V^\sharp_{\beta^{(j)}}\in v^{\widetilde{\kappa}_{\beta^{(j)}}}(v+p)^{m_{\beta^{(j)}}}\left(X_{\beta^{(j)}}+\mathbf{F}_{>\beta^{(j)}}\right)+p^{N-2n+5}R[\![v]\!]$;
  (2) $V^\sharp_{\beta^{(j)}}\in v^{\kappa_{\beta^{(j)}}}(v+p)^{m_{\beta^{(j)}}}\left(Y_{\beta^{(j)}}+vX_{\beta^{(j)}}+\mathbf{F}_{>\beta^{(j)}}\right)+p^{N-2n+5}R[\![v]\!]$,
- 在引理 4.1.3（分别在引理 4.2.3）中，我们有
$$p^{m_{-\alpha^{(j)}}+1}\cdot\left(\langle\mathbf{a}_w,-\alpha^{(j)\vee}\rangle+\kappa_{-\alpha^{(j)}}\right)\in p^{m_{-\alpha^{(j)}}}\cdot c\cdot Z_{-\alpha^{(j)}}+p^{N-2n+5}R,$$
- 在引理 4.1.4（分别在引理 4.2.4）中，我们有
$$p^{m_{s(\beta^{(j)})}}\cdot(Y_{\beta^{(j)}}\pm c\cdot X_{s(\beta^{(j)})})\in p^{m_{s(\beta^{(j)})}}\cdot\left(c\cdot c_{\beta^{(j)},m'_{\beta^{(j)}}}\cdot\mathbf{F}_{\geq-\alpha^{(j)}}+\mathbf{F}_{>\beta^{(j)}}+c\cdot\mathbf{F}^{\beta^{(j)}}_{>s(\beta^{(j)})}\right)+p^{N-2n+5}R,$$
- 在引理 4.1.5（分别在引理 4.2.5）中，我们有
$$V^\sharp_{\beta^{(j)}}\in v^{\kappa_{\beta^{(j)}}}(v+p)^{m_{\beta^{(j)}}}\left(X_{\beta^{(j)}}+\mathbf{F}_{>\beta^{(j)}}\right)+p^{N-2n+5}R[\![v]\!].$$

5.2. 潜在晶体变形环。固定 $\overline{\rho}\colon G_K\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，并令 τ 为一个驯惯性类型。我们假设 τ 具有一个 N- 一般的最低胞腔表示（ [LLHLMb，定义 2.4.3]），其中 $N>3n-6$。假设 $R^{\eta}_{\overline{\rho}}{}^{\tau}\neq0$，于是特别地， $\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)$有定义。若对于某个 $j\in\mathcal{J}$，有 $\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)^{(j)}=\ell(t_\eta)-1$，则它确定一个正根 $\alpha^{(j)}$。我们将 $Z_{-\alpha^{(j)}}$记作元素 $Z_{-\alpha}$：当 $\widetilde{w}^*$ 为第一种形式的余长为一时，使用引理 4.1.3 构造；当其为第二种形式时，则使用引理 4.2.3 构造，并计入 §5.1 中所述的“误差项”。（注意，元素 $Z_{-\alpha}$ 之所以有定义，恰恰是因为对于所有负根 β，都有 $N-2n+5>m_\beta+1$。）

引理5.2.1。设 τ 是一种具有 N-一般最低胞腔表示的驯惯性类型，其中$N>3n-6$。假设 $\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)$ 满足 $\ell(\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)^{(j)})\geq\ell(t_\eta)-1$，对每个 $j\in\mathcal{J}$。那么存在一个闭浸入

$$\widetilde{U}((\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)^{(j)})^*,\leq\eta,\nabla_{\mathbf{a}^{(j)}})\hookrightarrow\mathrm{Spec}R^{(j)}$$

其中，$\mathsf{a}^{(j)}\in\mathbb{Z}_p$ 是（5）中定义的常数，且

$$R^{(j)}\overset{def}{=}\begin{cases}\frac{\mathcal{O}[\{X_\beta|\beta\in\Phi^-\}\cup\{c\}]}{(c\cdot Z_{-\alpha^{(j)}}-p)}\otimes_{\mathcal{O}}\left(\bigotimes^n_{\mathcal{O},i=1}\frac{\mathcal{O}[a_i,Y_i]}{(a_i\cdot Y_i-1)}\right) & \text{if } \ell(\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)^{(j)})=\ell(t_\eta)-1;\\ \mathcal{O}[\{X_\beta\mid\beta\in\Phi^-\}]\otimes_{\mathcal{O}}\left(\bigotimes^n_{\mathcal{O},i=1}\frac{\mathcal{O}[a_i,Y_i]}{(a_i\cdot Y_i-1)}\right) & \text{otherwise.}\end{cases}$$

证明。结果由命题 4.3.1 和命题 4.3.2 连同方程 (4) 立即得出。□

命题 5.2.2. 设 τ 是一个具有 N-一般最低胞腔表示的驯惯性类型，其中 $N>3n-6$。假设 $\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)$ 满足：对每个 $j\in\mathcal{J}$，$\ell(\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)^{(j)})\geq\ell(t_\eta)-1$。那么存在一个闭浸入

$$\widetilde{U}(\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)^*,\leq\eta,\nabla_{\tau,\infty})\hookrightarrow\mathrm{Spf}\left(\bigotimes_{\mathcal{O},j\in\mathcal{J}}R^{(j)}\right)^{\wedge_p}$$

其中环 $R^{(j)}$ 已在引理 5.2.1 中定义。

证明。证明过程与命题 4.3.2、命题 4.3.1 以及引理 5.2.1 中的证明非常相似。唯一的区别是我们需要处理误差项。例如，若 $(\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)^{(j)})^*$ 是第一种形式且余长为一，并且 β 是与 α 共同行的坏根，那么存在 $F_\beta \in \mathrm{F}^{\geq -\alpha}$、$G_\beta \in \mathrm{F}^{>\beta}$ 和 $H_{s(\beta)} \in \mathrm{F}^{>s(\beta)}_{\beta}$，使得

$$Y_\beta = -c \cdot X_{s(\beta)} + \left(c \cdot c_{\beta,m'_\beta} \cdot F_\beta + G_\beta + c \cdot H_{s(\beta)}\right) + O\left(p^{N-2n+5-m_{s(\beta)}}\right),$$

根据引理 4.1.4。系数 c_{β,m'_β} 对应于 X_β，因此由于我们的一般性假设，通过缩放 Y_β 我们可以进一步消去变量 Y_β。

重复相同的论证，我们得出存在一个满射

$$\left(\bigotimes_{\mathcal{O},\, j\in\mathcal{J}} R^{(j)}\right)^{\wedge_p} \twoheadrightarrow \mathcal{O}(\widetilde{U}(\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)^*, \leq\eta, \nabla_{\tau,\infty})),$$

这就完成了证明。 □

Set

$$\mathcal{J}_0 \overset{\text{def}}{=} \{j \in \mathcal{J} \mid \ell(\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)^{(j)}) = \ell(t_\eta) - 1 \text{ and } Z_{-\alpha^{(j)}} \equiv 0 \pmod{\varpi}\}.$$

定理 5.2.3。设 τ 是一个具有 N-一般最低胞腔表示的驯惯性类型，其中 $N > 3n-6$。假设 $R^{\eta}_{\rho}{}^{\tau} \neq 0$，并且形状 $\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)$ 满足 $\ell(\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)^{(j)}) \geq \ell(t_\eta) - 1$对于每个 $j \in \mathcal{J}$。那么 $R^{\eta}_{\rho}{}^{\tau}$ 在.....上形式光滑

$$\widehat{\bigotimes}_{\mathcal{O},\, j\in\mathcal{J}_0} \frac{\mathcal{O}[[X,Y]]}{(XY-p)}. \tag{19}$$

证明。首先，注意到由于 $Z_{-\alpha}$ 中的引理 4.1.3和引理 4.2.3 的方程，我们可以用 $X_{-\alpha}$ 替换 $Z_{-\alpha}$。由于 $\overline{\rho} \in \mathcal{X}^{\leq\eta,\tau}(\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)^*)(\mathbb{F})$，我们可以选取 $\widetilde{A} \in \widetilde{U}(\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)^*, \leq\eta)(\mathbb{F})$，对应于 $\overline{\rho}|_{G_{K_\infty}}$，如 §2.2.3 中所述。然后，$\mathcal{O}\big(\widetilde{U}(\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)^*, \leq\eta, \nabla_{\tau,\infty})\big)$ 在 $\widetilde{A}$处的完备化通过维数计数，并由 (6) 可知，在 (19) 中的环上是形式光滑的，变形环$R^{\leq\eta\,\tau}_{\overline{\rho}}$在(19) 中的环上也是形式光滑的。由于后者是不可约的，$R^{\leq\eta\,\tau}_{\overline{\rho}}$ 也是不可约的，特别是 $R^{\leq\eta\,\tau}_{\overline{\rho}} = R^{\eta\,\tau}_{\overline{\rho}}$，这就完成了证明。□

注 5.2.4. 在对 τ 作出更强的一般性假设的条件下，只要$\widetilde{z} \in \mathrm{Adm}(\eta)^\vee$ ([LLHLMb，引理 7.3.5])，我们就有 $U(\widetilde{z}, \leq\eta, \nabla_{\tau,\ \infty}) \neq \emptyset$。

6. Applications

本节将详细阐述：根据模 p 局部 Langlands 对应的哲学，定理 5.2.3 中对潜在晶体形变环的显式描述，如何通过表示论和自守形式提供信息。

6.1. 次极端权重。本节在定义 6.1.2 中细化 $\overline{\rho}$ 的 Serre 权的缺陷这一概念：$G_K \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，该概念引入于 [LLHLMb，第 8.6 节。1] 以及 [LLHLMa，第 3 节。7]。

我们固定一个 $\overline{\rho}$ 的最低胞腔表示 $\widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{ss}})$。所有温和惯性类型都赋予与 $\widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{ss}})$ 相容的唯一最低胞腔表示。在本小节中，我们始终假设 $S_p = \{v\}$，从而有 $F_p^+ = K$。

回顾 [CEG+16 定理 3.7]，对于 K 的一个驯惯性类型 τ，存在一个不可约光滑表示 $\sigma(\tau)$，其属于 $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$，并满足惯性局部朗兰兹对应的相关性质。根据 [LLHLMb 定理 2.5.3]，，若 τ 具有一个 1- 一般最低胞腔表示 $(s, \mu-\eta)$，则可取 $\sigma(\tau)$ 为 $R_s(\mu)$。

设 $\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}:\ I_K\ \to\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 为一个 $2n$-一般的驯惯性 $\mathbb{F}$-类型。为其选取最低胞腔表示 $\widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})=t_{\mu+\eta}s$，便得到一个映射

$$\begin{aligned}\tau_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}:\mathrm{Adm}^{\mathrm{reg}}(\eta)&\longrightarrow\{\tau:I_K\to\mathrm{GL}_n(E)\}.\\ t_\nu w&\mapsto\tau(sw,\mu+\eta+s(\nu))\end{aligned}$$

（请注意，给定 $\widetilde{w}\in\mathsf{Adm}^{\mathrm{reg}}(\eta)$，根据构造我们有 $\widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}},\tau_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\widetilde{w}))=\widetilde{w}$。）

回顾 LLHLMb 第 2.3 节 [LLHLMb,§2.3.1] 中关于Deligne–Lustig 表示及其最低胞腔表示的背景。特别地，给定一个具有 $2(n-1)$-一般最低胞腔表示 $\widetilde{w}(R)$ 的 Deligne–Lustig表示 R，我们有一个关于 R 的外部权重集合 $\mathrm{JH}_{\mathrm{out}}(\overline{R})$。我们还记得，我们有一个双射

$$\begin{aligned}\left\{(\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2)\in\left(\underline{\widetilde{W}}^{+}\times\underline{\widetilde{W}}_1^{+}\right)/X^0(\underline{T})\mid\widetilde{w}_1\uparrow\widetilde{w}_h^{-1}\widetilde{w}_2\right\}&\longrightarrow\mathrm{Adm}^{\mathrm{reg}}(\eta)\\ (\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2)&\longmapsto\widetilde{w}_2^{-1}w_0\widetilde{w}_1\end{aligned}\tag{20}$$

来自 [LLHLMb，注 2.1。8], 和一个双射

$$\begin{aligned}\left\{(\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2)\in\left(\underline{\widetilde{W}}^{+}\times\underline{\widetilde{W}}_1^{+}\right)/X^0(\underline{T})\mid\widetilde{w}_1\uparrow\widetilde{w}_2\right\}&\longrightarrow W^{?}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})\\ (\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2)&\longmapsto F_{(\widetilde{w}_2,\widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})(\widetilde{w}_1)^{-1}(0))}\end{aligned}$$

由 [LLHLMb，命题 2.6.2] 得出。由于乘以 $\widetilde{w}_h$ 在 $\underline{\widetilde{W}}_1^{+}$ 上给出一个自双射，我们最终得到一个双射

$$\begin{aligned}\sigma_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}:\mathrm{Adm}^{\mathrm{reg}}(\eta)&\longrightarrow W^{?}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}).\\ \widetilde{w}_2^{-1}w_0\widetilde{w}_1&\longmapsto F_{(\widetilde{w}_h^{-1}\widetilde{w}_2,\widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})(\widetilde{w}_1)^{-1}(0))}\end{aligned}$$

我们用 $\widetilde{w}_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}$ 表示 $\sigma_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}$的逆。

引理 6.1.1. 假设 $\widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})$是 $2n$-一般最低胞腔表示，且表示 $\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}$，并令 $\widetilde{w}\in\mathsf{Adm}^{\mathrm{reg}}(\eta)$。则 $\sigma_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\widetilde{w})\in W^{?}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})\cap\mathrm{JH}_{\mathrm{out}}(\sigma(\tau_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\widetilde{w})))$，并且它满足以下性质：对于任意 $\sigma'\in W^{?}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})\cap\mathrm{JH}(\sigma(\tau_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\widetilde{w})))$，有

$$\widetilde{w}_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\sigma')^{(j)}\geq\widetilde{w}^{(j)}\tag{21}$$

对于所有 $j\in\mathcal{J}$，对于所有 $j\in\mathcal{J}$等式成立，当且仅当 $\sigma'=\sigma$。

证明。这是 [LLHLMb，命题 8.6.3] 的证明的直接推论。这里我们采用其中的记号和约定。特别地，我们令 $\tau_{\mathrm{def}}=\tau_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\widetilde{w})$，使得 $\widetilde{w}=\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)\in\mathsf{Adm}^{\mathrm{reg}}(\eta)$。利用双射 (20)，我们将 $\widetilde{w}$分解为 $\widetilde{w}_2^{-1}w_0\widetilde{w}_1$，其中 $(\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2)\in\underline{\widetilde{W}}^{+}\times\underline{\widetilde{W}}_1^{+}$满足 $\widetilde{w}_1\uparrow\widetilde{w}_h^{-1}\widetilde{w}_2$。

根据定义，$\sigma_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\widetilde{w})=F_{(\widetilde{w}_h^{-1}\widetilde{w}_2,\widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})\widetilde{w}_1^{-1}(0))}$，而后一个 Serre 权是元素$\kappa\in W^{?}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})\cap\mathrm{JH}(\sigma(\tau))$，定义见 [LLHLMb，命题 8.6.3]。根据 [LLHLMb，命题 2.6.4], ，$\widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})\,\widetilde{w}_1^{-1}(0)=\widetilde{w}(\tau)\,\widetilde{w}_2^{-1}(0)$，由 $\mathrm{JH}_{\mathrm{out}}(\sigma(\tau))$ 的定义可知，权 κ 属于 $\mathrm{JH}_{\mathrm{out}}(\sigma(\tau))$（参见[LLHLMb，命题 2.3.7] 以及 [LLHLMb，§2.3.1] 开头）。

对于任意 $\sigma'\in W^{?}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})\cap\mathrm{JH}(\sigma(\tau))$，不等式 (21) 成立，这一点可直接由 [LLHLMb, 命题 8.6.3] 的证明得出。我们给出详细说明：根据 [LLHLMb, 命题 2.6.4]，任意 $\sigma'\in W^{?}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})\cap\mathrm{JH}(\sigma(\tau))$ 都具有如下形式：$\sigma'=F_{(\widetilde{w}',\widetilde{w}(\tau)\widetilde{s}_2^{-1}(0))}$，其中某个 $\widetilde{w}'\in\underline{\widetilde{W}}_1^{+}$ 以及某一对 $(\widetilde{s}_1,\widetilde{s}_2)\in\underline{\widetilde{W}}^{+}\times\underline{\widetilde{W}}^{+}$ 满足 $\widetilde{s}_1\uparrow\widetilde{w}'\uparrow\widetilde{w}_h^{-1}\widetilde{s}_2$ 和 $\widetilde{s}_2^{-1}w\widetilde{s}_1=\widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}},\tau)$，其中某个 $w\in\underline{W}$。根据王定理（参见 [LLHL19, 定理 4.1.1]），条件 $\widetilde{s}_2\uparrow\widetilde{w}_h\widetilde{w}'$（其定义为

逐嵌入地，给出 $\widetilde{s}_2^{(j)} \le \widetilde{w}_h^{(j)}\widetilde{w}'^{(j)}$ 对所有 $j \in \mathcal{J}$ 均成立；根据 [LLHL19, 引理 4.1.9]，我们得出

$$(\widetilde{w}_h^{(j)}\widetilde{w}'^{(j)})^{-1}w_0\widetilde{s}_1^{(j)} \ge (\widetilde{s}_2^{(j)})^{-1}w_0\widetilde{s}_1^{(j)} \ge (\widetilde{s}_2^{(j)})^{-1}w\widetilde{s}_1^{(j)} = \widetilde{w}^{(j)}$$

由于$(\widetilde{s}_2^{(j)})^{-1}w_0\widetilde{s}_1^{(j)}$、$(\widetilde{w}_h^{(j)}\widetilde{w}'^{(j)})^{-1}w_0\widetilde{s}_1^{(j)}$对于所有 $j \in \mathcal{J}$和 $w_0 \ge w$都是约化表达式。由 $\widetilde{s}_1 \uparrow \widetilde{w}' \in \underline{\widetilde{W}}_1^+$ 我们看到，$(\widetilde{w}_h\widetilde{w}', \widetilde{s}_1)$在(20)的左侧定义了一个元素，因此$\widetilde{w}_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\sigma') = (\widetilde{w}_h\widetilde{w}')^{-1}w_0\widetilde{s}_1$，从而证明了(21)。对于所有 $j \in \mathcal{J}$，该等式成立当且仅当$\sigma' = \sigma_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\widetilde{w})$这一事实是显然的，因为 $\sigma_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}$ 是一个双射。□

$\mathbb{N}$ 上的通常序在 $\mathbb{N}^{\mathcal{J}}$上诱导出乘积偏序，对于 $\underline{h} = (h^{(j)})_{j\in\mathcal{J}} \in \mathbb{N}^{\mathcal{J}}$，我们定义

$$W^?_{\le \underline{h}}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}) \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{\sigma \in W^?(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}) \mid \ell\big(\widetilde{w}_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\sigma)^{(j)}\big) \ge \ell(t_\eta) - h^{(j)} \text{ for all } j \in \mathcal{J}\right\}.$$

设 $\overline{\rho}: G_K \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$是一个连续的伽罗瓦表示，使得 $\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}$ 是 0-一般的（因此$\widetilde{\ }$使得 $\widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}) \in \underline{W}$ 有定义）。我们称一个驯惯性 $\mathbb{F}$-参数 $\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}: I_K \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 是 $\overline{\rho}$的特化，并记为 $\overline{\rho} \rightsquigarrow \overline{\rho}^{\mathrm{sp}}$，如果存在一个 n-一般的驯惯性类型 τ，使得$\overline{\rho}$是 τ-可容许的，并且 $\widetilde{w}(\overline{\rho}, \tau) = \widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}, \tau)$。（在此定义中，始终假设 τ和$\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}$ 的最低丛表示与 $\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}$的一个固定的最低胞腔表示相容。）

令$\mathcal{X}_{n,\ K}$ 为定义在 $\mathrm{Spf}\mathcal{O}$ 上的诺特形式代数叠 [EG，定义 3.2.1]。它具有如下性质：$\mathcal{X}_{n,\ K}(\mathbb{F})$同构于 G_K 在秩 n 的 $\mathbb{F}$ 上的连续表示的群胚。此外，$G(\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{GL}_n(k))$ 的 Serre 权与 $\mathcal{X}_{n,\ K}$ 的约化特殊纤维的不可约分支之间存在一个双射 $\sigma \mapsto \mathcal{C}_\sigma$，其描述见[LLHLMb，第7 节.4]（关于 Serre 权及其最低胞腔表示，请参阅 [LLHLMb，第 2 节.2] 。）该双射是$\sigma \mapsto \mathcal{X}^\sigma_{n,\ \mathrm{red}}$ 的双射 [EG，定理 6.5.1]的重新归一化。

特别地，如果 $\overline{\rho} \in \mathcal{X}_{n,K}(\mathbb{F})$，我们将 $\overline{\rho}$ 的几何权重集合定义为

$$W^g(\overline{\rho}) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\sigma \mid \overline{\rho} \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{F})\}.$$

定义 6.1.2. 设 $\overline{\rho}: G_K \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 是一个连续的伽罗瓦表示，满足 $\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}$ 是 0-一般的。对于 $\underline{h} = (h^{(j)})_{j\in\mathcal{J}} \in \mathbb{N}^{\mathcal{J}}$，定义 $W^g_{\le \underline{h}}(\overline{\rho})$ 为

$$W^g(\overline{\rho}) \cap \left(\bigcup_{\overline{\rho} \rightsquigarrow \overline{\rho}^{\mathrm{sp}}} W^?_{\le \underline{h}}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})\right).$$

下文中，我们将1记作由 $\underline{h} \in \mathbb{N}^{\mathcal{J}}$ 构成并满足 $h^{(j)} = 1$（对所有 $j \in \mathcal{J}$）的元组，0同理。注意，$W^g_{\le \underline{0}}(\overline{\rho}) = W_{\mathrm{extr}}(\overline{\rho})$ 是 [LLHLMa 中的极端权，见定义 3.7。

6.2. 拼接函子的应用。我们按照 [LLHLMa, §5.2]，引入拼接函子的形式体系，并将其应用于 §5 中关于变形环的结果。

6.2.1. L-参数。回顾一下，F_p^+是一个有限非分歧 ´étale $\mathbb{Q}_p$-代数，我们将其写作$\prod_{v\in S_p} F_v^+$，其中 S_p是有限集合，$F_v^+/\mathbb{Q}_p$是有限非分歧扩张。我们始终假设，对于任意 $v \in S_p$，系数域 E（分别为 $\mathbb{F}$）包含任意同态$F_v^+ \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$（分别为 $k_v \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$）的像，其中 k_v表示 F_v^+的剩余域。我们用 $\underline{G}^\vee$表示乘积$\prod_{F_p^+\to E}\mathrm{GL}_{n/\mathcal{O}}^\vee$（$\mathrm{Res}^{F_p^+}_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{GL}_{n/\mathcal{O}_p}$的对偶群）以及${}^L\underline{G}(\mathbb{F}) \overset{\text{定义}}{=} \underline{G}^\vee \rtimes \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}_p)$，其中$\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}_p)$通过后复合的方式作用于集合 $\{\iota: F_p^+ \to E\}$。一个 L-同态（定义在 $A \in \{E, \mathbb{F}\}$ 上）是连续同态$\overline{r}_p: G_{\mathbb{Q}_p} \to {}^L\underline{G}(A)$。一个 L-参数是一个 L-同态在$\underline{G}^\vee(E)$-共轭下的共轭类。一个驯惯性 L-参数是一个同态 $\underline{G}^\vee$: $E(\ \ )$在 $\underline{G}^\vee(E)$-共轭下的共轭类

，该同态具有开核，且经由$I_{\mathbb{Q}_p}$的驯分商分解，并且可扩张为一个 L-同态。根据 [GHS18，引理 9.4.1、引理 9.4.5], ，一个 L-参数$\overline{r}_p$ （分别为驯惯性 L-参数 τ）的数据等价于一组连续同态 $\{\rho_v : G_{F_v^+} \to \mathrm{GL}_n(A)\}_{v\in S_p}$（分别为温和惯性类型 $\{\tau_v\colon I_{F_v^+} \to \mathrm{GL}_n(A)\}_{v\in S_p}$）的数据。通过这一双射，我们因而可以为 L-参数定义最低胞腔表示和一般性。给定一个驯惯性L-参数 τ，以及与之对应的一组温和惯性类型 $\{\tau_v\colon I_{F_v^+} \to \mathrm{GL}_n(A)\}_{v\in S_p}$，令 $\sigma(\tau)$表示由$\otimes_{v\in S_p,E}\sigma(\tau_v)$给出的、定义在 E 上的$\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_p)$的驯光滑不可约表示；对每个 $v \in S_p$，令 $\sigma(\tau_v)$表示通过 [LLHLMb 命题 2.5.5]中的惯性局部朗兰兹对应与 τ_v 关联的、定义在 E 上的$\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{F_v^+})$的驯光滑不可约表示。

6.2.2. 拼接函子与 Serre 权。现在设 $\overline{r}_p : G_{\mathbb{Q}_p} \to {}^L\underline{G}(\mathbb{F})$ 是一个 L-同态，对应的集合为 $\{\overline{\rho}_v\colon G_{F_v^+} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\}_{v\in S_p}$。

设 R^p 是一个非零的完全局部诺特等维平坦 $\mathcal{O}$-代数，其剩余域为 $\mathbb{F}$，并且 $\mathrm{Spec}\ R^p$ 和 $\mathrm{Spec}\ \overline{R}^p$ 的每个不可约分支在几何上均不可约，定义

$$R_{\overline{r}_p} \overset{\mathrm{def}}{=} \widehat{\bigotimes}_{v\in S_p,\mathcal{O}} R^{\square}_{\overline{\rho}_v}, \qquad R_\infty \overset{\mathrm{def}}{=} R^p \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} R_{\overline{r}_p}$$

（我们在记号 R_∞ 中省略对 R^p 的依赖。）

给定一个驯性惯性 L-同态 $\tau : I_{\mathbb{Q}_p} \to \underline{G}^\vee(E)$，以及与之对应的集合$\{\tau_v\}_{v\in S_p}$，定义

$$R^{\eta,\tau}_{\overline{r}_p} \overset{\mathrm{def}}{=} \widehat{\bigotimes}_{v\in S_p} R^{\eta_v,\tau_v}_{\overline{\rho}_v}$$

并且 $R_\infty(\tau) \overset{\text{定义为}}{=} R_\infty \otimes_{R_{\overline{r}_p}} R^{\eta,\ \tau}_{\underline{\ r_p\ }}$，记 X_∞、$X_\infty(\tau)$、$\overline{X}_\infty(\tau)$ 分别表示 $\mathrm{Spec}\ R_\infty$、$\mathrm{Spec}\ R_\infty(\tau)$ 和 $\mathrm{Spec}\ \overline{R}_\infty(\tau)$。

我们将$\mathrm{Mod}(X_\infty)$记作 X_∞ 上的凝聚层范畴，并将$\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_p))$记作由拓扑 $\mathcal{O}[\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_p)]$-模组成且在 $\mathcal{O}$ 上有限生成的范畴。

定义6.2.3.对于一个 L-同态$\overline{r}_p$ ： $G_{\mathbb{Q}_p} \to {}^L\underline{G}(\mathbb{F})$，弱拼接函子是一个非零协变正合函子 M_∞ ： $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_p)) \to \mathrm{Mod}(X_\infty)$，满足对于任意温和惯性 L-同态 τ 以及任意 $\mathcal{O}$-格 $\sigma(\tau)^\circ$ 在 $\sigma(\tau)$ 中，都有：

(1) $M_\infty(\sigma(\tau)^\circ)$ 是 $\overline{X_\infty(\tau)}$ 上的极大 Cohen–Macaulay 层；且 (2) 对所有 $\sigma \in \mathrm{JH}(\sigma(\tau))$，$M_\infty(\sigma)$ 要么为零，要么是 $\overline{X}_\infty(\tau)$ 上的极大 Cohen–Macaulay 层。

给定一个用于 L-同态 $\overline{r}_p$ 我们由此定义

$$W_{M_\infty}(\overline{r}_p) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\sigma \mid \sigma \text{ is a } 3(n-1)\text{-deep Serre weight of G and } M_\infty(\sigma) \neq 0\}. \tag{22}$$

由 [LLHLMb，命题 2.4.5] 以及 [LLHLMa，定理 5.1.1，命题 5.4.1] 可知，若 $\overline{r}_p$ 是 $6(n-1)$-一般的，则 (22) 右侧要求 σ 为 $3(n-1)$-深的条件自动满足。

6.2.4. 缺陷一权的模性。现在我们假设 $S_p = \{v\}$ 和 $F_v^+ = K$。特别地，连续同态 $\overline{\rho}\colon G_K \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 可以视为一个 L-参数，并且与之关联有弱拼接函子。

命题 6.2.5. 设 $\overline{\rho}\colon G_K \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 为 $6(n-1)$-一般，且 M_∞ 是 $\overline{\rho}$ 的弱拼接函子。那么以下条件等价：

(1) $W^{g}_{\leq \underline{0}}(\overline{\rho}) \cap W_{M_\infty}(\overline{\rho}) \neq \emptyset$; 以
及 (2) $W^{g}_{\leq \underline{1}}(\overline{\rho}) \subseteq W_{M_\infty}(\overline{\rho})$。

在证明之前，我们记录以下引理，该引理也将用于 [PQ22 猜想 5.3。1] 第 §6.3 节中。

引理 6.2.6.设 $\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}: G_K \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 为 6($n-1$)-一般，并设 $\widetilde{w} \in \mathrm{Adm}^{\mathrm{reg}}(\eta)$ 满足$\ell(t_\eta) - \ell(\widetilde{w}^{(j)}) \leq 1$对所有 $j \in \mathcal{J}$。设 $\tau \overset{def}{=} \tau_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\widetilde{w})$，并写作 $\widetilde{w} = \widetilde{w}_2^{-1} w_0 t_\nu \widetilde{w}_1$ 其中 $\widetilde{w}_1$、$\widetilde{w}_2 \in \widetilde{\underline{W}_1^{+}}$ 和 $\nu \in X^+(\underline{T})$ 在 $X^0(\underline{T})$ 意义下唯一确定。则:

$$W^{?}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}) \cap \mathrm{JH}(\overline{\sigma(\tau)}) = \left\{ \sigma_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\widetilde{w}') \mid \widetilde{w}'^{(j)} \in S^{(j)} \text{ for all } j \in \mathcal{J} \right\}$$

其中 $S^{(j)} \overset{def}{=} \left\{ (\widetilde{w}_2^{(j)})^{-1} w_0 t_{\nu^{(j)}} \widetilde{w}_1^{(j)}, (\widetilde{w}_h^{(j)} \widetilde{w}_1^{(j)})^{-1} w_0 \widetilde{w}_1^{(j)} \right\}$. 此外, $\#S^{(j)} = 1$ 当且仅当 $\widetilde{w}_1^{(j)} = \widetilde{w}_h^{-1} \widetilde{w}_2^{(j)}$ 且 $\nu^{(j)} \in X^0(T)$, 当且仅当 $\ell(\widetilde{w}^{(j)}) = \ell(t_\eta)$.

注意，引理中 $\widetilde{w}$ 的分解存在且唯一，这由 [LLHLMb 命题 2.1.5] 保证。

证明。根据 [LLHLMb 命题 2.6.4]，关系 $\overline{F_{(\widetilde{x},\omega)}} \in W^{?}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}) \cap \mathrm{JH}(\sigma(\tau))$ 等价于存在一个分解 $\widetilde{w} = (\widetilde{x}_2)^{-1} s \widetilde{x}_1$，满足 $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in \widetilde{\underline{W}^{+}}$，$\widetilde{x}_1 \uparrow \widetilde{x} \uparrow \widetilde{w}_h^{-1} \widetilde{x}_2$ 且 $\omega = \widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})(\widetilde{x}_1)^{-1}(0)$。将引理 2.1.4 应用于每个 $\widetilde{w}^{(j)}$，可得 $s = w_0$；对于所有 $j \in \mathcal{J}$，要么 $\widetilde{x}^{(j)} = \widetilde{x}_1^{(j)} \in \widetilde{w}_1^{(j)} X^0(T)$（此时，根据 [LLHLMb 命题 2.1.5] 中分解的唯一性，还可得 $\widetilde{x}_2^{(j)} = t_{-w_0(\nu^{(j)})} \widetilde{w}_2^{(j)}$），要么 $\widetilde{x}^{(j)} = (\widetilde{w}_h^{(j)})^{-1} \widetilde{x}_2^{(j)} \in (\widetilde{w}_h^{(j)})^{-1} \widetilde{w}_2^{(j)} X^0(T)$（此时，根据 [LLHLMb 命题 2.1.5] 中分解的唯一性，还可得 $\widetilde{x}_1^{(j)} = t_{\nu^{(j)}} \widetilde{w}_1^{(j)}$）。由映射 $\sigma_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}$ 的定义，结论即得。□

命题 6.2.5 的证明。证明采用归纳法，归纳于与 Serre 权 $\sigma \in W^{g}_{\leq \underline{1}}(\overline{\rho})$ 相关的以下量 $\delta_{\overline{\rho}}(\sigma)$:

$$\delta_{\overline{\rho}}(\sigma) \overset{\mathrm{def}}{=} \min \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} \ell(t_\eta) - \ell(\widetilde{w}_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\sigma)^{(j)}) \mid \overline{\rho} \rightsquigarrow \overline{\rho}^{\mathrm{sp}} \right\}. \tag{23}$$

在整个证明过程中，我们固定选择一个代数中心特征 ζ；下文所有最低阿尔科夫表示的选取都将与 ζ 兼容。

根据$W^{g}_{\leq \underline{1}}(\overline{\rho})$ 的定义以及引理 6.1.1，对于每个 $\sigma \in W^{g}_{\leq \underline{1}}(\overline{\rho})$，存在 $\overline{\rho} \rightsquigarrow \overline{\rho}^{\mathrm{sp}}$ 以及一个驯惯性类型 τ（取决于 $\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}$），使得
(1) $\sigma \in W^{g}(\overline{\rho}) \cap W^{?}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}) \cap \mathrm{JH}_{\mathrm{out}}(\overline{\sigma(\tau)})$; (2) $\widetilde{w}_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\sigma) = \widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}, \tau) \in \mathrm{Adm}^{\mathrm{reg}}(\eta)$;
and (3) $\widetilde{w}_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\sigma')^{(j)} \geq \widetilde{w}_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\sigma)^{(j)}$对所有 $j \in \mathcal{J}$和所有 $\sigma' \in W^{?}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}) \cap \mathrm{JH}(\underline{\sigma(\tau)})$。

（注意，条件(2)唯一确定了 τ，因此按照引理 6.1.1 中的记号，我们令 $\tau = \tau_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\widetilde{w}_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\sigma))$。）我们固定 $\overline{\rho} \rightsquigarrow \overline{\rho}^{\mathrm{sp}}$，使得 $\widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}, \tau)$尽可能大（这等价于$\widetilde{w}_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\sigma)$ 实现最小值 (23)），其中 τ 是与满足上述 (1)、(2) 和 (3) 的 $\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}$ 相关联的类型。

我们声称，按照这种对 $\overline{\rho} \rightsquigarrow \overline{\rho}^{\mathrm{sp}}$ 和 τ 的选取，有

$$\widetilde{w}(\overline{\rho}, \tau) = \widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}, \tau).$$

事实上，根据 [LLHLMa 定理 3.5.1]，我们总有 $\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)\geq\widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}},\tau)$。若 $\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)>\widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}},\tau)$，则存在一个特化 $\overline{\rho}\rightsquigarrow\overline{\rho}',^{\mathrm{sp}}$，使得 $\widetilde{w}(\overline{\rho}',^{\mathrm{sp}},\tau)=\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)$（特别是，$\widetilde{w}(\overline{\rho}',^{\mathrm{sp}},\tau)\in\mathrm{Adm}^{\mathrm{reg}}(\eta)$），因此 $\widetilde{w}(\overline{\rho}',^{\mathrm{sp}},\tau)>\widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}},\tau)$。这与 $\widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}},\tau)$ 的极大性矛盾。

对于每个具有上述对应的 $\sigma\in W^g_{\leq\underline{1}}(\overline{\rho})$、$\overline{\rho}\rightsquigarrow\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}$ 和 τ，我们现在断言

$$W^g(\overline{\rho})\cap\mathrm{JH}(\overline{\sigma(\tau)})=W^?(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})\cap\mathrm{JH}(\overline{\sigma(\tau)}) \tag{24}$$

或者，根据 [LLHL19，定理 4.2.4],，等价地，任意 $\sigma'\in W^?(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})\cap\mathrm{JH}(\sigma(\tau))$ 都属于 $W^g(\overline{\rho})$。事实上，由引理 6.1.1，存在 $\sigma_0\in W^?(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})\cap\mathrm{JH}(\sigma(\tau))$，使得

(1) $\delta_{\overline{\rho}}(\sigma_0)=0$; and

(2) for all $\sigma'\in W^?(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})\cap\mathrm{JH}(\overline{\sigma(\tau)})$ we have $\widetilde{w}_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\sigma')^{(j)}\in\{\widetilde{w}_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\sigma_0)^{(j)},\widetilde{w}_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\sigma)^{(j)}\}$.

由第 (1) 项及 [LLHLMb，定理 7.4.2]（另见 [LLHLMa，注 3.9.1]），我们得到 $\sigma_0\subset W^g(\overline{\rho})$，从而得到 $\overline{\rho}\in\mathcal{C}_\sigma\cap\mathcal{C}_{\sigma_0}$。回顾 [LLHLMb，公式 (4.11) 和定义 4.6.1] 中的簇 $\widetilde{C}^{\zeta}_{\sigma'}$ 及其分解 $\prod_{j\in\mathcal{J}}\widetilde{C}^{\zeta,(j)}_{\sigma'}$。每个 $\widetilde{C}^{\zeta,(j)}_{\sigma'}$ 均由 $\widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})^{(j)}$和 $\widetilde{w}_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\sigma')^{(j)}$明确确定（见同上，定义 4.3.2、定理 4.3.9），因此当 $\widetilde{w}_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\sigma')^{(j)}=\widetilde{w}_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\sigma)^{(j)}$ 时，$\widetilde{C}^{\zeta,(j)}_{\sigma'}=\widetilde{C}^{\zeta,(j)}_{\sigma}$；当 $\widetilde{w}_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\sigma')^{(j)}=\widetilde{w}_{\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}}(\sigma_0)^{(j)}$ 时，$\widetilde{C}^{\zeta,(j)}_{\sigma'}=\widetilde{C}^{\zeta,(j)}_{\sigma_0}$。因此，由第 (2) 项，对所有 $\sigma'\in W^?(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})\cap\mathrm{JH}(\sigma(\tau))$，我们有

$$\widetilde{C}^{\zeta}_{\sigma}\cap\widetilde{C}^{\zeta}_{\sigma_0}=\prod_{j\in\mathcal{J}}\widetilde{C}^{\zeta,(j)}_{\sigma}\cap\widetilde{C}^{\zeta,(j)}_{\sigma_0}\subseteq\prod_{j\in\mathcal{J}}\widetilde{C}^{\zeta,(j)}_{\sigma'}=\widetilde{C}^{\zeta}_{\sigma'}$$

它与 [LLHLMb, 定理 7.4.2] 一起蕴含 $\mathcal{C}_\sigma\cap\mathcal{C}_{\sigma_0}\subseteq\mathcal{C}_{\sigma'}$。这就证明了 (24)。

现在我们转向归纳论证。我们将自由使用 [LLHLMa, §5.3], 中引入的拼接函子的循环记号；特别地，我们用 pr 表示投影映射，它将约化并 $\cup_{\tau\in\mathcal{T}}\overline{X}_\infty(\tau)$（对应一组一般驯惯性 L-参数$\mathcal{T}$）上的循环映射到与集合 $\mathcal{T}$相关的多类型变形环的特殊纤维上的循环。集合 $\mathcal{T}$可以固定为满足 [LLHLMa, §5.3] 中的条件(ii)，因为本证明中涉及的所有温和惯性类型 τ对所有 $j\in\mathcal{J}$都满足 $\ell(\widetilde{w}(\overline{\rho},\tau)^{(j)})\geq\ell(t_\eta)-1$，因此定理 5.2.3 适用。此外，给定 $\sigma\in W^g(\overline{\rho})$，我们将用 $\mathcal{C}_\sigma(\overline{\rho})$ 表示不可约分支 $\mathcal{C}_\sigma$ 到 $\mathcal{X}_{n,K}$ 在 $\overline{\rho}\in\mathcal{X}_{n,K}(\mathbb{F})$ 处的 versal 环上的拉回。

令 $\sigma\in W^g_{\leq\underline{1}}(\overline{\rho})$。我们对 $\delta_{\overline{\rho}}(\sigma)$进行归纳法证明：$\mathrm{pr}\circ Z(M_\infty(\overline{\sigma}(\tau)^\circ))$的支集包含 $\mathcal{C}_\sigma$，并且 $\mathrm{pr}\circ Z(M_\infty(\overline{\sigma}(\tau)^\circ))$ 的支集中的任何其他不可约分支都具有形式$\mathcal{C}_\kappa$，其中 $\kappa\in W^g(\overline{\rho})$，$\delta_{\overline{\rho}}(\kappa)<\delta_{\overline{\rho}}(\sigma)$。

如果 $\delta_{\overline{\rho}}(\sigma)=0$那么$\sigma\in W^g_{\leq\underline{0}}(\overline{\rho})$，且 $W^g_{\leq\underline{0}}(\overline{\rho})\cap W_{M_\infty}(\overline{\rho})\neq\emptyset$蕴含 $W^g_{\leq\underline{0}}(\overline{\rho})\subseteq W_{M_\infty}(\overline{\rho})$，根据 [LLHLMa]的主要结果。如果 $W^g(\overline{\rho})\cap\mathrm{JH}(\sigma(\tau))=W^?(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})\cap\mathrm{JH}(\sigma(\tau))=\{\sigma\}$（根据引理 6.2.6），并且 $M_\infty(\overline{\sigma}(\tau)^\circ)$在(一个 $\overline{R}^\eta$ 的形式光滑修改) 上具有满支集，则我们得出，循环 $\mathrm{pr}\circ Z(M_\infty(\overline{\sigma}(\tau)^\circ))$支持在 $\mathcal{C}_\sigma(\overline{\rho})$上。（这里以及下文中，我们写作 $\overline{\sigma}(\tau)^\circ$，表示任何 $\mathcal{O}$-格 $\sigma(\tau)^\circ$ 在 $\sigma(\tau)$ 中的模 ϖ 约化。）

现在假设 $\delta_{\overline{\rho}}(\sigma)>0$，并且对于任意满足 $\delta_{\overline{\rho}}(\sigma')<\delta_{\overline{\rho}}(\sigma)$ 的 $\sigma'\in W^g_{\leq\underline{1}}(\overline{\rho})$，循环 $\mathrm{pr}\circ Z(M_\infty(\overline{\sigma'}))$ 支持在 $\mathcal{C}_{\sigma'}(\overline{\rho})$ 上，也可能支持在其他形如 $\mathcal{C}_\kappa(\overline{\rho})$ 的不可约分支上，其中$\kappa\in W^g(\overline{\rho})$ 且 $\delta_{\overline{\rho}}(\kappa)<\delta_{\overline{\rho}}(\sigma')$。我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Supp}\big(Z(\overline{R}^{\eta,\tau}_{\overline{\rho}})\big)&=\mathrm{Supp}\big(\mathrm{red}(Z(R^{\eta,\tau}_{\overline{\rho}})[1/p])\big)\\&=\mathrm{Supp}\big(\mathrm{red}\circ\mathrm{pr}\big(Z(M_\infty(\sigma(\tau)^\circ)[1/p])\big)\big)\\&=\mathrm{Supp}\big(\overline{\mathrm{pr}}\circ\mathrm{red}\big(Z(M_\infty(\sigma(\tau)^\circ)[1/p])\big)\big)\\&=\mathrm{Supp}\big(\overline{\mathrm{pr}}\circ Z(M_\infty(\overline{\sigma}(\tau)^\circ))\big)\end{aligned} \tag{25}$$

其中，第一个和最后一个等号由 [LLHLMa，命题 5.3.1]，得出；第二个等号由 $R^{\eta,\tau}_{\overline{\rho}}$ 在几何上不可约（定理 5.2.3）这一事实得出；第三个等号由 $\mathrm{red}\circ\mathrm{pr} = \mathrm{pr}\circ\mathrm{red}$ 得出（见[LLHLMa，§5.3]）。由于 $R^{\eta,\tau}_{\overline{\rho}}$ 根据定理 5.2.3 在几何上不可约，由 M_∞ 和 [的正合性以及 1] LLHLMa，定理 5.1.1 和命题 5.4.1] ，我们有

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{pr}}\circ Z(M_\infty(\overline{\sigma}(\tau)^\circ)) &= \sum_{\sigma'\in W^?(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})\cap \mathrm{JH}(\overline{\sigma(\tau)})} \overline{\mathrm{pr}}\circ Z(M_\infty(\sigma')) \\ &= \overline{\mathrm{pr}}\circ Z(M_\infty(\sigma)) + \sum_{\sigma'\in W^?(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})\cap \mathrm{JH}(\overline{\sigma(\tau)})\setminus\{\sigma\}} \overline{\mathrm{pr}}\circ Z(M_\infty(\sigma'))\end{aligned}$$

根据 $\delta_{\overline{\rho}}$ 的定义以及引理 6.1.1，我们很容易验证，对于所有$\sigma' \in W^?(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}) \cap \mathrm{JH}(\sigma(\tau)) \setminus \{\sigma\}$，都有 $\delta_{\overline{\rho}}(\sigma') < \delta_{\overline{\rho}}(\sigma)$。因此，利用归纳假设和（ 24 ），我们得到

$$\bigcup_{\sigma'\in W^?(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})\cap \mathrm{JH}(\overline{\sigma(\tau)})\setminus\{\sigma\}} \mathrm{Supp}\big(\overline{\mathrm{pr}}\circ Z(M_\infty(\sigma'))\big) = \bigcup_{\sigma'\in W^?(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}})\cap \mathrm{JH}(\overline{\sigma(\tau)})\setminus\{\sigma\}} \mathcal{C}_{\sigma'}(\overline{\rho}).$$

另一方面，我们有

$$\mathrm{Supp}\big(Z(\overline{R}^{\eta,\tau}_{\overline{\rho}})\big) = \bigcup_{\sigma'\in W^g(\overline{\rho})\cap \mathrm{JH}(\overline{\sigma(\tau)})} \mathcal{C}_{\sigma'}(\overline{\rho})$$

根据 [LLHLMb、定理 7.4.2] （以及 [Sta19、引理 0DRB、引理 0DRD 和定义 0DRA]），因此 $\mathrm{pr}\circ Z(M_\infty(\sigma))$ 必然支持在 $\mathcal{C}_\sigma(\overline{\rho})$ 上，并且可能还支持在其他不可约分支$\mathcal{C}_{\sigma'}(\overline{\rho})$上，其中 $\sigma' \in W^g(\overline{\rho})$ 和 $\delta_{\overline{\rho}}(\sigma') < \delta_{\overline{\rho}}(\sigma)$。□

备注 6.2.7。如果在命题 6.2.5 的表述中，我们进一步假设弱拼接函子 M_∞ 是极小的（[LLHLMa，定义 5.2.1]），那么方程（25）可以替换为更强的陈述

$$e(R^{\eta,\tau}_{\overline{\rho}}) = e(M_\infty(\overline{\sigma}(\tau)^\circ))$$

（其中 $e(\cdot)$ 表示希尔伯特–塞缪尔重数），这迫使 $e(M_\infty(\sigma)) = 1$对所有 $\sigma \in W^?(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}) \cap \mathrm{JH}(\sigma(\tau)$。

注6.2.8. 设 $\overline{r}_p : G_{\mathbb{Q}_p} \to {}^L\underline{G}(\mathbb{F})$ 是一个 L-参数，并具有相应的集合 $\{\overline{\rho}_v : G_{F_v^+} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\}_{v\in S_p}$。对于每个 $v \in S_p$，令 $\mathcal{J}_v$ 表示环同态 $\{k_v \hookrightarrow \mathbb{F}\}$的集合，使得 $\mathcal{J}_p = \prod_{v\in S_p} \mathcal{J}_v$。给定 $\underline{h}_v \in \mathbb{N}^{\mathcal{J}_v}$，对于每个 $v \in S_p$，我们于是有一个集合 $\{W^g_{\le \underline{h}_v}(\overline{\rho}_v)\}_{v\in S_p}$，其元素通过在 $v \in S_p$ 上取张量积而成为 G 的 Serre 权。特别地，给定 $\underline{h} \in \mathbb{N}^{\mathcal{J}_p}$，我们可以为一个 L-参数 $\overline{r}_p : G_{\mathbb{Q}_p} \to {}^L\underline{G}(\mathbb{F})$定义集合 $W^g_{\le \underline{h}}(\overline{r}_p)$。命题 6.2.5 和引理6.2.6的证明经过相应修改后仍然成立，即将 $\overline{\rho} : G_K \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 替换为一个 L-同态$\overline{r}_p : G_{\mathbb{Q}_p} \to {}^L\underline{G}(\mathbb{F})$（关于这类从 $\#S_p = 1$ 到 $\#S_p > 1$ 的转换，另见 [LLHLMb，注 7.3.4]）。

6.3. 全局应用与 [PQ22] 猜想。我们将上述结果应用于获得主要的全局应用。我们沿用 [LLHLMa, §5.5.1, 5.5.2, 5.5.3] 中的设定和记号。特别地，我们有一个全实域 $F^+/\mathbb{Q}$not equal to $\mathbb{Q}$，以及一个 F/F^+CM 扩张。以下我们假设，F^+ 上方的所有赋值在 $\mathbb{Q}_p$ 上均非分歧，且它们在 F 中进一步完全分裂。给定一个约化群 $G_{/F^+}$，它是 GL_n 的外形式，在 F 上分裂，并满足 $G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}) = U_n(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$，我们按照 [LLHLMa, Definition 5.5.1], ，定义连续伽罗瓦表示$\overline{r}: G_{F^+} \to \mathcal{G}_n(\mathbb{F})$ 关于 $G_{/F^+}$ 自守的概念，并定义 $\overline{r}$ 的模 Serre 权集合 $W(\overline{r})$（参见同上 Definition 5.5.2）。这里，$\mathcal{G}_n$ 是 [CHT08, §2] 中定义的群概形。最后，令 $\overline{r}_p$ 为由下式诱导的 L-同态

连续表示的集合 $\overline{r}|_{G_{F_v^+}}$: $G_{F_v^+} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，其中 $v|p$。特别地，我们用 S_p 表示 F^+ 上方有限位置的集合。

令 $\overline{r}$: $G_{F^+} \to \mathcal{G}_n(\mathbb{F})$ 为自守的，并且 $\overline{r}(G_{F(\zeta_p)}) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 是 adequate。那么根据[LLHLMa，引理 5.5，4] 我们可以且确实固定一个弱拼接函子 M_∞，用于 L-同态$\overline{r}_p$，使得对于 $\mathrm{G} = \prod_{v\in S_p}\mathrm{GL}_n(k_v)$ 的任意 Serre 权 σ，我们有

$$M_\infty(\sigma) \neq 0 \Longleftrightarrow \sigma \in W(\overline{r}). \tag{26}$$

定理 6.3.1（缺陷一权的模性）。设 $\overline{r}$： $G_{F^+} \to \mathcal{G}(\mathbb{F})$ 是一个自守表示，使得

- $\overline{r}(G_{F(\zeta_p)}) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 是 adequate；且
- $\overline{r}_p$ 是 $6(n-1)$-一般的。

那么，以下各项是等价的：

(1) $W^g_{\leq \underline{0}}(\overline{r}_p) \cap W(\overline{r}) \neq \emptyset$;

以及 (2) $W^g_{\leq \underline{1}}(\overline{r}_p) \subset W(\overline{r})$。

证明。由命题 6.2.5 和注 6.2.8，利用 (26) 可得。 □

注 6.3.2。沿用定理 6.3.1 和注 6.2.8 中的设定与记号。若对某个 $\overline{r}_p \rightsquigarrow \overline{r}_p^{\mathrm{sp}}$ 有 $\sigma \in W^?_{\leq 1}(\overline{r}_p^{\mathrm{sp}})$，则 $\sigma \in W_{M_\infty}(\overline{r})$ 当且仅当 $\sigma \in W^g(\overline{r}_p)$，且当且仅当 $\sigma \in W^g_{\leq 1}(\overline{r}_p)$。对每个这样的 σ，存在 τ 使得

$$\widetilde{w}(\overline{r}_p, \tau) = \widetilde{w}(\overline{r}_p^{\mathrm{sp}}, \tau) \quad \text{and} \quad \ell(\widetilde{w}(\overline{r}_p^{\mathrm{sp}}, \tau)^{(j)}) \geq \ell(t_\eta) - 1 \tag{27}$$

对每个 $j \in \mathcal{J}_p$和 $\sigma \in W^?(\overline{r}_p^{\mathrm{sp}}) \cap \mathrm{JH}(\overline{\sigma}(\tau))$，其中 $\sigma \in W^g(\overline{r}_p)$ 当且仅当 $\overline{r}_p$对满足 (27) 中不等式取等号的每个 $j \in \mathcal{J}_p$ 都满足 $Z_{-\alpha^{(j)}} = 0$。

我们现在回顾 [PQ22]的局部—整体相容性结果的设定。假设 p在 F 中完全分裂，并固定 $w|p$ 的一个地方 F。假设 $\overline{r}_w \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{r}|_{G_{F_w}}$ 是一级 Fontaine–Laffaille模，并且其满足由其在Fontaine–Laffaille模的模空间中的位置所决定的几何一般性条件（见 [PQ22，定义 3.2.5]）。特别地，我们有$\overline{r}_w^{\mathrm{ss}}$的一个最低胞腔表示（$1, \mu$）（其中在所引文献第 1 节的记号中，$\mu = (c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_1, c_0)$），以及一个具有最低胞腔表示（$1, s_\alpha((\mu^{\square, i_1, j_1})^\vee)$）的一级驯惯性类型 τ（其中$\mu^{\square, i_1, j_1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mu^\vee + (\langle \eta, \alpha^\vee \rangle + 1)\alpha$），其中 $0 \leq i_1, j_1 \leq n-1$ 对应于一个正根 $\alpha = \alpha_{i_1+1, j_1+1}$。于是根据 [PQ22 的证明，引理 3.4.1]（即根据所引文献中$\mathrm{Mat}_{\epsilon,\nu}(\phi)$的表达式），我们看到 $\widetilde{w}(\overline{r}_w, \tau) = t_{\eta-\alpha} s_\alpha$，这是一个正则余维一形状。特别地，$\overline{r}_w \rightsquigarrow \overline{\rho}^{\mathrm{sp}}$满足 $\widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}, \tau) = t_{\eta-\alpha} s_\alpha$。由引理 6.2.6，我们得到：

定理 6.3.3（猜想 5.3.1 [PQ22]）。设 $w|p$。假设 $\overline{r}_w$ 是一级 Fontaine–Laffaille，且 $(\overline{r}_w)_{n-i_0,\ n-j_0}$ 按照 [PQ22，定义 3.2.5], 的意义是 Fontaine–Laffaille 泛型，并且 $\overline{r}_w^{\mathrm{ss}}$ 是 $3(n-1)$-一般。那么

$$W_w(\overline{r}) \cap \mathrm{JH}(\overline{\sigma}(\tau)) \subseteq \{F(\mu)^\vee,\ F(\mu^{\square, i_1, j_1})^\vee\}$$

其中，$W_w(\overline{r})$ 表示 w 处 $\overline{r}$ 的模权集合（如[PQ22，定义 5.2.2] 正下方的段落中所定义）。

证明。由 [LLHLMa, Theorem 5.1.1], $W_w(\overline{r}) \cap \mathrm{JH}(\overline{\sigma}(\tau)) \subseteq W^?(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}) \cap \mathrm{JH}(\overline{\sigma}(\tau))$。现在，由引理 6.2.6 可立即得出，因为 $\widetilde{w}(\overline{\rho}^{\mathrm{sp}}, \tau) = s_\alpha t_{\eta-\alpha}$。 □

上述结果去除了 [PQ22, Theorem 5.6.2] 中的权消去条件。然而，当 $Z_{-\alpha} \neq 0$ 模 ϖ 时，变形环 $R^{\eta}_{\bar{\rho}}{}^{\tau}$ 在 $\mathcal{O}$ 上形式光滑，这一事实使得 [PQ22, Theorem 5.6.2] 中的论证更加直接，因为在这种情况下，通过粘合论证，代数自守形式的模是 Hecke 代数上的自由模（参见 [PQ22, Remark 5.4.6]）。

References

[BD14] Christophe Breuil 和 FredDiamond, *Hilbert modular forms modulo p and values of extensions betweenGalois characters*, 《法国高等师范学院科学年鉴》 ´Ec.Norm. Sup´ér.(4)47(2014)，第5期，905–974 页（法文）。[BHH+a] Christophe Breuil、Florian Herzig、Yongquan Hu、Stefano Morra 和Benjamin Schraen, *Conjectures and results on modular representations of* $\mathrm{GL}_n(k)$ *for a p-adic field k*, https://arxiv.org/abs/2102.06188，预印本（2021年）。[BHH+b] , *Gelfand–Kirillov dimension and mod p cohomology for* GL_2, https://arxiv.org/pdf/2009.03127.pdf，预印本（2020 年）。[CDT99] Brian Conrad、Fred Diamond和 RichardTaylor, *Modularity of certain potentially Barsotti-Tate Galois representations* **12** 1999 2, 521 567 1639612 99 11037 ，《美国数学学会杂志》（），第 – 期。MR（ i:)[CEG+16] Ana Caraiani、MatthewEmerton、Toby Gee、David Geraghty、VytautasPaˇsk¯unas 和 SugWooShin, *Patching and the p-adic local Langlands correspondence*，《剑桥数学杂志》4（2016），第2期，197–287 页。MR 3529394[CHT08] Laurent Clozel、Michael Harris 和 RichardTaylor, *Automorphy for some l-adic lifts of automorphic mod l Galois representations*，《高等科学研究院数学出版物》 ´Etudes Sci.（2008），第 108 期，1–181 页，附录 A 总结了 Russ Mann未发表的工作，附录 B由 Marie-FranceVign´eras 撰写。MR2470687（2010j:11082）[CL18] Ana Caraiani 和 Brandon Levin, *Kisin modules with descent data and parahoric local models*，《法国高等师范学院科学年鉴》 ´Ec. Norm. Sup ´ 4 **51** 2018 1, 181 213 3764041 ér.（）（），第 – 期。MR DL Andrea [21] Dotto和 Daniel Le, *Diagrams in the mod p cohomology of Shimura curves*，《组合数学》157（2021），第8 期，1653–1723 页（英文）。[EG] MatthewEmerton 和Toby Gee, *Moduli stacks of étale* φ Γ *-modules and the existence of crystalline lifts*（， ），《数学研究年刊》，2021 即将出版（）。[EGS15] MatthewEmerton、TobyGee和DavidSavitt, *Lattices in the cohomology of Shimura curves*，《数学发明》 **200** 2015 1, 1 96 3323575 （），第 –期。MREL John Enns 和 HeejonsLee, [ ] *Mod p local–global compatibility for* $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_p)$ *in the ordinary case*, https://arxiv.org/abs/2112.12256，预印本（2021 年）。[GHS18] Toby Gee、Florian Herzig 和 David Savitt, *General Serre weight conjectures*，《欧洲数学学会杂志》（JEMS） **20** 2018 12, 2859 2949 3871496 （），第– 期。MR HC ThomasJ. Haines 和 Ngˆo BaoChˆau, [02] *Alcoves associated to special fibers of local models*，《美国数学杂志》124（2002），第 6 期，1125–1152 页。MR 1939783[Her09] FlorianHerzig, *The weight in a Serre-type conjecture for tame n-dimensional Galois representations*，《杜克数学杂志》149（2009），第 1 期，37–116 页。MR2541127（2010f:11083）[HH17] Thomas J.Haines 和 XuhuaHe, *Vertexwise criteria for admissibility of alcoves*，《美国数学杂志》139（2017），第 3期，769–784 页。MR 3650232[HLM17] Florian Herzig、Daniel Le 和 StefanoMorra, *On mod p local-global compatibility for* $_3$ *in the* GL , 《组合数学》（），*ordinary case* **153** 2017 11, 2215 2286 第 – 期。[HW22] YongquanHu和HaoranWang, *On the* 模*p cohomology for* GL_2*: the non-semisimple case*，《剑桥数学杂志》10（2022），第2 期，261–431 页（英文）。[Jan03] JensCarsten Jantzen, *Representations of algebraic groups*，第二版，《数学概览与专著》，第 107 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，2003 年。MR 2015057（2004h:20061）[LLHL19] Daniel Le、Bao VietLe Hung 和BrandonLevin, *Weight elimination in Serre-type conjectures*，《杜克数学杂志》168（2019），第13 期，2433–2506 页。MR 4007598[LLHLMa] Daniel Le、Bao Viet Le Hung、Brandon Levin 和 Stefano Morra, *Extremal weights and a tameness criterion for mod p Galois representations* 2206 06442 2022 , https://arxiv.org/pdf/. .pdf，预印本（ ）。[LLHLMb] , *Local models for galois deformation rings and applications*，《数学发明》，即将出版。

[LLHLMc] , *Serre weights for three-dimensional wildly ramified Galois representations*, https://arxiv.org/pdf/2202.03303.pdf, 预印本（2021）。[LLHLM18] , *Potentially crystalline deformation rings and Serre weight conjectures: shapes and shadows*, 《数学发明》 **212** 2018 1, 1 107 3773788 ( ), 第 no. –。MR LLHLM , [20] *Serre weights and Breuil's lattice conjectures in dimension three*, Forum Math. Pi 8(2020), e 5, 135 4079756 。MR LLHM Daniel Le,Bao Viet Le Hung, Stefano Morra, Chol Park, 和 [$^{+}$] Zicheng Qian, *Moduli of Fontaine–Laffaille representations and a mod-p compatibility result*, https://arxiv.org/pdf/2109.02720.pdf, 预印本（2021）。[LMP18] Daniel Le、Stefano Morra 和 Chol Park, *On mod p local-global compatibility for* $_3$ $\mathbb{Q}_p$ *in the* GL ( ), *non-ordinary case* 3 **117** 2018 4, 790 848 Proc. Lond.Math. Soc.( )( ), 第 no. –（英文）。[MP17] StefanoMorra和 Chol Park, *Serre weights for three-dimensional ordinary Galois representations*, J. Lond. Math.Soc., II. Ser. 96 (2017), 第 2 期, 394–424（英文）。[PQ22] Chol Park 和 ZichengQian, *On mod p local-global compatibility for* $\mathrm{GL}_n(\mathrm{Q}_p)$ *in the ordinary case*, M´em.Soc. Math. Fr.,Nouv. S´er. 173 (2022), vi+150 （英文）。[Sta19] Stacks Project 作者, *Stacks Project*, https://stacks.math.columbia.edu, 2019。[Wan87] Jian Pan Wang, *Partial orderings on affine Weyl groups*, J. East China Norm.Univ. Natur.Sci. Ed. (1987), 第 4 期, 15–25。 MR980127Department of Mathematics, Purdue University, 150 N. University Street, West Lafayette, In-diana 47907, USA*Email address*: ledt@purdue.eduDepartment of Mathematics, Northwestern University, 2033 Sheridan Road, Evanston, Illinois60208, USA*Email address*: lhvietbao@googlemail.comUniversité Paris 8, Laboratoire d'Analyse, Géométrie et Applications, LAGA, Université Sor-bonne Paris Nord, CNRS, UMR 7539, F-93430, Villetaneuse, France *Email address*: morra@math.univ-paris13.frDepartment of Mathematical Sciences, Ulsan National Institute of Science and Technology,UNIST-gil 50, Ulsan 44919, South Korea *Email address*: cholpark@unist.ac.krMorningside Center of Mathematics, No.55, Zhongguancun East Road, Beijing, 100190, China*Email address*: qianzicheng@amss.ac.cn