arXiv:2304.03066v1 [math.CT] 6 Apr 2023

# 偏置初等教义与商完备化

Cipriano Junior Cioffo*帕多瓦大学`

摘要

在本文中，我们弥合了 Mai-etti 和 Rosolini的初等商完备化与 Carboni 和 Vitale 的弱左正合范畴的精确完备化之间的空缺。为此，我们将 Lawvere针对具有弱有限积的范畴所提出的初等教义加以推广，并将这类结构称为有偏的初等教义。我们给出了两个主要构造。第一个称为严格化，它从有偏的初等教义产生一个初等教义。第二个是对初等商完备化的扩展，即使在具有弱有限积的情形下，也能将弱左正合范畴的精确完备化加以推广。

## 1 引言

商完备化是数学和逻辑中一种普遍存在的构造，在范畴论中已得到广泛研究。 [CM82] 首次明确描述了一个左正合范畴的自由正合范畴。后来， [CV98], 将这一结果推广到了弱左正合范畴。 [MR13], Maietti 和 Rosolini 引入了初等商完备化，以便对[Mai09]中的商构造进行抽象描述。为此，他们将等价关系和商的概念相对化到 Lawvere 的初等教义中，即从具有严格有限积的范畴到偏序集及保序函数范畴的适当函子 P: $\mathscr{C}^{op} \to$ Pos [Law69; Law70]。根据 [MR13; MR12; MR15], ，已证明初等商完备化能够推广弱左正合范畴的精确完备化，前提是有限积是严格的。

在这项工作中，我们将初等商完备化扩展到具有弱有限积的范畴，从而全面推广了弱左精确范畴的精确完备化。

*作者谨此感谢 Jacopo Emmenegger、Milly Maietti 和 Pino Rosolini（他们提出了“偏置初等教义”这一名称），感谢他们对本工作的诸多重要意见和富有成效的讨论。

为此，我们首先定义偏置初等教义，它们是来自具有弱有限积的范畴、取值于 $\mathscr{C}^{op} \to$ Pos 的适当函子。偏置初等教义的结构与经典教义相似，但重新表述了相关性质，以考虑由弱有限积的弱泛性质所导致的某种偏向。正如预期的那样，偏置初等教义推广了 Lawvere 的初等教义。

对于这些结构，我们在用于获得两项主要构造的弱有限积的纤维中，识别出一类称为证明无关的元素。

第一项是严格化，它将每个偏初等教义 $\mathsf{P} : \mathscr{C}^{op} \to$ Pos 关联到一个定义在 $\mathscr{C}_s{}^{op} \to$ Pos 上的初等教义 $\mathsf{P}^s$，该教义定义于 $\mathscr{C}$ 的有限积完备化$\mathscr{C}_s$ 上。第二项是商完备化，它将初等商完备化和弱左正合范畴的精确完备化都加以推广，即使在只有弱有限积的情况下亦然。对于这一构造，我们证明了一个类似于[CV98] 中泛性质的性质。

此外，我们表明，偏置初等教义构成了一个在切片运算下封闭的框架。以一个适当的偏置初等教义 $\mathsf{P} :\mathscr{C}^{op} \to$ InfSL 为起点，对于每个对象 $A \in \mathscr{C}$，我们都可以定义切片教义 $\mathsf{P}/_A : \mathscr{C}/A^{op} \to$ Pos。此外，我们证明这一运算与商完备化可交换。

我们的主要例子来自极简主义基础[Mai09]的内涵层面。该理论的句法范畴记为 $\mathcal{CM}$，它具有严格有限积和弱拉回，并配备了一个初等教义 $G^{\mathbf{mTT}} : \mathcal{CM}^{op} \to$Pos。$G^{\mathbf{mTT}}$ 的切片教义是偏置初等教义，而它们的商完备化则提供了真正的初等商完备化实例，这些实例并非精确完备化。

在第 2 节中，我们回顾初等教义的主要概念，以及初等商完备化与精确完备化之间的关系。第 3 节中，我们定义偏置初等教义及其基本性质。第 4 节讨论与证明无关的元素。第 5 节中，我们给出偏置初等教义的严格化；第 6 节中，我们描述商完备化及其泛性质。第 7 节中，我们简要讨论商完备化的性质，并将其与文献中已有的若干结果进行比较。

# 2 预备知识

本节主要遵循[MR13; MR12], 回顾初等教义的主要概念；我们也参考了 [Law69; Law70; Jac99]。特别地，我们回顾在 [MR13], 中引入的初等商完备化的构造，以及它与 [CM82; CV98]中所介绍的（弱）左正合范畴的精确完备化之间的关系。

这种范畴结构，我们简称为教义，由一个函子给出，其形式为

$$\mathsf{P} : \mathscr{C}^{op} \to \mathsf{Pos}$$

从具有严格有限积的范畴 $\mathscr{C}$ 到偏序集范畴 Pos（由偏序集和保序函数构成）。我们将函子 $\mathsf{P}(X)$ 的值称为 P 在 $X$ 上的纤维。

定义 2.1。设 $\mathscr{C}$ 是一个具有严格有限积的范畴。主教义是一个函子 $\mathsf{P}: \mathscr{C}^{op} \to$ 偏序集范畴，其取值于下半格范畴 InfSL 以及保持有限交的保序函数，即:

1. 对于每个对象 $X \in \mathscr{C}$，$\mathsf{P}(X)$ 具有有限交,
2. 对于 $\mathscr{C}$ 中的每个箭头 $f: X \to Y$，函子 $\mathsf{P}f: \mathsf{P}(Y) \to \mathsf{P}(X)$ 保持有限交。

定义 2.2。设 $\mathscr{C}$ 是一个具有严格有限积的范畴。若对于每个对象 $X \in \mathscr{C}$，存在一个元素$\delta_X \in \mathsf{P}(X \times X)$ 使得：则称主教义 $\mathsf{P}: \mathscr{C}^{op} \to$ InfSL 是初等的,

1. 对于每个元素 $\alpha \in \mathsf{P}(X)$，赋值

$$\exists_{\Delta_X}(\alpha) := \mathsf{P}_{p_1}(\alpha) \wedge \delta_X$$

是函子 $\mathsf{P}\Delta_X: \mathsf{P}(X \times X) \to \mathsf{P}(X)$ 的左伴随。

2.对于每个对象 $Y \in \mathscr{C}$和箭头 $e := \langle p_1, p_2, p_2 \rangle: X \times Y \to X \times Y \times Y$，该赋值

$$\exists_e(\alpha) := \mathsf{P}_{\langle p_1, p_2 \rangle}(\alpha) \wedge \mathsf{P}_{\langle p_2, p_3 \rangle}(\delta_Y)$$

对于 $\alpha$ 中$\mathsf{P}(X \times Y)$ 是左伴随 于 $\mathsf{P}_e$： $\mathsf{P}(X \times Y \times Y) \to \mathsf{P}(X \times Y)$。

我们将把元素 $\delta_X \in \mathsf{P}(X \times X)$ 称为 $X$ 的纤维化等式。

现在，我们回顾初等教义的一种等价定义，该定义在[MR12, Remark 2.3]中有所讨论。以下结果的证明见 [EPR20] 或[Cio22]的附录 A。在继续之前，我们先回顾下降数据的定义。

定义 2.3. 设 $\mathsf{P}: \mathscr{C}^{op} \to$ InfSL 是一个主教义。若 $\beta \in \mathsf{P}(X \times X)$，则$\mathcal{D}es(\beta)$ 是满足条件的元素 $\alpha \in \mathsf{P}(X)$ 的子序】【。

$$\mathsf{P}_{p_1}(\alpha) \wedge \beta \leq \mathsf{P}_{p_2}(\alpha). \tag{1}$$

命题 2.4。令 $\mathscr{C}$ 为一个具有严格有限积的范畴。初等的主教义 $\mathsf{P}: \mathscr{C}^{op} \to$InfSL当且仅当对于每个对象 $X \in \mathscr{C}$，存在一个元素 $\delta_X \in \mathsf{P}(X \times X)$，使得:

1. $\top_X \leq \mathsf{P}\Delta_X(\delta_X)$.
2. $\mathsf{P}(X) = \mathcal{D}es(\delta_X)$.
3. $\delta_X \boxtimes \delta_Y \leq \delta_{X \times Y}$，其中 $\delta_X \boxtimes \delta_Y := \mathsf{P}_{\langle p_1,\ p_3 \rangle}\delta_X \wedge \mathsf{P}_{\langle p_2,\ p_4 \rangle}\delta_Y$

其中箭头 $p_i$（对于 $1 \leq i \leq 4$）是乘积 $X \times Y \times X \times Y$ 的投影。 □

定义2.5. 如果对于每一对对象 $X_1$、$X_2 \in \mathscr{C}$，函子$\mathbf{P}_{p_i}: \mathbf{P}(X_i) \to \mathbf{P}(X_1 \times X_2)$（对于 $i = 1$、2）具有左伴随 $\exists_{p_i}: \mathbf{P}(X_1 \times X_2) \to \mathbf{P}(X_i)$，并且它们满足以下条件，则称初等教义 $\mathbf{P}: \mathscr{C}^{op} \to$ InfSL 为存在的

- Beck-Chevalley 条件：对于拉回图

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ {\scriptstyle 1_{X_1} \times f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X_1 \times X_2 & \xrightarrow[p_2]{} & X_2 \end{array} \tag{2}$$

典范箭头 $\exists_{\mathbf{p}_2} \circ \mathbf{P}^{1_{X_1} \times f}(-) \leq \mathbf{P}_f \circ \exists_{\mathbf{p}_2}(-)$ 是一个同构。类似的条件对 $p_1$也成立。

- 弗罗贝尼乌斯互反律：对于任意投影 $p_i: X_1 \times X_2 \to X_i$、元素 $\alpha \in \mathbf{P}(X_i)$ 以及 $\beta \in \mathbf{P}(X_1 \times X_2)$，规范箭头 $\exists_{p_i}(\mathbf{P}_{p_i}\alpha \wedge \beta) \leq \alpha \wedge \exists_{p_i}\beta$是一个同构。

定义 2.6. 若初等教义 $\mathbf{P}: \mathscr{C}^{op} \to$ InfSL 对任意一对对象 $X_1, X_2 \in \mathscr{C}$，函子 $\mathbf{P}_{p_i}: \mathbf{P}(X) \to \mathbf{P}(X_1 \times X_2)$（$i = 1$，2）都存在右伴随 $\forall_{p_i}: \mathbf{P}(X_1 \times X_2) \to \mathbf{P}(X_i)$，且满足

- Beck-Chevalley 条件：对于如 (2) 所示的拉回图，规范箭头 $\mathbf{P}_f \circ \forall_{p_2}(-) \leq \forall_{p_2} \circ \mathbf{P}^{1_{X_1} \times f}(-)$ 是一个同构。对于 $\mathbf{p}_1$ 也有类似的条件。

定义 2.7. 若主教义 $\mathbf{P}: \mathscr{C}^{op} \to$ InfSL 对任意对象 $X \in \mathscr{C}$ 和元素 $\alpha \in \mathbf{P}(X)$，函子 $\alpha \wedge - : \mathbf{P}(X) \to \mathbf{P}(X)$ 都存在右伴随 $\alpha \Rightarrow - : \mathbf{P}(X) \to \mathbf{P}(X)$，则称其为蕴涵的。

定义 2.8. 设 $\mathbf{P}: \mathscr{C}^{op} \to$ InfSL 是一个主教义，且 $X$ 是 $\mathscr{C}$ 的一个对象。元素 $\alpha \in \mathbf{P}(X)$ 的一个概化是一个箭头 $\{\!|\alpha|\!\}: C \to X$，满足 $\top_C \leq \mathbf{P}_{\{\!|\alpha|\!\}}\alpha$，并且满足以下泛性质：对于每个箭头 $f: Y \to X$，只要 $\top_Y \leq \mathbf{P}_f(\alpha)$，就存在一个箭头 $h: Y \to C$，使得以下图表可交换。

$$\begin{array}{ccc} C & \overset{h}{\dashrightarrow} & Y \\ & {\scriptstyle \{\!|\alpha|\!\}} \searrow & \downarrow{\scriptstyle f} \\ & & X. \end{array}$$

概括 $\{\!|\alpha|\!\}$ 被称为严格的，如果诱导的箭头 $h$ 是唯一的。当 $h$ 不唯一时，概括$\{\!|\alpha|\!\}$被称为弱的。概括$\{\!|\alpha|\!\}$: $C \to X$ 被称为满的，如果 $\alpha \leq \beta$ 只要 $\top_C \leq \mathbf{P}_{\{\!|\alpha|\!\}}\beta$。

定义 2.9。初等教义P: $\mathscr{C}^{op} \to$ InfSL具有全面对角线：对于每个对象 $X$和一对态射 $f$, $g\colon A \to X$，使得 $\top_A \leq \mathsf{P}_{\langle f,g\rangle}\delta_X$，它蕴含 $f = g$。

例 2.10。 [MR13]中详细讨论了以下初等教义的例子。

- 若 $\mathscr{C}$ 是一个左正合范畴，则可以考虑函子

$$\mathsf{Sub}_{\mathscr{C}} : \mathscr{C}^{op} \to \mathsf{InfSL}.$$

它将 $X \in \mathscr{C}$的一个对象映到 $X$的子对象。$\mathsf{Sub}_{\mathscr{C}}(X)$的元素记作 $\lfloor g \rceil$，其中 $g : Z \to X$是一个单态射。$\mathsf{Sub}_{\mathscr{C}}$ 对箭头 $f\colon Y \to X$ 的作用，将子对象 $\lfloor g \rceil$ 映到由沿 $f$对$g$ 作拉回所得到的子对象。纤维化等式由对角线$\Delta_X$ 的等价类给出，且该教义具有完全严格理解和全面对角线。若 $\mathscr{C}$ 是正则的，则$\mathsf{Sub}_{\mathscr{C}}$ 是存在的，参见 [HJ 03]。

- 若 $\mathscr{C}$ 是一个具有严格有限积的弱左正合范畴，则可以考虑函子

$$\Psi_{\mathscr{C}} : \mathscr{C}^{op} \to \mathsf{InfSL}$$

它将对象 $X \in \mathscr{C}$ 映到切片范畴 $\mathscr{C}/X$的偏序集反射。 $\Psi_{\mathscr{C}}(X)$的元素称为弱子对象，或称为 [Gra00] 中的变体，记作 $\lfloor g \rceil$，其中 $g : Z \to X$是一个箭头。在 [Pal 04], 中，它们也称为预子对象。 $\Psi_{\mathscr{C}}$ 对箭头 $f : Y \to X$ 的作用，将变体 $\lfloor g \rceil$ 映到由沿 $f$对 $g$ 作弱拉回所得到的变体。纤维等式由对角线 $\Delta_X$的等价类给出。该教义具有完全弱概括，并且是存在的，其到 $\Psi_{\mathscr{C}}(f)$的左伴随由与 $f$作后复合给出。

- 考虑带有通常类型构造子和一个（小类型的）宇宙的 Martin-L¨of 直觉类型论的内涵版本，例如 [NPS90] 中所描述的版本。对于此类理论，我们得到语法范畴 ML，其对象是小的闭类型，即空上下文中的类型，而态射是模函数外延性的项: 若存在一个类型为以下内容的项，则两个项 $x : X \vdash t(x) : Y$ 和 $x : X \vdash t'(x) : Y$ 等价，即】【:

$$x : X \vdash \mathsf{Id}_Y(t(x), t'(x)).$$

态射的复合由项的代换给出。由于内涵性恒等类型，该范畴具有严格有限积和弱拉回。考虑函子

$$F^{ML} : \mathbf{ML}^{op} \to \mathsf{InfSL}$$

它将闭类型 $X$ 发送到 $F^{ML}(X)$，后者定义为关于 $X$ 可证等价关系的类型等价类所构成的偏序集：带有$x$的两个类型 $B(x)$ 和 $B'(x)$，若存在一个项使得 $X$，则二者等价。

$$x : A \vdash (B(x) \to B'(x)) \times (B'(x) \to B(x)).$$

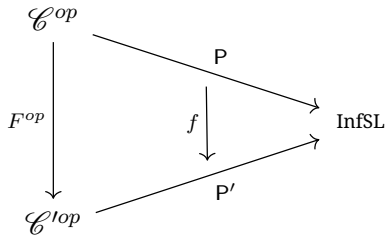
$F^{ML}$ 对 ML 的态射的作用由替换给出。这个函子是一个初等教义，其纤维化等式由恒等类型给出。该教义还具有存在性、全局性和蕴涵性，并带有完全弱概括。

- 考虑 [Mai09; MS05] 中的极简主义基础。该理论是一种依赖类型论，包含一个称为极简类型论（mTT）的内涵层，以及一个记作 emTT 的外延层。内涵层导出一个句法范畴 $\mathcal{CM}$ ，其对象是封闭集合，箭头是集合之间在函数外延性意义下的项。该范畴具有严格有限积和弱拉回。我们考虑教义

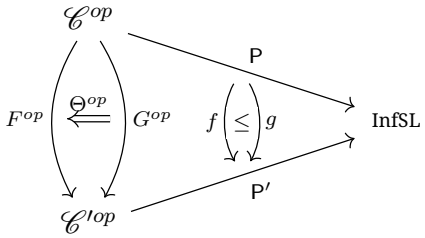
$$G^{\mathbf{mTT}} : \mathcal{CM}^{op} \to \mathsf{InfSL} \tag{3}$$

它将一个封闭集合 $X$ 映射为依赖于 $X$ 的命题等价类，即 $x : X \vdash B(x)\ \ prop$（模去等可证关系）。与上面的例子类似，该教义是初等的、存在的、全局的，具有蕴涵结构、完全弱概括和全面对角线。

初级教义构成一个记作 PD 的 2-范畴。PD 的对象是初级教义，从 P 到 P′ 的 1-态射是由一对 $(F, f)$ 构成，其中 $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ 是一个保持有限积的函子，且 $f\colon P \Rightarrow P'$ 是一个自然变换，使得对于每个对象 $X \in \mathscr{C}$，函子 $f_X\colon \mathsf{P}(AX) \to \mathsf{P}'(F(X))$ 保持所有结构。




2-态射 $\theta\colon (F, f) \to (G, g)$ 是一个自然变换 $\theta\colon F \Rightarrow G$，如以下图表所示




我们用 ED 表示 PD 的 2-子范畴，其对象为初等教义，1-态射由保持纤维化等式的 PD 的 1-态射 $(F, f)$ 给出，即：对于每个对象 $X \in \mathscr{C}$

$$f_{X\times X}(\delta_X) = \mathsf{P}'_{\langle F(pr_1), F(pr_2)\rangle}(\delta_{F(X)}).$$

在 [Pas1 5] 作者为遗忘 2-函子 ED 提供了一个右 2-伴随 $\to \mathsf{P}$ $\mathbf{D}$.

我们用EqD表示ED的2-子范畴，其对象是具有完全理解和全面对角线的初等教义，而其 1-态射是保持概括的 ED 的 1-态射。

初级教义的结构提供了一个一般框架，在其中可以如下定义等价关系及其商。

定义 2.11. 设P: $\mathscr{C}^{op} \to$ InfSL 是一个主教义，且 $X$ 是 $\mathscr{C}$的一个对象。 $X$ 上的 P-等价关系是 $\rho \in \mathsf{P}(X \times X)$ 中的一个元素，使得

$$\text{reflexivity: } \top_X \leq \mathsf{P}_{\Delta_X}\rho$$

$$\text{symmetry: } \mathsf{P}_{\langle p_2,p_1\rangle}\rho \leq \rho$$

$$\text{transitivity: } \mathsf{P}_{\langle p_1,p_2\rangle}\rho \wedge \mathsf{P}_{\langle p_2,p_3\rangle}\rho \leq \mathsf{P}_{\langle p_1,p_3\rangle}\rho.$$

注意，如果P: $\mathscr{C}^{op} \to$ InfSL 是初等的，那么对于每个对象 $X \in \mathscr{C}$，纤维化等式 $\delta_X$ 是一个 P-等价关系。

定义 2.12。设P : $\mathscr{C}^{op} \to$ InfSL是一个主教义，并设 $\rho$ 是 $X$上的一个P-等价关系。 $\rho$ 的商是一个箭头 $q : X \to C$，使得 $\rho \leq \mathsf{P}_{q\times q}\delta_C$，并且对于满足 $\rho \leq \mathsf{P}_{g\times g}\delta_Z$的每个箭头 $g : A \to Z$，存在唯一箭头 $h : C \to Z$，使得 $g = h \circ q$。当对于每个箭头 $f : C \to C'$，存在一个拉回图时，称商是稳定的

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{q'} & C' \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ A & \xrightarrow[q]{} & C \end{array}$$

在 $\mathscr{C}$ 中，使得箭头 $q' : A' \to C'$ 是 P-等价关系 $\mathsf{P}_{f'\times f'}\rho$ 的商。若 $f : A \to B$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个箭头，则 $f$ 的 P-核是 P-等价关系 $\mathsf{P}_{f\times f}(\delta_B)$。P-等价关系 $\rho$ 的商 $q : A \to B$ 称为有效的，若其 P- 核为 $\rho$。商 $q$ 是有效下降的，当函子

$$\mathsf{P}_f : \mathsf{P}(B) \to \mathcal{D}es(\rho)$$

是一个同构。

我们将 QD 记作 EqD的2-满 2-子范畴，其对象是 EqD 中具有稳定有效商的初等教义 P: $\mathscr{C}^{op} \to$ InfSL，这些稳定有效商对应于具有有效下降的P-等价关-系。QD 的 1-态射是 EqD 中保持商的 1-态射。

我们现在回顾初等商完备化的构造，该构造在 [MR13]中被引入。给定一个初等教义 P : $\mathscr{C}^{op} \to$ InfSL，定义范畴 $\overline{\mathscr{C}}$其

- 对象是由 $(X,\rho)$ 构成的对，其中 $X \in \mathscr{C}$ 和 $\rho$ 是 $X$ 上的 P-等价关系，

- 两个对象$(X,\rho)$和$(Y,\sigma)$之间的态射是态射$f$的等价类：$X \to Y$使得 $\rho \leq \mathsf{P}f\times f(\sigma)$。两个态射 $f, f'$等价，当 $\rho \leq \mathsf{P}f\times f'(\sigma)$。

考虑该函子

$$\overline{\mathsf{P}} : \overline{\mathscr{C}}^{op} \to \mathsf{InfSL} \tag{4}$$

将对象 $(X,\rho) \in \overline{\mathscr{C}}$映射到 $\mathsf{P}(X,\rho) := \mathcal{D}\overline{es}(\rho)$，并将箭头 $\lfloor f \rceil$ 映射到 $\mathsf{P}\lfloor f \rceil := \mathsf{P}f$。函子 $\overline{\mathsf{P}}$ 称为 P 的初等商完备化。

存在一个典范的 1-态射

$$(J, j) : \mathsf{P} \to \overline{\mathsf{P}}$$

由函子 $J$ 给出，它将对象 $X \in \mathscr{C}$ 映射为 $(X, \delta_X) \in \overline{\mathscr{C}}$，并将箭头$f\colon X \to Y$ 映射为箭头 $\lfloor f \rceil : (X, \delta_X) \to (Y, \delta_Y)$。对于每个对象 $X \in \mathscr{C}$，自然变换 $j$ 定义为 $j_X := 1_{\mathsf{P}(X)}$。

初等商完备化是向初等教义中自由添加商的构造，具体含义见以下定理；该定理发表于 [MR13, 定理 5.8]。

定理 2.13（Maietti 和 Rosolini）。对于 EqD 中的每个初等教义 $\mathsf{P} : \mathscr{C}^{op} \to \mathsf{InfSL}$，将 $\mathsf{P} \to \mathsf{P}$ 的赋值给出了遗忘 2-函子 $U : \mathsf{QD}\overline{\ } \to$EqD 的左双伴随；也就是说，与 1-态射 $(J, j)$ 的前复合诱导出范畴等价

$$- \circ (J, j) : \boldsymbol{QD}(\overline{\mathsf{P}}, R) \cong \boldsymbol{EqD}(\mathsf{P}, UR)$$

对于 QD 中的每个 $R$ 。 □

注 2.14。在 [MR12] 中，作者表明，上述初等商完备化的构造可以分解为不同的步骤。事实上，可以从 ED 中的一个对象出发，分别自由添加概括、全面对角线和商。每个构造都带有一个泛性质，其形式类似于定理 2.13，从而为适当的 2-范畴之间的遗忘 2-函子提供左双伴随。

注 2.15。EqD 中初等教义 $\mathsf{P} : \mathscr{C}^{op} \to \mathsf{InfSL}$ 的初等商完备化 $\mathsf{P} : \overline{\mathscr{C}}^{op} \to \mathsf{InfSL}$ 不一定能提供正合范畴，参见 2.18。不过，范畴 $\overline{\mathscr{C}}$ 至少是正则的，如 [MR13，命题 4.15] 所示。

注 2.16. 在 [CM82; CV98], 中，作者利用伪等价关系（per）的概念，对（弱）左正合范畴 $\mathscr{C}$ 的精确完备化给出了明确描述；伪等价关系由 $\mathscr{C}$ 中的一对态射组成。

$$r_1, r_2 : R \to X$$

满足自反性、对称性和传递性条件。 $\mathscr{C}$的精确完备化是范畴 $\mathscr{C}_{ex}$ ，其对象是伪等价关系，而两个~对象 $r_1, r_2 \colon R \to X$和 $s_1, s_2 \colon S \to Y$之间的态射由 $\mathscr{C}$，~$f \colon X \to Y$和 $f \colon R \to S$中的态射对 $(f, f)$ 给出，满足 $fr_i = s_i f$，对于 $i = 1$、2，在半同伦的意义下成立。当 $\mathscr{C}$ 具有严格有限积时，伪等价关系与 $\Psi_{\mathscr{C}}$-等价关系一一对应。一个 per $r_1, r_2 \colon R \to X$ 诱导出一个元素

$$\lfloor r : R \to X \times X \rceil \in \Psi_{\mathscr{C}}(X \times X), \tag{5}$$

其中 $r$ 是由积的泛性质诱导出的唯一箭头，使得 $\lfloor r \rceil$是 $\Psi_{\mathscr{C}}$上的等价关系。此外， $\lfloor r \rceil$ 的商是平行箭头 $r_1$、 $r_2$的余等化子。这些事实蕴含以下结果，参见 [MR13； MR12]。

定理2.17。设 $\mathscr{C}$ 是一个具有严格积和弱拉回的范畴。那么，弱子对象 $\Psi_{\mathscr{C}}$ 的初等教义 $\mathscr{C}^{op} \to$InfSL 的初等商完备化等价于初等教义 Sub$_{\mathscr{C}_{ex}} \colon \mathscr{C}_{ex}^{op} \to$ InfSL。 □

例 2.18. 我们以两个来自逻辑的初等商完备化示例结束本节。

- 教义 $F^{ML}$ : ML$^{op} \to$ InfSL 的初等商完备化产生了一个范畴 ML，它等价于类型论 Martin-L¨of 下 Bishop 风格的全等价集范畴 Std `Bis67; Pal05]。然而，范畴 Std 是 ML 的精确完备化，而教义 $F^{ML}$ 和 $\Psi_{\mathbf{ML}}$ 等价，参见[MR13, §7.1]。

- 第一个并非精确完备化的初等商完备化示例是 $G_{\mathbf{mTT}} \colon \overline{\mathcal{CM}}^{op} \to$ InfSL。范畴 $\overline{\mathcal{CM}}$ 并非精确的，而教义 $G_{\mathbf{mTT}}$提供了将 emTT 解释到 mTT 中的一种方式，见 [Mai09]。另一个并非精确完备化实例的初等商完备化示例，是在 [Cio22, §2]中研究的同伦集合论范畴。

# 3 有偏初等教义

本节将介绍初等教义框架的一种推广，该推广考虑了从仅具有弱有限积的范畴出发的函子。

回顾一下，若范畴 $\mathscr{C}$ 对任意两个对象 $X$、$Y \in \mathscr{C}$ 都存在图表 $X \xleftarrow{\mathrm{p}_1} W \xrightarrow{\mathrm{p}_2} Y$ ，并满足以下弱化的泛性质，则称其具有弱积：对于任意两个箭头 $f \colon A \to X$ 和 $g \colon A \to Y$ ，都存在一个箭头 $h \colon A \to W$ （不一定唯一），使得 $\mathrm{p}_1 h = f$ 且 $\mathrm{p}_2 h = g$。因此，本节的底层范畴结构是从具有弱有限积的范畴到偏序集范畴的逆变函子。我们将这类函子称为有偏教义。

为了定义有偏初级教义，我们注意到范畴结构与逻辑之间的模对应尤其有益；这些条件

定义 2.1 中的条件彼此独立，因此当 $\mathscr{C}$ 仅具有弱有限积时，我们可以将它们改写如下。

定义 3.1. 设 $\mathscr{C}$ 为具有弱有限积的范畴。偏置初级教义是一个函子 $\mathrm{P}: \mathscr{C}^{op} \to$ 偏序集范畴，其取值于下半格范畴 InfSL，即：

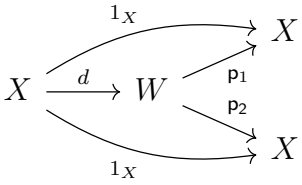
1. 对于每个对象 $X \in \mathscr{C}$，$\mathrm{P}(X)$具有有限交

2. 对于每个箭头 $f: X \to Y$在 $\mathscr{C}$中，映射 $\mathrm{P}f: \mathrm{P}(Y) \to \mathrm{P}(X)$保持有限交。

与偏置初级教义的定义相反，刻画初等结构的命题 2.4 中的条件彼此相互依赖，而基范畴 $\mathscr{C}$ 中的（严格）积在其中发挥着关键作用。由于同一组对象的两个弱积不一定同构，我们必须设法使纤维化等式（现在将成为偏纤维等式）以适当的方式相互作用。正如我们所预期的，初等教义还应满足下面的定义 3.2，但我们将在本节中详细讨论它们之间的关系。

定义 3.2. 设 $\mathscr{C}$ 是一个具有弱有限积的范畴。偏初等教义是指一个偏置初级教义 $\mathrm{P}: \mathscr{C}^{op} \to$ InfSL，使得对于每个对象 $X \in \mathscr{C}$以及每个弱积 $X \xleftarrow{\mathsf{p}_1} W \xrightarrow{\mathsf{p}_2} X$，都存在一个元素 $\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)} \in \mathrm{P}(W)$，满足：

1. 对于每个交换图

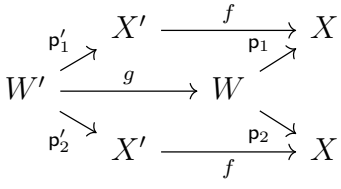



我们有 $\top_X \leq \mathrm{P}_d \delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)}$。

2. $\mathrm{P}(X) = \mathcal{D}es(\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)})$，即对于每个 $\alpha \in \mathrm{P}(X)$

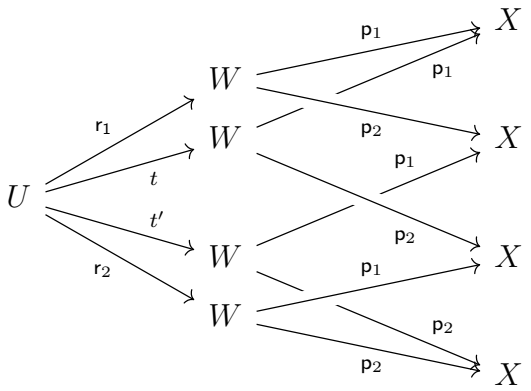
$$\mathsf{P}_{\mathsf{p}_1}\alpha \wedge \delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)} \leq \mathsf{P}_{\mathsf{p}_2}\alpha.$$

3. 对于任意弱积 $X' \xleftarrow{\mathsf{p}'_1} W' \xrightarrow{\mathsf{p}'_2} X'$ 以及每个交换图




我们有 $\delta^{(\mathsf{p}'_1,\mathsf{p}'_2)} \leq \mathrm{P}_g \delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)}$。

4. 对于每个交换图




(6)

其中 $U$是一个弱积 $W \mathsf{r}\xleftarrow{1} U \mathsf{r}\xrightarrow{2} W$，我们有 $\delta^{\langle \mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2\rangle} \in \mathcal{D}es(\mathsf{P}_t\delta^{\langle \mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2\rangle} \wedge \mathsf{P}_{t'}\delta^{\langle \mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2\rangle})$，即。

$$\mathsf{P}_{\mathsf{r}_1}\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)} \wedge \mathsf{P}_t\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)} \wedge \mathsf{P}_{t'}\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)} \leq \mathsf{P}_{\mathsf{r}_2}\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)}.$$

现在我们讨论上述条件与命题 2.4中条件之间的表面相似性。定义 3.2 的条件1 是使用弱二元积而非严格积对命题2.4 的条件1 的转述。定义 3.2 的条件2与命题2.4的条件 2相同。条件 3在（严格的）初等教义的语境下成立。它直接由定义2.2的条件 1得出，而定义2.2 的条件1又可以由命题2.4的条件推导出来。定义 3.2的条件 4也在（严格的）初等教义的语境下成立。事实上，对于初等教义，我们有元素之间的等式

$$\delta_{X\times Y} = \delta_X \boxtimes \delta_Y. \tag{7}$$

因此，在 o 情形下 f 严格积，定义 3.2 中条件 4 的不等式变为

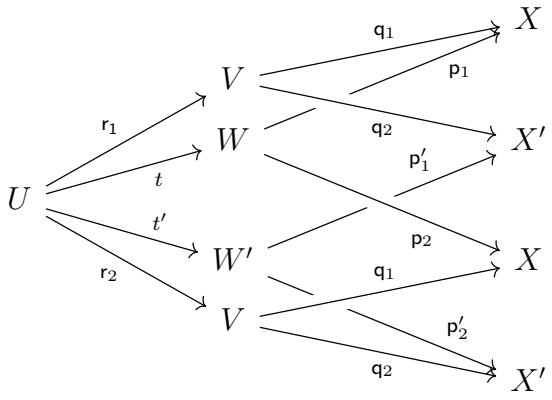
$$\mathsf{P}_{\mathsf{r}_1}\delta_X \wedge \mathsf{P}_{\langle p_1,p_3\rangle}\delta_X \wedge \mathsf{P}_{\langle p_2,p_4\rangle}\delta_X \leq \mathsf{P}_{\mathsf{r}_2}\delta_X$$

这成立是因为 $\mathsf{P}(X \times X) = \mathcal{D}es(\delta_{X\times X})$。等式 (7) 是（严格）初等教义的一个特殊性质。在下文的引理中，我们证明，使用弱有限积重新表述的不等式 $\delta_{X\times Y} \leq \delta_X \boxtimes \delta_Y$ 对偏置初等教义也成立。反向不等式（即命题 2.4 的条件 3）在偏置情形下不一定成立，我们将在例 4.7 中讨论这一点。

引理 3.3. 若 $\mathsf{P} : \mathscr{C}^{op} \to$ InfSL 是一个偏初等教义，则以下条件成立

- 给定两个对象 $X$，$X' \in \mathscr{C}$则对于任意弱积 $X \,\mathsf{q}\xleftarrow{1} V \mathsf{q}\xrightarrow{2} X'$，$X \,\mathsf{p}_{\xleftarrow{1}}{}'$

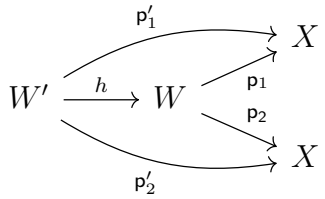
$W \xrightarrow{\mathsf{p}_2'} X$, $X' \xleftarrow{\mathsf{p}_1'} W' \xrightarrow{\mathsf{p}_2'} X'$，以及 $V \xleftarrow{\mathsf{r}_1} U \xrightarrow{\mathsf{r}_2} V$ 对于每个交换图




由此可得

$$\delta^{(\mathsf{r}_1,\mathsf{r}_2)} \leq \mathsf{P}_t\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)} \wedge \mathsf{P}_{t'}\delta^{(\mathsf{p}_1',\mathsf{p}_2')}.$$

- 若 $X \xleftarrow{\mathsf{p}_1} W \xrightarrow{\mathsf{p}_2} X$ 和 $X \xleftarrow{\mathsf{p}_1'} W' \xrightarrow{\mathsf{p}_2'} X$ 是两个弱积，那么对于任意交换图表




由此可得 $\delta^{(\mathsf{p}_1',\mathsf{p}_2')} \leq \mathsf{P}_h(\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)})$。

证明。两个结论直接由定义 3.2 的条件 3 得出。 □

现在我们为弱有限积的纤维中的元素定义一个关键性质。

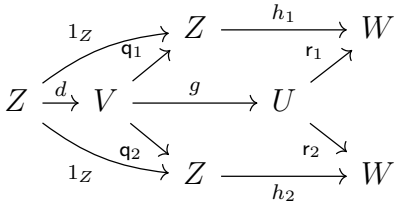
定义 3.4。设 $\mathsf{P}: \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{InfSL}$ 是一个偏置初级教义，且 $X_1, \ldots, X_n$ 是 $\mathscr{C}$ 的对象。给定一个弱积 $\mathsf{p}_i: W \to X_i$，对于 $1 \leq i \leq n$，由 $X_1, \ldots, X_n$ 构成，若一个元素 $\beta \in \mathsf{P}(W)$ 满足：对于任意两个箭头 $h, h': Z \to W$，使得 $\mathsf{p}_i \circ h = \mathsf{p}_i \circ h'$，对于 $1 \leq i \leq n$，我们有

$$\mathsf{P}_h(\beta) = \mathsf{P}_{h'}(\beta).$$

第一个 rbp 元素的例子由定义 3.2 中的偏置纤维化等式给出。

引理3.5. 如果 $\mathsf{P}: \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{InfSL}$ 是一个偏初等教义，且 $X \xleftarrow{\mathsf{p}_1} W \xrightarrow{\mathsf{p}_2} X$ 是 $\mathscr{C}$ 中的弱积，那么 $\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)}$ 沿投影重新指标化。

证明。设 $h_1$、$h_2$：$Z \to W$是两个态射，使得$\mathbf{p}_i \circ h_1 = \mathbf{p}_i \circ h_2$，对于 $i = 1$，2，并考虑如下形式的交换图




其中 $X \xleftarrow{\mathsf{q}}{}^{1} V \xrightarrow{\mathsf{q}}{}^{2} Z$ 和 $W \xleftarrow{\mathsf{r}}{}^{1} U \xrightarrow{\mathsf{r}}{}^{2} W$ $U$ 是弱积。定义3.2 的条件 1 和 3 蕴含 $\mathsf{P}_d \mathsf{P}_g \mathsf{P}_t \delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)} = \top_Z = \mathsf{P}_d \mathsf{P}_g \mathsf{P}_{t'} \delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)}$。不等式$\mathsf{P}_{h_1} \delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)} \leq \mathsf{P}_{h_2} \delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)}$ 的推导如下：

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_{h_1} \delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)} &= \mathsf{P}_d \mathsf{P}_g \mathsf{P}_{\mathsf{r}_1} \delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)} \wedge \top_Z \\
&= \mathsf{P}_d \mathsf{P}_g (\mathsf{P}_{\mathsf{r}_1} \delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)} \wedge \mathsf{P}_t \delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)} \wedge \mathsf{P}_{t'} \delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)}) && (1{+}3) \\
&\leq \mathsf{P}_d \mathsf{P}_g \mathsf{P}_{\mathsf{r}_2} \delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)} && (4) \\
&= \mathsf{P}_{h_2} \delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)}.
\end{aligned}$$

反向不等式也可类似地得到：考虑一个箭头 $g' : Z \to U$，使得 $\mathbf{r}_2 g' = h_1$ 且 $\mathbf{r}_1 g' = h_2$。 □

上述引理推出了对引理 3.3 中条件 3.3 的一种细化。

推论 3.6。设 $\mathsf{P} : \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{InfSL}$ 是一个偏初等教义，且 $X$ 是 $\mathscr{C}$ 的一个对象。如果 $X \xleftarrow{\mathsf{p}}{}^{1} W \xrightarrow{\mathsf{p}}{}^{2} X$和 $X \xleftarrow{\mathsf{p}'_1}{} W' \xrightarrow{\mathsf{p}'}{}^{2} X$是两个弱积，并且 $h : W' \to W$ 是满足 $\mathbf{p}_i h = \mathbf{p}'_i$（对于 $i = 1$，2）的箭头，那么

$$\mathsf{P}_h \delta^{(\mathsf{p}'_1,\mathsf{p}'_2)} = \delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)}.$$

□

定义 3.2 要求，对于任意对象 $X \in \mathscr{C}$，都要验证每一种弱积 $X \xleftarrow{\mathsf{p}}{}^{1} W \xrightarrow{\mathsf{p}}{}^{2} X$ 所满足的某些条件。若范畴 $\mathscr{C}$ 存在弱积的选取，即存在一个函子 $\omega : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\Lambda}$，其中 $\Lambda$ 是一个有三个对象且具有非平凡跨度的范畴，我们便称范畴 $\mathscr{C}$ 具有弱积的选取。

$$\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet \ ,$$

使得：

- $\omega(X, Y)$ 是对象 $X$、$Y \in \mathscr{C}$ 的一个弱积，我们将用通常记号 $X \xleftarrow{p_1} X \times Y \xrightarrow{p_2} Y$ 表示它，

- 对于 $\mathscr{C}$ 中的任意一对箭头 $f : X \to A$ 和 $g : Y \to B$，箭头 $\omega(f, g) : \omega(X, Y) \to \omega(A, B)$ 满足 $p_1 \circ \omega(f, g) = f \circ p_1$ 和 $p_2 \circ \omega(f, g) = g \circ p_2$。我们将采用通常记号 $f \times g$ 来表示箭头 $\omega(f, g)$ 的弱积选择。

现在我们证明，弱积的一种选择能使偏置初等教义的描述更加简洁。

定理 3.7. 若 $\mathsf{P}: \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{InfSL}$ 是一个主教义，且 $\mathscr{C}$ 具有弱积的选择，并且对每个对象 $X \in \mathscr{C}$，都存在一个元素 $\delta_X \in \mathsf{P}(X \times X)$ 满足：

(i) 存在一个 箭头 $X \xrightarrow{d} X \times X$，使得 $1_X = p_1 \circ d = p_2 \circ d$ 且 $\top_X \leq \mathsf{P}_d(\delta_X)$,

(ii) $\mathsf{P}(X) = \mathcal{D}es(\delta_X)$,

(iii) 若 $f\colon Y \to X$ 是 $\mathscr{C}$ 的一个箭头，则 $\delta_Y \leq \mathsf{P}_{f\times f}\delta_X$,

*(iv)* $\delta_X \in \mathcal{D}es(\mathsf{P}_{\langle p_1,p_3\rangle}\delta_X \wedge \mathsf{P}_{\langle p_2,p_4\rangle}\delta_X)$,

那么函子 $\mathsf{P}: \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{InfSL}$ 是一个偏初等教义。

证明。我们首先注意到，引理 3.5 在定理的假设下成立。因此，对于弱积 $X \xleftarrow{\mathsf{p}_1} W \xrightarrow{\mathsf{p}_2} X$ 的每一种选择，弱积的弱泛性质诱导出一个箭头 $h\colon W \to X \times X$，使得 $p_i \circ h = \mathsf{p}_i$，其中 $i = 1,\ 2$。即使 $h$ 不唯一，引理 3.5 也意味着我们可以沿着此类箭头唯一地重新索引 $\delta_X$，并定义 $\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)} := \mathsf{P}_h\delta_X$，它显然满足定义 3.2 的条件 1 和 2。现在我们证明定义 3.2 的条件 3。设 $X \xleftarrow{\mathsf{p}_1} W \xrightarrow{\mathsf{p}_2} X$、$X' \xleftarrow{\mathsf{p}'_1} W \xrightarrow{\mathsf{p}'_2} X'$ 为两个弱积，并设 $f\colon X' \to X$ 和 $g\colon W' \to W$ 为使条件 3 中的图表交换的两个箭头。弱积的弱泛性质诱导出两个箭头$h\colon W \to X \times X$ 和 $k\colon W' \to X' \times X'$，使得 $p_i \circ h = \mathsf{p}_i$和 $p_i \circ k = \mathsf{p}_i$，其中 $i = 1,\ 2$。我们得到不等式 $\delta^{(\mathsf{p}'_1,\mathsf{p}'_2)} \leq \mathsf{P}_g\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)}$，如下所示

$$\begin{aligned}
\delta^{(\mathsf{p}'_1,\mathsf{p}'_2)} &:= \mathsf{P}_k\delta_{X'} \\
&\leq \mathsf{P}_k\mathsf{P}_{f\times f}\delta_X && \text{(iii)} \\
&= \mathsf{P}_g\mathsf{P}_h\delta_X && (3.5) \\
&:= \mathsf{P}_g\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)}.
\end{aligned}$$

现在我们证明定义 3.2 的条件 4。设 $W \xleftarrow{1} U \xrightarrow{3} W$ 是一个弱积，并设 $t, t'\colon U \to W$ 是条件 4 的交换图中所示的两个态射。弱积的弱泛性质诱导出态射 $h\colon W \to X \times X$ 和 $k\colon U \to (X \times X) \times (X \times X)$，满足 $p_i \circ h = \mathsf{p}_i$ 和 $p_i \circ k = h \circ \mathsf{p}_i$，其中 $i = 1, 2$。我们

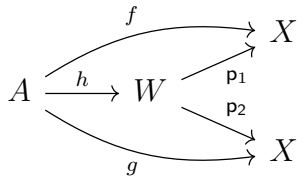
得到如下关系 $\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)} \in \mathcal{D}es(\mathsf{P}_t\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)} \wedge \mathsf{P}_{t'}\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)})$:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}_{\mathsf{p}_1}\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)} \wedge \mathsf{P}_t\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)} \wedge \mathsf{P}_{t'}\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)} \\
&:= \mathsf{P}_{\mathsf{p}_1}\mathsf{P}_h\delta_X \wedge \mathsf{P}_t\mathsf{P}_h\delta_X \wedge \mathsf{P}_{t'}\mathsf{P}_h\delta_X \\
&= \mathsf{P}_k\mathsf{P}_{p_1}\delta_X \wedge \mathsf{P}_k\mathsf{P}_{\langle 1,3\rangle}\delta_X \wedge \mathsf{P}_k\mathsf{P}_{\langle 2,4\rangle}\delta_X && (3.5) \\
&= \mathsf{P}_k(\mathsf{P}_{p_1}\delta_X \wedge \mathsf{P}_{\langle 1,3\rangle}\delta_X \wedge \mathsf{P}_{\langle 2,4\rangle}\delta_X) \\
&\leq \mathsf{P}_k\mathsf{P}_{p_2}\delta_X && (\mathrm{iv}) \\
&= \mathsf{P}_{\mathsf{p}_2}\mathsf{P}_h\delta_X \\
&:= \mathsf{P}_{\mathsf{p}_2}\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)}.
\end{aligned}$$

□

在偏初等教义的语境中，（满）概括和（弱）概括的定义与定义 2.8 相同。相对地，全面对角线定义如下。

定义 3.8. 若偏初等教义 $\mathsf{P}: \mathscr{C}^{op} \to \mathsf{InfSL}$ 具有全面对角线，则对每个交换图




其中 $X \overset{\mathsf{p}_1}{\leftarrow} W \overset{\mathsf{p}_2}{\rightarrow} X$ 是一个弱积，则 $\top_A \leq \mathsf{P}_h\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)}$ 蕴含 $f = g$。

例 3.9. 每个初等教义实际上都是偏初等教义。事实上，若 $\mathsf{P}: \mathscr{C}^{op} \to \mathsf{InfSL}$ 是初等的，则对任意 $X \in \mathscr{C}$ 和弱积 $X \overset{\mathsf{p}_1}{\leftarrow} W \overset{\mathsf{p}_2}{\rightarrow} X$，存在唯一箭头 $\langle \mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2\rangle: W \to X \times X$ 指向严格积 $X \times X$，使显然的图交换。偏纤维等式由重索引给出 $\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)} := \mathsf{P}_{\langle \mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2\rangle}(\delta_X) \in \mathsf{P}(W)$。简单验证可知，命题 2.4 中关于 $\delta_X$ 的条件蕴含元素 $\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)}$ 满足定义 3.2 中的条件。

例 3.10。（切片教义）设 $\mathsf{P}: \mathscr{C}^{op} \to \mathsf{InfSL}$ 是一个初等教义，且 $\mathscr{C}$ 具有弱拉回。因此，对于每个对象 $A \in \mathscr{C}$，切片 $\mathscr{C}/A$ 都具有弱有限积。我们可以考虑一个显然的函子

$$\mathsf{P}_{/A}: (\mathscr{C}/A)^{op} \to \mathsf{InfSL}$$

其将一个对象 $(f\colon X \to A) \in \mathscr{C}/A$ 映射为 $\mathsf{P}_{/A}(f) := \mathsf{P}(X)$，并将一个箭头 $h\colon f \to g$ 从 $\mathscr{C}/A$ 映射为 $\mathsf{P}_{/A}(h) := \mathsf{P}_h$。我们将函子 $\mathsf{P}_{/A}$ 称为在 $A$ 上的切片教义。我们声称，对于所有对象 $A \in \mathscr{C}$，切片教义 $\mathsf{P}_{/A}: (\mathscr{C}/A)^{op} \to \mathsf{InfSL}$ 都是一个偏初等教义。事实上，令 $x\colon X \to A$ 为 $\mathscr{C}/A$ 的一个对象，并考虑由一个弱拉回图中两个复合的公共值给出的 $x \overset{\pi_1}{\leftarrow} w \overset{\pi_2}{\rightarrow} x$ 的弱积

$$\begin{array}{ccc} X \times_A X & \xrightarrow{\pi_2} & X \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x} \\ X & \xrightarrow[x]{} & A. \end{array}$$

偏置纤维化等式为 $\delta^{(\pi_1,\pi_2)} := \mathsf{P}_{\langle\pi_1,\pi_2\rangle}\delta_X \in \mathsf{P}_{/A}(w)(:=\mathsf{P}(X \times_A X))$。定义 3.2 的条件 1 和 2 直接由命题 2.4 的条件 1 和 2 得出。现在我们证明定义 3.2 的条件 3 成立。令 $x' \colon X' \to A$ 为 $\mathscr{C}/A$的一个对象，并令 $w' \colon X' \times_A X' \to A$ 为一个弱积 $x' \overset{\pi'_1}{\leftarrow} w' \overset{\pi'_2}{\to} x'$。给定两个箭头 $f \colon x' \to x$和 $g \colon w' \to w$，满足 $\pi_i \circ g = f \circ \pi_i$，对于 $i = 1$、2，于是我们得到条件 3 如下

$$\begin{aligned} (\mathsf{P}_{/A})_g\delta^{(\pi_1,\pi_2)} &:= \mathsf{P}_g\mathsf{P}_{\langle\pi_1,\pi_2\rangle}\delta_X \\ &= \mathsf{P}_{\langle\pi'_1,\pi'_2\rangle}\mathsf{P}_{f\times f}\delta_X \\ &\geq \mathsf{P}_{\langle\pi'_1,\pi'_2\rangle}\delta_{X'} \\ &:= \delta^{(\pi'_1,\pi'_2)}. \end{aligned}$$

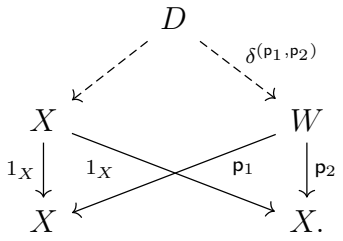
现在我们证明条件 4。令 $u : U \to A$为弱积 $w \overset{1}{\leftarrowtail} u \overset{2}{\rightarrowtail} w$ ，并令$h \colon U \to X \times X \times X \times X$ 为由投影 $\pi_j\mathbf{r}_i \colon U \to X$诱导的唯一箭头，对于 $i, j = 1$，2。如果 $t, t' \colon u \to w$是由复合 $\pi_1 \circ \mathbf{r}_1$, $\pi_2 \circ \mathbf{r}_1$和 $\pi_1 \circ \mathbf{r}_2, \pi_2 \circ \mathbf{r}_2,$ 诱导的两个箭头，那么我们如下得到条件 4

$$\begin{aligned} &(\mathsf{P}_{/A})_{\mathbf{r}_1}\delta^{(\pi_1,\pi_2)} \wedge (\mathsf{P}_{/A})_t\delta^{(\pi_1,\pi_2)} \wedge (\mathsf{P}_{/A})_{t'}\delta^{(\pi_1,\pi_2)} \\ &:= \mathsf{P}_h(\mathsf{P}_{\langle p_1,p_2\rangle}\delta_X \wedge \mathsf{P}_{\langle p_1,p_3\rangle}\delta_X \wedge \mathsf{P}_{\langle p_2,p_4\rangle}\delta_X) \\ &\leq \mathsf{P}_h\mathsf{P}_{\langle p_3,p_4\rangle}\delta_X \\ &= (\mathsf{P}_{/A})_{\mathbf{r}_2}\delta^{(\pi_1,\pi_2)}. \end{aligned} \tag{3}$$

如果 $\mathsf{P} : \mathscr{C}^{op} \to$ InfSL 是一个偏初等教义，得益于引理 3.5，我们可以重复上述论证，从而得到 P 的切片教义是偏的。如果 P 具有完全弱概括，切片也同样如此。

注释 3.11. 切片构造是在偏初等教义的背景下获得的一项重大改进。在许多情况下，初等教义 $\mathsf{P} : \mathscr{C}^{op} \to$ InfSL 具有弱等化子（以及弱拉回）。例如，若 P 具有弱概括和全面对角线，则 $\mathscr{C}$ 具有弱等化子（以及弱拉回），参见 [MR13，命题 4.6]。在这些情况下，切片范畴只有弱有限积，因此切片教义不属于初等教义的范畴。这些情形的主要例子由例 2.10 中的初等教义$F^{ML}$ 和 $G^{\mathbf{mTT}}$ 给出。它们的切片是偏初等教义。

例 3.12。（弱子对象）对于弱左正合范畴 $\mathscr{C}$，例 2.10中的弱子对象函子 $\Psi_{\mathscr{C}}$ 是一个偏初等教义。事实上，如果 $X$ 是 $\mathscr{C}$ 的一个对象，并且 $X \overset{\mathsf{p}_1}{\leftarrowtail} W \overset{\mathsf{p}_2}{\rightarrowtail} X$ 是一个弱积，则元素 $\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)}$ 由以下实线图表的一个弱极限的右侧虚线箭头在 $\mathscr{C}/W$ 的偏序集反射中的等价类给出：

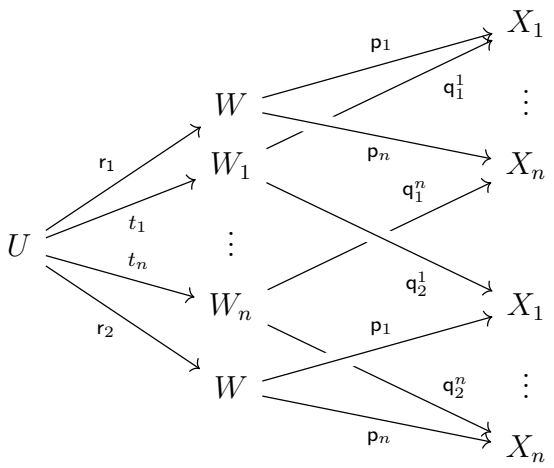



等价地，元素 $\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)}$ 是投影 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2 : W \to X$的一个弱等化子的等价类。根据定义 3.2 对条件的验证可通过弱拉回图的计算轻松完成。该教义具有完全弱概括。

# 4 证明无关元素

本节中，我们识别出偏初等教义$\mathbf{P} : \mathscr{C}^{op} \to$ InfSL在 $\mathscr{C}$ 的弱积上的纤维中的特定元素类，这些元素类对于本文其余部分至关重要。

给定对象列表 $X_1, \ldots, X_n \in \mathscr{C}$ 和弱积 $W$ 及其投影 $\mathbf{p}_i : W \to X_i$，对于 $1 \le i \le n$，我们可以考虑如下形式的交换图：




(8)

其中，对于 $1 \le i \le n$，$W \overset{1}{\leftarrow} U \overset{2}{\rightarrow} W$ 和 $X_i \overset{i}{\underset{1}{\leftarrow}} W_i \overset{i}{\underset{2}{\rightarrow}} X_i$ 是弱二元积。对于这样的图表，我们可以考虑由下降数据给出的 P($W$) 的子偏序集

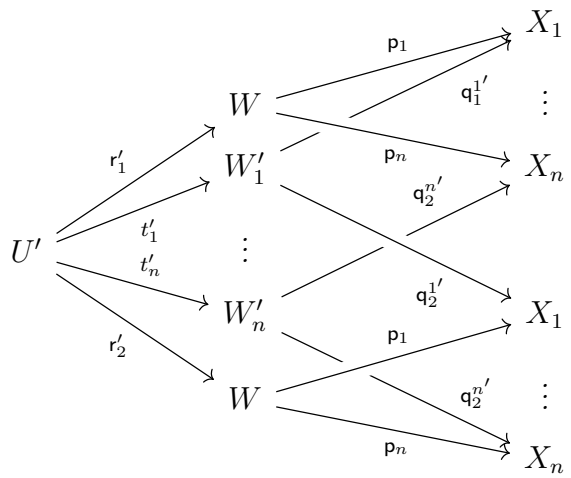
$$\mathcal{D}es(\mathsf{P}_{t_1}\delta^{(\mathsf{q}_1^1,\mathsf{q}_2^1)} \wedge \cdots \wedge \mathsf{P}_{t_n}\delta^{(\mathsf{q}_1^n,\mathsf{q}_2^n)})$$

其由满足条件的元素 $\alpha \in$ P($W$) 组成

$$\mathsf{P}_{\mathsf{r}_1}\alpha \wedge \mathsf{P}_{t_1}\delta^{(\mathsf{q}_1^1,\mathsf{q}_2^1)} \wedge \cdots \wedge \mathsf{P}_{t_n}\delta^{(\mathsf{q}_1^n,\mathsf{q}_2^n)} \le \mathsf{P}_{\mathsf{r}_2}\alpha.$$

显然，P($W$) 中上述元素的定义取决于所考察的具体交换图 (8)。我们证明的第一个结果令人惊讶：这些元素完全由弱积 $W$ 决定。

引理4.1. 设 $\mathsf{P}:\mathscr{C}^{op}\to \mathbf{InfSL}$ 是一个偏初等教义，且 $\mathsf{p}_i:W\to X_i$ 对于 $1\le i\le n$ 是对象 $X_1,\ldots,X_n\in\mathscr{C}$ 的一个弱积。如果我们考虑一个如 (8) 所示的交换图，以及另一个不同的交换图




其中，$W\xleftarrow{\mathsf{r}_1'}U'\xrightarrow{\mathsf{r}_2'}W$ 和 $X_i\xleftarrow{\mathsf{q}_1^{i\prime}}W_i'\xrightarrow{\mathsf{q}_2^{i\prime}}X_i$ 对于 $1\le i\le n$ 是不同的弱二元积，则我们有等式

$$\mathcal{D}es(\mathsf{P}_{t_1}\delta^{(\mathsf{q}_1^1,\mathsf{q}_2^1)}\wedge\cdots\wedge\mathsf{P}_{t_n}\delta^{(\mathsf{q}_1^n,\mathsf{q}_2^n)})=\mathcal{D}es(\mathsf{P}_{t_1'}\delta^{(\mathsf{q}_1^{1\prime},\mathsf{q}_2^{1\prime})}\wedge\cdots\wedge\mathsf{P}_{t_n'}\delta^{(\mathsf{q}_1^{n\prime},\mathsf{q}_2^{n\prime})}).$$

证明。弱积的弱泛性质诱导出态射

$$k:U'\to U\qquad h_i:W_i'\to W_i$$

使得 $\mathsf{r}_jk=\mathsf{r}_j'$ 和 $\mathsf{q}^{\mathsf{i}}{}_jh_i=\mathsf{q}^{\mathsf{i}'}{}_j$ 对于 $1\le i\le n$ 和 $j=1,2$. 我们如下获得包含关系 "$\subseteq$"。如果 $\mathsf{P}_{\mathsf{r}_1}\alpha\wedge\mathsf{P}_{t_1}(\delta^{(\mathsf{q}_1^1,\mathsf{q}_2^1)})\wedge\cdots\wedge\mathsf{P}_{t_n}(\delta^{(\mathsf{q}_1^n,\mathsf{q}_2^n)})\le\mathsf{P}_{\mathsf{r}_2}\alpha$，那么

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}_{\mathsf{r}_1'}\alpha\wedge\mathsf{P}_{t_1'}\delta^{(\mathsf{q}_1^{1\prime},\mathsf{q}_2^{1\prime})}\wedge\cdots\wedge\mathsf{P}_{t_n'}\delta^{(\mathsf{q}_1^{n\prime},\mathsf{q}_2^{n\prime})}\\
&=\mathsf{P}_k\mathsf{P}_{\mathsf{r}_1}\alpha\wedge\mathsf{P}_{t_1'}\mathsf{P}_{h_i}\delta^{(\mathsf{q}_1^1,\mathsf{q}_2^1)}\wedge\cdots\wedge\mathsf{P}_{t_n'}\mathsf{P}_{h_n}\delta^{(\mathsf{q}_1^n,\mathsf{q}_2^n)} &(3.6)\\
&=\mathsf{P}_k(\mathsf{P}_{\mathsf{r}_1}\alpha\wedge\mathsf{P}_{t_1}\delta^{(\mathsf{q}_1^1,\mathsf{q}_2^1)}\wedge\cdots\wedge\mathsf{P}_{t_n}\delta^{(\mathsf{q}_1^n,\mathsf{q}_2^n)}) &(3.5)\\
&\le\mathsf{P}_k\mathsf{P}_{\mathsf{p}_2}\alpha\\
&=\mathsf{P}_{\mathsf{r}_2'}\alpha.
\end{aligned}$$

反向包含 $\supseteq$ $k'\ U\to U'$ $h_i'\ W_i\to$ 类似地可得，只需 $W_i'$ $_j'k'=_j$ $^{\mathsf{i}}{}_j'h_i'=\ ^{\mathsf{i}}{}_j$ $1\le i\le n\ \ j=1\ 2$ □

考虑满足 r r 和 q q 的箭头 : 和 :，其中 , , 。

由上述引理可知，对于对象 $X_1$、.....、$X_n\in\mathscr{C}$ 的每个弱积 $\mathsf{p}_i:W\to X_i$（其中 $1\le i\le n$），我们可以定义 P($W$) 的子偏序集，由满足以下条件的元素 $\alpha$ 组成：对于某个（因而对于所有）如 (8) 所示的交换图，均满足

$$\mathsf{P}_{\mathsf{r}_1}\alpha\wedge\mathsf{P}_{t_1}\delta^{(\mathsf{q}_1^1,\mathsf{q}_2^1)}\wedge\cdots\wedge\mathsf{P}_{t_n}\delta^{(\mathsf{q}_1^n,\mathsf{q}_2^n)}\le\mathsf{P}_{\mathsf{r}_2}\alpha. \tag{9}$$

我们将称这些元素为弱积 $W$ 的证明无关元素（或严格谓词）。

观察 4.2. 如果 P 是严格初等教义，且 $X_1, \ldots, X_n$ 是 $\mathscr{C}$ 的对象，那么 (7) 表明，严格积 $X_1 \times \cdots \times X_n$ 的证明无关元素与整个纤维 $\mathsf{P}(X_1 \times \cdots \times X_n)$ 重合。

证明无关元素由投影重索引。

命题 4.3. 设 $\mathsf{P} : \mathscr{C}^{op} \to$ InfSL 是一个偏初等教义，且 $X_1, \ldots, X_n$ 是 $\mathscr{C}$ 中的对象。若 $W$ 是 $X_1, \ldots, X_n$ 的弱积，其投影为 $\mathsf{p}_i \colon W \to X_i$，其中 $1 \leq i \leq n$，则 $W$ 的证明无关元素由投影重索引。

证明。与引理 3.5 的证明类似。 □

备注 4.4. 一般而言，我们无法证明上述命题的逆命题，即根据 (9)，每个经投影重索引的元素 $\alpha \in \mathsf{P}(W)$ 也是证明无关的。不过，简单计算可知，如果 P 具有满弱理解和全面对角线，那么 $W$ 的证明无关元素与经投影重索引的元素相同。

在下一个命题中，我们证明同一组对象的不同弱积会产生同构的证明无关元素。

命题 4.5. 设 $\mathsf{P} : \mathscr{C}^{op} \to$ InfSL 是一个偏初等教义，并且 $\mathsf{p}_i \colon W \to X_i$ 和 $\mathsf{p}'_i \colon W' \to X_i$（对于 $1 \leq i \leq n$）是某些对象$X_1$、.....、 $X_n \in \mathscr{C}$的两个不同弱积。那么， $W$的证明无关元素偏序集与 $W'$的证明无关元素偏序集同构。

证明。我们先固定一个如 (8) 所示的交换图。现在考虑一个类似的图表，其中使用对象 $X_1$、 ..... 、 $X_n$ 的另一个弱积 $\mathsf{p}'_i \colon W' \to X_i$（对于 $1 \leq i \leq n$），并以不同的弱积 $W' \xleftarrow{\mathsf{r}'_1} U' \xrightarrow{\mathsf{r}'_2} W'$、 $X_i \xleftarrow{\mathsf{q}_1^{i'}} W'_i \xrightarrow{\mathsf{q}_2^{i'}} X_i$ 以及箭头 $t'_i \colon U' \to W'_i$（对于 $1 \leq i \leq n$）填充。令

$$\mathcal{D}es(\mathsf{P}_{t'_1}\delta^{(\mathsf{q}_1^1, \mathsf{q}_2^1)} \wedge \cdots \wedge \mathsf{P}_{t'_n}\delta^{(\mathsf{q}_1^n, \mathsf{q}_2^n)}) \subseteq \mathsf{P}(W')$$

是 $W'$ 上证明无关元素构成的子偏序集。弱积的弱泛性质诱导出两个态射

$$h : W' \to W \qquad h' : W \to W'$$

使得 $\mathsf{p}_i h = \mathsf{p}'_i$ and $\mathsf{p}'_i h' = \mathsf{p}_i$，对于 $1 \leq i \leq n$。我们证明函子 $\mathsf{P}_h$ and $\mathsf{P}_{h'}$在子序之间给出了一个同构

$$\mathsf{P}_h : \mathcal{D}es(\mathsf{P}_{t_1}\delta^{(\mathsf{q}_1^1, \mathsf{q}_2^1)} \wedge \cdots \wedge \mathsf{P}_{t_n}\delta^{(\mathsf{q}_1^n, \mathsf{q}_2^n)}) \underset{\cong}{\longleftrightarrow} \mathcal{D}es(\mathsf{P}_{t'_1}\delta^{(\mathsf{q}_1^1, \mathsf{q}_2^1)} \wedge \cdots \wedge \mathsf{P}_{t'_n}\delta^{(\mathsf{q}_1^n, \mathsf{q}_2^n)}) : \mathsf{P}_{h'}.$$

弱积的弱泛性质诱导出态射

$$k : U' \to U \qquad h_i : W'_i \to W_i$$

使得 $\mathsf{r}_j k = h\mathsf{r}'_j$ 且 $\mathsf{q}^{\mathsf{i}}{}_j h_i = \mathsf{q}^{\mathsf{i}'}{}_j$，对于 $1 \leq i \leq n$、 $j = 1$，2。我们首先证明，若 $\alpha$ 是 $W$ 的证明无关元素，则 $\mathsf{P}_h(\alpha)$ 是 $\mathsf{P}(W')$ 的证明无关元素，证明如下：

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}_{\mathsf{r}'_1}\mathsf{P}_h\alpha \wedge \mathsf{P}_{t'_1}\delta^{(\mathsf{q}^1_1,\mathsf{q}^1_2)} \wedge \cdots \wedge \mathsf{P}_{t'_n}\delta^{(\mathsf{q}^n_1,\mathsf{q}^n_2)} \\
&= \mathsf{P}_k\mathsf{P}_{\mathsf{r}_1}\alpha \wedge \mathsf{P}_{t'_1}\mathsf{P}_{h_1}\delta^{(\mathsf{q}^1_1,\mathsf{q}^1_2)} \wedge \cdots \wedge \mathsf{P}_{t'_n}\mathsf{P}_{h_n}\delta^{(\mathsf{q}^n_1,\mathsf{q}^n_2)} && (3.6)\\
&= \mathsf{P}_k(\mathsf{P}_{t_1}\delta^{(\mathsf{q}^1_1,\mathsf{q}^1_2)} \wedge \cdots \wedge \mathsf{P}_{t_n}\delta^{(\mathsf{q}^n_1,\mathsf{q}^n_2)}) && (3.5)\\
&\leq \mathsf{P}_k\mathsf{P}_{\mathsf{r}_2}\alpha \\
&= \mathsf{P}_{\mathsf{r}'_2}\mathsf{P}_h\alpha.
\end{aligned}$$

类似的计算表明，$\mathsf{P}_{h'}$ 将 $W'$ 中的证明无关元素映射为 $W$中的证明无关元素。根据命题 4.3，可逆性成立，因为对于 $1 \leq i \leq n$，$\mathsf{p}_i(h \circ h') = \mathsf{p}_i \circ \mathsf{id}$ 且 $\mathsf{p}'_i(h' \circ h) = \mathsf{p}'_i \circ \mathsf{id}$。 □

感谢引理4.1、命题 4.3 和命题 4.5，我们可以给出如下定义。

定义 4.6.设 $\mathsf{P} : \mathscr{C}^{op} \to \mathsf{InfSL}$ 是一个偏初等教义。对于对象 $X_1$,.. ., $X_n \in \mathscr{C}$ 的列表，我们可以考虑这样得到的偏序集：取由弱积 $X_1$, .. ., $X_n$ 的证明无关元素的各种表示之间的重索引限制所给出的同构图表的极限，并将其记为 $\mathsf{P}^s[X_1, \ldots, X_n]$。我们将把$\mathsf{P}^s[X_1, \ldots, X_n]$ 称为 $X_1, \ldots, X_n$ 的证明无关元素（或严格谓词）。

事实上，$\mathsf{P}^s[X_1, \ldots, X_n]$ 中的元素是弱积 $\mathsf{p}_i : W \to X_i$（对于 $1 \leq i \leq n$）的证明无关元素 $\alpha \in \mathsf{P}(W)$ 的等价类，模去如下等价关系： $\alpha$ 与另一个弱积 $\mathsf{p}'_i : W' \to X_i$（对于 $1 \leq i \leq n$）的证明无关元素 $\alpha' \in \mathsf{P}(W')$ 相关，当且仅当存在一个箭头$h : W \to W'$，使得 $\alpha = \mathsf{P}_h(\alpha')$，且 $\mathsf{p}'_i h = \mathsf{p}_i$，对于 $1 \leq i \leq n$。

现在，我们通过两个有偏初等教义的例子来描述证明无关元素。特别是，证明无关元素这一名称正是源自下面的例子。

例 4.7. 考虑初等教义 $F^{ML} : \mathsf{ML}^{op} \to \mathsf{InfSL}$ 以及一个闭类型 $A$。若 $\lfloor f \rceil : X \to A$ 是 $\mathsf{ML}/A$ 中的一个对象，则 $\lfloor f \rceil$ 与 $\lfloor f \rceil$ 的弱积的一个典范选择由下列弱拉回图中两个复合映射的共同值的等价类给出。

$$\begin{array}{ccc}
W := \sum_{x_1,x_2:X} \mathsf{Id}_A(f(x_1), f(x_2)) & \xrightarrow{\pi_2} & X \\
{\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
X & \xrightarrow[f]{} & A
\end{array}$$

我们将其记作 $g := \pi_1 f : W \to A$。切片教义 $F^{ML}{}_{/A}$ 将弱积 $\lfloor w \rceil$ 映射为 $F^{ML}{}_{/A}(\lfloor w \rceil) := F^{ML}(W)$，它由 $W$ 上依赖类型的等价类给出：

$$w : W \vdash B(w).$$

纤维化等式 $\delta_{\lfloor f \rceil}$ 给出如下：

$$(x_1, x_2, p) : W \vdash \mathsf{Id}_X(x_1, x_2).$$

类似地，$\lfloor g \rceil$ 和 $\lfloor g \rceil$ 的弱积由以下弱拉回图中两个复合映射的共同值给出。

$$\begin{array}{ccc} U := \sum\limits_{w,w':W} \mathsf{Id}_A(g(w), g(w')) & \xrightarrow{\pi_2} & W \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ W & \xrightarrow[g]{} & A. \end{array}$$

我们将其记作 $h := \pi_1 g : U \to A$。纤维化等式 $\delta_{\lfloor g \rceil}$ 是 $F^{ML}{}_{/A}(h) := F^{ML}(U)$ 的一个元素，定义如下：

$$(w, w', p) : U \vdash \mathsf{Id}_W(w, w').$$

若 $w := (x_1, x_2, q) : W$ 且 $w' := (x_1', x_2', q') : W$，则元素 $\delta_{\lfloor f \rceil} \boxtimes \delta_{\lfloor f \rceil}$ 对应于依赖类型

$$(w, w', p) : U \vdash \mathsf{Id}_X(x_1, x_1') \wedge \mathsf{Id}_X(x_2, x_2'),$$

其不依赖于证明项

$$q : \mathsf{Id}_A(f(x_1), f(x_2)), \qquad q' : \mathsf{Id}_A(f(x_2), f(x_2')).$$

因此，我们将 $\delta_{\lfloor f \rceil} \boxtimes \delta_{\lfloor f \rceil}$ 称为 $W$ 的证明无关等式，而将 $\delta_{\lfloor g \rceil}$ 称为 $W$ 的证明相关等式。

类似地，我们可以描述某些对象$f_i$的弱积的证明无关元素：$X_i \to A$，对于 $i = 1, \ldots\ldots, n$，属于$\mathbf{ML}/A$。$f_1, \ldots\ldots, f_n$的弱积的一个典范选择由 $g := \pi_1 f_1 : W \to A$ 的等价类给出，其中

$$W := \sum_{x_1:X_1,\ldots,x_n:X_n} \mathsf{Id}_A(f_1(x_1), f_2(x_2)) \times \cdots \times \mathsf{Id}_A(f_{n-1}(x_{n-1}), f_n(x_n)). \tag{10}$$

$W$的证明无关元素是类型 $w : W \vdash B(w)$，满足：若 $w := (x_1, \ldots, x_n, q)$ 且 $w' := (x_1', \ldots, x_n', p')$，并且该类型

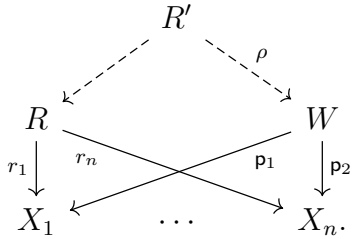
$$\mathsf{Id}_X(x_1, x_1') \wedge \cdots \wedge \mathsf{Id}_X(x_n, x_n')$$

有元素，则 $B(w)$ 有元素，当且仅当 $B(w')$ 有元素。

例 4.8。设 $\mathscr{C}$ 是一个弱左正合范畴，并考虑 $\mathscr{C}$的弱子对象所构成的偏置初等教义 $\Psi_{\mathscr{C}}$。若 $W$ 是对象列表 $X_1$、.....、 $X_n \in \mathscr{C}$的弱积，且投影为 $\mathsf{p}_i\colon\ W \to X_i$（对 $1 \leq i \leq n$），那么展开 $W$ 的证明无关元素所满足的下降条件 (9)，会涉及若干弱拉回图的计算。不过，我们可以如下简洁地描述它。令 $\mathscr{C}/(X_1, \ldots, X_n)$ 表示 $X_1$、.....、$X_n$ 上的锥范畴，并令 $\mathscr{C}/(X_1, \ldots, X_n)_{po}$ 表示其偏序集反射。我们考虑函子

$$\mathcal{M} : \mathscr{C}/(X_1, \ldots, X_n)_{po} \to \Psi_{\mathscr{C}}(W)$$

它将锥 $r_i\colon R \to X_i$的等价类，对于 $1 \leq i \leq n$，发送到以下实线图表的弱极限的右侧虚线箭头所给出的弱子对象



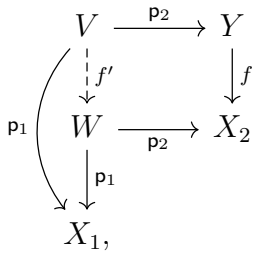

反过来，我们有函子

$$\mathcal{U} : \Psi_{\mathscr{C}}(W) \to \mathscr{C}/(X_1, \ldots, X_n)_{po}$$

其将一个弱子对象 $f\colon\ A \to W$ 发送到由后复合 $\mathsf{p}_i \circ f\colon\ A \to X_i$给出的锥的等价类，其中 $1 \leq i \leq n$成立。在 [Cio22中，命题4.5.2和定理4.5.3], 中，我们证明了函子 $\mathcal{U}$ 在 $W$ 的证明无关元素上的限制是一个同构，其逆为 $\mathcal{M}$。

蕴涵型偏置教义如定义2.7 所定义。通过要求如定义2.5和 2.6中的左伴随和右伴随，可以得到存在的和全局的偏置教义的一个自然概念。然而，我们假设一个较弱的 Beck-Chevalley 条件和弗罗贝尼乌斯互反性，将其限制到偏置教义 $\mathsf{P} : \mathscr{C}^{op} \to$ InfSL 的证明无关元素上，如下所示：

•弱 Beck-Chevalley 条件：对于任何这种形式的交换图（它不再是拉回）



其中 $X_1 \xleftarrow{\mathsf{p}^1} V \xrightarrow{\mathsf{p}^2} Y$是一个弱积，规范箭头 $\exists_{\mathsf{p}_2} \circ \mathbf{P}_{f'}\alpha \leq \mathbf{P}_f \circ \exists_{\mathsf{p}_2}\alpha$是同构，对所有证明无关的 $\alpha \in \mathbf{P}(W)$ 都成立。全局量化的情形也类似。

- 弱弗罗贝尼乌斯互反律：对于任意投影 $\mathsf{p}_i$：$W \to X_i$、元素 $\alpha \in \mathbf{P}(X_i)$，以及与证明无关的 $\beta \in \mathbf{P}(W)$，典范箭头 $\exists_{\mathsf{p}_i}(\mathbf{P}_{\mathsf{p}_i}\alpha \wedge \beta) \leq \alpha \wedge \exists_{\mathsf{p}_i}\beta$是一个同构。

例 4.9. 对于弱左正合范畴 $\mathscr{C}$，教义 $\Psi_{\mathscr{C}}$ 是存在的。对于每个对象 $A \in \mathbf{ML}$，教义 $F^{ML}{}_{/A}$ 是存在的且全局的。

# 5 严格化

本节中，我们从一个有偏教义构造一个初等教义。为此，我们回顾一下：将严格积自由地添加到范畴$\mathscr{C}$ 中的全局构造由 $(\mathbf{Fam}_{\mathsf{fin}}(\mathscr{C}^{op}))^{op}$ 给出，参见 [BC95]。下面给出积完备化的一个显式描述。

定义 5.1. 设 $\mathscr{C}$ 为一个范畴。$\mathscr{C}$ 的有限积完备化是如下定义的范畴$\mathscr{C}_s$：

- $\mathscr{C}_s$的对象是由 $\mathscr{C}$的对象构成的有限列表 $[X_1, \ldots, X_n]$。 ^ ^ - $\mathscr{C}_s$的箭头是形如 $(f, f) : [X_1, \ldots, X_n] \to [Y_1, \ldots, Y_m]$ 的对，其中 $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ 是一个赋值，且 $f = [f_1, \ldots, f_m]$ 是一个箭头列表 $f_i : X_{\hat{}f(i)} \to Y_{i\hat{}}$，取自 $\mathscr{C}$，对每个 $1 \leq i \leq m$均如此。两个箭头 $(f, f) : [X_1, \ldots, X_n] \to [Y_1, \ldots, Y_m]$ 和 $(g, \hat{}g) : [Y_1, \ldots, Y_m] \to [Z_1, \ldots, Z_k]$ 的复合定义如下：

$$(g, \hat{g}) \circ (f, \hat{f}) = (g * f, \hat{g} \circ \hat{f})$$

其中 $g * f = [g_1 \circ f_{\hat{g}(1)}, \ldots, g_k \circ f_{\hat{g}(k)}]$。

有一个显然的函子 $S : \mathscr{C} \to \mathscr{C}_s$，它将一个对象 $X \in \mathscr{C}$ 发送到列表 $[X] \in \mathscr{C}_s$，并将 $\mathscr{C}$中的一个箭头 $f$发送到 $\mathscr{C}_s$中的箭头 $(f, id_{\{1\}}) : [X] \to [Y]$。上述构造为 2-遗忘函子 $U$:Cart $\to$ Cat 提供了一个左双伴随；该函子位于小范畴的 2-范畴之间，而Cart是具有严格有限积且保持这些积的函子的范畴。两个列表的积由列表连接给出。然而，我们注意到，如果范畴 $\mathscr{C}$ 具有弱有限积，那么函子 $S : \mathscr{C} \to \mathscr{C}_s$ 并不保持它们，也不会将弱积变为严格积。

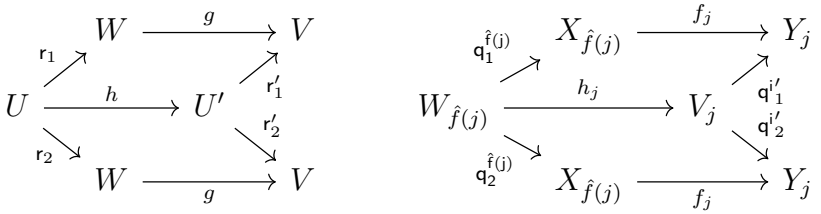
记号。给定一个范畴 $\mathscr{C}$，我们将用 $[f] := S(f)$ 表示箭头 $f : X \to Y$ 在 $\mathscr{C}$ 中经函子 $S : \mathscr{C} \to \mathscr{C}_s$ 的像。此外，我们将采用通常的

记号 $\langle [f], [g] \rangle : [X] \to [Y, Z]$ 用于表示由 $\mathscr{C}_s$ 上的态射 $[f], [g]$ 在 $\mathscr{C}_s$ 的积 $[Y, Z]$ 上诱导的唯一箭头，即 $([f, g], c_1)$，其中 $c_1$ 是恒等于 1 的常函数。最后，如果 $f_i : X_i \to Y_i$ 对于 $1 \leq i \leq n$ 是 $\mathscr{C}$ 的态射，那么我们将 $[f_1, \ldots, f_n] : [X_1, \ldots, X_n] \to [Y_1, \ldots, Y_n]$ 记作 $\mathscr{C}_s$ 的箭头 $([f_1, \ldots, f_n], id_{\{1,\ldots,n\}})$。

现在我们证明，若 $\mathbf{P} : \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{InfSL}$ 是一个偏初等教义，那么对象列表 $X_1, \ldots, X_n$ 的证明无关元素 $\mathbf{P}^s([X_1, \ldots, X_n])$ 会在 $\mathscr{C}$ 的积完备化上诱导出一个教义。我们从以下构造开始。

命题 5.2. 如果 $\mathbf{P}: \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{InfSL}$ 是一个偏初等教义，那么我们可以定义一个函子 $\mathbf{P}^s : \mathscr{C}^{op}{}_s \to \mathbf{InfSL}$。

证明。函子 $\mathbf{P}^s$ 对 $\mathscr{C}_s$ 中对象的作用已经定义。特别地，$\mathbf{P}^s([X])$ 仅表示偏序集 $\mathbf{P}(X)$。现在我们证明该赋值是函子性的。设 $(f, f) : [X_1, \ldots, X_n] \to [Y_1, \ldots, Y_m]$ 是 $\mathscr{C}_s$ 中的一个箭头，且 $\mathbf{p}_i : W \to X_i$（对于 $1 \leq i \leq n$）是 $X_1, \ldots, X_n$ 的弱积，$\mathbf{p}'_i : V \to Y_j$（对于 $1 \leq j \leq m$）是 $Y_1, \ldots, Y_m$ 的弱积。因此，我们得到一个态射 $g : W \to V$，使得对于 $i \leq i \leq m$，$\mathbf{p}_i \circ g = f_i \circ \mathbf{p}'_{\hat{f}(i)}$。现在我们证明，若 $\alpha$ 是 $V$ 中的证明无关元素，则 $\mathbf{P}_g(\alpha)$ 是 $W$ 中的证明无关元素。为此，我们固定两个如 (8) 所示的交换图，分别对应于 $W$ 和 $V$。我们为 $W$ 选取一些二元积 $W \xleftarrow{\mathbf{r}_1} U \xrightarrow{\mathbf{r}_2} W$ 和 $X_i \xleftarrow{\mathbf{q}_1^i} W_i \xrightarrow{\mathbf{q}_2^i} X_i$，以及态射 $t_i : U \to W_i$（对于 $1 \leq i \leq n$）。我们为 $V$ 选取一些二元积 $V \xleftarrow{\mathbf{r}'_1} U' \xrightarrow{\mathbf{r}'_2} V$ 和 $Y_j \xleftarrow{\mathbf{q}'^{j}_1} V_j \xrightarrow{\mathbf{q}'^{j}_2} Y_j$，以及态射 $t'_j : U' \to V_j$（对于 $1 \leq j \leq m$）。现在我们考虑如下形式的交换图。



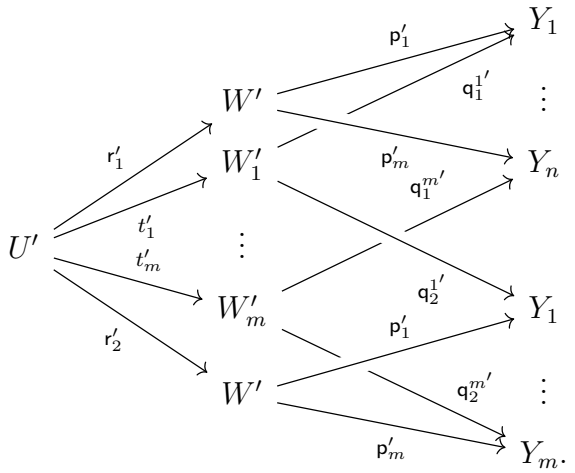

对于 $1 \leq j \leq m$。箭头 $g$ 诱导出一个箭头 $h : U \to U'$，使得 $\mathbf{r}'_i \circ h = g \circ \mathbf{r}_i$，对于 $i = 1, 2$；而态射 $f_j : X_{\hat{f}(j)} \to Y_j$ 诱导出态射 $h_j : W_{\hat{f}(j)} \to V_j$，使得 $\mathbf{q}'^{j}_i h_j = f_j \mathbf{q}^{\hat{f}(j)i}$，对于 $i = 1, 2$ 和 $1 \leq j \leq m$。假设 $\mathsf{P}_{\mathbf{r}'_1}\alpha \wedge \mathsf{P}_{t'_1}\delta^{(\mathbf{q}_1^{1'}, \mathbf{q}_2^{1'})} \wedge \cdots \wedge \mathsf{P}_{t'_n}\delta^{(\mathbf{q}_1^{n'}, \mathbf{q}_2^{n'})} \leq \mathsf{P}_{\mathbf{r}'_2}\alpha$，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}_{\mathbf{r}_1}\mathsf{P}_g\alpha \wedge \mathsf{P}_{t_1}\delta^{(\mathbf{q}_1^1, \mathbf{q}_2^1)} \wedge \cdots \wedge \mathsf{P}_{t_n}\delta^{(\mathbf{q}_1^n, \mathbf{q}_2^n)} \\
&\leq \mathsf{P}_h\mathsf{P}_{\mathbf{r}_1}\alpha \wedge \mathsf{P}_{t_{\hat{f}(1)}}\mathsf{P}_{h_1}\delta^{(\mathbf{q}_1^{1'}, \mathbf{q}_2^{1'})} \wedge \cdots \wedge \mathsf{P}_{t_{\hat{f}(m)}}\mathsf{P}_{h_m}\delta^{(\mathbf{q}_1^{m'}, \mathbf{q}_2^{m'})} \qquad (3) \\
&= \mathsf{P}_h(\mathsf{P}_{\mathbf{r}'_1}\alpha \wedge \mathsf{P}_{t'_1}\delta^{(\mathbf{q}_1^{1'}, \mathbf{q}_2^{1'})} \wedge \cdots \wedge \mathsf{P}_{t'_n}\delta^{(\mathbf{q}_1^{n'}, \mathbf{q}_2^{n'})}) \qquad (3.5) \\
&\leq \mathsf{P}_h\mathsf{P}_{\mathbf{r}'_2}\alpha \\
&= \mathsf{P}_{\mathbf{r}_2}\mathsf{P}_g\alpha.
\end{aligned}
$$

ˆ因此，$\mathsf{P}^s(f,f)$将 $X_1$，…，$X_n$ 中一个证明无关元素 $\alpha$ 的同构类映射为 $Y_1$，…，$Y_m$ 中证明无关元素 $\mathsf{P}_g(\alpha)$ 的同构类。$\mathsf{P}^s$ 的赋值定义良好且满足结合律，这得益于命题 4.3。□

定理5.3. 若P: $\mathscr{C}^{op} \to$ InfSL是偏初等教义，则$\mathsf{P}^s$ 是严格初等教义。反之，对于每个严格初等教义 $R:\ \mathscr{C}^{op}{}_s \to$ InfSL，前复合 $R \circ S:\ \mathscr{C}^{op} \to$ InfSL 是偏初等教义。

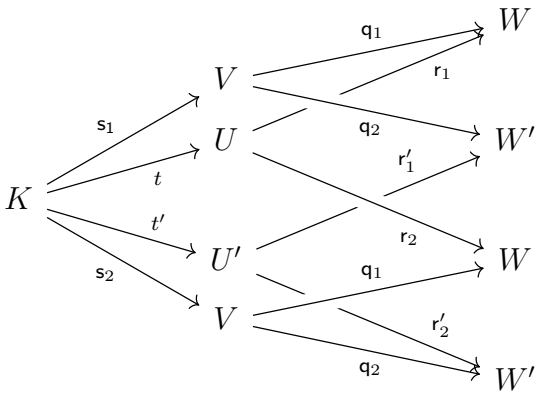
证明。假设P: $\mathscr{C}^{op} \to$ InfSL 是一个偏初等教义，我们如下证明 $\mathsf{P}^s : \mathscr{C}^{op}{}_s \to$ InfSL 是一个严格初等教义。对于每个对象 $[X_1,\dots,X_n] \in \mathscr{C}_s$，我们考虑如 (8)中的图表，并将纤维化等式 $\delta_{[X_1,\dots,X_n]}$ 定义为证明无关等式 $\mathsf{P}_{t_1}\delta^{(\mathsf{q}_1^1,\mathsf{q}_2^1)} \wedge \cdots \wedge \mathsf{P}_{t_n}\delta^{(\mathsf{q}_1^n,\mathsf{q}_2^n)}$ 的同构类，该等式属于 $\mathsf{P}^s[X_1,\dots,X_n,X_1,\dots,X_n]$。特别地，$\delta_{[X]}$ 是弱积 $X \xleftarrow{\mathsf{p}^1} W \xrightarrow{\mathsf{p}^2} X$ 的纤维化等式 $\delta^{(\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2)}$的同构类。现在我们证明 $\delta_{[X_1,\dots,X_n]}$ 满足命题 2.4的条件 1、2 和 3。由引理 3.3 和定义 3.2 的条件 1，我们得到 $\top_{[X_1,\dots,X_n]} \le \mathsf{P}^s_{\Delta_{[X_1,\dots,X_n]}}\delta_{[X_1,\dots,X_n]}$。条件 2 蕴含于 $\mathsf{P}^s$的定义中。最后，条件 3 如下得到。首先考虑如 (8) 中的图表以及弱有限积的类似交换图




该元素 $\delta_{[X_1,\dots,X_n]} \boxtimes \delta_{[Y_1,\dots,Y_m]}$ 由该元 t

$$\mathsf{P}_t(\mathsf{P}_{t_1}\delta^{(\mathsf{p}_1^1,\mathsf{p}_2^1)} \wedge \cdots \wedge \mathsf{P}_{t_n}\delta^{(\mathsf{p}_1^n,\mathsf{p}_2^n)}) \wedge \mathsf{P}_{t'}(\mathsf{P}_{t'_1}\delta^{(\mathsf{p}_1^{1'},\mathsf{p}_2^{1'})} \wedge \cdots \wedge \mathsf{P}_{t'_m}\delta^{(\mathsf{p}_1^{m'},\mathsf{p}_2^{m'})})$$

对于一个交换图




其中 $W \xleftarrow{q_1} V \xrightarrow{q_2} W'$ 和 $V \xleftarrow{s_1} K \xrightarrow{s_2} V$ 是弱积。但是，由于 $V$ 也是 $X_1$、……、$X_n$、$Y_1$、……、$Y_m$的弱积，引理 3.5 蕴含等式

$$\delta_{[X_1,\ldots,X_n]} \boxtimes \delta_{[Y_1,\ldots,Y_m]} = \delta_{[X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_m]}.$$

现在考虑一个严格初等教义 $R$： $\mathscr{C}^{op_s} \to$ InfSL以及复合 P: $=R \circ S$。我们得到，P 是一个偏初等教义设定，对于每个弱积$X \xleftarrow{p_1} W \xrightarrow{p_2} X$ 等式 $\delta^{\langle p_1, p_2\rangle} = \delta_{[X]}$。 □

定义 5.4. 若 P： $\mathscr{C}^{op} \to$ InfSL 是偏初等教义，则严格初等教义 $P^s$： $\mathscr{C}^{op_s} \to$ InfSL 称为 P 的严格化。

注记5.5。按照 Rosolini 的建议，定义 3.4 实际上是由形如

$$p : [W] \to [X_1, \ldots, X_n]$$

其中 $p_i : W \to X_i$（对于 $1 \le i \le n$）是对象 $X_1$、……、$X_n \in \mathscr{C}$的弱积，而p是由投影$p_i$诱导的唯一箭头。因此，在完全理解和全面对角线的情况下（见备注 4.4），偏初等教义P的严格化实际上是相对于上述拓扑的层化。在 [Cio+] 中，作者研究了格罗滕迪克拓扑、弱有限极限与（偏）初等教义之间的关系。

观察 5.6。对于一个带偏的存在的（全局的）初等教义，我们可以考虑三个（或更多）对象 $X$、$Y$、$Z \in \mathscr{C}$，以及弱积 $K \xleftarrow{p_1} U \xrightarrow{p_2} Z$，其中 $X \xleftarrow{p_1} K \xrightarrow{p_2} Y$ 和 $Z$ 是弱积。因此，我们有函子 $P_{p_2} : P(K) \to P(U)$ 的一个左（右）伴随。实际上，这些伴随限制在证明无关元素上，从而为函子 $P^s_{p_2}$ 提供一个左（右）伴随，如下图所示

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{P}^s[Z,X,Y] & \overset{\exists_{p_2}}{\dashrightarrow} \underset{\mathsf{P}^s_{p_2}}{\longleftarrow} & \mathsf{P}^s[X,Y] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{P}(U) & \xrightarrow[\mathsf{P}_{\mathsf{p}_2}]{\exists_{\mathsf{p}_2}} & \mathsf{P}(K). \end{array}$$

因此，我们得到以下性质。

命题 5.7。偏置初等教义 $\mathsf{P}: \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{InfSL}$ 是存在的（全局的），当且仅当其严格化 $\mathsf{P}^s$ 是存在的（全局的）初等教义。

证明。由观察 5.6 以及存在量词教义对所有重索引都有左伴随这一事实可得，参见 [MR13，注 2.13]。类似地，全局教义和蕴涵教义对所有重索引都有右伴随，参见 [MR13，注 6.6]。□

# 6 商完备化

本节介绍偏置初等教义的一种商完备化。这一构造类似于 Maietti 和 Rosolini[MR13] 的初等商完备化，但适用于弱有限积的一般情形。为此，与证明无关的元素将发挥关键作用。我们还证明，这一构造推广了弱左正合范畴的精确完备化 [CV98]，且涵盖其更一般的形式。此外，我们讨论一种泛性质，它利用了左覆盖函子的概念；该概念是在偏置初等教义的背景下于 [CV98], 中引入的。

我们首先注意到，定义 2.11 中的 P-等价关系概念依赖于严格有限积的性质。对于偏初等教义而言，定义元素 $\rho \in \mathsf{P}(W)$ 的自反性、对称性和传递性性质的态射并非唯一，其中 $X \overset{1}{\leftarrow\!\mathsf{p}} W \overset{2}{\mathsf{p}\!\rightarrow} X$ 是一个二元弱积。因此，鉴于命题 4.3，一个自然的选择是将 P-等价关系定义为 $W$ 的特定证明无关元素。

定义 6.1。设 $\mathsf{P}: \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{InfSL}$是一个偏初等教义。在对象 $X \in \mathscr{C}$ 上的P-等价关系是 $\rho \in \mathsf{P}^s[X,X]$ 中的一个元素，它是 $[X] \in \mathscr{C}_s$ 上的 $\mathsf{P}^s$-等价关系。

上述定义可由以下例子加以证实。

例6.2。在例4.8 中，我们讨论了弱左正合范畴 $\mathscr{C}$ 的偏初等教义 $\Psi_{\mathscr{C}}$ 的证明无关元素。如果 $X \overset{1}{\leftarrow\!\mathsf{p}} W \overset{2}{\mathsf{p}\!\rightarrow} X$ 是一个弱二元积，那么 $\Psi^s_{\mathscr{C}}$ 由形如以下形式的一对态射的等价类给出

$$r_1, r_1 : R \to X.$$

直接验证表明，有序对 $r_1$、$r_2$ 在$X \in \mathscr{C}$ 上是一个 $\Psi$-等价关系，当且仅当它是 [CV98]中所定义的伪等价关系。因此，

弱左正合范畴中（伪）等价关系的经典定义（其中有限积也是弱的），是定义 2.11 的一个实例，进而也是证明无关元素的一个实例。

定义6.3.设 P: $\mathscr{C}^{op} \to$ InfSL是一个偏初等教义，并设 $\rho$ 是 $A$上的 P-等价关系。 $\rho$ 的商是一个箭头 $q: A \to C$ in $\mathscr{C}$，满足$\rho \leq \mathsf{P}^{s}_{[q]\times[q]}(\delta_{[C]})$，并且，对于每个箭头 $g: A \to Z$，只要 $\rho \leq \mathsf{P}^{s}_{[g]\times[g]}(\delta_{[Z]})$，就存在唯一箭头 $h: C \to Z$，使得 $g = h \circ q$。稳定商、有效商和有效下降商的定义与初等教义中的定义相同。

例6.4.如果 $\mathscr{C}$ 是一个具有有限弱极限的范畴，且 $X$ 是 $\mathscr{C}$的一个对象。例 6.2 表明，箭头 $q: A \to C$ 是伪等价关系 $r_1, r_2: R \to X$ 的余等化子，当且仅当它是相应的 $\Psi_{\mathscr{C}}$-等价关系 $\lfloor\rho\rceil \in \Psi^{s}_{\mathscr{C}}[X, X]$的商。

现在我们定义偏初等商完备化，其构造与 Maietti 和 Rosolini 在 [MR13] 中所述的构造类似。若 P: $\mathscr{C}^{op} \to$ InfSL 是一个偏初等教义，我们考虑如下范畴$\overline{\mathscr{C}}$：其

- 对象是二元组 $(X, \rho)$，其中 $A$是 $\mathscr{C}$中的一个对象，且 $\rho$是 $X$上的 $P$-等价关系；- 态射 $\lfloor f\rceil : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ 是满足 $\rho \leq \mathsf{P}^{s}_{[f]\times[f]}(\sigma)$ 的态射 $f: X \to Y$ 的等价类。当 $\rho \leq \mathsf{P}^{s}_{[f]\times[f']}(\sigma)$ 时，两个态射 $f, f'$ 等价。

将对象 $(X, \rho) \in \overline{\mathscr{C}}$映射到 $\mathsf{P}(X, \rho) := \mathcal{D}es_{\rho}$，并将态射$\lfloor f\rceil : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ 映射到 $\mathsf{P}_{\lfloor f\rceil} := \mathsf{P}_f$ 的赋值 P 是一个良定义函子，正如以下简单引理所述。

引理 6.5. 若 P: $\mathscr{C}^{op} \to$ InfSL 是一个偏初等教义，则：

1. 若 $(X, \rho)$ 和 $(Y, \sigma)$ 是$\overline{\mathscr{C}}$的两个对象，且 $f: X \to Y$是 $\mathscr{C}$中的一个箭头，满足$\rho \leq \mathsf{P}^{s}_{[f]\times[f]}\sigma$，则 $\mathsf{P}_f$ 限制为一个映射

$$\mathsf{P}_f : \mathcal{D}es_{\sigma} \to \mathcal{D}es_{\rho}.$$

2. 若 $f, g: X \to Y$是 $\mathscr{C}$中的态射，满足 $\rho \leq \mathsf{P}^{s}_{[f]\times[g]}\sigma$ 且 $\beta \in \mathcal{D}es_{\sigma}$，则

$$\mathsf{P}_f(\beta) = \mathsf{P}_g(\beta).$$

□

现在我们证明，偏初等教义的商完备化会得到一个具有良好商的严格初等教义。以下定理针对严格初等教义，见 [MR13，引理 5.3、5.4 和 5.5] 。

定理 6.6. 设 $\mathsf{P}\colon\ \mathscr{C}^{op}\ \to$ InfSL 是一个具有弱完全概括和全面对角线的偏初等教义，则 $\mathsf{P}\colon\ \overline{\mathscr{C}}^{op}\ \to$ InfSL 是 QD 中的初等教义。

证明。给定两个对象 $(X,\rho),(Y,\sigma)\ \in\ \overline{\mathscr{C}}$，容易验证，严格积在同构意义下由以下给出。

$$(W,\rho\boxtimes\sigma),$$

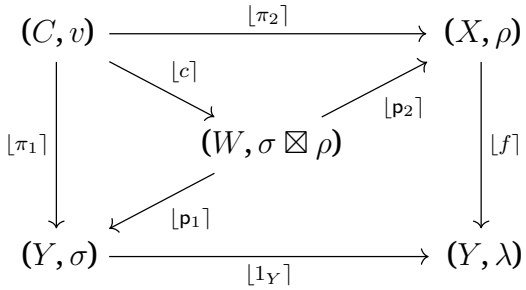
其中，$W$是对象 $X$、$Y\in\mathscr{C}$的弱积。命题2.4的条件1、2 和 3按照 5.3中的方式得到证明。$(X,\rho)$上的 P-等价关系 $\mu$ 是 $X$ 上的 P-等价关系，满足 $\rho\leq\mu$。因此，商由

$$\lfloor 1_X\rceil:(X,\rho)\to(X,\mu),$$

并且它是有效下降的有效商。如果 $\alpha\in\mathsf{P}(X,\rho)$，且 $\{\!|\alpha|\!\}\colon\ \overline{C}\to X$ 是 $\alpha\in\mathsf{P}(X)$ 的弱概括，那么 $\alpha$ 的严格理解由下式给出。

$$\lfloor\{\!|\alpha|\!\}\rceil:(C,\rho')\to(X,\rho)$$

其中 $\rho':=\mathsf{P}^{s}_{\lfloor\{\!|\alpha|\!\}\rceil\times\lfloor\{\!|\alpha|\!\}\rceil}\rho$。这些对角线根据构造是完备的。现在我们证明商是稳定的。令 $\lambda$ 为对象$(Y,\sigma)$上的一个 P-等价关系，并考虑其商 $\lfloor 1_Y\rceil:(Y,\sigma)\to(Y,\lambda)$。如果 $\lfloor f\rceil:(X,\rho)\ \to(Y,\lambda)$ 是一个箭头，那么图表




其中，$Y\ \mathsf{p}\xleftarrow{1}W\ \mathsf{p}\xrightarrow{2}X$ 是一个弱积，$c:=\{\!|\mathsf{P}^{s}_{\langle \mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2\rangle}\mathsf{P}^{s}_{[1_Y]\times[f]}\lambda|\!\}$，且 $v:=\mathsf{P}^{s}_{[c]\times[c]}\mathsf{P}^{s}_{\langle \mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2\rangle}\sigma\boxtimes\rho$ 是一个拉回图，这得益于通过带有弱概括和全面对角线的初等教义中的概括来描述拉回（参见 [MR13，命题4.6]）。现在我们证明，元素$(X,\rho)$与元素$(C,w)$同构，其中 $w:=\mathsf{P}^{s}_{[c]\times[c]}\mathsf{P}^{s}_{\langle \mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2\rangle}\lambda\boxtimes\rho$。如果 $h$表示由态射 $f$和 $1_X$诱导的形如 $X\to W$的箭头，使得 $\mathsf{p}_1h=f$和$\mathsf{p}_2h=1_X$，那么由于

$$\top_X\leq\mathsf{P}^{s}_{\langle[f],[f]\rangle}\lambda=\mathsf{P}_h\mathsf{P}^{s}_{\langle \mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2\rangle}\mathsf{P}^{s}_{[1_Y]\times[f]}\lambda$$

存在一个箭头 $g\colon\ X\to C$ 使得 $c\circ g=h$。由于

$$\sigma\leq\mathsf{P}^{s}_{[h]\times[h]}\mathsf{P}^{s}_{\langle \mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2\rangle}\lambda\boxtimes\rho=\mathsf{P}^{s}_{[g]\times[g]}\mathsf{P}^{s}_{[c]\times[c]}\mathsf{P}^{s}_{\langle \mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2\rangle}\lambda\boxtimes\rho=\mathsf{P}^{s}_{[g]\times[g]}w$$

箭头 $g$ 诱导出一个箭头

$$\lfloor g \rceil : (X, \rho) \to (C, w).$$

此箭头是 $\lfloor \pi_2 \rceil$ 的逆：$(C, w) \to (X, \rho)$。 □

观察 6.7。得益于观察4.2，如果P: $\mathscr{C}^{op} \to$ InfSL是一个初等教义，则初等商完备化与偏置的商完备化是同构的初等教义。

观察 6.8。例6.2和6.4表明，弱有限极限范畴 $\mathscr{C}$ 的精确完备化是 $\Psi_{\mathscr{C}}$的偏置初等的商完备化的一个特例，即两个范畴 $\overline{\mathscr{C}} \cong \mathscr{C}_{ex/wlex}$ 之间存在等价。

注6.9。一个并非精确完备化的偏初等商完备化示例，可以通过考察源自《极简主义基础》的教义 $G^{\mathbf{mTT}}$ 的切片而得到，见例 2.10。

现在我们讨论偏置初等商完备化的泛性质，它不同于定理 2.13 中陈述的泛性质。这并不令人意外，因为在弱左正合范畴的精确完备化的泛性质中也存在类似的问题。事实上，正如 Carboni 和 Vitale 在 [CV98, §3.3], 中所指出的，弱左正合范畴的精确完备化构造给出了一个典范函子

$$\Gamma : \mathscr{C} \to \mathscr{C}_{ex}$$

这不可能是正合范畴与正合函子所构成的2-范畴（记为EX）同任意一个弱左正合范畴的可定义2-范畴（记为 WLEX）之间双伴随的单位。然而，作者考虑了一类称为左覆盖的特殊函子，即那些函子 $F: \mathscr{C} \to \mathcal{A}$ 从弱左正合范畴 $\mathscr{C}$ 到正合范畴$\mathring{A}$，使得弱极限图表 $\mathcal{L}: D \to \mathscr{C}$ 的像 $F(L)$ 经由一个正则满射分解并通过 $F\mathcal{L}$ 的极限，并以 [CV98 定理 29]的意义给出了精确完备化的泛性质，现回顾如下。关于更多细节，请参见 [Vit94]。

定理 6.10。（Carboni 和 Vitale）。设 $\mathscr{C}$ 为弱左正合范畴，设 $\mathcal{A}$ 为正合范畴。精确完备化 $\Gamma$ 在从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathcal{A}$ 的左覆盖函子范畴与从 $\mathscr{C}_{ex}$ 到 $\mathcal{A}$ 的正合函子范畴之间诱导出一个等价。对于任意正则范畴 $\mathcal{A}$，关于正则完备化同样成立。 □

利用上述结果，我们现在在偏置初等教义的语境中定义左覆盖函子的类似物。由定义 3.2 的条件 3，我们得到一个典范的 1-态射

$$(J, j) : \mathsf{P} \to \overline{\mathsf{P}}$$

其中，函子 $J$ 在对象 $X \in \mathscr{C}$ 上定义为 $J(X) := (X, \delta_{[X]})$，在箭头$f: X \to Y$ 上定义为 $J(f) := \lfloor f \rceil : (X, \delta_{[X]}) \to (Y, \delta_{[Y]})$。函子 $j_X$ 就是 $\mathsf{P}(X)$ 的恒等函子。当 P 具有弱概括时，我们可以观察到以下事实:

- 如果 $X$，$Y \in \mathscr{C}$ 并且 $X \overset{\mathsf{p}_1}{\leftarrow} W \overset{\mathsf{p}_2}{\rightarrow} X$ 是一个弱积，那么进入严格积的唯一箭头

$$(W, \delta_{[W]}) \longrightarrow (W, \delta_{[X]} \boxtimes \delta_{[Y]})$$

是 $(W, \delta_{[W]})$ 上 $\delta_{[X]} \overline{\boxtimes} \delta_{[Y]}$ 的 P-等价关系的商。

- 若 $\{\!|\alpha|\!\}\colon\ X \to A$ 是元素 $\alpha \in \mathsf{P}(A)$的弱概括，则 $\underline{J}(\{\!|\alpha|\!\})$ 通过一个 P-商因子分解为 $j(\alpha)$ 的概括

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathsf{P}_h^s \delta_{[A]}) & \xrightarrow{\{\!|\alpha|\!\}} & (A, \delta_{[A]}) \\ \uparrow & \nearrow_{J(\{\!|\alpha|\!\})} & \\ (X, \delta_{[X]}) & & \end{array}$$

其中 $h := [\{\!|\alpha|\!\}] \times [\{\!|\alpha|\!\}]\colon [X, X] \to [A, A]$.

以上观察得出如下针对偏初等教义的左覆盖函子的定义。

定义 6.11. 设 $\mathsf{P}\colon \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{InfSL}$ 是一个具有弱完全概括和全面对角线的偏初等教义，且 $R\colon \mathcal{D}^{op} \to \mathbf{InfSL}$ 是 QD 中的一个对象。当满足下述条件时，称一对 $(F, f)\colon \mathsf{P} \to R$ 为左覆盖：

1. 函子 $F$ 将对象 $X$、$Y \in \mathscr{C}$ 的弱积 $W$ 发送到对象$F(W) \in \mathcal{D}$，使得唯一箭头

$$\langle F(\mathsf{p}_1), F(\mathsf{p}_2)\rangle : F(W) \to F(X) \times F(Y)$$

是一个 $R$-等价关系的商。

2.对于每个对象 $X \in \mathscr{C}$，函子 $f_X$:$\mathsf{P}(X) \to RF(X)$保持所有结构。特别地，函子 $f_X$ 保持有限交，并且对于弱积$X \overset{\mathsf{p}_1}{\leftarrow} W \overset{\mathsf{p}_2}{\rightarrow} X$ 我们有

$$f_W(\delta_X^W) = R_{\langle F(\mathsf{p}_1), F(\mathsf{p}_2)\rangle}(\delta_{F(X)}).$$

3.如果 $\{\!|\alpha|\!\}\colon\ X \to A$ 是元素 $\alpha \in \mathsf{P}(A)$ 的弱概括，那么箭头$F(\{\!|\alpha|\!\})\colon\ F(X) \to F(A)$ 经由 $\{\!|f(\alpha)|\!\}$ 通过某个 $R$- 等价关系的商进行因子分解。

观察 6.12。由于 $R$具有有效下降的稳定商，条件 1 的箭头 $\langle F(\mathsf{p}_1)\ F(\mathsf{p}_2)\rangle$是其 $R$-核的商

$$R_{\langle F(\mathsf{p}_1), F(\mathsf{p}_2)\rangle \times \langle F(\mathsf{p}_1), F(\mathsf{p}_2)\rangle} \delta_{F(X) \times F(Y)}.$$

若 $\rho \in \mathsf{P}^s[X,X]$ 是一个 P-等价关系，并且我们用同一个 $\rho$ 表示 P($W$) 中的一个代表元，则 $f_W\rho \in \mathcal{D}es_{k_X}$，其中 $k_X$ 是 $R$-核 $\langle F(\mathsf{p}_1)\ F(\mathsf{p}_2)\rangle$，即

$$R_{\langle F(p_1),F(p_2)\rangle\times\langle F(p_1),F(p_2)\rangle}\delta_{F(X)\times F(X)}.$$

因此，得益于条件1 以及商是有效的并且具有有效下降这一假设，我们将滥用记号，写作 $f_W\rho \in R(F(X)\ \times F(X))$。

观察6.13. 由于（弱）等化子可以通过（弱）概括和全面对角线构造，[CV98，命题 27] 推出，左覆盖 1-态射（$F$，$f$）的函子 $F$ 是左覆盖函子。此外，[CV98，引理 21] 推出，$F$ 保持单态射族。然而，左覆盖函子的复合不一定是左覆盖的，[CV98，第 3 节中的一个反例3]对此作了说明。

我们用Lco(P $R$)表示从P到 $R$ 的左覆盖1-态射及它们之间的自然变换所构成的范畴。在下述定理中，我们以定理 6.10 的形式证明偏初等商完备化的泛性质。

定理6.14。设P 是一个具有完全弱概括和全面对角线的偏初等教义，且 $R$ 是 QD中的一个初等教义。与 1-态射 $(J,j)$ 的前复合在以下范畴之间诱导出一个等价

$$\boldsymbol{QD}(\overline{\mathsf{P}},R) \xrightarrow{\quad(-)\circ(J,j)\quad} \boldsymbol{Lco}(\mathsf{P},R).$$

证明。我们首先证明函子 $(-)\circ(J,j)$ 本质满。给定 Lco(P $R$) 中的一个 1-¯ ¯ ¯态射 $(F,f)$，我们可以如下定义一个 1-态射 $(F,f):\mathsf{P}\to R$。函子

_ _$F$将一个投射对象 $(X,\delta_{[X]})$ 映射到 $F$ 的像，即 $F(X,\delta_{[X]}) := F(X)$。对于¯形如 $(X,\rho)$ 的对象，像 $F(X,\rho)$ 定义为 $R$-等价关系 $f_W\rho$ 的商的余域，其中弱积为 $X\ \mathsf{p}\xleftarrow{1} W\ \mathsf{p}\xrightarrow{2} X$。类似地，若$\lfloor g\rceil:(X,\delta_X)\to(Y,\delta_Y)$ 是投射对象之间的箭头，则我们定义 $F(\lfloor g\rceil) := F(g)$。若$\lfloor g\rceil:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$，则我们将 $F(\lfloor g\rceil)$ 定义为由这些商诱导的唯一箭头，使下图交换。

$$\begin{array}{ccc} \bar{F}(X,\delta_X) & \xrightarrow{F(g)} & \bar{F}(Y,\delta_Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{F}(X,\rho) & \xrightarrow{\bar{F}(\lfloor g\rceil)} & \bar{F}(Y,\sigma). \end{array}$$

¯函子 $f_{(-)}:\mathsf{P}(-)\to R(F(-))$ 被定义为射影对象 $(X,\delta_{[X]})$ 上的函子 $f$。对于元素$(X,\rho)$，直接验证可知，函子 $f_X$ 限制为一个函子

$$\bar{f}_{(X,\rho)} := f_X : \mathcal{D}es\rho \to \mathcal{D}es f_W\rho.$$

由于商具有稳定性， $F$保有限积。现在证明 $(F, f)$ 将严格理解映到严格理解。事实上，如定理 6.6 的证明中所示， $\alpha \in P(X, \rho)$ 的一个严格理解由以下给出。

$$\lfloor \{\!|\alpha|\!\} \rceil : (C, \rho') \to (X, \rho)$$

其中 $\rho' := \mathsf{P}_h^s \rho$ 和 $h := [\{\!|\alpha|\!\}] \times [\{\!|\alpha|\!\}]$。由于 $R$ 具有严格理解，因此可知，概括 $\{\!|f_{(X,\rho)}(\alpha)|\!\} : D \to F(X, \rho)$ of $f_{(X,\rho)}(\alpha)$ 是一个单态射，故 $\delta_D = R_{\{\!|\bar{f}_{(X,\rho)}(\alpha)|\!\} \times \{\!|\bar{f}_{(X,\rho)}(\alpha)|\!\}}$ （见 [MR13，推论 4.8]）。定义 6.11 的条件 1 蕴含 $D$ 和 $F(C, \rho')$ 是同一个 $R$-等价关系的商

$$R_{F\{\!|\alpha|\!\} \times F\{\!|\alpha|\!\}} f_W \rho.$$

因此，我们已证明 $(F, f) \in \mathsf{QD}(\mathbb{P} R)$。现在证明函子 $(-) \circ (J, j)$ 是全忠实的。事实上，若 $(F, f)$ 和 $(G, g)$ 是 $\mathsf{Lco}(P, R)$ 的 1-态射，且 $\theta : (F, f) \Rightarrow (G, g)$ 是一个 2- 态射，那么它可以扩展为一个 2- 态射 $\theta : (F, f) \Rightarrow (G, \bar{g})$。射影对象上的态射 $\theta_{(X,\delta_X)}$ 定义为 $\theta_X$。对于形如 $\theta_{(X,\rho)}$ 的对象，该箭头定义为由商诱导的唯一箭头，使下图交换

$$\begin{array}{ccc} \bar{F}(X, \delta_X) & \xrightarrow{\theta_X} & \bar{G}(X, \delta_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{F}(X, \rho) & \dashrightarrow & \bar{G}(X, \rho). \end{array}$$

□

注 6.15。我们可以用另一种方式将商添加到偏初等教义 $\mathsf{P} : \mathscr{C}^{op} \to \mathsf{InfSL}$ 中。事实上，我们可以先进行严格化，再进行初等商完备化，从而得到初等教义 $\mathsf{P}^s : \mathscr{C}_s^{op} \to \mathsf{InfSL}$。然而，这种构造并不具备所期望的性质，例如上述讨论的泛性质。举例来说，以这种方式进行商完备化，将意味着 $\mathscr{C}_s$ 的投射对象多于 $\mathscr{C}$ 的对象。通过观察范畴 $\overline{\mathscr{C}^s}$ 中存在一族态射，可以得到关于严格化的偏初等商完备化的一个等价描述；我们将这族态射记作 $\Sigma$，它由形如以下形式的箭头组成

$$\lfloor \mathsf{p} \rceil : ([W], \mathsf{P}^s_{\mathsf{p} \times \mathsf{p}} \sigma) \to ([X_1, \ldots, X_n], \sigma) \tag{11}$$

其中，$_i : W \to X_i$ 对于 $1 \le i \le n$ 是一个弱积，而箭头 $\mathsf{p} : [W] \to [X_1, \ldots, X_n]$ 由 $\langle [\mathsf{p}_1], \ldots\ldots, [\mathsf{p}_1] \rangle$ 给出。态射类 $\Sigma$ 构成右分式演算；为了得到 $\mathscr{C}$，我们需要形式上将这一类取逆，见 [GZ 67]，，从而得到

$$\overline{\mathscr{C}} \cong \overline{\mathscr{C}^s}[\Sigma^{-1}].$$

此外，若 $\mathscr{C}$ 具有弱有限积的选择，则 $\overline{\mathscr{C}}$ 是$\mathscr{C}_s$的反射子范畴。事实上，存在一个伴随

$$[-] : \overline{\mathscr{C}} \longleftarrow\!\!\shortmid \overline{\mathscr{C}^s} : L$$

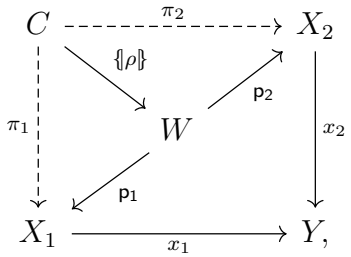
其中函子 $L([X_1, \ldots, X_n], \rho) := (W, \mathsf{P}^s_{\mathsf{p}\times\mathsf{p}}\rho)$，其中 $\mathsf{p}_i : W \to X_i$，对于 $1 \leq i \leq n$，是 $X_1, \ldots, X_n \in \mathscr{C}$ 的选定弱积。$L$ 对$\mathscr{C}_s$的态射的作用也类似地定义。

我们以关于切片教义的商完备化的一些观察结束本节。

对于弱左正合范畴 $\mathscr{C}$，很容易证明，对于每个对象$A \in \mathscr{C}$，其切片的精确完备化等价于其精确完备化的切片

$$(\mathscr{C}/A)_{ex} \cong \mathscr{C}_{ex}/(\Gamma A).$$

现在我们证明，对于偏置初等教义，商完备化与切片操作也彼此交换。为此，我们注意到，如果$\mathsf{P}: \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{InfSL}$是一个具有弱概括和全面对角线的偏置初等教义，那么对于任意两个态射 $x_i : X_i \to A, 1 \leq i \leq 2$，下面的交换图是一个弱拉回




(12)

其中 $X_1 \xleftarrow{\mathsf{p}^1} W \xrightarrow{\mathsf{p}^2} X_2$ 是一个弱积，而 $\{\!|\rho|\!\}$ 是元素 $\mathsf{P}^s_{[\mathsf{p}]}\rho \in \mathsf{P}(W)$ 的弱概括，其中 $\rho := \mathsf{P}^s_{[x_1]\times[x_2]}\delta_{[Y]}$。我们将用 $\{\!|\rho|\!\}_s$ 表示复合

$$[\mathsf{p}] \circ [\{\!|\rho|\!\}] : [C] \to [W] \to [X, X].$$

以下引理可由简单计算得出，另见 [Cio22，§3。6]。

引理6.16。设$\mathsf{P} : \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{InfSL}$ 是一种具有完全弱概括和全面对角线的偏斜存在初等教义。对于每个 $X \in \mathscr{C}$和 $\rho \in \mathsf{P}^s[X, X]$，以下结论成立：

- $\exists_{\{\!|\alpha|\!\}}\mathsf{P}_{\{\!|\alpha|\!\}}\beta = \alpha \wedge \gamma$，对于每个 $\alpha, \beta \in \mathsf{P}(X)$,
- $\exists_{\{\!|\rho|\!\}_s}\mathsf{P}_{s\,\{\!|\rho|\!\}_s}\,\gamma = \rho \wedge \gamma$，对于每个 $\gamma, \rho \in \mathsf{P}_s\,[X, X]$。
- $\mathsf{P}s_{\{\!|\rho|\!\}_s}\exists_{\{\!|\rho|\!\}_s}\beta = \beta$，对于每个 $\beta \in \mathit{Des}\,(\mathsf{P}s_{\{\!|\rho|\!\}_s\times\{\!|\rho|\!\}_s}\delta_{[X,X]})$

□

下述命题将切片教义的等价关系与底层教义联系起来。

命题 6.17。设 $\mathbf{P}: \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{InfSL}$ 是具有完全弱概括和全面对角线的偏斜存在初等教义。如果 $x: X \to A$ 是 $\mathscr{C}$的箭头，$\rho := \mathbf{P}^s_{[x]\times[x]}\delta_{[A]}$ 且 $\{\!|\rho|\!\}: C \to W$ 是一个弱概括，那么

(i) 若 $\sigma$ 是 $X$ 上的 $\mathbf{P}$-等价关系，且 $\sigma \leq \rho$，则 $\mathbf{P}^s{}_{\{\!|\rho|\!\}_s}\sigma$ 确定了 $x$ 上的 $\mathbf{P}_{/A}$-等价关系，且 $\mathcal{D}es(\sigma) = \mathcal{D}es(\mathbf{P}^s{}_{\{\!|\rho|\!\}_s}\sigma)$[1]，

(ii) 若 $r \in \mathbf{P}(C)$ 在 $x$ 上确定一个 $\mathbf{P}_{/A}$-等价关系，则 $\exists_{\{\!|\rho|\!\}_s} r$ 是 $X$ 上的 $\mathbf{P}$-等价关系，且 $\mathcal{D}es(r) = \mathcal{D}es(\exists_{\{\!|\rho|\!\}_s} r)$。

证明。$\mathbf{P}^s{}_{\{\!|\rho|\!\}_s}\sigma$的自反性、对称性和传递性，以及 $\exists_{\{\!|\rho|\!\}_s} r$的自反性、对称性和传递性，都可通过Beck-Chevalley 条件由 $\sigma$ 和 $r$的相应性质推出。在 $(i)$ 中，$\mathcal{D}es(\sigma) \subseteq \mathcal{D}es(\mathbf{P}^s_{\{\!|\rho|\!\}_s}\sigma)$ 是显然的。反向包含关系由引理6.16得出，将 $\exists_{\{\!|\rho|\!\}_s}$应用于$\mathbf{P}^s_{[\pi_1]}\alpha \wedge \mathbf{P}^s_{\{\!|\rho|\!\}_s}\sigma \leq \mathbf{P}^s_{[\pi_1]}\alpha$。在 $(ii)$ 中，$\mathcal{D}es(r) = \mathcal{D}es(\exists_{\{\!|\rho|\!\}_s} r)$ 是显然的。反向包含关系由注意到$\mathbf{P}^s{}_{\{\!|\rho|\!\}_s}{}^{\exists_{\{\!|\rho|\!\}_s} r = r}$ 以及 $\exists_{\{\!|\rho|\!\}_s} r \leq \rho$ 得出。 □

命题 6.18. 若 $\mathbf{P}: \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{InfSL}$ 是一个具有弱完全概括和全面对角线的存在偏斜初等教义，那么对于每个对象 $A \in \mathscr{C}$

$$\overline{\mathbf{P}_{/A}} \cong \overline{\mathbf{P}}_{/(A,\delta_{[A]})}.$$

证明. 根据引理 6.16 和命题 6.17，我们可以如下定义 QD 的一个 1-态射 $(M, m): \mathbf{P}_{/A} \to \mathbf{P}_{/(A,\delta_{[A]})}$。函子 $M$将 $\overline{\mathscr{C}/A}$ 中的对象 $(x, r)$（其中$x$: $X \to A$）映至对象

$$\lfloor x \rceil : (X, \exists_{\{\!|\rho|\!\}_s} r) \to (A, \delta_{[A]})$$

$\overline{\mathscr{C}}/(A, \delta_{[A]})$ 的对象，其中 $\rho := \mathbf{P}^s_{[x]\times[x]}\delta_{[A]}$。箭头 $f: (x, r) \to (y, s)$（其中 $y: Y \to A$）被映至 $\lfloor f \rceil : (X, \exists_{\{\!|\rho|\!\}_s} r) \to (Y, \exists_{\{\!|\sigma|\!\}_s} s)$，其中 $\sigma := \mathbf{P}^s_{[y]\times[y]}\delta_{[A]}$。自然变换$m$ 由恒等态射给出。

我们将$(N, n)$到$(M, m)$的逆定义如下。函子 $N$ 将$\overline{\mathscr{C}}/(A, \delta_{[A]})$中的对象$\lfloor x \rceil : (X, \lambda) \to (A, \delta_{[A]})$映射到对象

$$(x, \mathsf{P}_{\{\!|\rho|\!\}_s}\lambda)$$

其中 $\rho := \mathbf{P}^s_{[x]\times[x]}\delta_{[A]}$。一个箭头 $\lfloor f \rceil : \lfloor x \rceil \to \lfloor y \rceil$，其中 $\lfloor y \rceil : (Y, \sigma) \to (A, \delta_{[A]})$ 被映射到箭头 $f$。自然变换 $n$ 由恒等态射给出。

□

[1] $\mathcal{D}es(\mathbf{P}^s_{\{\!|\rho|\!\}_s}\sigma)$和$\mathcal{D}es(r)$在 $ii$ 中均相对于箭头 $\pi_i: C \to X$ 取值，如式(12)所示。

# 7 结语

（弱）左正合范畴 $\mathscr{C}$ 的精确完备化的性质已在文献中得到广泛研究，数项研究均有佐证，例如 [Men00；CR00；GV98；Emm20]。在这些研究中，作者刻画了其精确完备化具有广延性、（局部）笛卡尔闭性或为（拟）托扑斯的范畴。Maietti 和 Rosolini，以及后来的 Pasquali，通过初等商完备化推广了其中许多结果，详见 [Mai07；MPR21]。我们旨在利用偏初等教义对这些性质给出一般性表述。

例如，如前几节所述，采用偏置初等教义的主要优势之一在于它们在切片运算下的闭合性，参见例3.12。这一性质对于将有关精确完备化的局部笛卡尔闭的定理推广到初等商完备化的语境中尤其有用。Carboni和Rosolini 在 [CR00] 中证明，弱左正合范畴 $\mathscr{C}$ 的精确完备化具有局部笛卡尔闭性，当且仅当假设 $\mathscr{C}$中存在一种弱化的指数对象概念。然而，Emmenegger 指出，在 [Emm20] 中，当 $\mathscr{C}$ 具有弱有限积时，也可以改为假设一种不同的指数对象概念，在 [Emm20], 中称为外延的。

在初等教义的语境下，[MR13，《命题 6.7] 》给出了关于适当教义 P 的初等商完备化 $\mathrm{P}: \overline{\underline{\mathscr{C}}}^{op} \to \mathrm{InfSL}$ 的基范畴的笛卡尔闭性的首个结果。此外，[MPR21，《定理 7.14] 》和 [Cio22，《定理 2.3.7] 》给出了关于 $\overline{\mathscr{C}}$ 的局部笛卡尔闭性的两个结果，并且 [Cio22，《§2.4]》对二者进行了比较。然而，这些结果仅在基范畴 $\mathscr{C}$ 具有弱有限极限但具有严格有限积的情况下，推广了 [CR00; Emm20] 中的结果；而且，局部笛卡尔闭性是通过切片范畴中的繁琐计算得到的。为了获得充分推广这些结果、并将弱有限积纳入考量，有必要在偏置初等教义的语境下开展工作，正如 [Cio22，《§3]》的后半部分所示。

在适当条件下，若 $\mathrm{P}: \mathscr{C}^{op} \to \mathrm{InfSL}$ 是一个全局且存在的偏置初等教义，则切片教义继承这些性质，并成为全局且存在的教义，[Cio22，命题 3.6.6]。此外，正如命题 6.18 所证明的，切片与商运算可交换。

借助 [Emm20], ，我们将外延指数对象的概念推广到偏置初等教义，并证明了 [Emm20，定理 3.6] 在此背景下的一个推广版本，参见 [Cio22，定理 3.7.4]。因此，$\overline{\mathscr{C}}$ 的局部笛卡尔闭性可通过考察 $\mathscr{C}$ 的切片教义的笛卡尔闭性得到，参见 [Cio22，定理 3.7.5]。

# 参考文献

[Bis67] E. Bishop.《构造性分析基础》。麦格劳-希尔图书公司，纽约—多伦多，安大略省—伦敦，1967年。

[BC95] M. Bunge 和 A. Carboni：《对称托扑》。载于：《纯粹与应用代数杂志》105.3（1995），第 233–249 页。[CM82] A. Carboni 和 R. C. Magno：《左正合范畴上的自由正合范畴》。载于：《澳大利亚数学会杂志 A 辑》33.3（1982），第 295–301 页。[CR00] A. Carboni 和 G. Rosolini：《局部笛卡尔闭正合完备化》。载于：《纯粹与应用代数杂志》154.1-3（2000），第 103–116 页。[CV98] A. Carboni 和 E. M. Vitale：《正则完备化与正合完备化》。载于：《纯粹与应用代数杂志》125.1-3（1998），第 79–116 页。[Cio22] C. J. Cioffo：《同伦集合论与广义商完备化》。博士论文。米兰大学，2022年。[Cio+] C. J. Cioffo、J. Emmenegger、F. Pasquali 和 G. Rosolini：《构造性数学中的格罗滕迪克拓扑与弱极限》。（准备中）。[Emm20] J. Emmenegger：《正合完备化的局部笛卡尔闭性》。载于：《纯粹与应用代数杂志》224.11（2020），第 106414 页，25 页。[EPR20] J. Emmenegger、F. Pasquali 和 G. Rosolini：《作为余代数的初等教义》。载于：《纯粹与应用代数杂志》224.12（2020），第 106445 页，16 页。[GZ67] P. Gabriel 和 M. Zisman：《分式演算与同伦论》。数学及其边界领域成果，第 35 卷。施普林格纽约出版社，纽约，1967年，第 x+168 页。[GV98] M. Gran 和 E. M. Vitale：《同伦范畴的正合完备化》。载于：《拓扑学与微分几何笔记》39.4（1998），第 287–297 页。[Gra00] M. Grandis：《范畴的弱子对象与满单态完备化》。载于：《纯粹与应用代数杂志》154.1-3（2000），第 193–212 页。[HJ03] J. Hughes 和 B. Jacobs：《分解系统与纤维化：迈向纤维化伯克霍夫簇定理》。载于：《理论计算机科学电子札记》69（2003）。CTCS'02，范畴论与计算机科学，第 156–182 页。[Jac99] B. Jacobs：《范畴逻辑与类型论》。第 141 卷。逻辑与数学基础研究。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1999年。[Law69] F. W. Lawvere：《基础中的伴随性》。载于：Dialectica（1969），第 281–296 页。[Law70] F. W. Lawvere：《超教义中的相等与作为伴随函子的概括模式》。载于：《范畴代数的应用》（纯粹数学研讨会论文集，第 XVII 卷，纽约，1968年）。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1970年，第 1–14 页。

[Mai07] M. E. Maietti. «最小类型论上的商》。载于：现实世界中的计算与逻辑。第 4497 卷，《计算机科学讲义》。Springer，柏林，2007 年，第 517–531 页。[Mai09] M. E. Maietti. «构造性数学的极简双层基础》。载于：《纯数学与应用逻辑年刊》160.3（2009），第 319–354 页。[MPR21] M. E. Maietti、F. Pasquali 和 G. Rosolini. «拟拓扑斯作为初等商完备化》。载于：arXiv 预印本，arXiv:2111.15299（2021 年 11 月），arXiv:2111.15299。

arXiv: 2111.15299 [math.LO].[MR12] M. E. Maietti 和 G. Rosolini. «初等商完备化》。载于：《理论与应用范畴》27（2012），论文编号 17，第 463 页。[MR13] M. E. Maietti 和 G. Rosolini. «构造性数学基础的商完备化》。载于：《逻辑宇宙》7.3（2013），第 371–402 页。[MR15] M. E. Maietti 和 G. Rosolini. «统一精确完备化》。载于：《应用范畴结构》23.1（2015），第 43–52 页。[MS05] M. E. Maietti 和 G. Sambin. «迈向构造性数学的极简基础》。载于：《从集合与类型到拓扑与分析》。第 48 卷，《牛津逻辑指南》。牛津大学出版社，牛津，2005 年，第 91–114 页。[Men00] M. Menni. «精确完备化与拓扑斯》。博士论文。2000 年。[NPS90] B. Nordstr¨om、K. Petersson 和 J. M. Smith.《Martin-L ¨of 类型论编程》。克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，1990 年。[Pal04] E. Palmgren. «布劳威尔–海廷–柯尔莫戈罗夫解释的范畴版本》。载于：《数学结构与计算机科学》14.1（2004），第 57–72 页。[Pal05] E. Palmgren.《Bishop 的集合论》。TYPES 暑期学校讲座幻灯片。2005 年。[Pas15] F. Pasquali. «初等教义的共自由构造》。载于：《应用范畴结构》23.1（2015），第 29–41 页。[Vit94] E. M. Vitale. «左覆盖函子》。博士论文。鲁汶天主教大学，1994 年。