arXiv:2304.03072v1 [math.CV] 6 Apr 2023

RP-测度支集的必要条件

LINUS BERGQVIST

摘要。我们给出了一个集合 $\mathbb{T}^n$ 能包含某个非零 RP 测度的支集所必须满足的条件。除此之外，我们还证明，正 RP 测度的支集不可能包含于某些函数 $A(\mathbb{D}^n)$ 的半平面原像的反射集、线性测度为零的集合，以及在 $n = 2$ 时严格递增函数的图像中。对于 $n = 2$，我们还证明，若某集合不包含任何正 RP 测度的支集，则某个 $A(\mathbb{D}^2)$ 子空间中的函数在相关集合上的限制，在连续函数中一致稠密。

1. 背景与预备知识

在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的解析函数理论中，一个极为有用的事实是，$\mathbb{D}$ 上的每个调和函数都是某个解析函数的实部，而且每个非负调和函数都是 $\mathbb{T}$ 上某个正博雷尔测度的泊松积分（例如见 [7] 第 33–34 页的定理）。然而，在分析单位多圆盘 $\mathbb{D}^n$ 上的解析函数时，我们会遇到一个新的困难。尽管 $\mathbb{T}^n$ 上每个正博雷尔测度的泊松积分都是非负的 n-调和函数，但并非每个 n-调和函数都是 $\mathbb{D}^n$ 上某个解析函数的实部。这里，μ 的泊松积分定义为

$$P[d\mu](z) := \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-|z_j|^2)}{|\zeta_j - z_j|^2} d\mu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}^n.$$

我们用 $M(\mathbb{T}^n)$ 表示 $\mathbb{T}^n$ 上有界变差的复博雷尔测度集合，并用 $RP(\mathbb{T}^n)$ 表示 $M(\mathbb{T}^n)$ 中其泊松积分是 $\mathbb{D}^n$ 上解析函数实部的实测度集合。我们将这类测度称为 ***RP*-测度**，因为我们将大量使用书籍 [10] 中的结果，该书采用了这一术语。但请注意，许多作者则将这类测度称为 多调和测度。

在许多方面，$RP(\mathbb{T}^n)$ 对于 $n > 1$ 而言仍未得到充分理解。除此之外，它在某些我们希望它具有不变性的操作下并不保持不变：例如，若 $\mu \in RP(\mathbb{T}^n)$ 和 $f \in L^1(d\mu)$，那么 $f(z)d\mu$ 通常不会是 RP 测度，而且何时会是 RP 测度也并不清楚。尽管已有一些努力，

2010 数学主题分类。 28A25，28A35（主要）；32A10（次要）。关键词和短语。RP-测度，多圆盘，实部为正的解析函数。

例如， [9]， $RP(\mathbb{T}^n)$ 的极点尚未得到完整刻画。此外，RP 测度的支集在某些方面受到限制，但这些限制尚未完全理解。最近， [8] 得到了一些关于 RP 测度支集的必要条件。其中，作者证明，对于 $n \geq 2$，若正RP测度 μ 的支集不相交<lemma>

$$\bigcup_{j=1}^{n} \{z \in [0, 2\pi)^n : \alpha_j < z_j < \beta_j\}$$

对于常数 $0 \leq \alpha_j < \beta_j < 2\pi$ 的任意 选择，对于 $j = 1$，.....， n，则 $\mu \equiv 0$ （参见 [8] 的推论 4。7）。此处 $\mathbb{T}^n$ 已被认定为 $[0, 2\pi)^n$。

本文将继续研究哪些子集不能包含任何非零 RP 测度的支集。我们主要但并非 exclusively关注正 RP-测度。正 RP 测度恰好是与正调和函数相对应的测度，而这类测度自然地出现在许多不同的语境中。例如，Doubtsov 最近开始研究*Clark*测度 在 $\mathbb{T}^n$ 中 [4], ，而所有此类测度都是正 RP测度。关于 Clark测度的进一步结果，另见 [2] 和 [1], ；在这些文献中，还研究了与有理内函数对应的 $\mathbb{T}^2$ 上的 Clark测度的支集等性质。

我们先介绍一些记号和预备知识。设 X 是 $C(\mathbb{T}^n)$ 的一个子空间，并赋予上确界范数。若测度 $\mu \in M(\mathbb{T}^n)$ 满足下述条件，则称其为 X 的消去测度：

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(z) d\mu(z) = 0$$

对所有 $f \in X$ 均成立。 X 的所有消去测度的集合记为 $X^{\perp}$。我们主要关注以下情形： X 是多圆盘代数 $A(\mathbb{D}^n)$（或者在维数由上下文明确时简写为 A ），或是形如 $z_1 z_2 \cdots z_n f(z)$ 的函数空间，其中 $f(z) \in A(\mathbb{D}^n)$。形如 $z_1 z_2 \cdots z_n f(z)$ 的函数空间，其中 $f(z) \in A(\mathbb{D}^n)$，将记为 $A_{\vec{0}}(\mathbb{D}^n)$，或简写为 $A_{\vec{0}}$。

若 S 是 $\mathbb{T}^n$ 的一个紧子集，则记 $X|_S$ 为 $C(S)$ 的子空间，它由所有函数 $f \in X$ 在 S 上的限制构成。也就是说：

$$X|_S = \{f|_S : f \in X\}.$$

全文中我们将使用以下事实： $\mathbb{T}^n$ 上的每个有限博雷尔测度都是拉东测度；并且，若 μ 是紧子集 $S \subset \mathbb{T}^n$上的拉东测度，则在 S 上赋予上确界范数的连续函数空间（记作 $C(S)$）在 $L^p(\mu)$中稠密，其中$1 \leq p < \infty$。更多细节请参见 [5] 中的定理 7.8. 和命题 7.9. 。

最后，我们将大量运用 [10] 中的定理 6.1.2. 。该定理描述了 $\mathbb{T}^n$ 的紧子集可能具有的五种不同性质，并指出，一个紧子集具有其中一种性质，当且仅当它具有其余所有性质。我们

尤其会用到这样一个结论：紧子集 $S \subset \mathbb{T}^n$ 是 A 的湮灭子的零测集，也就是说，对于每个复测度 $\mu \in A^\perp$， $|\mu|(S) = 0$，当且仅当它是 A 的插值集。紧子集 S 是 A 的插值集，意味着对于 S 上的每个连续函数 f，都存在一个函数 $g \in A$，使得 $g|_S = f$。特别地，我们还将用到：将 A 替换为 $A_{\vec{0}}$ 后，同一等价关系仍然成立。由于这一结论将被多次使用，我们将其表述为一个定理。

定理1。设 S 是 $\mathbb{T}^n$的紧子集。则 S 是 A 的插值集，当且仅当它是 $A_{\vec{0}}$的插值集，并且它是 $A_{\vec{0}}^\perp$ 的零测集，当且仅当它是 $A^\perp$的零测集。

因此， S 具有如下性质：对于每个连续函数 $f \in C(S)$，都存在一个函数 $g \in A_{\vec{0}}$，使得当且仅当 S 是$A_{\vec{0}}^\perp$的一个零测集时， $g|_S = f$。

证明。我们首先证明， S 是 A 的插值集，当且仅当它是 $A_{\vec{0}}$的插值集。显然， $A_{\vec{0}}$ 的插值集是 A 的插值集，因为 $A_{\vec{0}} \subset A$；反之，如果 S 是 A的插值集，那么对于每个 $f \in C(S)$，存在一个函数 $g \in A$，使得$g|_S = \overline{z_1} \cdots \overline{z_n} f(z)$，从而 $z_1 \cdots z_n g(z) \in A_{\vec{0}}$，并且$(z_1 \cdots z_n g(z))|_S = f(z)$。

其次，对于 A 的所有湮灭子， S 是零测集，当且仅当对于 $A_{\vec{0}}$ 的所有湮灭子， S 是零测集。利用这一点。

$$\int_{\mathbb{T}^2} z_1 \cdots z_n f(z) d\mu(z) = \int_{\mathbb{T}^2} f(z)(z_1 \cdots z_n d\mu(z))$$

对于每个 $f(z) \in A$，我们看到， μ 是 $A_{\vec{0}}$ 的消去测度，当且仅当 $(z_1 \cdots z_n)d\mu(z)$ 是 A 的消去测度。由于 $|z_1 \cdots z_n| = 1$在 $\mathbb{T}^n$上，这些测度具有相同的零测集，因此，对于 A 的所有湮灭子而言， S 是零测集，当且仅当它对于 $A_{\vec{0}}$的所有湮灭子而言也是零测集。

这两个性质的等价性现可由定理 6 得出。1。2。 in
[10] □

定理 6.1.2. 在 [10] 中的五个性质之一是， $S \subset \mathbb{T}^n$ 是 A 的零点集。然而，在该语境中，零点集是指函数 $f \in A$ 在其上处处为零的集合 S，但 f 在 $\overline{\mathbb{D}}^n \setminus S$ 中非零。在下一节中，我们将考虑函数 $f \in A_{\vec{0}}$ 的水平集，但不会对 f 在 $\mathbb{T}^n$ 之外作任何假设。

2. RP-测度支集上的必要条件

本节将建立 RP 测度与 $A_{\vec{0}}$ 的湮灭子之间的对应关系，并通过以下方式找出后一类可能支集集合的必要条件：(1) 利用与函数 $f \in A_{\vec{0}}$ 对应的某些集合不可能支撑湮灭 f 的测度这一事实；(2) 应用关于多圆盘代数的湮灭子的已知结果，这些结果见

[10]。这将使我们能够找出 RP 测度支集集合的必要条件。

下面这个简单的引理对 $A_{\vec{0}}^{\perp}$ 中正测度的支集施加了一个必要条件，并为我们后续的结果提供了思路。

引理 1. 非零正测度 $\mu \in A_{\vec{0}}^{\perp}$ 的支集不能包含在任意函数 $f \in A_{\vec{0}}$ 的任意 $\alpha \neq 0$ 所对应的水平集中。

证明。 如果 $\mu \in A_{\vec{0}}^{\perp}$ 是非零正测度且 $\text{supp}(\mu) \subset \{z \in \mathbb{T}^n : f(z) = \alpha\}$，则

$$0 = \int_{\mathbb{T}^n} f(z) d\mu(z) = \int_{\{z \in \mathbb{T}^n : f(z) = \alpha\}} f(z) d\mu(z) = \alpha \mu(\mathbb{T}^n) \neq 0,$$

这与关于 μ 的假设相矛盾。 □

我们将证明，通过一个简单的变换，可以将任意给定的RP测度映射为 $A_{\vec{0}}^{\perp}$ 中的一个实测度，同时保持正性，并且该变换对支集的影响也易于理解。因此，可以利用上述引理来获得关于正 RP 测度的支集的必要条件。

根据定理 2.4.1. ，在 [10], 中，实测度 μ 是 RP 测度，当且仅当其所有混合傅里叶系数均为零。也就是说， μ 是 RP 测度，当且仅当

$$\int_{\mathbb{T}^n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} d\mu(z) = 0$$

除非所有 $k_j \in \mathbb{Z}$ 都满足 $k_j \geq 0$（对于 $j = 1, \ldots, n$），或满足 $k_j \leq 0$（对于 $j = 1, \ldots n$）。

注意，对于实测度 μ

$$\int_{\mathbb{T}^n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} d\mu(z) = 0 \iff \int_{\mathbb{T}^n} z_1^{-k_1} \cdots z_n^{-k_n} d\mu(z) = 0.$$

特别地，实测度 $\mu \in M(\mathbb{T}^2)$ 是 RP 测度，当且仅当

$$\int_{\mathbb{T}^2} z_1^n \overline{z_2}^m d\mu(z_1, z_2) = 0$$

对于所有 $m, n \geq 1$。

通过进行变量替换 T: $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1, \ldots, z_{n-1}, \overline{z_n})$，我们看到，如果 μ 是 RP 测度，那么推前测度 $T_*(\mu)$ 定义为

$$T_*(\mu)(S) := \mu(T^{-1}(S))$$

对于每个博雷尔集 S，都有如下性质:

$$\int_{\mathbb{T}^n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} dT_*(\mu)(z) = \int_{\mathbb{T}^n} z_1^{k_1} \cdots z_{n-1}^{k_{n-1}} \overline{z_n}^{k_n} d\mu(z) = 0$$

对于所有 $k_j \geq 1, \ j = 1 \ldots n$。

由于 T 是 $\mathbb{T}^n$ 上的双射，且 $T^2 = \text{Id}$（因此 $T = T^{-1}$），这意味着如果 μ 是 RP 测度，那么 $T_*(\mu)$ 是一个实测度，它消灭所有单项式 $z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$，其中 $k_j \geq 1$，对于 $j = 1, \ \ldots n$。由 $T_*(\mu)$ 作为线性映射的连续性，

在 $C(\mathbb{T}^n)$ 上的泛函，这意味着 $T_*(\mu)$ 消去所有满足 $f(k_1,\ldots,k_n) = 0$ 的 $f \in C(\mathbb{T}^n)$，其中 $k_j < 1$ 对于某个 $j = 1\ldots,n$ 成立。这恰好是所有形如 $z_1\cdots z_n f(z)$ 的函数所构成的空间，其中 $f \in A(\mathbb{D}^n)$，即 $A_{\vec{0}}$。

注。 如果 $n = 2$ 上述蕴含实际上都是等价关系，那么在这种情况下， μ 是一个 RP 测度，当且仅当 $T_*(\mu)$ 是 $A_{\vec{0}}^{\perp}$中的实测度。

这意味着，如果 $A_{\vec{0}}^{\perp}$中不存在支集包含于 $S \subset \mathbb{T}^n$的实测度，那么就不存在支集包含于 $T^{-1}(S)$ 的 RP 测度。如果 μ 是正 RP 测度，那么 $T_*(\mu)$ 也为正，因此，如果我们将关注范围限制在正测度上，相应的陈述同样成立。如果 S 是 $A_{\vec{0}}^{\perp}$中所有实测度的零测集，那么 $T^{-1}(S)$ 就是所有 RP-测度的零测集。最后请注意，如果 $n = 2$，那么所有这些蕴含关系都成为等价关系。我们将其表述为一个引理。

引理 2。 如果一个紧子集 $S \subset \mathbb{T}^n$ 具有这样的性质： $A_{\vec{0}}^{\perp}$ 中不存在支集包含于 S的非零实测度（正测度），那么就不存在支集包含于 T^{-1}（S）的非零 *RP*-测度（正*RP*测度）。

此外，如果一个紧子集 $S \subset \mathbb{T}^n$ 满足：对所有实数（正） $\mu \in A_{\vec{0}}$，均有 $\mu(S) = 0$，那么对所有（正）$\nu \in RP$，均有 $\nu(T^{-1}(S)) = 0$ 。

如果 $n = 2$ 上述蕴含关系是等价关系。

对于 $n = 2$ ，因此可以通过理解 $A_{\vec{0}}(\mathbb{D}^2)$ 中实测度的相应集合，完全理解 RP-测度的支集和零测集。对于更大的 n，一个测度 μ 要成为RP-测度，比 $T_*(\mu)$ 湮灭 $A_{\vec{0}}$要困难得多。然而，引理 2仍可用于寻找必要的 条件。

如果 μ 是一个正的 RP测度，那么根据引理 1， $T_*(\mu)$ 的支集不可能包含于任何形如

$$\{z \in \mathbb{T}^n : f(z) = \alpha\},$$

对于任意 $f \in A_{\vec{0}}$ 和 $\alpha \neq 0$，因此由引理 2， μ 的支集不能包含于此类集合在 T^{-1} 下的像中。

然而，注意到，为了使引理 1 的证明成立，包含 μ 支集的集合 S 唯一需要满足的性质是：某个适当的 $f \in A_{\vec{0}}$ 在该集合上的值域使得积分

$$\int_S f(z)d\mu(z)$$

不能为零，因此我们可以将上述结果扩展到一大类集合。正如即将证明的，任何被 f 映射到某个闭半平面中的集合

$$H_\epsilon^\theta := \{e^{i\theta}z \subset \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geq \epsilon\},$$

当 $\epsilon > 0$ 和 $\theta \in [0, 2\pi)$ 时，就会具有这一性质。这本质上是因为，根据假设， f 的值域是一个不包含原点的凸集的子集。

注意， H_ϵ^θ 是具有以下性质的 $\mathbb{C}$ 最大闭凸子集： $\epsilon e^{i\theta}$ 是该子集中距离原点最近的唯一元素：如果我们向集合中添加 H_ϵ^θ 之外的任何其他元素，那么凸性将意味着连接 $\epsilon e^{i\theta}$ 与这个新点的线段也位于该集合中，而这条线段上将包含距离原点更近的点。

下面这个初等引理阐明了上述观点，并将用于给出 RP-测度支集的必要条件。

引理 3。设 $f \in C(\mathbb{T}^n)$ ，且设 μ 是$M(\mathbb{T}^n)$中的非零正测度，使得 $supp(\mu) \subset f^{-1}(H_\epsilon^\theta)$。那么

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(z)d\mu(z) \neq 0. \tag{1}$$

证明。如有必要，通过设置 $g(z) = f(z)e^{-i\theta}$ ，我们不妨假设 $\theta = 0$。

我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{T}^n} f(z)d\mu(z)\right) &= \mathrm{Re}\left(\int_{f^{-1}(H_\epsilon^0)} f(z)d\mu(z)\right) \\ &= \int_{f^{-1}(H_\epsilon^0)} \mathrm{Re}(f(z))d\mu(z) \geq \epsilon\mu(\mathbb{T}^n) > 0,\end{aligned}$$

因此，(1) 左侧的积分不为 0。 □

现在我们可以证明本节的主要引理了。

引理 4. $A_{\vec{0}}^\perp$ 中的非零正测度不可能具有包含于 $f^{-1}(H_\epsilon^\theta)$ 的支集，其中 $f \in A_{\vec{0}}$、常数 $\epsilon > 0$ 和角度 $\theta \in [0, 2\pi$ 可任意选择)。

证明。 反设存在一个非零正测度$\mu \in M(\mathbb{T}^n)$，它消去 $A_{\vec{0}}$中的所有函数，但对于某个 $f \in A_{\vec{0}}$、常数 $\epsilon > 0$和角度 $\theta \in [0, 2\pi)$，有 $\mathrm{supp}(\mu) \subset f^{-1}(H_\epsilon^\theta)$。于是由引理 3

$$\int f(z)d\mu(z) \neq 0,$$

这与 μ 消去 $A_{\vec{0}}$ 的假设相矛盾。 □

结合引理 4 和引理 2，我们得到以下定理。

定理 2. 不存在支集包含于

$$T^{-1}(\{z : f(z) \in H_\epsilon^\theta\}) = \{(z_1, \ldots, z_{n-1}, \overline{z_n}) : f(z_1, \ldots, z_n) \in H_\epsilon^\theta\}$$

对于任意选择的 $f \in A_{\vec{0}}$、常数 $\epsilon > 0$ 和角度 $\theta \in [0, 2\pi)$。

注意，上述定理也排除了包含于 $T^{-1}(S)$中的支集，其中 S 是对应于任意 $\alpha \neq 0$ 的函数 $f \in A_{\vec{0}}$ 的水平集。

处理 $\mathbb{T}^n$ 的具体子集时，通常用覆盖映射 $\Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{T}^n$ （由$\Phi(x_1,\ldots, x_n) = (e^{ix_1},\ldots, e^{ix_n})$ 给出）来描述这些集合会更加方便。例如，研究形如 $\Phi(f(t)\ g(t))$ 且 $t \in \mathbb{R}$ 的子集时，我们可以使用正斜率、负斜率等术语。

例 1. 设 $n = 2$。每个形如 $f_{n,m}(z) = z_1^n z_2^m, n, m \geq 1$ 的函数都属于 $A_{\vec{0}}$，且 $f_{n,m} : \mathbb{T}^2 \mapsto \mathbb{T}$。将 ϵ 取得足够小，则每个形如 $\{e^{i\omega} : \omega \in [\theta - w, \theta + w]\} \subset \mathbb{C}$ 的集合，只要 $0 \leq w < \pi/2$，就包含于某个 H_ϵ^θ 中。因此，没有非零正RP测度的支集包含于该集合

$$S_{m,n} := \left\{\Phi(v_1, -v_2) : e^{i(nv_1+mv_2)} = e^{i\omega}, \omega \in [\theta - w, \theta + w]\right\} \subset \mathbb{T}^2$$

对于 $0 \leq w < \pi/2, \theta \in [0, 2\pi)$ 的任意选择，以及 $n, m \geq 1$。

特别地，通过令 $m = 1$，我们可知没有正RP测度的支集包含于该集合中

$$\{\Phi(v_1, nv_1 - \omega) : v_1 \in [0, 2\pi), \omega \in [\theta - w, \theta + w]\}$$

对于任意 $0 \leq w < \pi/2, \theta \in [0, 2\pi)$，以及 $n \geq 1$。

对于 $n = 2$，上述示例已经排除了正 RP测度支集于大量具有严格正斜率的曲线上的可能性。事实上，利用 [10], 第6章的结果，我们可以证明，没有 RP 测度能够支集于具有严格正斜率的曲线上。为此，我们需要以下引理，该引理是结合 [10]中的定理 6.3.5. 以及定理 6.1.2. 所得的。

引理5。令 $F \subset \mathbb{R}^2$ 为定义域为 $\mathbb{R}$ 的严格递减函数 ψ 的图，并令 $K \subset \mathbb{T}^2$ 为 $\Phi(F)$ 的紧子集。则 K 是 $A(\mathbb{D}^2)$ 的插值集。

注意，甚至没有假设 ψ 连续。

定理3。如果 F 是严格递增函数 ψ的图像，那么每个紧子集 $K \subset \Phi(F)$ 对于 $RP(\mathbb{T}^2)$都是零测集。

特别地，没有任何非零 *RP* 测度的支集包含在 $\Phi(F) \subset \mathbb{T}^2$中，其中 F 是严格递增函数 ψ 的图。

证明。结合引理5和定理 1 可知， $T(K)$ 对于 $A_{\vec{0}}^\perp$ 是一个零测集。该定理现由引理 2 得证。□

显然，对于具有正斜率的函数，一般而言不可能成立与引理5相对应的结果，因为如果情况确实如此，定理3就可能是

也扩展到严格递减函数。但这是不可能的，因为，例如，勒贝格测度在

$$\Phi(\{(v,-v) : v \in [0,2\pi)\}) = \Phi[T(\{(v,v) : v \in [0,2\pi)\})]$$

是一个 RP 测度。事实上，通过结合 [10] 的定理 6。3。4。 和 6。1。2。 ，可以看出引理5 对于 每个 严格递增函数 ψ 都不成立，只要该函数能延拓为在其定义区间 $\mathbb{R}$ 的某个邻域内的全纯函数。这涵盖了上面的例子，因为 $f(v) = v$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增，并且可以延拓为全纯函数。

迄今为止所建立的结果和例子表明，对于一个“较小”的集合——例如有限个点的集合——通常很难支撑任何正RP测度，因为一个较小的集合会被包含在 $f^{-1}(H_\epsilon^\theta)$中，其中 $f \in A_{\vec{0}}$、常数 $\epsilon > 0$ 和角度 $\theta \in [0, 2\pi)$可以作某种选择。然而，例如，对于支集位于直线 $\Phi(\{(v,-v)\colon v \in [0,2\pi)\}$ 的某个类似康托尔的子集上的RP-测度，目前还不清楚是否不存在，因为后一个集合确实支撑正 RP 测度。注意， [8]中的推论4.7 也没有排除这个集合。

然而，利用 [10] 第 6 章中的结果，我们可以证明，任何线性测度为零的集合——即豪斯多夫维数严格小于 1 的集合——都不能支撑任何 RP 测度（无论是否为正）。回忆一下，如果对每个 $\epsilon > 0$ ，都存在 F 的一个开覆盖$\{V_j\}$，使得这些集合 V_j 的直径之和小于ϵ，则称集合 $F \subset \mathbb{R}^n$具有线性测度零。

结合 [10] 中的定理 6。1。2。 以及第 149 页的推论，我们得到以下引理。

引理 6。 如果 $K \subset \mathbb{T}^n$ 是一个线性测度为零的紧集，那么 K 是 A的插值集。

将这一引理与我们先前的结果结合起来，可以证明如下结论。

定理 4。 如果 $K \subset \mathbb{T}^n$ 是一个线性测度为零的紧子集，那么 K是 RP（$\mathbb{T}^n$）的零测集

特别地， $\mathbb{T}^n$ 上的非零*RP*测度的支集具有零线性测度，或者等价地，非零 *RP* 测度的支集的豪斯多夫维数大于或等于一。

证明。如果 K 具有零测度，那么 $T(K)$ 也具有零测度。因此，结合引理6和定理1可知， $T(K)$对于 $A_{\vec{0}}^{\perp}$ 是一个零测集。定理现由引理 2 得证。 □

这推广了注4.3. 在 [8] 中，其中指出，对于 RP-测度，所有点的质量都必须为零。

对于 $n = 2$ 上述定理是精确的，因为存在支集位于曲线上的RP测度，即支集位于豪斯多夫维数为 1 的集合上的 RP测度。人们可能会问，RP 测度的支集维数是否事实上至少为 $n - 1$。

3. 与 $A_{\vec{0}}$ 的插值相关的结果

由引理 4 可知，任何消去 $A_{\vec{0}}$ 的正测度，其支集都不可能包含于 $\{z \in \mathbb{T}^2 : f(z) = 1\}$，对任意 $f \in A_{\vec{0}}$ 均如此。本节将探讨逆命题在多大程度上成立。

这个问题与 [3] 中的 Bishop 定理（定理 6。1。3。 见[10]）有关。由该定理可知，若 S 在 $A_{\vec{0}}^{\perp}$ 中不仅不支持任何正测度，而且还具有更强的性质：对于 $A_{\vec{0}}^{\perp}$ 中的每个复 测度，均有 $|\mu|(S) = 0$，那么 S 就是 $A_{\vec{0}}$ 的插值集（事实上， S 甚至具有更强的性质，即它是一个峰值插值集，详情见 [10] 的定义 6。1。1。 ）。显然，在这种情况下，必存在某个函数 $f \in A_{\vec{0}}$ 使得 $f|_S = 1$，因此 S 包含于 $A_{\vec{0}}$ 中某个函数的水平集中。

通过采用受 Helson 和 Lowdenslager（见 [6]）启发的方法，我们可以证明该陈述的部分逆命题：如果紧集 $S \subset \mathbb{T}^2$ 具有这样的性质： $A_{\vec{0}}^{\perp}$ 中没有任何正测度的支集包含于 S，那么对于每个 支集包含于 S 的正博雷尔测度 μ，1 都属于 $A_{\vec{0}}$ 在 $d\mu$ 中的 L^2闭包。但我们还可以更进一步。事实证明，如果 $A_{\vec{0}}^{\perp}$ 中没有任何正测度的支集包含于 S，那么 $A_{\vec{0}}|_S$ 在 S 中一致稠密于 C。

为了使用更简单的记号，我们在本节中只研究 $n = 2$ 情况。不过需要注意的是，除了最后一个定理——该定理要求在引理 2 中具有等价性——之外，所有结果都不要求 $n = 2$。

以下引理的灵感来自 [7] 第 4 章中对 Helson 和 Lowdenslager 思想的阐述，且与之相似。

引理 7。 设 $S \subset \mathbb{T}^2$ 为一个紧子集，具有如下性质：在 $A_{\vec{0}}^{\perp}$ 中没有支集包含于 S的非零正博雷尔测度。则 $L^2(d\mu)$ 由 $A_{\vec{0}}$ 张成的闭子空间，等于对于每个支集包含于 S 的正博雷尔测度 μ ，由 A 张成的闭子空间。

证明。 记 B 为由$A_{\vec{0}}$ 中的函数张成的 $L^2(d\mu)$ 的闭子空间。显然，由于 $A_{\vec{0}} \subset A$， B 包含于由 A 中的函数张成的 $L^2(d\mu)$的闭子空间中。我们将证明另一个包含关系，从而证明该定理：证明若形如 z_j^n 的任意函数不包含于 B 中，其中 $n \geq 0$ 且 $j = 1$，2，那么存在一个支集在S 上且湮灭 $A_{\vec{0}}$ 的实测度。这一矛盾表明，一致稠密

A 的子空间包含于 B，因此 A 的闭包也包含于 B。

将 z_j^n 在 B 上的正交投影记为 F。根据 F 的定义性质，表达式 $z_j^n - F \neq 0$ 与 B 正交，因而也与 $A_{\vec{0}}$ 正交。

事实上，$z_j^n - F$与所有形如 $f \cdot (z_j^n - F)$的函数都正交，其中$f \in A_{\vec{0}}$。为说明这一点，注意到存在一个函数序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $f_n \to F$ 在 $L^2(d\mu)$中，使得对于$f \in A_{\vec{0}}$的每个固定选择，$f \cdot (z_j^n - f_n) \in A_{\vec{0}}$，并且 $f \cdot (z_j^n - f_n) \to f \cdot (z_j^n - F)$。该结论现在由 μ 作为 $C(S)$上的线性泛函的连续性得出。

这意味着，对于每个 $f \in A_{\vec{0}}$，$z_j^n - F$ 都与 $f \cdot (z_j^n - F)$ 正交。

$$\int_{\mathbb{T}^2} f|z_j^n - F|^2 d\mu = 0$$

对所有 $f \in A_{\vec{0}}$。但这意味着 $|z_j^n - F|^2 d\mu$ 是一个支集包含于 S 且湮灭 $A_{\vec{0}}$ 的实测度。这与关于 S 的假设相矛盾。□

注。上述引理是尖锐的，其含义是：如果 S 是一个支集为某个测度 μ 的集合，并且某个函数 $f \in A \setminus A_{\vec{0}}$ 不属于 $L^2(d\mu)$闭包 $A_{\vec{0}}$，那么按照上述相同的论证，$|f - F|^2 d\mu$ 将湮灭 $A_{\vec{0}}$，支集包含于 S，并且根据假设，它不是零测度。

因此，对于这类集合，可以使用上述构造生成非零正测度 $A_{\vec{0}}^{\perp}$，其支集包含于 S；从而对于$n = 2$，可以使用它生成非零正 RP 测度，其支集包含于 $T^{-1}(S)$。

引理8.令 $S \subset \mathbb{T}^2$ 为一个紧子集，具有如下性质：$A_{\vec{0}}^{\perp}$ 中不存在支集包含于 S 中的非零正博雷尔测度。因此，$A_{\vec{0}}$ 是 $L^2(d\mu)$ 的稠密子空间，对于每个支集包含于 S 中的正测度 μ。

证明。记 B 为 $L^2(d\mu)$ 中由 $A_{\vec{0}}$ 中的函数张成的闭子空间。我们将证明 $B = L^2(d\mu)$，方法是证明 B 包含 $z_1^{\alpha} z_2^{\beta}$，对于所有 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$。这将通过应用引理 (7) 和归纳法完成。

现在定义这些空间。

$$S_k := \{f \in C(\mathbb{T}^2) : \hat{f}(n, m) = 0 \text{ if } n < k \text{ or } m < k\}.$$

注意到 $S_1 = A_{\vec{0}}$。根据引理(7)，我们有 $S_0 \subset B$。现在假设 S_k 包含于某个整数 $k \leq 0$ 下由 S_{k+1}中的函数张成的闭子空间中。由于对于 $\mathbb{T}^2$ 上的每个博雷尔测度 μ，单项式乘法在 $L^2(d\mu)$ 上是等距映射，因此，对于每一种选择的

$\alpha, \beta \geq k$, 那个

$$\inf_{f\in S_k}\int_{\mathbb{T}^2}|z_1^{\alpha-1}z_2^{\beta-1}-f(z)|^2d\mu=\inf_{f\in S_k}\int_{\mathbb{T}^2}|z_1^{\alpha}z_2^{\beta}-z_1z_2f(z)|^2d\mu$$
$$=\inf_{\tilde{f}\in S_{k+1}}\int_{\mathbb{T}^2}|z_1^{\alpha}z_2^{\beta}-\tilde{f}(z)|^2d\mu=0,$$

其中，最后一个等式由归纳法假设成立。由此可知，S_{k-1} 包含于由 S_k中的函数张成的闭子空间中，因此根据归纳法，所有形如 $z_1^{\alpha}z_2^{\beta}$ 且满足 $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ 的函数都包含于 B中。于是，根据斯通-魏尔施特拉斯定理， $C(S)\subset B$ 。由于 μ是拉东测度，我们有 $C(S)$在 $L^2(d\mu)$中稠密，因此也可推出 $L^2(d\mu)\subset B$，从而完成证明。□

注。如果我们假设 S 具有更强的性质，即不支撑任何消去 $A_{\vec{0}}$ 的复测度，那么使用引理 7 证明中的相同思路，就能容易得多地推出上述结果。在这种情况下，只需任取 $f\in C(S)$，令 F 表示将 f 投影到 B 上的 $L^2(d\mu)$ 投影，然后注意到测度 $(f-F)d\mu$ 消去 $A_{\vec{0}}$；除非该测度为 0，否则这与关于 S 的假设矛盾。因此，困难在于如何在 $A_{\vec{0}}^{\perp}$ 中得到一个正测度。

事实上，根据Hahn-Banach定理，我们立即看到，如果每个在 S 上湮灭 $A_{\vec{0}}$的复测度也湮灭 $C(S)$，那么 $A_{\vec{0}}|_S$ 在 $C(S)$ 中一致稠密；因为如果它不是稠密的，那么在 $C(S)$ 上应存在一个非平凡的有界线性泛函——也就是说，一个支集包含于 S 中且湮灭 $A_{\vec{0}}|_S$ 的复测度。

这一思想将用于证明本节的主要定理。

定理 5。设 $S\subset\mathbb{T}^2$ 是一个紧子集，具有如下性质：不存在支集包含于 S 且湮灭 $A_{\vec{0}}$ 的非零正博雷尔测度。则 $A_{\vec{0}}$ 中函数在 S 上的限制构成 $C(S)$ 的一个一致稠密子空间。

证明。我们首先证明，在 $A_{\vec{0}}^{\perp}$ 中唯一支集包含于 S 的复测度是零测度。

设 μ 是 $A_{\vec{0}}^{\perp}$ 中的任意复测度。那么根据拉东-尼科迪姆定理， $d\mu(z)=U(z)d|\mu|$，对于某个可测函数 $U(z)$，且 $|U|=1$ 处处成立。因此

$$0=\int_S f(z)d\mu(z)=\int_S f(z)U(z)d|\mu|(z)$$

对所有 $f(z)\in A_{\vec{0}}$，因此 $\overline{U}$ 与 $A_{\vec{0}}$ 正交。

由于全变差测度 $|\mu|$ 是一个支集包含于 S的正测度，根据引理 8，我们知道 $A_{\vec{0}}$ 在 $L^2(d|\mu|)$中稠密。因此，我们可以找到一列函数 $f_n\in A_{\vec{0}}$，使得 $f_n\to\overline{U}$ 在 $L^2(d|\mu|)$中。由此可得

$$0=\lim_{n\to\infty}\int_S f_nUd|\mu|(z)=\int_S|U|^2d|\mu|(z)=|\mu|(S),$$

因此 $|\mu|$ 是零测度，进而 μ 也是零测度。由于 μ 是任意的，由此可知，零测度是唯一一个支集包含于 S 且湮灭 $A_{\vec{0}}$的复测度。

这意味着，相对于上确界范数， $A_{\vec{0}}|_S$ 是 $C(S)$的稠密子空间。要了解这一点，请注意，如果事实并非如此，那么根据 Hahn-Banach定理， $C(S)^*$中应存在一个非平凡元素，它湮灭 $A_{\vec{0}}|_S$中的所有函数。也就是说，在 S 上的一个非平凡复博雷尔测度 μ ，使得

$$\int_S f(z)d\mu(z) = 0$$

对于所有 $f \in A_{\vec{0}}$。但我们已经证明，这样的测度不存在，因此 $A_{\vec{0}}|_S$ 是 $C(S)$ 的稠密子空间。

□

最后，结合定理 5与引理 2我们得到以下关于不支集任何正 RP 测度的紧集的结果。

定理 6。 设 $S \subset \mathbb{T}^2$ 为一个紧子集，其具有以下性质：没有正 *RP* 测度的支集包含于 S 中。则 $A_{\vec{0}}|_{T(S)}$ 是 $C(T(S))$ 的一致稠密子空间。

我们以一些进一步的观察和问题为本文作结。

定理 5 表明，如果 $S \subset \mathbb{T}^2$ 是一个紧子集，且不存在支集包含于 S、湮灭 $A_{\vec{0}}$ 的非零正博雷尔测度，那么 $A_{\vec{0}}|_S$ 在 S 中一致稠密。我们或许会问，能否更进一步，断定这样的集合 $S \subset \mathbb{T}^2$ 是 $A_{\vec{0}}$ 的插值集。一般而言，这是不可能的，原因将在下文说明。

如前所述，Bishop 定理（定理 1 某一部分的一个更一般的版本）表明，如果 S 具有更强的性质，即对于 $A_{\vec{0}}^{\perp}$ 中的每个复测度， $|\mu|(S) = 0$ ，那么 S 确实是 $A_{\vec{0}}$ 的插值集；而正如定理 1 所示，这一蕴含实际上是一个等价关系。因此，若 S 是一个紧子集，且 $A_{\vec{0}}^{\perp}$ 中不存在支集包含于 S 的非零正测度，那么，询问对 S 施加哪些额外假设，才能断定 S 是 $A_{\vec{0}}$ 的插值集，等同于询问需要哪些额外假设，才能使这样的集合成为 $A_{\vec{0}}$ 的所有湮灭子的零测集。

考虑单变量函数的情形。根据 F. 和 M. Riesz 定理，唯一能够消去空间 A_0 的复测度——该空间由 $A(\mathbb{D})$ 中所有在原点处为零的函数组成——是形如 $f(z)|dz|$ 的测度，其中 $|dz|$ 表示 $\mathbb{T}$ 上的勒贝格测度，而 f 是 Hardy 空间 H^1 的一个元素。这意味着，包含任意消去子（无论是复的、实的还是正的）之支集的唯一 紧子集，就是整个 $\mathbb{T}$。请注意，这一观察的推广

即正测度和复测度具有相同的可能支集集合，出现在定理 5 的证明中。

因此，如果某个紧子集 K 不支集任何 A_0 的实消去子，这只意味着 $K \neq \mathbb{T}$，因此仅凭这一点并不能推出它是所有复消去子的零测集。例如，没有任何 A_0 的消去子具有包含于半圆内的支集，但半圆并非所有复消去子的零测集。这表明，定理 5 不能（在没有进一步假设的情况下）推广为得出这样的集合 K 是一个插值集。

然而，如果我们增加如下假设： K 不支持任何 A_0 实湮灭子，且其豪斯多夫维数小于 $\mathbb{T}$ 的维数（即假设其测度为 0），那么事实上，这确实意味着对于所有复湮灭子，它都是零测集（同样由 F. 和 M. 黎兹定理得出）。有人可能会问，在 $\mathbb{T}^2$上是否也成立类似的结论。例如，结合定理 5 中的假设，对 K 的维数和位置施加某些限制，是否足以得出 K 是一个插值集。

致谢

作者感谢 Bartosz Malman 提供了许多宝贵的讨论和想法，尤其是关于最后一节的内容，特别是引理 8 和定理 5。

参考文献

[1] J.T. Anderson、L. Bergqvist、K. Bickel、J.A. Cima 和 A. A. Sola： 有理内函数的 *Clark*测度 *II*：一般双次数与高维情形，预印本见 https://arxiv.org/abs/2303 11248 。K. Bickel、J.A. Cima 和 A. A. Sola： [2] 有理内函数的 *Clark*测度，即将发表于 Michigan Math. J. https://doi.org/10.1307/mmj/20216046。[3] Erret Bishop： 函数代数的极小边界，Pac. J. Math. 9，（1959），629–642。[4] Evgueni Doubtsov：环面上的 *Clark*测度，Proc. Amer. Math. Soc. 148，（2020），第 5 期，2009–2017。[5] Gerald B. Folland： 实分析，第 2 版。Wiley，纽约，（1999）。[6] H. Helson 和 D. Lowdenslager： 多变量预测理论与傅里叶级数，Acta Math. 第 99 卷，（1958），165–202。[7] Kenneth Hoffman : 解析函数的巴拿赫空间，Prentice-Hall 现代分析丛书，Prentice-Hall，纽约，（1962）。[8] A. Luger 和 M. Nedic： 与具有正虚部或正实部的全纯函数相关的测度的几何性质，J. Geom. Anal. 31（2021）2611–2638。[9] John N. McDonald： 一个极端绝对连续 *RP*-测度，Proc. Amer. Math. Soc. 109（1990），731–738。[10] Walter Rudin : 多圆盘中的函数论，W. A. Benjamin, Inc.，纽约-阿姆斯特丹，（1969）。

斯德哥尔摩大学数学系，瑞典斯德哥尔摩 106 91。

电子邮箱地址： linus@math.su.se