arXiv:2304.03075v1 [math.PR] 6 Apr 2023

线性霍克斯到达过程下破产概率的精确渐近分析

ZBIGNIEW PALMOWSKI、SIMON POJER 和 STEFAN THONHAUSER

Abstract. 本文确定了到达过程由线性标记霍克斯过程描述的风险过程的破产概率界限及其精确渐近式。我们考察索赔额的轻尾和重尾情形。主要方法基于单个大跳跃原理、指数测度变换和更新论证。

Keywords. 霍克斯过程 ⋆破产概率 ⋆Cramˊer 渐近 ⋆次指数渐近

1. Introduction

本文考虑风险过程的破产概率

$$X_t := u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} U_i, \tag{1}$$

其中， u 为正的初始资本， c 为保费率。此外，假设索赔额 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 为独立同分布的正随机变量，其累积分布函数为 F_U，并且与到达过程 $\{N_t\}_{t\geq 0}$ 相互独立。我们假设到达由霍克斯过程 $\{N_t\}_{t\geq 0}$决定。回顾一下，这意味着 $\{N_t\}_{t\geq 0}$ 是一个强度过程

$$\lambda_t := a + \sum_{T_i\leq t} h(t-T_i, Y_i),$$

其中 a 是常数基准强度， $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个通常称为冲击的正独立同分布随机变量序列， $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\{N_t\}_{t\geq 0}$ 中各点的到达时刻，且 $h:\ \mathbb{R}_{\geq 0}\times\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 是满足以下条件的衰减函数

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty h(t,Y)\mathrm{d}t\right] =: \mu < 1 \quad \text{and} \quad \mathbb{E}\left[\int_0^\infty t\, h(t,Y)\mathrm{d}t\right] < +\infty. \tag{2}$$

我们假设所有考虑的随机量都定义在满足通常条件的某个滤过概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ 上。为强调某些随机对象的分布对初始资本 u 的依赖性，我们将满足条件 $X_0 = u$ 的测度 $\mathbb{P}$ 记为 $\mathbb{P}_u$ ，并将相应的期望记为 $\mathbb{E}_u[\cdot]$ 。

将 Hawkes 到达过程引入风险理论十分重要，因为它具有自激结构，近期事件会影响其强度。

Date: 2023年4月7日。

索赔发生得比相距较远的索赔更频繁。换句话说，霍克斯过程的每一次跳跃都会提高其强度，因而提高进一步跳跃的概率。事实上，霍克斯过程还有另一种关键解释，即索赔簇按照齐次泊松过程 $\{N_t\}_{t\geq 0}$ 以强度 a 到达，并且前述有限的（得益于假设（2））簇按照具有后代分布且其均值为 $\mu < 1$ 的高尔顿-沃森分枝过程生成。换句话说，一个按照泊松过程到达的“索赔”事件 $\{N_t\}_{t\geq 0}$ 会产生一连串较小的索赔，这些索赔会及时报告给保险公司。

破产概率位于风险理论的核心，自经典的Cramér-Lundberg模型于1903年由FilipLundberg[20] 提出，并于20世纪30年代由Harald Cramér（见 [15]）。它等于公司准备金曾经低于零的概率，即

$$\psi(u) := \mathbb{P}_u(\tau < +\infty)$$

对于破产时刻

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : X_t < 0\}. \tag{3}$$

通常（以及在本文中）假设所谓的净利润条件，即，

$$\lim_{t\to+\infty} X_t = +\infty \qquad \text{a.s.}, \tag{4}$$

因此 $\psi(u) < 1$。破产是一个技术术语——它并不意味着公司在破产时刻倒闭。事实上，保险公司的准备金向下穿越某个固定水平（可以将其视为零）会迫使该公司采取措施，使业务实现盈利。出于偿付能力方面的需要，也必须估计破产概率；在将该破产概率设定为可接受的较低水平后，还可以利用它计算应收取的保费。

正如我们所说，在大多数情况下，日常实践中只需一个界或估计（适用于较大的初始准备金）即可。这是本文的主要目标。

在开头，我们通过将所有簇索赔在时间上移位到“簇”事件，来将我们的过程与修改后的过程进行比较。这会产生两个陈述。在稍后指定的轻尾假设下，我们在推论 1 中证明，存在正常数 C_-、C_+ 和调整系数 $R > 0$ 使得

$$C_- e^{-Ru} \leq \psi(u) \leq C_+ e^{-Ru}.$$

类似结果见 [1] ，针对具有泊松脉冲噪声强度的考克斯索赔到达过程。不过，他们的证明存在以下缺陷。本文错误地假设，导致破产事件的批量索赔总是“最后一笔”。换言之，每个批量索赔（即簇）都由若干笔在时间上延迟出现的单笔索赔组成。 [1]假设我们考虑所有簇中在.....之前出现的所有索赔

Cram´er-Lundberg过程的破产时刻，最后的单个索赔（按实际时间计的最后一个）总是属于“最后一个”（因此也是同一个）簇。这是不正确的，因为这意味着不可能发生这样的情况：例如，第二个簇中有一项索赔发生在第三个簇出现之后。我们通过考虑在Cram´er-Lundberg过程破产之前出现的所有簇的长度的最大值，绕过了这一问题。

在索赔额是强次指数的（因此具有重尾）这一补充假设下，我们在推论 3 证明了

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\psi(u)}{1-F_U^s(u)}=C_h$$

其中常数 C_h 可显式确定，且其中

$$F_U^s(u):=\frac{1}{\mathbb{E}[U_1]}\int_0^u(1-F_U(y))\mathrm{d}y \tag{5}$$

是积分尾分布。我们在此也运用了单个大跳跃原理。上述结果见 [28]中的命题 13。不过，我们的证明有所不同，且无需繁琐地检验[28]中的假设 1。

为了能够求出轻尾情形下破产概率 $\psi(u)$的精确渐近表达式，我们进一步假设 Hawkes N_t 是马尔可夫的，即，

$$\lambda_t:=a+(\lambda-a)e^{-\beta t}+\sum_{i=1}^{N_t}Y_ie^{-\beta(t-T_i)}$$

对于某些 $\lambda>a>0$ 和 $\beta>0$。利用指数测度变换和更新论证，我们证明在此情况下

$$\psi(u)e^{Ru}\to C,\qquad \text{as } u\to+\infty \tag{6}$$

对一个正的常数 C。在证明中，我们还证明了其他一些事实（例如，$\{(X_t,\lambda_t,t)\}_{t\geq0}$的生成元形式），这些结果本身也颇有意义。特别地，我们给出了强度过程为正哈里斯常返的充分条件，并证明相应的常返时间具有轻尾性质。我们想强调的是，(6) 比 [27]的定理 4.1 更强；该定理仅推导出了对数渐近结果，表明 $\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u}\ln\psi(u)=-R$。

为证明上述所有主要结果，我们必须为具有霍克斯到达过程的风险过程以及线性霍克斯过程本身建立新的理论。特别是，我们所采用的指数测度变换似乎是新的。我们还找到了风险过程在这一测度变换后的参数。为此，在马尔可夫框架下，我们找到了过程 $\{(X_t,\lambda_t,t)\}_{t\geq0}$ 的扩展生成元及其定义域。据我们所知，这同样是一个新的结果。我们还引入了经典伦德贝格方程的对应形式，该方程在破产理论中受到了广泛关注。

在我们的构造中，证明强度过程 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$在原测度和新测度下均为正常返过程至关重要。我们利用强度过程的这些回返时刻，并结合风险过程的梯时刻，构造新的时间点 $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 从而可以建立一个更新型方程：将破产概率乘以一个适当的指数函数，该函数出现在（6）的右端。

为证明该更新型方程的解的极限存在且有限，我们为该方程中出现的某些函数的直接黎曼可积性寻找充分条件。由于对 X_{ϕ_1} 的指数矩进行了详细分析，这是可行的。

我们相信，本文所 प्रस्तुत 的证明思路同样可以用于其他簇到达过程。

本文组织如下。在第2 节中，我们构造了一个修正风险过程，并给出了破产概率的指数双侧界$\psi(u$。在本节中，我们还证明了 $\psi(u$的重尾渐近性质。第3 节专门研究马尔可夫霍克斯过程，并利用更新论证和测度变换技术证明′的克拉姆 $\psi(u$-伦德伯格渐近性质。最后，我们详细分析冲击和索赔服从指数分布的情形（见第4节）。

2. CLUSTER REPRESENTATION AND MODIFIED RISK PROCESS

2.1. 风险过程的簇表示。本文考虑由满足 (2) 的线性标记霍克斯过程 $\{N_t\}_{t\geq 0}$ 驱动的风险过程。为方便起见，本文其余部分将省略“线性”和“标记”这两个属性，并将该过程称为霍克斯过程。本节中，所谓的泊松簇表示，或简称簇表示，至关重要。为此，我们考察由基准强度 a 引发的单个冲击事件的影响，并将其称为基础事件。如果发生这样的跳跃，计数过程 $\{N_t\}_{t\geq 0}$ 增加 1，强度则增加 $h(0,y)$，其中 y 是一个随机变量的实现，其分布函数为 F_Y。强度的这次增加会进一步触发 Poi($\int_0^\infty h(t,y)\mathrm{d}t$) 次跳跃，我们称之为子代；其中 Poi($\alpha$) 表示参数为 a 的泊松分布随机变量。每个子代的出现都会使计数过程增加 1，并再次触发 Poi($\int_0^\infty h(t,y')\mathrm{d}t$) 次新跳跃，其中 y' 是一个新的、独立的同分布实现。我们收集一个基础事件产生的所有后代，并将其称为一个簇。自然会产生一个重要问题：这样的簇是否只包含有限个点，还是可能发生爆炸？正如 [3] 所示，这类一般簇中的点数 κ 与次临界高尔顿-沃森分枝过程中的点数相同。因此， κ 几乎必然有限，且其期望 $\mathbb{E}[\kappa]=\frac{1}{1-\mu}$ 有限。

由此，我们可以将强度过程改写为

$$\lambda_t = a + \sum_{i=1}^{\bar{N}_t} \sum_{j=0}^{K^{(i)}_{t-\bar{T}_i}} h\left(t - (\bar{T}_i + \sum_{k=1}^{j} T_{ik}), Y_{ij}\right),$$

其中，$\{N_t\}_{t\geq 0}$ 表示一个强度为 a 、跳跃时刻为 $\bar{T}_i$的泊松过程。对于固定的 i，过程 $\{K^{(i)}_t\}_{t\geq 0}$ 统计第 i个基础事件的后代，其跳跃时刻为 $T_i + T_{i1}$、$T_i + T_{i1} + T_{i2}$、.....，其中T_{ij} 表示簇i的第 $j-1$次跳跃与第 j 次跳跃之间的跳跃间隔。随机变量 Y_{ij} 对应于簇i中第 j个事件所引起的冲击，而 Y_{i0} 则是由簇 i的基础事件引起的冲击。由于每个簇都具有相同的分布，因此对于所有 $j \geq 1$，序列 $\{\sum_{k=1}^{j} T_{ik}\}_{i\geq 1}$ 是独立同分布的。通过相同的步骤，我们可以将盈余过程改写为

$$X_t = u + ct - \sum_{i=1}^{\bar{N}_t} \sum_{j=0}^{K^{(i)}_{t-\bar{T}_i}} U_{ij},$$

其中，随机变量 U_{ij} 表示第 i 个簇中的第 j 次事件所导致的索赔。

由于单个簇的事件数几乎必然有限，因此当 $t \to \infty$ 时，几乎必然有 $K^{(i)}_t \to K^{(i)}_\infty =: \kappa_i$。由于所有簇都具有相同的分布，因此 $\{\kappa_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个满足条件的独立同分布随机变量序列。

$$\mathbb{E}[\kappa_i] = \frac{1}{1-\mu}; \tag{7}$$

例如参见第 203 页：[7]。

这一表示展示了我们的模型的主要特征。一个基础泊松过程在每次跳跃时触发一个簇，该簇由随机数量为 κ_i 的索赔组成。这些索赔不会立即发生，而是会在时间上延迟。我们将利用这一表示来推导盈余过程的逐路径界。

2.2.盈余的上界和下界。为了推导盈余过程的下界，我们忽略上述时间延迟。我们将簇过程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 定义为

$$\tilde{X}_t = u + ct - \sum_{i=1}^{\bar{N}_t} \sum_{j=0}^{\kappa_i} U_{ij} =: u + ct - \sum_{i=1}^{\bar{N}_t} \tilde{U}_i, \tag{8}$$

其中

$$\tilde{U}_i := \sum_{j=0}^{\kappa_i} U_{ij}, \qquad i \in \mathbb{N} \tag{9}$$

˜构成一个与计数泊松过程 $\{N_t\}_{t\geq 0}$ 独立的独立同分布序列，$\{N_t\}_{t\geq 0}$ 用于统计簇的数量。由于 $\kappa_i \geq K_t^{(i)}$ 对所有 t 几乎必然成立，因此我们有

$$X_t \geq \tilde{X}_t. \tag{10}$$

对于到达过程和索赔过程的任意实现。为避免平凡情形，我们假设净利润条件

$$c > \mathbb{E}[\tilde{U}]a, \tag{11}$$

˜对修正风险过程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$成立。注意，簇˜过程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 现在是一个 Cram´er-Lundberg 过程。因此，我们可以利用该过程的标准结果，得到我们的盈余过程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$的破产概率 $\psi(u)$的一个上界。令

$$\tilde{\psi}(u) := \mathbb{P}_u(\inf_{t\geq 0} \tilde{X}_t < 0) \tag{12}$$

˜为相应簇过程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$的破产概率。

引理1. 有，

$$\psi(u) \leq \tilde{\psi}(u).$$

证明。 这由不等式（10）立即得出。 □

为了推导破产概率的下界，我们沿用[1], 的思路。他们考虑一般的脉冲噪声模型，并找到一个合适的常数l_1 使得 $\psi(u - l_1) \geq \psi(u)$。为此，我们先引入一些额外的记号。记 L_i 为簇 i的长度，即

$$L_i = \inf\left\{ t \geq 0 \,\middle|\, K_t^{(i)} = K_\infty^{(i)} = \kappa_i \right\}.$$

由于各簇具有独立同分布结构，我们有序列 $\{L_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 也独立同分布，并服从某个累积分布函数 F_L。此外，我们注意到 $L_i = \sum_{j=1}^{\kappa_i} T_{ij}$，其中 $\{T_{ij}\}_{j\in\{1,\dots\kappa_i\}}$ 表示第 i 个簇的跳跃时刻间隔集合。

Let

$$\tilde{\tau} := \inf\{t \geq 0 : \tilde{X}_t < 0\}$$

˜ ˜表示簇过程的破产时间，$\{X_t\}_{t\geq 0}$ 以及 L 表示从$\tilde{\tau}$ 开始直到截至时间 $\tilde{\tau}$ 出现的所有簇都完成的时间，即

$$\tilde{L} := \sup\left\{ \bar{T}_i + \sum_{j=1}^{\kappa_i} T_{ij} : \bar{T}_i \leq \tilde{\tau} \right\} - \tilde{\tau}.$$

换句话说，这是满足以下条件的最小随机时间：对于所有满足 i with $\bar{T}_i \leq \tilde{\tau}$ 的情况，我们都有 $K_{\tilde{\tau}+\tilde{L}}^{(i)} = K_\infty^{(i)} = \kappa_i$。

那么，只要 $\tilde{\tau}$ 和 L 都是有限的，我们就有

$$X_{\tilde{\tau}+\tilde{L}} = u + c(\tilde{\tau}+\tilde{L}) - \sum_{i=1}^{\bar{N}_{\tilde{\tau}+\tilde{L}}} \sum_{j=0}^{K^{(i)}_{\tilde{\tau}+\tilde{L}}} U_{ij} \tag{13}$$

$$= u + c\tilde{\tau} - \sum_{i=1}^{\bar{N}_{\tilde{\tau}}} \sum_{j=0}^{\kappa_i} U_{ij} + c\tilde{L} - \sum_{i=\bar{N}_{\tilde{\tau}}+1}^{\bar{N}_{\tilde{\tau}+\tilde{L}}} \sum_{j=0}^{K^{(i)}_{\tilde{\tau}+\tilde{L}}} U_{ij} \tag{14}$$

$$\leq \tilde{X}_{\tilde{\tau}} + c\tilde{L}. \tag{15}$$

因此，

$$X_{\tilde{\tau}+\tilde{L}} - c\tilde{L} \leq \tilde{X}_{\tilde{\tau}} < 0.$$

因此，如果我们将该过程的初始资本减少 cL，那么簇过程的破产也会导致原始盈余的破产。主要问题在于， L 是随机的，可能为无穷大，并且相对于原始盈余过程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 的滤子以及相对于簇过程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$的滤子都不可测。为绕过这些问题，我们希望找到常数 l_1 和 C，使得 $\psi（u - cl_1）\geq C\psi（u）$。

引理 2. 设 $t > 0$ 使得 $\mathbb{P}[L_1 \leq t] > 0$。则存在常数$K_t \in (0, 1]$ 使得 $\psi(u - ct) \geq K_t\psi(u$。

证明。首先，为方便起见，我们设定 $L(\omega) = \infty$ 每当 $\tilde{\tau}(\omega) = \infty$。然后，我们注意到，对于所有满足 $L(\omega) < t$ 的 ω，都有 $\tilde{\tau}_u(\omega) < +\infty$ 以及$\tau_{u-ct}(\omega) < +\infty$。这里， τ_u 表示初始资本为 u 的盈余过程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 的破产时间，而 $\tilde{\tau}_u$ 表示以 u为起点的 $\{X_t\}_{t\geq 0}$所对应的破产时刻。由 $\tilde{\tau}_u$ 必须为有限值这一结论是显然的，因为$L = \infty$ 如果 $\tilde{\tau} = \infty$。另一方面，根据不等式 (13)，在这种情况下我们有

$$\tau_{u-ct}(\omega) \leq \tilde{\tau}_u(\omega) + \tilde{L}(\omega) \leq \tilde{\tau}_u(\omega) + t < +\infty.$$

利用这些推论，对于固定的 t，我们得到

$$\psi(u-ct) \geq \mathbb{P}\left[\tau_{u-ct} < +\infty, \tilde{L} \leq t\right] = \mathbb{P}\left[\tilde{L} \leq t\right]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[\tilde{L} \leq t \,\middle|\, \tilde{\tau}_u = \bar{T}_n\right] \mathbb{P}\left[\tilde{\tau}_u = \bar{T}_n\right].$$

如果现在我们能用一个正常数从下方界定 $\mathbb{P}\left[\tilde{L} \leq t \,\middle|\, \tilde{\tau}_u = \bar{T}_n\right]$，这个不等式就意味着$K_t$

$$\psi(u-ct) \geq K_t \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[\tilde{\tau}_u = \bar{T}_n\right] = K_t\tilde{\psi}(u),$$

因为簇过程的破产只能发生在 T_n 泊松过程 $\{N_t\}_{t\geq 0}$的跳跃时刻。

为此，我们确定辅助变量序列 $\tilde{L}_n := \max\left\{\bar{T}_i - \bar{T}_n + L_i : i \leq n\right\}$ 的分布，即随机变量 $\tilde{L}$ 条件-¯化于 $\tilde{\tau} = T_n$. ，然后，我们有

$$\mathbb{P}\left[\tilde{L}_n \leq t\right] = \mathbb{P}\left[\bar{T}_1 - \bar{T}_n + L_1 \leq t, \ldots, \bar{T}_{n-1} - \bar{T}_n + L_{n-1} \leq t, L_n \leq t\right].$$

随机变量 L_n 与 $i < n$¯ 的随机变量 L_i 以及泊松过程 N_t 相互独立。此外，根据指数分布的无记忆性，我们有 $E_n := T_n - T_{n-1}$ 服从参数为 a 的指数分布，且与截至 T_{n-1} 时的信息独立。由此可得

$$\mathbb{P}\left[\tilde{L}_n \leq t\right] = F_L(t)\mathbb{P}\left[\bar{T}_1 - \bar{T}_{n-1} \leq t + E_n, \ldots, L_{n-1} \leq t + E_n\right].$$

在给定 E_n的条件下，我们具有与之前相同的结构，并且现在 L_{n-1} 是¯ ¯独立于所有其他随机变量的，且 $E_{n-1} = T_{n-1} - T_{n-2}$ 再次服从指数分布。因此，

$$\mathbb{P}\left[\tilde{L}_n \leq t\right] = F_L(t) \times \mathbb{E}\Big[F_L(t + E_n)$$
$$\mathbb{P}\left[\bar{T}_1 - \bar{T}_{n-2} \leq t + E_n + E_{n-1}, \ldots, L_{n-2} \leq t + E_n + E_{n-1} \,|\, E_n\right]\Big].$$

利用 $F_L(x)$ 对所有 $x > 0$ 都 ≤ 1 这一事实，并继续上述过程，我们得到 Winvalid

$$\mathbb{P}\left[\tilde{L}_n \leq t\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{n-1} F_L\left(t + \tilde{T}_i\right)\right] \geq \mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{\infty} F_L\left(t + \tilde{T}_i\right)\right],$$

其中

$$\tilde{T}_k := \sum_{j=1}^{k} E_{n+1-j}.$$

˜该性质对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立；尽管跳跃时刻 T_i 取决于 n，但由于泊松过程的平稳性，对于所有 n ，它们具有相同的分布和相同的依赖结构，因此期望相同。现在，我们还需证明该期望严格为正。

为此，我们利用以下事实：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，并且对所有 n 都有 $\perp 1 + a_n > 0$，则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ 绝对收敛到一个非零实数。若将尾项 $1 - F_L(x)$ 记作 $\bar{F}_L(x)$，则对于固定的 $\omega \in \Omega$，有

$$\prod_{i=0}^{\infty} F_L\left(t + \tilde{T}_i(\omega)\right) = \prod_{i=0}^{\infty}\left(1 - \bar{F}_L\left(t + \tilde{T}_i(\omega)\right)\right).$$

¯ ˜ ¯由于对所有 i，都有 $F_L(t + T_i) \leq F_L(t) < 1$，我们希望证明级数 $\sum_{i=0}^{\infty} \bar{F}_L\left(t + \tilde{T}_i(\omega)\right)$ 对几乎所有 ω 都收敛，从而得到乘积 $\prod_{i=0}^{\infty} F_L\left(t + \tilde{T}_i\right)$ 几乎必然收敛到随机变量 $C \in (0, 1]$, ，这将保证相应期望为正。由强大数定律可知， $\frac{1}{n}\tilde{T}_n \to a$ 几乎必然成立。

现在令 ω 使得该收敛性成立。于是，存在一个 N_ω^- 使得 $T_n \geq n\frac{a}{2}$ 对所有 $n \geq N_\omega$ 都成立。由此以及 F_L 的单调递减行为，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} \bar{F}_L\left(t+\tilde{T}_i(\omega)\right) &\leq N_\omega + 1 + \sum_{i=\leq N_\omega+1}^{\infty} \bar{F}_L\left(t+\tilde{T}_i(\omega)\right) \\ &\leq N_\omega + 1 + \sum_{i=N_\omega+1}^{\infty} \bar{F}_L\left(t+n\frac{a}{2}\right).\end{aligned}$$

余下的级数收敛，当且仅当相应的积分

$$\int_{N_\omega+1}^{\infty} \bar{F}_L\left(t+x\frac{a}{2}\right)\,\mathrm{d}x,$$

收敛。为此，我们有

$$\int_{N_\omega+1}^{\infty} \bar{F}_L\left(t+x\frac{a}{2}\right)\,\mathrm{d}x \leq \int_{N_\omega+1}^{\infty} \bar{F}_L\left(x\frac{a}{2}\right)\,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{a}\int_0^{\infty} \bar{F}_L(y)\,\mathrm{d}y = \frac{2}{a}\mathbb{E}\left[L_1\right].$$

这里， L_1 表示第一个簇的长度。根据[22], 中引理1的证明，我们有

$$\mathbb{E}[L_1] \leq \frac{1}{1-\mu}\mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} t\,h(t,Y)\,\mathrm{d}t\right] < +\infty.$$

因此，级数 $\sum_{i=0}^{\infty} \bar{F}_L\left(t+\tilde{T}_i\right)$ 几乎必然收敛，这意味着乘积 $\prod_{i=0}^{\infty} F_L\left(t+\tilde{T}_i\right) \in (0,1]$ 几乎必然成立。最终得到 K_t:
$= \mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{\infty} F_L\left(t+\tilde{T}_i\right)\right] \in (0,1]$。

□

由引理1 和2，我们可以通过以下定理得出一般情形。

定理1. 设 l_1 满足 $\mathbb{P}\left[L_1 \leq t\right] > 0$。那么，一般 Hawkes 模型中的破产概率满足

$$\tilde{\psi}(u) \geq \psi(u) \geq \tilde{\psi}(u+l_1 c),$$

其中 $\psi(u)$ 表示簇过程 (12)的破产概率 $\{X_t\}_{t\geq 0}$，即克拉姆 ´-伦德伯格过程的破产概率。

2.3.克拉 ´默-伦德伯格界与重尾渐近性。我们关注初始资本趋于无穷时破产概率的渐近行为。我们将看到，这种行为高度依赖于风险过程（1）的一般索赔大小 U 的分布特性。为理解这种行为，我们回顾一下，“移位的”克拉默 ´-伦德伯格过程（8）的一般索赔大小由（9）给出，即 $U = \sum_{k=1}^{\kappa} U_k$对于一般簇大小 κ。我们证明以下基本事实。

引理3。一般簇大小 κ 是轻尾的，即存在$\theta > 0$ 使得 $\mathbb{E}\left[e^{\theta\kappa}\right] < +\infty$。

证明。 注意到 κ 与均值为 μ的泊松后代分布 Galton–Watson 分枝过程中的总后代数具有相同的分布。由[12]可得

$$\mathbb{P}(\kappa = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(S_n = -1),$$

其中 S_n 是一个增量独立同分布的随机游走，增量为 $X_i \overset{\mathcal{D}}{=} \text{Poi}(\mu) - 1$，其中 Poi($\mu$) 是参数为 μ的泊松随机变量。因此 $\mathbb{P}(\kappa = n) \leq \mathbb{P}(-\frac{S_n}{n} \leq 0)$，根据 Cramér-Chernoff 定理，该概率呈指数衰减至零。证明完毕。 □

我们现在可以陈述第一个推论。

推论1。 假设风险过程 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的索赔事件 (1) 是轻尾的，且存在 $R > 0$ 使得

$$a(\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[e^{RU}\right]\right\}^{\kappa} - 1) = cR.$$

那么，存在正常数 C_- 和 C_+ 使得

$$C_- e^{-Ru} \leq \psi(u) \leq C_+ e^{-Ru}.$$

˜证明。 由引理 3 可知，式（U 9）中定义的通用是轻尾的，且

$$a(\mathbb{E}\left[e^{R\tilde{U}}\right] - 1) = cR. \tag{16}$$

根据我们的假设，由[25] 第 170 页上的定理 5.4.1 可知˜存在常数 C_-， C_+ 使得簇状˜盈余过程 ψ（u）的破产概率满足

$$\tilde{C}_- e^{-Ru} \leq \tilde{\psi}(u) \leq C_+ e^{-Ru},$$

对所有 $u \geq 0$ 均成立。由此可得

$$C_+ e^{-Ru} \geq \tilde{\psi}(u) \geq \psi(u) \geq \tilde{\psi}(u + cl_1) \geq \tilde{C}_- e^{-Rcl_1} e^{-Ru} =: C_- e^{-Ru}.$$

□

注 1. 这一行为意味着 Hawkes 模型中的破产概率具有对数收敛性，这一点已由 [17] 推导得出。

我们还确定了通用索赔规模为重尾时破产概率的渐近形式。现在我们引入适当的˜分布类，接下来我们将在其中进行研究。令 $F_{\tilde{U}}$ 为 U中定义的9的分布。记

$$F^s_{\tilde{U}}(u) := \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tilde{U}_1\right]} \int_0^u (1 - F_{\tilde{U}}(y))\mathrm{d}y.$$

我们称具有无界支撑集的分布 F 是强次指数的（记作 $F \in \mathcal{S}^*$），如果

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\int_0^u (1-F(u-y))(1-F(y))\mathrm{d}y}{2\int_0^\infty (1-F(y))\mathrm{d}y} = 1.$$

众所周知（参见[18]），类 $\mathcal{S}^*$ 中的任意分布都是次指数的（记作 $F \in \mathcal{S}$），也就是说，

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{1-F^{*2}(u)}{2(1-F(u))} = 1.$$

类 $\mathcal{S}^*$ 中的经典分布包括帕累托分布、对数正态分布，以及参数属于 (0,1) 的威布尔分布。

推论 2. 假设一般˜聚类索赔额 U 的积分尾分布 $F_{\tilde{U}}^s$ 是次指数的，也就是说，$F_{\tilde{U}}^s \in \mathcal{S}$。那么，

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{1-F_{\tilde{U}}^s(u)} = \frac{\rho}{1-\rho},$$

其中

$$\rho := \frac{a\mathbb{E}\left[\tilde{U}_1\right]}{c} < 1$$

作者 （11）。

证明。由于 $F_{\tilde{U}}^s$ 是次指数的，根据 [25]第 175 页上的定理 5.4.3，Cramér-Lundberg 模型的破产概率满足

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\tilde{\psi}(u)}{1-F_{\tilde{U}}^s(u)} = \frac{\rho}{1-\rho} = \lim_{u\to\infty} \frac{\tilde{\psi}(u+cl_1)}{1-F_{\tilde{U}}^s(u+cl_1)}.$$

此外，我们有$\lim_{u\to\infty} \frac{1-F_{\tilde{U}}^s(u+y)}{1-F_{\tilde{U}}^s(u)} = 1$，对所有 $y \in \mathbb{R}$ 均成立，因为任何次指数分布都是长尾分布（例如参见 [14] 第 40 页的引理 3.2）。因此，

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{1-\rho} = \lim_{u\to\infty} \frac{\tilde{\psi}(u)}{1-F_{\tilde{U}}^s(u)} &\geq \limsup_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{1-F_{\tilde{U}}^s(u)} \geq \liminf_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{1-F_{\tilde{U}}^s(u)} \\ &\geq \lim_{u\to\infty} \frac{1-F_{\tilde{U}}^s(u+cl_1)}{1-F_{\tilde{U}}^s(u)} \frac{\tilde{\psi}(u+cl_1)}{1-F_{\tilde{U}}^s(u+cl_1)} = \frac{\rho}{1-\rho}\end{aligned}$$

从而完成证明。 □

若假设索赔额 F_U 的原始分布 F_U 是强次指数的（因此，根据 [14] 第 40页的引理 3.2，它是重尾的），则以索赔额的原始分布来推导破产概率 $\psi(u)$ 的渐近行为更有价值。

推论3. 若 $F_U \in \mathcal{S}^*$，则

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{1-F_U^s(u)} = \frac{\rho}{1-\rho}. \tag{17}$$

证明。回顾 $\tilde{U} = \sum_{k=1}^{\kappa} U_k$ 对于一般簇大小 κ，根据引理3 κ，它是轻尾的。现在，根据 [11], (7)中的定理 1 和推论 2，结论由此得出

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1-F_{\tilde{U}}(u)}{1-F_U(u)} = \frac{1}{1-\mu}$$

因此

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1-F_{\tilde{U}}^s(u)}{1-F_U^s(u)} = 1.$$

□

备注 2。我们重新得到了[28]中的命题 13。尽管证明方法不同，但无需繁琐地检验 [28]中的假设 1。

尽管定理 1 的结果与 [1], 的发现相似，但仍有两个缺点。第一个问题是，渐近行为在很大程度上取决于单个簇中所有索赔额之和的分布，而这可能难以处理。第二个缺点是，我们无法证明是否存在某些条件使得 $\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\psi(u)$ 收敛。为此，我们将研究范围限定于霍克斯过程的马尔可夫版本。

3. CRAMÉR-LUNDBERG ASYMPTOTICS FOR MARKOVIAN HAWKES MODEL

3.1. 马尔可夫型霍克斯模型。霍克斯过程的强度通常不是马尔可夫型的。为解决这一问题，我们必须选取特定的衰减函数 $h(t,y) = e^{-\beta t}y$，其中衰减参数 β 为正数。此外，对于一些正数常量 $\lambda > a > 0$，我们通过其强度过程定义马尔可夫型（带标记）霍克斯过程 $\{N_t\}_{t\geq 0}$

$$\lambda_t := a + (\lambda - a)e^{-\beta t} + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i e^{-\beta(t-T_i)}. \tag{18}$$

这里假设随机变量 $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是正随机变量 Y 的独立同分布副本，该变量的累积分布函数为 F_Y，且期望有限。与前一部分不同，我们允许初始值 λ 各不相同，而不再局限于 $\lambda_0 = a$ 的情形。当

$$\int_0^\infty \mathbb{E}[h(t,Y)]\,\mathrm{d}t = \mathbb{E}[Y]\int_0^\infty e^{-\beta t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathbb{E}[Y]}{\beta} < 1,$$

这给出了限制条件：

$$\beta > \mathbb{E}[Y], \tag{19}$$

而可积性条件

$$\int_0^\infty t\,\mathbb{E}[h(t,Y)]\,\mathrm{d}t < +\infty,$$

始终成立。该过程称为马尔可夫过程，因为强度过程 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 是一个分段确定性马尔可夫过程（PDMP），其扩展生成元为

$$\mathcal{A}^\lambda f(\lambda) = \beta(a-\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}f(x,\lambda,t) + \lambda\int_0^\infty f(\lambda+y)\,F_Y(\mathrm{d}y) - \lambda f(x,\lambda,t);$$

参见[9]，了解有关 PDMP 理论的更多详情。回顾一下，对于任意马尔可夫过程 $\{Z_t\}_{t\geq 0}$，我们称 $\mathcal{A}$ 为其扩展生成元，并称 $D(\mathcal{A})$ 为该生成元的定义域，若 $f(Z_t) - f(Z_0) - \int_0^t g(Z_s)\,\mathrm{d}s$ 相对于其自然滤过是一个零均值局部鞅，对 $f\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 以及某个函数 g。于是记作 $g=\mathcal{A}f$。

此外，多元过程 $\{(X_t,\lambda_t,t)\}_{t\geq 0}$ 也是一个分段确定性马尔可夫过程，其完整生成元为

$$\begin{aligned}(20)\quad \mathcal{A}f(x,\lambda,t) &= c\frac{\partial}{\partial x}f(x,\lambda,t) + \beta(a-\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}f(x,\lambda,t) + \frac{\partial}{\partial t}f(x,\lambda,t)\\ &\quad + \lambda\int_0^\infty\int_0^\infty f(x-u,\lambda+y,t)\,F_U(\mathrm{d}u)\,F_Y(\mathrm{d}y) - \lambda f(x,\lambda,t).\end{aligned}$$

由于现在有两个不同的初始值，一个对应盈余过程，另一个对应强度，因此我们记 $\mathbb{P}_{(u,\lambda)}$ 为在条件$X_0=u$ 下的测度 $\mathbb{P}$，记 $\lambda_0=\lambda$ 为对应于 $u\geq 0$ 和 $\lambda>a$ 的测度，并以 $\mathbb{E}_{(u,\lambda)}[\cdot]$ 表示相应的期望。如果随机对象 Z 与初始值独立，我们将省略初始值，并用 $\mathbb{E}[Z]$ 代替 $\mathbb{E}_{(u,\lambda)}[Z]$。据此，由 [25, 第 449], 页可知，该生成元 $\mathcal{A}$的定义域 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$由所有满足以下条件的函数 $f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 组成：对于几乎所有的(x,λ,s)，映射 $t\to f(x+ct,(\lambda-a)e^{-\beta t}+a,s+t)$绝对连续，且

$$\mathbb{E}_{(u,\lambda)}\left[\sum_{k=1}^{N_t}\left|f(X_{T_k},\lambda_{T_k},T_k) - f(X_{T_k-},\lambda_{T_k-},T_k)\right|\right] < +\infty,$$

对所有 $t\geq 0$。

我们首先确定一个合适的净利润条件，也就是使（4）成立的条件。事实上，我们将确定极限 $\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}_{(u,\lambda)}[X_t]}{t}$，并假设该极限严格为正，由此得到（4）。

引理 4. 盈余过程满足 $\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}_{(u,\lambda)}[X_t]}{t} = c - \frac{a\beta\mathbb{E}[U]}{\beta-\mathbb{E}[Y]}$。

证明。函数 $f(x,\lambda,t)=x$ 属于生成元的定义域，并满足 $\mathcal{A}f(x,\lambda,t)=c-\lambda\mathbb{E}[U]$。因此，我们有 $\mathbb{E}_{(u,\lambda)}[X_t] = u + ct - \mathbb{E}[U]\int_0^t\mathbb{E}_\lambda[\lambda_s]\,\mathrm{d}s$。由 [6],我们有 $\mathbb{E}_\lambda[\lambda_s] = \frac{\beta a}{\beta-\mathbb{E}[Y]} + \left(\lambda - \frac{\beta a}{\beta-\mathbb{E}[Y]}\right)e^{-s(\beta-\mathbb{E}[Y]}$。

因此，$\int_0^t \mathbb{E}_\lambda[\lambda_s]\,\mathrm{d}s = \frac{\beta a}{\beta - \mathbb{E}[Y]}t + o(t)$。由此可得

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}_{(u,\lambda)}\left[X_t\right]}{t} = c - \mathbb{E}[U]\frac{\beta a}{\beta - \mathbb{E}[Y]}$$

由此证明完毕。 □

根据这一结果，我们提出以下净利润条件。

假设 1. 从现在起，我们假设净利润条件

$$c > \frac{a\beta\mathbb{E}[U]}{\beta - \mathbb{E}[Y]}$$

成立。此外，我们假设存在某个正数 s_Y，使得矩母函数

$$M_Y(s) := \mathbb{E}\left[e^{sY}\right] < +\infty\, \forall s < s_Y, \quad \text{and} \quad \lim_{s\to s_Y} M_Y(s) = +\infty.$$

3.2. Cramér-Lundberg 渐近结果的证明步骤。 本节的主要目标是证明，对于强度为（18）的霍克斯过程，在附加假设下满足所谓的 Cramér-Lundberg 渐近结果；也就是说，存在一个调整系数 R，满足稍后给出的 Lundberg 方程（见（27）），以及一个依赖于 $C^\lambda > 0$ 的常数 λ，使得

$$\lim_{u\to\infty} \psi(u,\lambda)e^{Ru} = C^\lambda;$$

见定理9。

为证明这一结论，我们将整个证明分为以下几个步骤：

(1) 在下一小节中，我们将在定理 4中证明，强度过程$\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 是正哈里斯常返的；并将在定理 6中证明，相应的复归时间 $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 具有轻尾；(2) 随后，在定义 6中，我们将引入函数 $\alpha(r)$ 和 $\theta(r)$，作为方程(24)-(25) 的特殊解；(3) 调整系数 $R > 0$ 定义为 Lundberg 方程的最大解

$$\theta(R) = 0;$$

(4) 我们将在定义 7 中利用定理7 和 8引入新的指数测度

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}^{(R)}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = M_t := \exp\left(Ru + \alpha(R)\lambda\right)\exp(-RX_t - \alpha(R)\lambda_t)\,;$$

(5) 我们将在引理 17 中证明，在新测度下 $\mathbb{Q}^{(R)}$ 几乎必然发生破产，且强度 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 仍然是正哈里斯常返的（见引理3.4）；

（6）我们引入

$$B(\mathrm{d}x) := e^{Rx}\tilde{B}(\mathrm{d}x) \quad \text{for} \quad \tilde{B}(x) := e^{Rx}\mathbb{P}_{(u,\lambda)}\left[\phi_1 < +\infty, u - X_{\phi_1} \leq x\right]$$

and

$$p(u,x) := \mathbb{P}_{(u,\lambda)}\left[\tau \leq \phi_1, |\phi_1 < +\infty, X_{\phi_1} = u - x\right]$$

对于破产时刻 τ 定义于（3）以及首次回归到 λ 时刻 ϕ_1的 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 过程，使得 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 其下降至初始起始位置以下 u；现在利用经典的一步分析，我们可以证明

$$Z(u) = \psi(u)e^{Ru}$$

满足以下更新方程（见（31））

$$Z(u) = \int_0^u Z(u-x)(1-p(u,x))B(\mathrm{d}x) + z(u),$$

其中

$$z(u) = e^{Ru}\mathbb{P}_{(u,\lambda)}\left[\tau \leq \phi_1, \tau < +\infty\right];$$

（7）为了证明 $\lim_{u\to+\infty} Z$（u）存在且有限，在证明的最后一步，我们使用 [26] 的定理 2，并在证明的第一步证明 z（u）和 $\int_0^u p$（u，x）B（dx）直接黎曼可积。

我们首先分析马尔可夫强度过程 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 的行为。

3.3. 强度过程的哈里斯常返性。 本节研究马尔可夫标记霍克斯过程的强度行为。我们的目标是证明强度过程是正哈里斯常返的（见定理 4），且相应的回返时间具有轻尾性质（见定理 6）；这两种性质对于确定破产概率的渐近行为都是必要的。

为恰当地定义这些性质，我们考虑定义在 $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathcal{E}))$ 上的右连续、时间齐次强马尔可夫过程 $\{Z_t\}_{t\geq 0}$。这里，$\mathcal{E}$ 表示一个局部紧的可分度量空间，而 $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ 表示其 Borel σ-代数。

定义 1。过程 $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ 被称为哈里斯常返，如果存在定义在 $\mathcal{B}(\mathcal{E})$上的 σ-有限测度 φ，使得对于所有初始值 z 和 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$，$\varphi(B) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}_z\left[\eta_B = \infty\right] = 1$，其中

$$\eta_B := \int_0^\infty I_{\{Z_t \in B\}}\mathrm{d}t \tag{21}$$

表示过程 $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ 的占用测度。如果它是具有有限不变测度 π的哈里斯常返过程，则称其为正哈里斯常返。

为了证明我们的强度过程满足这一性质，我们需要采用连续分量和 T-过程的以下定义，详见第 3.2 节 [21,第495-496]页。

定义 2. 设 $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ 为我们的强马尔可夫过程，σ_1、σ_2、.....为一列正的独立同分布随机变量，其分布为 F，且与 $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ 相互独立。于是，我们定义嵌入马尔可夫链 Y_n ： $=Z_{\sigma_1+\cdots+\sigma_n}$，其一步转移概率为 $K_F(z,A)$: $= \int_0^\infty \mathbb{P}_z\left[Z_t \in A\right] F(\mathrm{d}t)$

对所有 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$。若核 $T\colon (\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathcal{E})) \to \mathbb{R}_+$ 是 K_F的连续部分，则对所有 x和 A，有 $K_F(x, A) \geq T(x, A)$；且对固定的 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$，函数 $T(\cdot, A)$ 是下半连续的。若对所有 $x \in \mathcal{E}$，都有 $T(x, \mathcal{E}) > 0$，则称 T是非平凡的。

此类嵌入马尔可夫链的一个特殊情形是预解链，其转移核由 $R_\gamma(x, A) := \int_0^\infty \mathbb{P}_x [Z_t \in A] e^{-\gamma t} \mathrm{d}t$ 给出，也就是说，其中 $\sigma_1 \sim \mathrm{Exp}(\gamma)$，这里的指数随机变量 $\mathrm{Exp}(\gamma)$ 的参数为 $\gamma > 0$。

定义3.如果存在一个概率分布 F，使得 K_F 具有一个非平凡的连续分量T，则过程 $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ 被称为 T-过程。

定义 4。回顾，η_B 在（21）中定义的是占用测度。设 φ 为一个 σ-有限测度。如果 $\varphi(B) > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_z [\eta_B] > 0$ 对于所有初始值z 以及所有 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$，均成立，则 $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ 称为 φ-不可约。

定义 5。若对于每个初始值 z 和 $\varepsilon > 0$，都存在一个紧集 K，使得过程 $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ 称为平均意义下依概率有界，如果

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}_z [Z_s \in K] \, \mathrm{d}s \geq 1 - \varepsilon.$$

这三个性质与正 Harris 常返有关，根据 [21], 中的定理 3.2，其内容如下。

定理 2. 假设 $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ 是一个 φ-不可约的 T-过程。那么，当且仅当 $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ 在平均意义下依概率有界时，它是正 Harris 常返的。

现在，我们要证明我们的过程 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 满足定理2的所有条件。它是定义在 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上、具有右连续路径的时间齐次强马尔可夫过程。空间 $\mathbb{R}$ 是一个局部紧可分度量空间。接下来要证明该过程是一个T-过程。

引理 5. 强度过程 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 是一个 T-过程。

证明。为此，我们证明对于每个固定的 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$，预解核 $R_1(\lambda, A) := \int_0^\infty \mathbb{P}_\lambda [\lambda_t \in A] e^{-t} \mathrm{d}t$ 关于 λ 连续。为此，注意到根据 Tonelli 定理，我们可以交换期望与积分，得到

$$R_1(\lambda, A) = \mathbb{E}_\lambda \left[\int_0^\infty I_A(\lambda_t) e^{-t} \mathrm{d}t \right] =: V(\lambda).$$

此外，根据[10]定理 31.9，我们知道

$$V(\lambda) = \tilde{V}(\lambda) := \mathbb{E}_\lambda \left[\int_0^\infty I_A(\tilde{\lambda}_t) \mathrm{d}t \right],$$

˜其中，$\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 表示过程 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$，但以恒定速率 1 被杀死。˜函数 $V(\lambda)$ 有界于 1，函数 $l(x) := I_A(x)$ 可测且可积。因此，根据 [10], 的定理 32.2，$V(\lambda)$ 是绝对连续的。核 R_1 是非平凡的，因为对所有 $\lambda \in \mathbb{R}_+$，$R_1(\lambda, \mathbb{R}_+) = 1$。因此，$R_1$ 是非平凡分量。□

为了证明强度过程是 φ-不可约的，我们必须确定一个合适的 σ-有限测度 φ。为此，第一步我们将证明，马尔可夫 Hawkes 强度依分布收敛于一个平稳概率分布 ν。为此，我们引入过程 $\mu_t = a + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i e^{-\beta(t-T_i)}$，即初始条件为 $\lambda_0 = a$ 的 Hawkes 强度。根据[5, 第 133], 页，μ_t 的分布随着 $t \to \infty$弱收敛于一个平稳分布。如果我们能够证明，无论初始强度 λ 如何，过程 $\{\lambda_t - \mu_t\}_{t\geq 0}$ 都依概率收敛于 0，那么根据斯卢茨基定理，$\lambda_t = \lambda_t - \mu_t + \mu_t$ 也依分布收敛于 ν 。

引理 6。令 $\lambda > a$ 任意但固定。则对于所有 $\varepsilon > 0$，$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_\lambda [|\lambda_t - \mu_t| > \varepsilon] = 0$。

证明。为此，我们想要使用马尔可夫不等式。因此，我们关注 $\mathbb{E}[|\lambda_t - \mu_t|]$ 作为 $t \to \infty$ 时的行为。为此，我们考察初始值增加 $\lambda - a$ 所引起的强度变化。对于固定的 λ，我们可以将相应的计数过程 $\{N_t\}_{t\geq 0}$ 分解为

$$N_t = N_t^\mu + M_t,$$

其中，M_t 统计由初始增量 $\lambda - a$ 引起的所有跳跃，而 N_t^μ 是一个强度为 μ_t 的带标记的 Hawkes 过程。

在时间区间 $(0, \infty)$ 内，初始增加 $\lambda - a$ 将导致

$$Z := \mathrm{Poi}\left((\lambda - a)\int_0^\infty e^{-\beta t}\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Poi}\left(\frac{\lambda - a}{\beta}\right)$$

带标记的 Hawkes 过程的跳跃。我们称这些跳跃为“子代”。˜每个子代都会使强度增加一个一般的 $\tilde{Y}$，因此会触发 Poi($\frac{Y}{\beta}$) 次额外跳跃，即“孙代”。这些孙代又会引发新的跳跃，由此形成分枝结构。我们将所有由 $\lambda - a$ 后代引发的跳跃称为一个簇。由于 $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty Y e^{-\beta t}\mathrm{d}t\right] = \frac{\mathbb{E}[Y]}{\beta} < 1$，此类簇中的跳跃数是一个可积随机变量，见[3]。随机变量 M_t 表示由 $\lambda - a$引起的强度增加所产生的后代数量，这些后代在时刻 t 之前出现，并且几乎必然收敛到可积随机变量 M_∞；该变量表示由额外的初始强度所引发的簇的大小。

由此，我们有

$$|\lambda_t - \mu_t| = (\lambda - a)e^{-\beta t} + \sum_{i=1}^{M_t} \tilde{Y}_i e^{-\beta(t-T_i^M)} \leq (\lambda - a)e^{-\beta t} + \sum_{i=1}^{M_\infty} \tilde{Y}_i,$$

其中，$\{T_i^M\}_{i\leq M_\infty}$ 是计数过程 $\{M_t\}_{t\geq 0}$的跳跃时刻。该上界是可积的。因此，根据控制收敛，我们有

$$\limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}_\lambda\left[|\lambda_t-\mu_t|\right] \leq \mathbb{E}_\lambda\left[\limsup_{t\to\infty}(\lambda-a)e^{-\beta t}+\sum_{i=1}^{M_\infty}\tilde{Y}_i e^{-\beta(t-T_i^M)}\right]$$
$$= \mathbb{E}_\lambda\left[\sum_{i=1}^{M_\infty}\limsup_{t\to\infty}\tilde{Y}_i e^{-\beta(t-T_i^M)}\right]=0.$$

该结论由马尔可夫不等式得出。 □

定理 3. 马尔可夫 Hawkes 强度依分布收敛于平稳分布 ν。

证明。令 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 和 $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ 如前所述。根据前一个引理，我们有 $\lambda_t-\mu_t\to 0$ 依概率收敛；根据 [5], ，我们得到 $\mu_t\to\nu$ 依分布收敛。由斯卢茨基定理可得

$$\lambda_t=\lambda_t-\mu_t+\mu_t\xrightarrow{\mathcal{D}}0+Z,$$

其中 $Z\sim\nu$。 □

要证明强度过程是 ν-不可约的，我们还需要平稳分布 ν 具有一定的光滑性。

引理 7. 平稳分布 ν 关于勒贝格测度绝对连续。

证明。根据 [19] 的命题 1.9。 □

令 $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$，并定义 $\nu_t(B):=\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{P}_\lambda\left[\lambda_s\in B\right]\mathrm{d}s$。

引理 8. 测度族 $\{\nu_t\}_{t\geq 0}$ 弱收敛到平稳测度 ν，当 $t\to\infty$ 时。

证明。由于 λ_t 依分布收敛到绝对连续测度 ν，因此对所有开集 U，有 $\liminf_{t\to\infty}\mathbb{P}_\lambda\left[\lambda_t\in U\right]\geq\nu(U)$。由此可知，对所有 $\varepsilon>0$，存在一个 $T>0$，使得对所有 $t\geq T$，都有 $\mathbb{P}_\lambda\left[\lambda_t\in U\right]\geq\nu(U)-\varepsilon.$。因此，

$$\begin{aligned}&\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{P}_\lambda\left[\lambda_s\in B\right]\mathrm{d}s\\&\quad\geq\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left(\int_0^T\mathbb{P}_\lambda\left[\lambda_s\in B\right]\mathrm{d}s+(t-T)(\nu(U)-\varepsilon)\right)\\&\quad=\nu(U)-\varepsilon.\end{aligned}$$

令 ε 趋于 0，可知对于所有开集B，$\liminf_{t\to\infty}\nu_t(B)\geq\nu(B)$。根据波特曼托定理，这意味着 $\{\nu_t\}_{t\geq 0}$ 弱收敛到平稳测度 ν。□

现在我们可以证明，我们的过程是 ν-不可约的。

引理 9. 马尔可夫强度过程 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 是 ν-不可约的。

证明。 设 B 是可测的，且满足 $\nu(B) > 0$ 并且 ν_t 如引理 8所述。由测度 ν的绝对连续性可知， B 是 ν的连续集。因此，$\lim_{t\to\infty}\nu_t(B) = \nu(B) > 0$。由此可得 $\mathbb{E}_\lambda[\eta_b] = \int_0^\infty \mathbb{P}_\lambda[\lambda_s \in B]\mathrm{d}s = \infty > 0$。 □

引理10. 马尔可夫强度过程 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 在概率意义下平均有界。

证明。 任取 $\varepsilon > 0$ ，并取 $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}_+$ 为紧集，使得 $\nu(K) \geq 1-\varepsilon$。由引理 7 和引理 8可得:

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{P}_\lambda[\lambda_s \in K]\,\mathrm{d}s = \nu(K) \geq 1-\varepsilon.$$

□

定理4. 马尔可夫强度过程 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 是正哈里斯常返的。

证明。 这可直接由定理 2 以及前述引理得出。 □

这说明我们的强度过程会以 $\nu(B) > 0$ 无限多次地访问所有集合，但我们仍需验证平稳分布的支撑集为 (a,∞)。首先，我们将证明该支撑集向上无界。

引理11。 ν 的支撑集向上无界。

证明。假设存在有限上界 $b > 0$ ，使得 $\nu((a,b)) = 1$。我们利用强度过程存在平稳版本这一事实，并将其记为 $\lambda'_t = a + (\lambda'_0 - a)$ $e^{-\beta t} + \sum_{i=1}^{N'_t} Y_i e^{-\beta(t-T'_i)}$，其中 $\lambda'_0 \sim \nu$。任取 $\delta > 0$。那么，我们有

$$\begin{aligned} 0 = \nu((b,\infty)) &= \mathbb{P}_\nu\left[\lambda'_\delta > b\right] \geq \mathbb{P}_\nu\left[\lambda'_\delta > b, N'_\delta = 1\right] \\ &= \mathbb{P}_\nu\left[\lambda'_\delta > b \,\middle|\, N'_\delta = 1\right]\mathbb{P}_\nu\left[N'_\delta = 1\right] \geq \mathbb{P}\left[Y > be^{\delta\beta}\right]\mathbb{P}_\nu\left[N'_\delta = 1\right] > 0, \end{aligned}$$

这就产生了矛盾。由于冲击事件 Y 的支撑集无界，因此平稳分布的支撑集也无界。□

引理12。 ν 的支撑集是形如 (b,∞) 的开集，其中 $b \geq a$。

证明。我们已经知道支撑集无界。假设平稳分布的支撑集不是一个开区间。由于 ν 相对于勒贝格测度绝对连续，我们有：存在一个区间 $(c,d) \subset (a,\infty)$，使得 $\nu((c,d)) = 0$, $\nu((a,c)) > 0$，并且 $\nu(d,\infty) > 0$。现在，我们假设这个区间是极大的。特别地，我们要求对所有 $\varepsilon > 0$ $\nu((d,d+\varepsilon)) > 0$。令 $-\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{c-a}{d-a+\varepsilon}\right) >$

$\delta > -\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{d-a}{d-a+\varepsilon}\right)$ 是确定性的。于是我们有，如果 $\lambda'_0 \in (d, d+\varepsilon)$，并且在时间0 和 δ之间没有发生跳跃，则 $\lambda'_\delta \in (c, d)$，这就产生了矛盾。将此写下来，我们得到

$$\begin{aligned}\nu((c,d)) &= \mathbb{P}_\nu\left[\lambda'_\delta \in (c,d)\right] \geq \mathbb{P}_\nu\left[\lambda'_\delta \in (c,d), \lambda'_0 \in (d, d+\varepsilon)\right] \\ &= \mathbb{P}_\nu\left[\lambda'_\delta \in (c,d) \,\middle|\, \lambda'_0 \in (d,d+\varepsilon)\right] \mathbb{P}_\nu\left[\lambda'_0 \in (d,d+\varepsilon)\right] \\ &\geq \mathbb{P}_\nu\left[N'_\delta = 0\right] \nu((d,d+\varepsilon)) > 0.\end{aligned}$$

这与假设矛盾。因此， ν 的支撑集是一个区间。 □

定理 5。 ν 的支撑集为（a， ∞）。

证明。此证明与引理12的证明类似。假设 ν 的支撑集不是(a, ∞)。那么存在一个 $\varepsilon > 0$ ，使得支撑集为$(a+\varepsilon, \infty)$，且 $\nu((a+\varepsilon, a+2\varepsilon)) > 0$。令 $\delta > -\frac{1}{\beta}\ln(\frac{1}{2})$。那么同样地，若$\lambda'_0 \in (a+\varepsilon, a+2\varepsilon)$且 $N'_\delta = 0$，二者发生的概率均为正，则 $\lambda'_\delta < a+\varepsilon$。这与 $\nu((a, a+\varepsilon)) = 0$的假设矛盾。□

这说明我们的强度过程会无限次访问(a, ∞) 中的每个开区间。由于它仅通过指数衰减的漂移以连续方式衰减，我们甚至可以得出，过程 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 会以概率 1 无限次访问每一个点$\lambda \in (a, \infty)$。

定理 6。令 $\lambda > a$ 为任意值， S_1^λ 为满足 $\lambda_{S_i^\lambda} = \lambda$ 的第一个正时间点。则存在一个 $r > 0$ ，使得 $\mathbb{E}_\lambda\left[e^{rS_1^\lambda}\right] < +\infty.$

证明。 马尔可夫霍克斯过程满足[4] 的情形1.1，且满足 β（$a-\lambda$） $\neq 0$ 对所有 $\lambda > a$均成立。因此，在平稳分布下，我们的过程穿过 λ 的连续穿越次数具有强度 μ_c（λ）：$= \beta$（$\lambda - a$）p（λ） > 0。其中， p（λ）表示平稳分布 ν 的密度。因此，我们有

$$\mathbb{P}_\nu\left[S_1^\lambda > t\right] = \exp\left(-\int_0^t \beta(\lambda - a)p(\lambda)\,\mathrm{d}s\right) = \exp(-t\beta(\lambda-a)p(\lambda)).$$

这意味着对于所有 $r < \beta(\lambda - a)p(\lambda)$， $\mathbb{E}_\nu\left[e^{rS_1^\lambda}\right] < +\infty$ 。

利用 ν 关于勒贝格测度绝对连续这一事实，我们有、】【

$$\mathbb{E}_\nu\left[e^{rS_1^\lambda}\right] = \int_a^\infty \mathbb{E}_x\left[e^{rS_1^\lambda}\right] p(x)\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

由此可得，对于勒贝格几乎处处的 $x > a$， $\mathbb{E}_x\left[e^{rS_1^\lambda}\right] < +\infty$ 。现在任取 $\lambda < y$ ，并记 $S_1^\lambda|_{\lambda_0=y}$ 为从 y出发首次越过水平 λ 的时刻。于是，存在一个 $x > y$ ，使得$\mathbb{E}\left[e^{rS_1^\lambda|_{\lambda_0=x}}\right] = \mathbb{E}_x\left[e^{rS_1^\lambda}\right] < +\infty$。强度过程 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 的向下运动是连续的。因此，如果它从 x 开始并到达水平 λ

它必定会越过 y。根据强马尔可夫性质，我们可以在到达 y 后重新开始该过程，因此

$$S_1^\lambda|_{\lambda_0=x} = S_1^y|_{\lambda_0=x} + S_1^\lambda|_{\lambda_0=y} \geq S_1^\lambda|_{\lambda_0=y}.$$

因此，

$$\mathbb{E}_y\left[e^{rS_1^\lambda}\right] \leq \mathbb{E}_x\left[e^{rS_1^\lambda}\right] < +\infty.$$

该性质对所有 λ 和 y 都成立，只要根据 λ 的选择，将 $y > \lambda$ 和 r 选得足够小。

现在考虑 $S_1^\lambda|_{\lambda_0=\lambda}$。那么，存在一个 $x < \lambda$ 使得 $\mathbb{E}_x\left[e^{rS_1^\lambda}\right] < +\infty$。由于 $\lambda > x$，我们知道存在一个正的 $\tilde{r} > 0$ 使得$\mathbb{E}_\lambda\left[e^{\tilde{r}S_1^x}\right] < +\infty$。现在，几乎必然有两种可能性。要么强度在返回到 λ 之前达到水平 x，即 $S_1^x|_{\lambda_0=\lambda} \leq S_1^\lambda|_{\lambda_0=\lambda}$，要么它首先返回到 λ。如果我们有 $\omega \in \Omega$，使得 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 的路径在返回到 λ之前达到水平 x，那么我们可以像之前一样使用重启论证，并得到等式 $S_1^\lambda|_{\lambda_0=\lambda}(\omega) = S_1^x|_{\lambda_0=\lambda}(\omega) + S_1^\lambda|_{\lambda_0=x}(\omega)$。对于几乎所有其他的 ω，我们有 $S_1^\lambda|_{\lambda_0=\lambda}(\omega) < S_1^x|_{\lambda_0=\lambda}(\omega) \leq S_1^x|_{\lambda_0=\lambda}(\omega) + S_1^\lambda|_{\lambda_0=x}(\omega)$。这就给出了对于足够小的 q，使得

$$\mathbb{E}_\lambda\left[e^{qS_1^\lambda}\right] \leq \mathbb{E}_\lambda\left[e^{qS_1^x}\mathbb{E}_x\left[e^{qS_1^\lambda}\right]\right] = \mathbb{E}_\lambda\left[e^{qS_1^x}\right]\mathbb{E}_x\left[e^{qS_1^\lambda}\right] < +\infty.$$

证明至此结束。 □

3.4. 指数测度变换。现在，我们在索赔为轻尾的假设下推导克拉姆–伦德贝格渐近结果。更具体地，我们作如下假设：

假设2。从现在起，我们假设索赔额 F_U 的分布相对于勒贝格测度是绝对连续的。此外，我们假设存在某个 $s_U \in (0, \infty]$，使得相应的矩母函数

$$M_U(s) := \mathbb{E}\left[e^{sU}\right]$$

对所有 $s < s_U$ 均有限，并且 $\lim_{s\to s_U} M_U(s) = \infty$。

我们关注破产概率的渐近行为

$$\psi(u) = \psi(u, \lambda) := \mathbb{P}_{(u,\lambda)}\left(\tau < +\infty\right), \tag{22}$$

其中

$$\tau := \inf\left\{t \geq 0 : X_t \leq 0\right\}.$$

用于证明破产概率收敛性的主要工具是定理2[26] 它给出了广义更新方程的解

$$Z(u) = \int_0^u Z(u-x)(1-p(u,x))B(\mathrm{d}x) + z(u) \tag{23}$$

在 $u \to \infty$ 下收敛，若 $B(x)$是概率分布，$p(u,x) \in [0,1]$ 在 u 中连续，并且 $z(u)$ 和 $\int_0^u p(u,x)B(\mathrm{d}x)$ 都是直接黎曼可积的。

此方法遇到的第一个问题是，该方程是单变量的，而破产概率 $\psi(u,\lambda)$ 取决于盈余和强度过程的初始值。为解决这一问题，我们使用第 3.3 节的结果，即强度是 Harris 正再生的。确切地说，我们利用了它以概率 1 无限多次返回初始值这一性质。这使我们能够选择更新时刻，使其与强度的再生时刻重合。第二个问题是，在原测度 $\mathbb{P}$ 下，对分布 B 的合适选择通常是亏格的。我们通过确定一个替代测度来绕过这一问题；在该测度下，破产几乎必然发生，并且 B 不再是亏格的。

现在，我们的主要目标是确定一个鞅 $\{M_t^{(r)}\}_{t\geq 0}$ 以及相应的替代测度，在该测度下破产几乎必然发生。为此，我们采用 [24], 的设想，即 $M_t^{(r)} = \exp(-rX_t - \alpha\lambda_t - \theta t)$。如果函数 $h_r(x,\lambda,t) = \exp(-rx-\alpha\lambda-\theta t)$ 属于扩展生成元的定义域并满足以下条件，那么该过程就是一个局部鞅。

$$\mathcal{A}h_r(x,\lambda,t) = 0.$$

我们先从后一条件入手，根据 (20)，它等价于

$$\begin{aligned}\mathcal{A}h_r(x,\lambda,t) = -crh_r(x,\lambda,t) - \alpha\beta(a-\lambda)h_r(x,\lambda,t) - \theta h_r(x,\lambda,t)\\ + \lambda h_r(x,\lambda,t)M_U(r)M_Y(-\alpha) - \lambda h_r(x,\lambda,t) = 0,\end{aligned}$$

对 x、λ、t 的所有取值都成立。由于 h_r 为正，我们可以除以 h_r，得到以下两个方程

$$-cr - \alpha\beta a - \theta = 0, \tag{24}$$

$$\alpha\beta + M_U(r)M_Y(-\alpha) - 1 = 0. \tag{25}$$

固定 r 后，我们得到关于两个未知变量 $\theta(r)$ 和 $\alpha(r)$ 的两个方程。我们聚焦于定义 $\alpha(r)$ 的方程 (25)。

引理 13。对于 $r \leq 0$ 以及某个 $r > 0$，方程 (25)有两个不同的解。

证明。首先，我们考虑 $r < 0$ 的情形。该函数

$$f_r(\alpha) := \alpha\beta + M_U(r)M_Y(-\alpha) - 1$$

具有凸性，并满足 $f_r(0) = M_U(r) - 1 < 0$。此外，$\lim_{\alpha\to\infty} f_r(\alpha) = \lim_{\alpha\to-\infty} f_r(\alpha) = \infty$。由连续性可知，在 $(-\infty, 0)$ 中至少存在一个根，在 $(0, \infty)$ 中至少存在一个根。根据凸性，相应的根是唯一的。对于 $r = 0$，我们有 $f_0(0) = 0$ and $\frac{\partial}{\partial\alpha} f_0(0) = \beta - \mathbb{E}[Y] > 0$。因此，存在某个 $\varepsilon > 0$ 使得 $f_0(-\varepsilon) < 0$，并且根据与之前相同的论证，我们可知 f_0 存在唯一的负根。对于 $r > 0$，我们看到函数 $f_r(\alpha)$ 在 r 中也是连续的（只要其有定义）。因此，存在某个 $\delta > 0$，使得对于所有 $r < \delta$，都有 $f_r(-\varepsilon) < 0$。同样，由于在 α 中的连续性和凸性，我们得到 $f_r(\alpha) = 0$ 存在两个解。□

定义 6。对于固定的 r，我们将 $\alpha(r)$ 定义为方程（25）的最大解。对于所有 $r \le r_{\max}$，该解都有良好定义，其中 $r_{\max}$ 满足

$$\min_{\alpha} (\alpha\beta + M_U(r_{\max})M_Y(-\alpha) - 1) = 0.$$

此外，我们定义函数

$$\theta(r) := -cr - \alpha(r)\beta a. \tag{26}$$

引理 14。映射 $r \to \alpha(r)$ 在 $(-\infty, r_{\max})$ 上是凹且可微的。此外，它满足 $\alpha(0) = 0$，并且对于所有使 $\alpha(r)$ 有定义的 $r \neq 0$，都有 $r\alpha(r) < 0$。

证明。由引理 13 的证明可知，f_0 有一个负根，且满足 $f_0(0) = 0$。因此，$\alpha(0) = 0$。对于 $r > 0$，有 $f_r(0) = M_U(r) - 1 > 0$，这意味着所有根都必须为负；而对于 $r < 0$，$f_r(0) = M_U(r) - 1 < 0$。因此，存在一个正根，并且对于所有使 $\alpha(r)$ 有定义的 $r \neq 0$，都有 $r\alpha(r) < 0$。

为证明 $\alpha(r)$ 的凹性，我们首先证明函数 $f(r, \alpha) := f_r(\alpha)$ 关于 (r, α) 是凸的，其定义域为 $(-\infty, s_U) \times (-s_Y, \infty)$，值域为 $\mathbb{R}$；其中 s_Y 和 s_U 分别在假设 1 和 2 中定义（若对所有位于 $(-\infty, s_U) \times (-s_Y, \infty)$ 之外的 (r, α)，令 $f(r, \alpha) = \infty$，则该函数作为从 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 到值域的函数甚至是凸且正常的）。为此，我们考虑 Hessian 矩阵

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} M_U''(r)M_Y(-\alpha) & -M_U'(r)M_Y'(-\alpha) \\ -M_U'(r)M_Y'(-\alpha) & M_Y''(-\alpha)M_U \end{bmatrix},$$

根据矩母函数的对数凸性，该矩阵仅有非负特征值。

现在，若取一些 $r \ge s$ 和 $\lambda \in [0, 1]$，使得 $\alpha(r)$ 有定义，则我们也可知 $\alpha(\lambda r + (1-\lambda)s)$ 有定义，且满足 $f(\lambda r + (1-\lambda)s, \alpha(\lambda r + (1-\lambda)s)) = 0$. 此外，由于它是最大的根，对于所有$\alpha > \alpha(\lambda r + (1-\lambda)s)$，我们都有 $f(\lambda r + (1-\lambda)s, \alpha) > 0$。由函数 f 的凸性可得

$$f(\lambda r + (1-\lambda)s, \lambda\alpha(r) + (1-\lambda)\alpha(s)) \le \lambda f(r, \alpha(r)) + (1-\lambda) f(s, \alpha(s)) = 0.$$

因此，$\lambda\alpha(r) + (1-\lambda)\alpha(s) \le \alpha(\lambda r + (1-\lambda)s)$。

我们仍需证明函数 $r \to \alpha(r)$ 可微。根据凹性，它几乎处处可微。具体而言，除某个可数集外，在每一点，单侧极限都存在，但并不相等。设 r 为使得 $\alpha(r)$ 的导数存在的点。那么，我们得到

$$\beta\alpha'(r) + M_U'(r)M_Y(-\alpha(r)) - \alpha'(r)M_U(r)M_Y'(-\alpha(r)) = 0,$$

也就是说，如果 $\beta - M_U(r)M_Y'(-\alpha(r)) \neq 0$，则等价于

$$\alpha'(r) = -\frac{M_U'(r)M_Y(-\alpha(r))}{\beta - M_U(r)M_Y'(-\alpha(r))}.$$

这对所有 $r < r_{\max}$ 都成立。在 $r = r_{\max}$ 的情况下，根 $\alpha(r_{\max})$ 也使 $f_{r_{\max}}(\alpha)$ 达到最小值。由于该函数是凸且可微的

α，我们有 $0 = \frac{\partial}{\partial\alpha} f_{r_{\max}}(\alpha(r_{\max})) = \beta - M_U(r_{\max})M_Y'(-\alpha(r_{\max}))$。对于所有$r < r_{\max}$，根 $\alpha(r)$ 并非极小值点；因此， $\alpha'(r)$ 有良好定义且连续。由导数的连续性可知， $\alpha(r)$ 在每个点 $r < r_{\max}$ 都可微。□

我们回顾一下，函数 θ 定义于式（26）中。

引理 15. 函数 $\theta(r)$ 是凸且可微的，并满足 $\theta(0) =0$ 和 $\theta'(0) < 0$。

证明。由于 $\theta(r) = -cr-\alpha(r)a\beta$ 是两个可微凸函数之和，因此它也可微且为凸函数，并且 $\theta(0) = 0$。在点 $r = 0$ 处的导数为

$$\theta'(0) = -c - \alpha'(r)a\beta = -c + \frac{\beta a\mathbb{E}[U]}{\beta - \mathbb{E}[Y]},$$

根据净利润条件，该值为负。证明完毕。 □

为了进一步分析，我们还需要以下重要假设。

假设 3. 从现在起，我们假设存在一个正解 R ，满足

$$\theta(r) = 0. \tag{27}$$

对于函数 θ ，该函数定义于（26）中。此外，我们假设存在一个$\varepsilon > 0$ 使得 M_U（$R+\varepsilon$）、 M_Y（$-\alpha$（$R+\varepsilon$）均有限。

定理 7. 过程

$$M_t^{(r)} := \exp(ru + \alpha(r)\lambda)\exp(-rX_t - \alpha(r)\lambda_t - \theta(r)t) \tag{28}$$

对所有 $0 \le r \le R+\varepsilon$，都是非负局部鞅。

证明。任取 $r \le R+\varepsilon$ ，并定义函数

$$h_r(x, \tilde{\lambda}, t) := \exp(-r(x-u) - \alpha(r)(\tilde{\lambda} - \lambda) - \theta(r)t).$$

我们证明该函数属于˜这一分段确定性马尔可夫过程的扩展生成元定义域，并满足 $\mathcal{A}h_r$（x， λ， t） $= 0$，由此可知这是一个局部鞅。函数 h_r 是绝对连续的。因此，根据 [10], 中的定理（26.14）和注记（26.16），我们只需证明对所有 $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}_{(u,\lambda)}\left[\sum_{i=1}^{n} |h_r(X_{T_i}, \lambda_{T_i}, T_i) - h_r(X_{T_i-}, \lambda_{T_i-}, T_i)|\right] < +\infty.$$

这显然对 $r \le 0$ 成立。对于情形 $r > 0$，我们注意到$\alpha(r) < 0$ ，并且跳跃过程 $\{N_t\}_{t\ge 0}$ 的补偿子为

$$\begin{aligned}\Lambda_t := \int_0^t \lambda_s \,\mathrm{d}s &= at + \frac{1}{\beta}(\lambda_0 - a)(1 - e^{-\beta t}) + \frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{N_t} Y_k(1 - e^{-\beta(t-T_k)}) \\ &= at + \frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{N_t} Y_k + \frac{1}{\beta}\lambda_0 - \frac{1}{\beta}\lambda_t.\end{aligned}$$

因此，对于所有 $i \le n$，我们有

$$\begin{aligned}
&-r(X_{T_i}-u)-\alpha(r)(\lambda_{T_i}-\lambda)-\theta(r)T_i \\
&=-rcT_i+r\sum_{j=1}^{i}U_j-\alpha(r)\left(\sum_{j=1}^{i}Y_j+\beta aT_i-\beta\Lambda_{T_i}\right)+crT_i+a\alpha(r)\beta T_i \\
&\qquad\qquad\le r\sum_{j=1}^{i}U_j-\alpha(r)\sum_{j=1}^{i}Y_j.
\end{aligned}$$

此外，注意到

$$h_r(X_{T_i},\lambda_{T_i},T_i)=h_r(X_{T_i-},\lambda_{T_i-},T_i)\exp\left(rU_i-\alpha(r)Y_i\right)>h_r(X_{T_i-},\lambda_{T_i-},T_i).$$

利用这一点，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{(u,\lambda)}\left[\sum_{i=1}^{n}\left|h_r(X_{T_i},\lambda_{T_i},T_i)-h_r(X_{T_i-},\lambda_{T_i-},T_i)\right|\right] \\
&\le 2\,\mathbb{E}_{(u,\lambda)}\left[\sum_{i=1}^{n}h_r(X_{T_i},\lambda_{T_i},T_i)\right]\le 2\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_{(u,\lambda)}\left[\exp\left(r\sum_{j=1}^{i}U_j-\alpha(r)\sum_{j=1}^{i}Y_j\right)\right] \\
&=2\sum_{i=1}^{n}M_U(r)^iM_Y(-\alpha(r))^i=2M_U(r)M_Y(-\alpha(r))\frac{M_U(r)^nM_Y(-\alpha(r))^n-1}{M_U(r)M_Y(-\alpha(r))-1}<+\infty.
\end{aligned}$$

由此，函数 h_r 属于扩展生成元的定义域，并且根据 $\alpha(r)$ 和 $\theta(r)$ 的构造，它满足 $\mathcal{A}h_r(x,\lambda,t)=0$。证明完毕。□

定理 8。令 $r<R+\varepsilon$ 对于某个 $\varepsilon>0$。那么，$M^{(r)}=\{M_t^{(r)}\}_{t\ge0}$在 (28) 中定义的是一个期望为 1 的真鞅。

证明。固定 $r<R+\varepsilon$ 并令 $\{\varrho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为局部鞅 $\{M_t^{(r)}\}_{t\ge0}$的局部化停时序列。于是，根据 [13],中的引理 2.2.2，若对任意固定的 t，族 $\mathcal{X}=\{M_{(r)\,t\wedge\varrho_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$一致可积，则 $\{M_t^{(r)}\}_{t\ge0}$ 是鞅。根据 de La Vall´ee Poussin 定理，若存在单调递增凸函数 $G(t)$，满足 $\lim_{t\to\infty}{}^{G_{(t)}\,t}=\infty$ 且 $\sup_{n\in A}\mathbb{E}\left[G(|Y_n|)\right]<+\infty$，则随机变量族 $\{Y_n\}_{n\in A}$ 一致可积。

由于 $r<R+\varepsilon$，存在一个 $\delta>0$ 使得 $r(1+\delta)<R+\varepsilon$ 且 $\{M_t^{(r(1+\delta))}\}_{t\ge0}$ 有定义。由于每个带有可积初值的非负局部鞅都是上鞅，我们有，对于所有 $t\ge0$，使得 $M_{(r(1+\delta))\,t}$ 可积，且其期望小于或等于 $M_0^{(r(1+\delta))}=1$。

现在令 t 和 n 为任意但固定的值。于是，我们有

$$\begin{aligned}\left(M^{(r)}_{t\wedge\varrho_n}\right)^{1+\delta} &= \exp\left(-r(1+\delta)(X_{t\wedge\varrho_n}-u)-\alpha(r)(1+\delta)(\lambda_{t\wedge\varrho_n}-\lambda)\right)\\ &\quad\times\exp\left(cr(1+\delta)t\wedge\varrho_n+a\beta\alpha(r)(1+\delta)t\wedge\varrho_n\right)\\ &= M^{(r(1+\delta))}_{t\wedge\varrho_n}\exp\left((\alpha(r(1+\delta))-\alpha(r)(1+\delta))\lambda_{t\wedge\varrho_n}\right)\\ &\qquad\times\exp\left((\alpha(r)(1+\delta)-\alpha(r(1+\delta)))(\lambda+a\beta t\wedge\varrho)\right).\end{aligned}$$

如果我们能够证明 $\alpha(r(1+\delta))-\alpha(r)(1+\delta)\leq 0$，那么由$\lambda_{t\wedge\varrho_n}$ 的正性可得

$$\exp\left((\alpha(r(1+\delta))-\alpha(r)(1+\delta))\lambda_{t\wedge\varrho_n}\right)\leq 1,$$

并且，由于 $t\wedge\varrho_n\leq t$，我们将有

$$\begin{aligned}&\exp\left(\alpha(r)(1+\delta)-\alpha(r(1+\delta))\right)(\lambda_0+a\beta t\wedge\varrho))\\ &\quad\leq\exp\left((\alpha(r)(1+\delta)-\alpha(r(1+\delta)))\right)\exp\left((\lambda_0+a\beta t)\right),\end{aligned}$$

这是确定且有限的。
为证明这一点，我们将使用以下事实： $\alpha(r)$ 是凹的、可微的，并满足 $\alpha(0)=0$；参见引理 14。由此可得

$$\begin{aligned}\alpha(r(1+\delta))-\alpha(r)(1+\delta)&=\alpha(r(1+\delta))-\alpha(r)-\alpha(r)\delta\leq\alpha'(r)r\delta-\alpha(r)\delta\\ &=\alpha'(r)r\delta+\delta(\alpha(0)-\alpha(r))\leq\delta\alpha'(r)r\delta+\delta\alpha'(r)(-r)=0.\end{aligned}$$

这表明

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{(u,\lambda)}\left[\left(M^{(r)}_{t\wedge\varrho_n}\right)^{1+\delta}\right]&\leq\mathbb{E}_{(u,\lambda)}\left[\left(M^{(r(1+\delta))}_{t\wedge\varrho_n}\right)\right]\\ &\quad\times\exp\left(\alpha(r)(1+\delta)-\alpha(r(1+\delta))\right)(\lambda_0+a\beta t))\\ &\leq\exp\left(\alpha(r)(1+\delta)-\alpha(r(1+\delta))\right)(\lambda_0+a\beta t)).\end{aligned}$$

该界与 n 无关，并且对于固定的 t是有限的。因此，取上确界可得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}_{(u,\lambda)}\left[\left(M^{(r)}_{t\wedge\varrho_n}\right)^{1+\delta}\right]<+\infty.$$

因此， $\mathcal{X}$ 一致可积，且过程 $\{M^{(r)}_t\}_{t\geq 0}$ 是一个期望为 $M^{(r)}_0=1$ 的真鞅。
□

定义 7. 令 $R+\varepsilon>r\geq 0$，其中某个 $\varepsilon>0$。则我们定义测度 $\mathbb{Q}^{(r)}$ 为

$$\mathbb{Q}^{(r)}[A]=\mathbb{E}_{(u,\lambda)}\left[I_A M^{(r)}_t\right],\ \forall A\in\mathcal{F}_t.$$

引理 16. 在新测度 $\mathbb{Q}^{(r)}$ 下，多元过程 $\{(X_t, \lambda_t, t)\}_{t\geq 0}$再次成为一个生成元为

$$\mathcal{A}^{(r)} f(x,\lambda,t) = c\frac{\partial}{\partial x} f(x,\lambda,t) + \beta(a-\lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda} f(x,\lambda,t) + \frac{\partial}{\partial t} f(x,\lambda,t)$$
$$+ \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty e^{ru} e^{-\alpha(r)y} \left(f(x-u,\lambda+y,t) - f(x,\lambda,t)\right) F_U(\mathrm{d}u)\, F_Y(\mathrm{d}y).$$

证明。 这直接由 [23], 中的例 5.2 得出，其中研究了这种针对分段确定性马尔可夫过程的指数测度变换。 □

引理 17。在新测度 $\mathbb{Q}^{(R)}$ 下，破产几乎必然发生。

证明。 使用与引理 4 相同的思路，但采用替代的生成 $\mathcal{A}^{(R)}$，很容易看出

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}^{(R)}_{(u,\lambda)}[X_t]}{t} = -\theta'(R).$$

根据 θ 引理中证明的凸性15 以及存在某个$r < R$ 满足 $\theta(r) < 0$这一事实，我们有 $-\theta'(R) < 0$。因此，在新测度 $\mathbb{Q}^{(R)}$下，破产几乎必然发生。 □

我们将看到，在新测度 $\mathbb{Q}^{(r)}$ 下， $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 不再是马尔可夫标记霍克斯过程 $\{N_t\}_{t\geq 0}$的强度。事实上，其跳跃现在具有强度 $\{\lambda_t M_U(r) M_Y(-\alpha(r))\}_{t\geq 0}$，这仍然保持其常返性行为。

引理1 8。过程 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 在 $\mathbb{Q}^{(r)}$下是哈里斯常返的。

证明。首先，我们证明，在测度 $\mathbb{Q}^{(r)}$ 下，过程$\{M_U(r)M_Y(-\alpha(r))\lambda_t\}_{t\geq 0}$是马尔可夫标记霍克斯过程的强度$\{N_t\}_{t\geq 0}$。事实上，根据引理16 中给出的生成元形式，我们可以得出，单变量过程 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 是一个生成元为

$$\mathcal{A}^{(r),\lambda} f(\lambda) = \beta(a-\lambda) f'(\lambda) + \lambda M_u(r) M_Y(-\alpha(r)) \int_0^\infty (f(\lambda+y) - f(\lambda))\, \tilde{F}_Y(\mathrm{d}y),$$

其中，分布 $\tilde{F}_Y$由 $\tilde{F}_Y(\mathrm{d}y) = \frac{e^{-\alpha(r)y}}{M_Y\ -\alpha\ r(())} F_Y(\mathrm{d}y)$给出。因此，在 $\mathbb{Q}^{(r)}$下，过程 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 具有如下形式

$$\lambda_t = e^{-\beta t}(\lambda - a) + a + \sum_{i=1}^{N_t^{(r)}} \tilde{Y}_i e^{-\beta(t-T_i^{(r)})},$$

其中， $\{N_t^{(r)}\}_{t\geq 0}$具有强度过程 $\{M_U(r)M_Y(-\alpha(r))\lambda_t\}_{t\geq 0}$。

注意，分段确定性马尔可夫过程 $\{M_U(r)M_Y(-\alpha(r))\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 可表示如下

$$M_U(r)M_Y(-\alpha(r))\lambda_t = e^{-\beta t}(M_U(r)M_Y(-\alpha(r))\lambda - M_U(r)M_Y(-\alpha(r))a) + M_U(r)M_Y(-\alpha(r))a + \sum_{i=1}^{N_t^{(r)}} M_U(r)M_Y(-\alpha(r))\tilde{Y}_i e^{-\beta(t-T_t^{(r)})},$$

即，过程 $\{N_t^{(r)}\}_{t\geq 0}$ 是马尔可夫霍克斯过程。参数由衰减参数 β、基准强度 $aM_U(r)M_Y(-\alpha(r))\tilde{}$ 以及冲击分布 $F_Y(z/(M_U(r)M_Y(-\alpha(r))))$ 给出。

根据定理4 和（19），若现在能够证明

$$\beta > M_U(r)M_Y(-\alpha(r))\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(r)}}[Y] = M_U(r)M_Y(-\alpha(r))\mathbb{E}\left[\tilde{Y}\right], \tag{29}$$

那么 $\{M_U(r)M_Y(-\alpha(r))\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 会无限次返回到 $(aM_U(r)M_Y(-\alpha(r)) \infty)$ 中的每个点。这意味着 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 会无限次访问 (a,∞) 中的每个点。

为证明（29），首先注意，在我们新的测度下，Y 的期望为 $\frac{M_Y'}{M_Y}(-\alpha(r))$，且映射 $r \to \alpha(r)$ 单调递减。因此，根据引理 14 的证明，我们有 $-\frac{M_U'}{M_U}(r)M_Y(-\alpha(r))\beta - M_U(r)M_Y'(-\alpha(r))\leq 0$，这意味着

$$\beta - M_U(r)M_Y(-\alpha(r))\mathbb{E}[\tilde{Y}] = \beta - M_U(r)M_Y'(-\alpha(r)) > 0.$$

由此可知，我们的强度过程几乎必然会返回到 $(aM_U(r)M_Y(-\alpha(r)) \infty)$ 中的每一个点。□

3.5. Cramér-Lundberg 渐近性与更新论证。现在，固定一个初始值 λ，并令 S_1^λ、.....表示强度过程返回水平 λ 的回返时刻，即对所有 i，都有 $\lambda_{S_i^\lambda} = \lambda$。进一步地，我们通过 $\phi_1 = \min\left\{S_i^\lambda \text{ 定义更新时刻 } \{\phi_i\}_{i\geq 1}: X_{S_i^\lambda} < u\right\}$，并对 $j > 1$ 定义 $\phi_j = \min\left\{S_i^\lambda: \quad X_{S_i^\lambda} < X_{\phi_{j-1}}\right\}$。

这些时刻是强度过程的回归时刻与盈余过程的阶梯时刻的混合，即随机过程 $\{X_{S_i^\lambda}\}_{i\geq 1}$ 的阶梯时刻。正如我们所见，在原测度下，由于 $X_t \to +\infty$ $\mathbb{P}$-几乎必然成立，这些更新时刻可能是无穷的。但在替代测度 $\mathbb{Q}^{(R)}$ 下，盈余过程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 趋于 $-\infty$，而强度则无限次回到 λ。因此，这些时刻几乎必然有限。现在定义

$$\tilde{B}(x) := \mathbb{P}_{(u,\lambda)}[\phi_1 < +\infty, u - X_{\phi_1} \leq x]$$

and

$$p(u,x) := \mathbb{P}_{(u,\lambda)}[\tau \leq \phi_1, |\phi_1 < +\infty, X_{\phi_1} = u - x].$$

于是，通过对时刻 ϕ_1 的盈余分布进行条件化，可得

$$\psi(u,\lambda) = \int_0^u \psi(u-x,\lambda)(1-p(u,x))\,\tilde{B}(\mathrm{d}x) + \mathbb{P}_{(u,\lambda)}\left[\tau \le \phi_1, \tau < +\infty\right].$$

˜如前所述，分布 B 是亏损的。为了使用正规分布，我们将方程乘以 e^{Ru}，得到

(30)
$$\psi(u,\lambda)e^{Ru} = \int_0^u \psi(u-x,\lambda)e^{R(u-x)}(1-p(u,x))\,\tilde{B}(\mathrm{d}x) + e^{Ru}\mathbb{P}_{(u,\lambda)}\left[\tau \le \phi_1, \tau < +\infty,\right]$$

其中

$$B(\mathrm{d}x) := e^{Rx}\tilde{B}(\mathrm{d}x).$$

引理 19. 分布 B 是正规概率分布。

˜证明。根据 B的定义，我们有

$$\int_{\mathbb{R}} e^{Rx}\,\tilde{B}(\mathrm{d}x) = \mathbb{E}_{(u,\lambda)}\left[e^{R(u-X_{\phi_1})}I_{\{\phi_1<+\infty\}}\right].$$

时刻 ϕ_1 的鞅 $\{M_t^{(R)}\}_{t\ge 0}$ 具有如下形式

$$M_{\phi_1}^{(R)} = \exp(-R(X_{\phi_1}-u) - \alpha(R)(\lambda_{\phi_1}-\lambda)) = \exp(R(u-X_{\phi_1})).$$

因此，

$$\int_{\mathbb{R}} B(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}} e^{Rx}\,\tilde{B}(\mathrm{d}x) = \mathbb{Q}^{(R)}\left[\phi_1 < +\infty\right] = 1.$$

□

注意，方程（30）具有更新方程（23）的形式，即，

$$Z(u) = \int_0^u Z(u-x)(1-p(u,x))B(\mathrm{d}x) + z(u) \tag{31}$$

for

$$Z(u) := \psi(u,\lambda)e^{Ru} \quad \text{and} \quad z(u) := e^{Ru}\mathbb{P}_{(u,\lambda)}\left[\tau \le \phi_1, \tau < +\infty\right].$$

为了证明 $Z(u)$的收敛性，从而得到 Cram´er-Lundberg渐近性，我们必须验证 $z(u)$ 和 $\int_0^u p(u,x)B(\mathrm{d}x)$是直接黎曼可积的。为了保证上述函数的直接黎曼可积性，我们需要引入一个额外假设。

假设 4。我们假设存在一个 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\mathbb{E}_{(u,\lambda)}\left[e^{-(1+\varepsilon)R(X_{\phi_1}-u)}I_{\{\phi_1<+\infty\}}\right] < +\infty.$$

注3。随机时间 ϕ_1 取决于二元过程 $\{(X_t, \lambda_t)\}_{t\geq 0}$ 的行为。因此，这一假设可能难以检验。另一种选择是条件

$$\mathbb{E}_{(u,\lambda)}\left[e^{-(1+\varepsilon)R(X_{S_1^\lambda}-u)}I_{\{S_1^\lambda<+\infty\}}\right]<+\infty,$$

根据引理10，这与假设 [24]等价。改变测度后，我们发现该假设等价于

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(1+\varepsilon)R}}\left[e^{\theta((1+\varepsilon)R)\phi_1}\right]<+\infty, \tag{32}$$

这表明了该假设的主要影响。根据更新时刻的结构，我们无法在破产发生的确切时刻观测到破产。假设4 确保这些更新时刻出现得足够频繁，从而在破产时间附近总有一个更新时刻，使我们不会错过盈余过程为负的事件。

现在我们将证明函数 $z(u)$和 $\int_0^u p(u,x)B(\mathrm{d}x)$是直接黎曼可积的。为此，我们将使用 [2],第154页上的命题V.4.1。该命题表明，只需证明这两个函数均连续，且存在有界的直接黎曼可积上界即可。

引理20。在假设1-4下，我们有

$$z(u)=e^{Ru}\mathbb{P}_{(u,\lambda)}\left[\tau\leq\phi_1,\tau<+\infty\right]$$

是直接黎曼可积的。

证明。 我们首先从证明函数 $z(u)$ 连续开始。事实上，由 (31) 可知，只需证明破产概率 $\psi(u,\lambda)$ 作为 $u>0$ 的函数是连续的。对于 $h>0$，根据 $\{(X_t,\lambda_t,t)\}_{t\geq 0}$ 的马尔可夫性质，我们有，

$$\begin{aligned}\psi(u,\lambda) &= \mathbb{P}(N_h=0)\psi(u+ch,\lambda)\\ &\quad+\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(N_h=k)\mathbb{E}\psi(u+c(T_1+\ldots+T_k)-U_1-\ldots-U_k).\end{aligned} \tag{33}$$

注意到$\lim_{h\to 0}\mathbb{P}(N_h=k)=0$ 当 $k\in\mathbb{N}$ 且 $\lim_{h\to 0}\mathbb{P}(N_h=0)=1$；例如参见 [16]。因此，根据引理1和控制收敛定理，我们可以得出 $\lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(N_h=k)\mathbb{E}\psi(u+c(T_1+\ldots+T_k)-U_1-\ldots-U_k)=0$，并且 $\psi(u,\lambda$是右连续的。在(33)的左侧，将 $u-ch$ 而非 u 代入 ψ 的自变量中，即可得到该函数的左连续性。

现在，令 $\varepsilon>0$ 使得 $\mathbb{E}_{(u,\lambda)}\left[e^{-(1+\varepsilon)R(X_{\phi_1}-u)}I_{\{\phi_1<+\infty\}}\right]<+\infty$。令 $r=(1+\varepsilon)R$。注意到

$$\begin{aligned}e^{ru}\mathbb{P}_{(u,\lambda)}\left[\tau\leq\phi_1,\tau<+\infty\right] &= e^{ru}\mathbb{E}_{(u,\lambda)}\left[I_{\{\tau<\phi_1\}}I_{\{\tau<+\infty\}}\right]\\ &= e^{ru}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(r)}}\left[I_{\{\tau<\phi_1\}}\exp\left(r(X_\tau-u)+\alpha(r)(\lambda_\tau-\lambda)+\theta(r)\tau\right)\right].\end{aligned}$$

由于 $r>0$ 且 $X_\tau<0$，因此 $\exp(rX_\tau)<1$，$\exp(\alpha(r)\lambda_\tau)$ 也同样成立。因此，

$$\begin{aligned}e^{ru}\mathbb{P}_{(u,\lambda)}\left[\tau\le\phi_1,\tau<+\infty\right]&\le e^{-\alpha(r)\lambda}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(r)}}\left[I_{\{\tau<\phi_1\}}\exp\left(\theta(r)\phi_1\right)\right]\\&\le e^{-\alpha(r)\lambda}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{(r)}}\left[I_{\{\phi_1<+\infty\}}\exp\left(\theta(r)\phi_1\right)\right]\\&=e^{-\alpha(r)\lambda}\mathbb{E}_{(u,\lambda)}\left[e^{-(1+\varepsilon)R(X_{\phi_1}-u)}I_{\{\phi_1<+\infty\}}\right]<+\infty.\end{aligned}$$

因此，存在一个正的常数 K 使得

$$e^{ru}\mathbb{P}_{(u,\lambda)}\left[\tau\le\phi_1,\tau<+\infty\right]\le Ke^{-(r-R)u}=Ke^{-\varepsilon u}$$

且上界有界且直接黎曼可积。这就完成了证明。□

引理 21. 在假设 1-4下，将 u 映射到 $\int_0^u p(u,x)e^{Rx}B(\mathrm{d}x)$的函数是直接黎曼可积的。

证明。注意到函数$u\to\int_0^u p(u,x)e^{Rx}B(\mathrm{d}x)$ 是连续的。为了确定一个有界的直接黎曼可积上界，我们任取但固定 u。然后，

$$\begin{aligned}\int_0^u p(u,x)e^{Rx}B(\mathrm{d}x)\le e^{Ru}\int_0^u p(u,x)B(\mathrm{d}x)&=e^{Ru}\mathbb{P}_{(u,\lambda)}\left[\tau\le\phi_1,\phi_1<+\infty\right]\\&\le e^{Ru}\mathbb{P}_{(u,\lambda)}\left[\tau\le\phi_1,\tau<+\infty\right].\end{aligned}$$

根据引理 20，我们知道上界是直接黎曼可积且有界的，从而完成了证明。□

现在我们可以证明下一个主要结果了。

定理 9. 在假设 1-4下，存在常数 $C^\lambda>0$，其取决于 λ，使得

$$\lim_{u\to\infty}\psi(u,\lambda)e^{Ru}=C^\lambda,$$

其中调整系数 $R>0$ 满足 Lundberg 方程 (27)。

证明。根据索赔事件的绝对连续性以及 [24], 中引理 12 的证明，我们有 $p(u,x)$ 关于 u连续。由此以及引理 19-21， [26] 中的定理 2 的所有假设均得到满足，因此得出本定理的结论。□

注 4. 根据推论 1，通过（ $R>0$ 27）定义的调整系数等于式（16）中定义的“平移”Cramér-Lunberg 风险过程的调整系数。

注 5。 定理9 给出了比 [27]更强的结论，其中仅推导出了对数渐近性，表明 $\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u}\ln\psi(u)=R$。

4. Markovian Hawkes arrival process with exponentially distributed shocks and exponential claims

这里，我们给出一个满足所有假设的示例1-4 。为此，我们考虑一个具有强度过程（18）且冲击服从指数分布的马尔可夫霍克斯过程

$$Y_i \sim \mathrm{Exp}(\gamma).$$

为确保满足以下可积性条件 $\frac{\mathbb{E}[Y]}{\beta} < 1$ （见式（19）），我们假设

$$\beta\gamma > 1.$$

平稳分布。我们从以下一个颇有意义的事实开始。

定理 10. 强度过程 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 的平稳测度 ν 存在，且服从平移伽马分布，即

$$\nu \sim a + \mathrm{Gamma}(a/\beta, (\beta\gamma - 1)/\beta). \tag{34}$$

证明。根据 [9] （另见[9]）以及具有密度 p 的分段确定性马尔可夫过程（PDMP）的平稳分布 ν 满足

$$0 = \int_a^\infty \mathcal{A}f(x)\nu(\mathrm{d}x) = \int_a^\infty f(x)\mathcal{A}^* p(x)\,\mathrm{d}x,$$

对于生成元 $\mathcal{A}$ 定义域中的所有 $f \in D(\mathcal{A})$，其中 $\mathcal{A}^*$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子。如果我们能找到该方程的唯一解

$$\mathcal{A}^* g(\lambda) = 0, \tag{35}$$

因此，由于平稳分布的唯一性，该解必定是平稳分布的密度。

我们回顾一下，

$$\begin{aligned}\mathcal{A}f(\lambda) &= \beta(a-\lambda)f'(\lambda) + \lambda\int_0^\infty \gamma e^{-\gamma y}\left(f(\lambda+y) - f(\lambda)\right)\mathrm{d}y \\ &= \beta(a-\lambda)f'(\lambda) + \lambda\int_\lambda^\infty \gamma e^{-\gamma(y-\lambda)} f(y)\,\mathrm{d}y - \lambda f(\lambda)\end{aligned}$$

且伴随算子 $\mathcal{A}^*$ 满足

$$\int_a^\infty (\mathcal{A}f(\lambda))g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^\infty (f(\lambda))\mathcal{A}^* g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda,$$

对于定义域为 $\mathcal{A}$ 的所有函数 f 和 g。因此，对于 $b > a$,

$$\begin{aligned}\int_a^b (\mathcal{A}f(\lambda))g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda &= \int_a^b \beta(a-\lambda)f'(\lambda)g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \\ &\quad + \int_a^b \lambda g(\lambda)\int_\lambda^\infty \gamma e^{-\gamma(y-\lambda)} f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\lambda - \int_a^b \lambda f(\lambda)g(\lambda)\,\mathrm{d}y\lambda.\end{aligned}$$

此外，如果我们对第一个积分使用分部积分，就得到

$$\int_a^b \beta(a-\lambda)f'(\lambda)g(\lambda) = f(b)\beta(a-b)g(b) - \int_a^b f(\lambda)\left(\beta(a-\lambda)g'(\lambda) - \beta g(\lambda)\right)\,\mathrm{d}\lambda.$$

在第二项中，我们交换积分次序，得到

$$\int_a^b \lambda g(\lambda)\int_\lambda^\infty \gamma e^{-\gamma(y-\lambda)}f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^\infty f(y)\int_a^{\min(y,b)} \lambda g(\lambda)\gamma e^{-\gamma(y-\lambda)}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_a^b f(\lambda)\int_a^\lambda y g(y)\gamma e^{-\gamma(\lambda-y)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\lambda + \int_b^\infty f(\lambda)\int_a^b y\,g(y)\,\gamma e^{-\gamma(\lambda-y)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\lambda.$$

将这些结果代入后，我们得到

$$\int_a^b (\mathcal{A}f(\lambda))g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = f(b)\beta(a-b)g(b) + \int_b^\infty f(\lambda)\int_a^b y\,g(y)\,\gamma e^{-\gamma(\lambda-y)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\lambda$$
$$+\int_a^b f(\lambda)\left(\beta(a-\lambda)g'(\lambda) - \beta g(\lambda) + \int_a^\lambda y\,g(y)\,\gamma e^{-\gamma(\lambda-y)}\,\mathrm{d}y - \lambda\,g(\lambda)\right)\,\mathrm{d}\lambda.$$

若令 b 趋于无穷大，前两项将消失，从而得到伴随算子为

$$\mathcal{A}^*g(\lambda) = \beta(a-\lambda)g'(\lambda) - \beta g(\lambda) + \int_a^\lambda y\,g(y)\,\gamma e^{-\gamma(\lambda-y)}\,\mathrm{d}y - \lambda\,g(\lambda).$$

为求解方程（35），注意到

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{A}^*g(\lambda) = \beta(\lambda-a)g''(\lambda) + (2\beta-\lambda)g'(\lambda) + (\beta\gamma-1)g(\lambda) - \int_a^\lambda \gamma^2 e^{-\gamma(\lambda-y)}\,y\,g(y)\,\mathrm{d}y$$

且方程（35）的解满足

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma\mathcal{A}^*g(\lambda) + \frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{A}^*g(\lambda) \\ &= \beta(\lambda-a)g''(\lambda) - (\lambda + \beta(-2+a\gamma-\gamma\lambda))g'(\lambda) + (\beta\gamma-1)g(\lambda). \end{aligned}$$

该方程有如下形式的解

$$\begin{aligned} (36)\quad g(\lambda) &= c_1 e^{-\frac{(\beta\gamma-1)}{\beta}\lambda}(\lambda-a)^{\frac{a}{\beta}-1} \\ &\quad + c_2 e^{-\frac{(\beta\gamma-1)}{\beta}\lambda}(\lambda-a)^{\frac{a}{\beta}-1}\Gamma\left(1-\frac{a}{\beta}, (\frac{1}{\beta}-\gamma)(\lambda-a)\right), \end{aligned}$$

其中，Γ 表示不完全伽马函数。为了使函数 g 构成一个恰当的分布，我们必须设定 $c_2 = 0$。因此，$g(\lambda)$是参数为 $\frac{a}{\beta}$ 和 $(\beta\gamma-1)\ \beta$ 、支撑集平移了a的伽马分布的密度。至此，证明完成。□

注 6。这与 [8], 中的注 4.3 一致，其中他们利用相应拉普拉斯变换的极限推导了平稳分布。

假设1- 3 以及调整系数的形式 R。现在我们考虑盈余过程

$$X_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} U_i.$$

其中索赔服从参数为 $\mu > 0$ 的指数分布，即

$$U_i \sim \mathrm{Exp}(\mu).$$

在这种情况下，净利润条件可简化为

$$c > \frac{a\beta\gamma}{\mu(\beta\gamma - 1)},$$

且矩母函数 $M_U(r) = \frac{\mu}{\mu - r}$ 对所有 $r < \mu$ 都有定义，并且满足 $\lim_{r\to\mu} M_U(r) = +\infty$。由于 $Y_i \sim \mathrm{Exp}(\gamma)$，可得 $M_Y(-\alpha) = \frac{\gamma}{\gamma+\alpha}$，对 $\alpha > -\gamma$ 成立，且 $\lim_{\alpha\to-\gamma} M_U(\alpha) = +\infty$。因此，假设 1-2 均成立。

为验证假设3 也成立，注意到关于$\theta(r)$ 和 $\alpha(r)$ 的方程具有以下形式

$$\alpha^2\beta + \alpha(\beta\gamma - 1) + \frac{\mu\gamma}{\mu - r} - \gamma = 0,$$
$$\theta = -cr - \alpha a\beta.$$

我们可以求解关于 α 的二次方程，得到以下解

$$\alpha_{1,2} = \frac{1 - \gamma\beta}{2\beta} \pm \frac{\sqrt{(-4r\beta\gamma + (-1 + \beta\gamma)^2(\mu - r))(\mu - r)}}{2\beta(\mu - r)}.$$

正如我们根据已推导的理论所预期的那样，当 $r < r_{\max} = \frac{(\beta\gamma-1)^2}{(\beta\gamma+1)^2}\mu$ 时，α 有两个不同的实数解；当 $r = r_{\max}$ 时，~~有唯一~~解；若 $r > r_{\max}$，则没有实数解。

较大的解为

$$\alpha(r) = \frac{1 - \gamma\beta}{2\beta} + \frac{\sqrt{(-4r\beta\gamma + (-1 + \beta\gamma)^2(\mu - r))(\mu - r)}}{2\beta(\mu - r)}.$$

因此，函数 θ 为

$$\theta(r) = -cr + \frac{a(\beta\gamma - 1)}{2} - \frac{a\sqrt{(-4r\beta\gamma + (-1 + \beta\gamma)^2(\mu - r))(\mu - r)}}{2(\mu - r)}.$$

求解 $\theta(r) = 0$ 以得到调整系数 R，可得三个解。具体而言，

$$r_1 = 0,$$
$$r_2 = \frac{-a + a\beta\gamma + c\mu - \sqrt{(a(1 + \beta\gamma))^2 - 2ac(-1 + \beta\gamma)\mu + c^2\mu^2}}{2c},$$
$$r_3 = \frac{-a + a\beta\gamma + c\mu + \sqrt{(a(1 + \beta\gamma))^2 - 2ac(-1 + \beta\gamma)\mu + c^2\mu^2}}{2c}.$$

这似乎令人惊讶，因为根据引理 15，我们知道 θ 是凸函数；因此，我们原本预期会有两个根。为解开这个疑问，我们进一步考察第三个根 r_3，发现

$$r_3 = \frac{-a + a\beta\gamma + c\mu + \sqrt{(a(1+\beta\gamma))^2 - 2ac(-1+\beta\gamma)\mu + c^2\mu^2}}{2c} = \frac{-a + a\beta\gamma + c\mu + \sqrt{(a(-1+\beta\gamma) - c\mu)^2 + 4a^2\beta\gamma}}{2c} \geq \frac{-a + a\beta\gamma + c\mu + |(a(-1+\beta\gamma) - c\mu)|}{2c} \geq \frac{-a + a\beta\gamma + c\mu + (-a(-1+\beta\gamma) + c\mu)}{2c} = \mu.$$

在前面的部分中，θ 仅定义在区间（$-\infty$，$r_{\max}$）内。由于$\mu > r_{\max} = \frac{(\beta\gamma-1)^2\mu}{(\beta\gamma+1)^2}$，我们看到第三个根不在所考虑的定义域内。

为确保第二个根

$$R = r_2 = \frac{-a + a\beta\gamma + c\mu - \sqrt{(a(1+\beta\gamma))^2 - 2ac(-1+\beta\gamma)\mu + c^2\mu^2}}{2c}$$

（即我们的调整系数）属于定义域，因此必须假设附加条件

$$c < \frac{a(\beta\gamma+1)^2}{2(\beta\gamma-1)\mu}. \tag{37}$$

这一条件（37）恰好对应于 [17], 中的（4.5），该条件用于证明一般 Hawkes 情形下破产概率对数的收敛性。最后，注意存在一个 $\varepsilon > 0$使得 $M_U(R+\varepsilon)$、$M_Y(-\alpha(R+\varepsilon))$ 均为有限值，因此假设 3 成立。

复现时间的可积性条件：假设 4。最后，我们必须检查假设4 是否满足。为此，根据小节开头对停止规则的描述 ϕ_i，在小节 3.5 和（32）中，只需证明，对于固定水平 $\lambda > a$，存在某个 $r > R$ 使得

$$\mathbb{E}_{\lambda}^{\mathbb{Q}^{(r)}}\left[e^{\theta(r)S_1^{\lambda}}\right] < +\infty. \tag{38}$$

为了证明（38），我们将采用定理 6的证明思路，即~我们确定某个常数 q 和 $\lambda < \lambda$ 使得

$$\mathbb{E}_{\lambda}^{\mathbb{Q}^{(r)}}\left[e^{qS_1^{\tilde{\lambda}}}\right] < +\infty \quad \text{and} \quad \mathbb{E}_{\tilde{\lambda}}^{\mathbb{Q}^{(r)}}\left[e^{qS_1^{\lambda}}\right] < +\infty.$$

为此，利用定理 6 的证明，我们回顾一下，在平稳状态下，复发时间 S_1^{λ} 是轻尾的，并且 $\mathbb{E}_{\nu}^{\mathbb{Q}^{(r)}}\left[e^{qS_1^{\lambda}}\right] < +\infty$ 对所有 $q < \beta(\lambda - a)p^{(r)}(\lambda)$ 均成立，其中 $p^{(r)}(\lambda)$ 表示测度 $\mathbb{Q}^{(r)}$ 下平稳分布的密度。

˜由于定理6的证明，我们有，对于几乎所有 $\lambda < \lambda$，$\mathbb{E}_{\lambda}^{\mathbb{Q}^{(r)}}\left[e^{qS_1^{\lambda}}\right] < +\infty$，其中 $q < \min\left(\beta(\lambda - a)p^{(r)}(\lambda)\ \beta(\tilde{\lambda} - a)p^{(r)}(\tilde{\lambda})\right)$。不幸的是，我们必须证明这对 $q = \theta(r)$ 成立，而该量取决于 r。此外，我们知道指数矩对几乎所有 λ 都是有限的˜，但我们不知道哪一个 λ 不满足这一性质。为绕过这些问题，我们旨在确定一个下界 K，使其适用于$\beta(\tilde{\lambda} - a)p^{(r)}(\tilde{\lambda})$，且独立于 r，并对 $\tilde{\lambda} \in I$一致成立，其中 I 是一个包含 λ 的区间。这将对所有 r 给出 $\mathbb{E}_{\lambda}^{\mathbb{Q}^{(r)}}\left[e^{KS_1^{\lambda}}\right] < +\infty$，从而使我们能够选择 $r > R$，使得 $\theta(r) < K$。因此，必要可积性条件 (38) 将得到满足。

由引理 18 的证明可知，在测度 $\mathbb{Q}^{(r)}$ 下，对于任意给定的 $r < r_{\max}$，马尔可夫霍克斯过程的强度过程 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ $\{N_t\}_{t\geq 0}$具有基准强度 $aM_U(r)$ $M_Y(-\alpha(r))$、衰减参数˜ ˜以及形式为 β的冲击 $M_U(r)M_Y(-\alpha(r))$ Y，其中 Y具有分布

$$\frac{e^{-\alpha(r)y}}{M_Y(-\alpha(r))}F_Y(\mathrm{d}y) = \frac{1}{\gamma + \alpha(r)}e^{-(\gamma+\alpha(r))y}\,\mathrm{d}y,$$

即冲击服从参数为的指数分布。

$$\gamma^{(r)} := \frac{\gamma + \alpha(r)}{M_U(r)M_Y(-\alpha(r))} = \frac{(\gamma + \alpha(r))^2(\mu - r)}{\gamma\mu}.$$

因此，我们可以使用已确定的36中服从指数分布的冲击下马尔可夫型 Hawkes 强度的平稳分布，从而得出我们的过程 $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$ 具有平稳密度

$$\begin{aligned} p^{(r)}(\lambda) &= (\lambda - a)^{\frac{M_U(r)M_Y(-\alpha(r))a}{\beta}-1} \\ &\quad\times \exp\left(-\frac{(\beta\gamma^{(r)} - 1)M_U(r)M_Y(-\alpha(r))}{\beta}(\lambda - a)\right) \\ &\quad\times (M_U(r)M_Y(-\alpha(r)))^{\frac{M_U(r)M_Y(-\alpha(r))a}{\beta}-1}\left(\frac{\beta\gamma^{(r)} - 1}{\beta}\right)^{\frac{aM_U(r)M_Y(-\alpha(r))}{\beta}} \\ &\quad\times \Gamma\left(\frac{M_U(r)M_Y(-\alpha(r))a}{\beta}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

现在选取某个 $\varepsilon > 0$，使得 $r_{\max} > R + \varepsilon$。于是，我们看到函数 $p^{(r)}(\lambda)$ 对所有 $r \in [R, R+\varepsilon]$ 都有定义，作为二元函数 $p(r, \lambda) := p^{(r)}(\lambda)$ 连续，且严格为正。因此，我们发现该函数在 $[R, R + \varepsilon] \times [\frac{\lambda+a}{2}, \lambda]$ 上有一个正的统一下界 K。

回顾一下，函数 $\theta(r)$ 是连续的，并且调整条件R 满足 $\theta(R) = 0$。由此，我们可以选择某个 $r \in [R, R + \varepsilon]$，使得

$\theta\left(r\right) < K\beta\left(\frac{\lambda-a}{2}\right)$。因此，对于这个特定的 r，有

$$\mathbb{E}_{\lambda}^{\mathbb{Q}^{(\bar{r})}}\left[e^{\theta(\bar{r})S_1^{\lambda}}\right] < +\infty.$$

因此，我们有所有假设均得到满足，并且，假设（37），根据定理 9 我们可以得出

$$\lim_{u\to+\infty}\psi(u,\tilde{\lambda})e^{Ru} = C^{\tilde{\lambda}},$$

对于一个正常数 C $\tilde{\lambda}$.

Acknowledgments

本研究全部或部分由奥地利科学基金（FWF）P 33317资助。为实现开放获取，作者已将 CC BY 公共版权许可应用于由本次投稿产生的任何作者接受稿版本。

Z. Palmowski 承认，这项研究部分由波兰国家科学中心资助，项目编号为 2021/41/B/HS4/00599。

References

[1] H. Albrecher 和 S. Asmussen。关于射击噪声 Cox 过程的破产概率与总索赔额分布。 *Scandinavian Actuarial Journal*, 2:86–110, 2006。[2] S. Asmussen。 *Applied Probability and Queues*。概率与数理统计 Wiley 丛书。John Wiley，奇切斯特，1995。[3] B. Basrak、O. Wintenberger 和 P. ˇZugec。关于带标记泊松簇模型的总索赔额。 *Adv. in Appl. Probab.*, 51(2):541–569, 2019。[4] K. Borovkov 和 G. Last。关于一类一般分段确定性马尔可夫过程的水平穿越。 *Adv. in Appl. Probab.*, 40(3):815–834, 2008。[5] P. Br´emaud、G. Nappo 和 G. L. Torrisi。带标记 Hawkes 过程达到平衡的收敛速率。 *J. Appl. Probab.*, 39(1):123–136, 2002。[6] L. Cui、A. Hawkes 和 H. Yi。Hawkes 过程矩的初等推导。 *Adv. in Appl. Probab.*, 52(1):102–137, 2020。[7] D. J. Daley 和 D. Vere-Jones。

An introduction to the theory of point processes. Vol. 。 *I*

《概率及其应用》（纽约）。Springer-Verlag，纽约，第二版，2003。基础理论与方法。[8] A. Dassios 和 H. Zhao。动态传染过程。 *Adv. in Appl. Probab.*, 43 3 814 846, 2011 ( ): – . [9] M. H. A. Davis。分段确定性马尔可夫过程：一类一般的非扩散随机模型。 *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)* 46 3 353 376, 1984 , ( ): – . [10] M. H. A. Davis。 *Markov models and optimization*。Chapman & Hall，伦敦和纽约，1993。[11] D. Denisov、S. Foss 和 D. Korshunov。重尾情况下随机停止和的渐近性质。 *Bernoulli*, 16(4):971–994, 2010。[12] M. Dwass。分枝过程中的总后代数及相关随机游走。

J. , : – .

Appl. Probability 6 682 686, 1969

[13] T. R. Fleming 和 D. P. Harrington。 *Counting processes and survival analysis*。概率与数理统计 Wiley 丛书：应用概率与统计。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1991。

[14] S. Foss、D. Korshunov 和 S. Zachary。*An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions*。运筹学与金融工程 Springer 丛书。Springer 纽约，2011。[15] U. Grenander。Harald Cram´er 生平与著作综述。*Scandinavian Actuarial Journal* 1 2 5, 1995。[16] A. G. Hawkes。一些自激和相互激励点过程的谱。*Biometrika*, 58(1):83–90, 1971。[17] D. Karabash 和 L. Zhu。带标记 Hawkes 过程的极限定理及其在风险模型中的应用。*Stoch. Models*, 31(3):433–451, 2015。[18] C. Kl¨uppelberg。次指数分布与积分尾。*J. Appl. Probab.*, 25 1 132( ): –141, 1988。[19] A. L¨opker 和 Z. Palmowski。分段确定性马尔可夫过程的时间反演。*Electron. J. Probab.*, 18, 29, 2013。[20] F. Lundberg。一、概率函数的近似表示。集体风险再保险，乌普萨拉，1903。[21] S. P. Meyn 和 R. L. Tweedie。马尔可夫过程的稳定性。II. 连续时间过程与抽样链。*Adv. in Appl. Probab.*, 25(3):487–517, 1993。[22] J. Mø ller 和 J. G. Rasmussen。Hawkes 过程的完美模拟。*Adv. in Appl.* , ( ): – . *Probab.* 37 3 629 646, 2005。[23] Z. Palmowski 和 T. Rolski。马尔可夫过程的指数测度变换技术。*Bernoulli*, 8(6):767–785, 2002。[24] S. Pojer 和 S. Thonhauser。马尔可夫射击噪声环境中的破产概率。*J. Appl. Probab.*, 2022。[25] T. Rolski、H. Schmidli、V. Schmidt 和 J. Teugels。*Stochastic processes for insurance and finance*。概率与统计 Wiley 丛书。John Wiley & Sons, Ltd.，奇切斯特，1999。[26] H. Schmidli。更新定理的推广及其在风险理论中的应用。*Ann. Appl. Probab.*, 7(1):121–133, 1997。[27] G. Stabile 和 G. L. Torrisi。具有非平稳 Hawkes 索赔到达的风险过程。*Method. Comput. Appl. Prob.*, 12(3):415–429, 2010年9月。[28] L. Zhu。具有非平稳到达和次指数索赔的风险过程的破产概率。*Insurance Math. Econom.*, 53(3):544–550, 2013。

Zbigniew Palmowski, Wrocław University of Science and Technology, Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, Poland*Email address*: zbigniew.palmowski@pwr.edu.plSimon Pojer, Institute of Statistics, University of Technology Graz, Kopernikusgasse 24/III, 8010 Graz, Austria*Email address*: simon.pojer@tugraz.at
Stefan Thonhauser, Institute of Statistics, University of Technology Graz, Kopernikusgasse 24/III, 8010 Graz, Austria*Email address*: stefan.thonhauser@tugraz.at