arXiv:2304.03077v1 [math.NT] 6 Apr 2023

Jacquet–Langlands 型的 Flach 系统与四元数周期

王海宁

摘要。本文研究一个模形式的伴随 Selmer 群，该模形式可通过 Jacquet–Langlands 转移对应到定四元数代数上的一个模形式。我们证明，该 Selmer 群的长度由四元数模形式的 Petersson 范数的赋值给出。我们的证明基于一种欧拉系统论证。Flach 最初在研究椭圆曲线的伴随 Selmer 群时使用了这一论证，其方法是构造两个志村曲线乘积的动机上同调中的元素。然而，我们的构造不涉及西格尔模单位，因此更适合研究源自高维志村簇乘积的伴随动机。

目录

1. 引言 2 1.1. 主要结果 2 1.2. 证明策略 4 1.3. 记号与约定 6 2. 单值化滤过与志村曲线 6 2.1. 志村曲线与志村集 6 2.2. 志村曲线上的算术层提升 9 2.3. 单值化滤过与变形环 10 3. Flach 系统的构造 14 3.1. 动机上同调群 14 3.2. 志村曲线乘积的正则模型 15 3.3. Flach 元素的构造 16 3.4. Flach 元的互反律 16 4. 伴随塞尔默群的界 21 4.1. 塞尔默群概述 21 4.2. 关于伴随表示的主定理 22 4.3. Flach 系统论证 23 参考文献 26

日期：2023年4月7日。2000 数学主题分类。主要分类号：11G18、11R34、14G35。1

1. 引言

在 Flach [Flach1], 的一项开创性工作中，作者沿用 Kolyvagin 的思路，运用欧拉系统类型的论证，证明了椭圆曲线的伴随 Selmer 群有限。关键在于构造乘积模曲线的动机上同调中的适当元素，并在通过某种阿贝尔–雅可比映射将其映至伽罗瓦上同调时，严格控制其局部 ramification 行为。事实上，在 [Flach1], 中，这类元素由某个合适辅助素数处的 Hecke 对应以及精心选取的西格尔模单位构成。该元素在辅助素数处的局部 ramification 行为，从几何上反映了艾希勒–志村同余关系。此后， [Flach2] 和 [Weston1] 沿袭 Flach 原作中的类似策略，将这项工作拓展至模形式的伴随塞尔默群。近年来，Flach 的构造已大幅拓展至许多自守动机，并被用于研究与这些自守动机相关的岩泽理论问题。关于其中一些例子，可参见 [BDR1], [BDR2], [LZ], [LLZ], [LSZ] 。

在 [Flach1], 中，他的欧拉系统论证所导出的自然界限是椭圆曲线的模参数化的次数。已知模参数化的次数也与和该椭圆曲线相关的模形式的同余模密切相关，参见 [ARS] 和 [Zag]。本文将重新审视 [Flach1] 的构造，研究模形式可通过 Jacquet–Langlands 转移到定四元数代数上的模形式的情形。在此情形下，我们可以结合算术层提升的技巧来界定塞尔默群，这些技巧在几何层面体现了 Jacquet–Langlands 对应。特别是，我们的构造中不会出现西格尔模单位，因此更适用于高维志村簇乘积的情形。我们将这种 Flach 型系统称为 Jacquet–Langlands 型 Flach 系统，以区别于原始的 Flach 系统；按照 [Weston1] 的术语，后者属于 Eichler–Shimura 型。结果表明，在我们的情形下，伴随 Selmer 群的自然界限由经归一化 Jacquet–Langlands 转移得到的四元数模形式的 Petersson 范数给出。我们也将此 Petersson 范数称为模形式的四元数周期，这也解释了本文标题的由来。已知这个界限也是合理的，因为这一四元数周期也刻画了模形式之间的同余，关于此类联系尤其可参见 [PW11], [CH1] 和 [KO] 。

1.1.主要结果。为了陈述我们的主要结果，我们引入一些记号。这些记号有时会有所简化，且可能不同于本文正文中所使用的记号。在全文中，我们固定一个素数 $l \geq 5$。令 f 为$S_2^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(N))$中的归一化新形式。进一步假设我们有一个分解$N = N^+N^-$，使得$(N^+,N^-) = 1$，且 N^- 是无平方因子的，并且由奇数个素因子组成。令$B = B_{N^-}$为判别式为 N^- 的定四元数代数，并令$S^{\overline{B}}(N^+)$为 $B^\times$ 的级结构为 N^+ 的四元数模形式空间。设 $f^\dagger$ 是 $S^{\overline{B}}(N^+)$ 中在 Jacquet–Langlands 对应下与 f 对应且在整数意义下归一化的四元数模形式。我们记 $\mathcal{P}(f^\dagger) = \langle f^\dagger, f^\dagger \rangle$ 为 $f^\dagger$ 的 Petersson 范数，稍后我们将对此作进一步说明。令 $E =$ 有理数域(f) 为 f 的Hecke域，并固定一个嵌入 $\iota_l :$ 有理数域$^{\mathrm{ac}} \hookrightarrow C_l$，使其诱导出 E的一个处 λ。令 E_λ 为 E 在 λ 处的完备化，并令 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{E_\lambda}$ 为E_λ 的赋值环。我们固定一个局部参数 $\varpi \in \mathcal{O}$，并将其极大理想记为 $\lambda = (\varpi)$。我们记

由 k_λ 剩余域 $\mathcal{O}$。我们令 $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{\mathrm{N}^+,\mathrm{N}^-}$ 为对应于级结构为$\mathrm{N} = \mathrm{N}^+\mathrm{N}^-$ 且在整除 N^-的素数处为新的尖点形式的 λ-进海克代数。由于 f 是一个特征形式，我们有一个态射 $\phi_f\colon \mathbb{T} \to \mathcal{O}$，对应于 Hecke 特征值系统
f。令 $\mathfrak{m}$ 为由核 $\ker\{\mathbb{T} \xrightarrow{\phi_f} \mathcal{O} \to \mathcal{O}/\lambda\}$ 给出的极大理想。我们将考察通过 Eichler–Shimura 构造与 f 关联的伽罗瓦表示 $\rho_{f,\lambda}$

$$\rho_{f,\lambda} : \mathrm{G}_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathrm{E}_\lambda) = \mathrm{Aut}(\mathrm{V}_{f,\lambda})$$

其表示空间由$\mathrm{V}_\rho = \mathrm{V}_{f,\lambda}$给出。我们有时将$\rho_{f,\lambda}$ 简写为 ρ，并将$\overline{\rho} = \overline{\rho}_{f,\lambda}$ 的剩余表示记为 $\rho_{f,\lambda}$。令 Σ^+ 为整除 N^+ 的素数集合，令 Σ^-_{ram} 为整除N^- 且满足 $l \mid v^2 - 1$的素数 v 的集合。令 Σ_{mix}为整除 N^- 但不满足 $l \nmid v^2 - 1$的素数 v 的集合。回顾一下，对于在一个$\mathcal{O}$-代数 A 上的$\overline{\rho}$ 的变形 ρ_{A}，如果当 $l \nmid \#\overline{\rho}(\mathrm{I}_{\mathbf{Q}_v})$时， $\rho_{\mathrm{A}}(\mathrm{I}_{\mathbf{Q}_v})$与$\overline{\rho}(\mathrm{I}_{\mathbf{Q}_v})$具有相同的阶，或者当 $l \mid \#\overline{\rho}(\mathrm{I}_{\mathbf{Q}_v})$时， ρ_{A}在A 上具有秩一的$\mathrm{I}_{\mathbf{Q}_v}$-余不变元，则称 ρ_{A} 在素数 v 处是最小分歧的。如果 $\bar{\rho}$ 的所有提升在 v处都是最小分歧的，则称 $\bar{\rho}$ 在素数 v 处是最小的。

假设 1. 我们对 $\bar{\rho}$ 作出以下假设。

(1) $\bar{\rho}|_{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}(\zeta_l)}}$ 是绝对不可约的；*(2)* $\bar{\rho}$ 的像包含 $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_l)$；*(3)* $\bar{\rho}$ 在 Σ^+ 中的素数处是极小的；*(4)* $\bar{\rho}$ 在 Σ^-_{ram} 中的素数处是分歧的。

在此假设下，我们固定一个伽罗瓦稳定格 T_ρ，使其包含于 V_ρ，并定义 $\mathcal{M}_\rho = \mathrm{V}_\rho/\mathrm{T}_\rho$。对于每个 $n \geq 1$，令 $\mathrm{T}_n = \mathrm{T}_\rho \bmod \lambda^n$，并令 $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_\rho[\lambda^n]$。我们将研究与 $\mathcal{M}_\rho$ 相关联的伴随表示 $\mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)$，它也同构于 $\mathrm{Sym}^2(\mathcal{M}_\rho)(-1)$。我们将主要使用有限伽罗瓦模

$$\mathrm{M}_n = \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_n) = \mathrm{Sym}^2(\mathcal{M}_n)(-1)$$

在大多数情况下。
我们将研究 Bloch–Kato Selmer 群

$$\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)) = \mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}, \mathrm{Ad}^0(\rho) \otimes \mathrm{E}_\lambda/\mathcal{O})$$

$\mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)$ 的塞尔默群。接下来，我们的主要结果是关于该群大小的以下定理。

定理 1.1。 设 f 是$\mathrm{S}_2^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(\mathrm{N}))$ 中的一个新形式，它存在到四元数模形式 $f^\dagger$ 的归一化 ***Jacquet–Langlands*** 转移，该模形式属于 $\mathrm{S}^{\overline{\mathrm{B}}}(\mathrm{N}^+)$。令 $\eta = \varpi^\nu$ 和 $\nu = \mathrm{ord}_\lambda(\mathcal{P}(f^\dagger))$ 分别对应 f 的四元数周期 $\mathcal{P}(f^\dagger)$。我们假设

(1) 剩余伽罗瓦表示 $\overline{\rho}$满足假设 *1*；*(2)* 对每个 $n \geq 1$，伽罗瓦上同调群 H^1(有理数域(M_n)/有理数域,$\mathrm{M}_n)$ $= 0$，且其中有理数域(M_n) 是伽罗瓦模M_n的分裂域。

那么塞尔默群 $\mathrm{H}^1_f(\text{有理数域}, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho))$ 被 η湮灭，事实上其长度等于$\nu = \mathrm{ord}_\lambda(\mathcal{P}(f^\dagger))$。

我们指出，定理陈述中的第一个假设主要用于证明有关算术层提升定理以及某个 $\mathrm{R} = \mathrm{T}$ 定理的结果，我们认为该假设可以弱化。第二个假设则沿袭自欧拉系统论证

在 [Flach1] 和 [Weston1] 中使用；当伽罗瓦表示ρ满射到其像时，这一假设得以验证。

1.2. 我们的证明策略。 接下来，我们将介绍证明此定理的策略。为了给 $\mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)$ 的塞尔默群定界，我们将分别为每个 $n \geq 1$ 给 M_n 的塞尔默群定界。这自然引导我们在伽罗瓦上同调群 $\mathrm{H}^1(\mathrm{Q},\mathrm{N}_n)$ 中构造元素，其中 $\mathrm{N}_n = \mathrm{Sym}^2\mathrm{T}_n$ 是 M_n 的卡蒂埃对偶。

鉴于算术层提升定理，我们需要考虑志村曲线 $\mathrm{X}(\mathrm{B})$，其中 $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{p\mathrm{N}^-}$ 是判别式为 $p\mathrm{N}^-$ 的不定四元数代数，而 p 是 f 的所谓 n-可容许素数。这些素数是 f 的层提升素数，使得伽罗瓦表示 T_n 自然出现在 $\mathrm{X}(\mathrm{B})$ 的第一上同调群 $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\mathrm{Q}\ \mathcal{O}_n(1))$ 中。令 $\mathbb{T}^{[p]} = \mathbb{T}_{\mathrm{N}^+,\overline{p}\mathrm{N}^-}$ 为对应于级结构为 $\mathrm{N}p = \mathrm{N}^+\mathrm{N}^-p$ 的尖点形式的 λ-进海克代数，这些形式在整除 N^-p 的素数处均为新形式。由于 p 是 n-可容许的，因而是 f 的层提升素数，模 λ 的态射 ϕ_f 产生了 $\mathbb{T}^{[p]}$ 的一个极大理想 $\mathfrak{m}^{[p]}$。于是，$\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\mathrm{Q}\ \mathcal{O}_n(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}}$ 实际上同构于若干个 T_n 的副本。因此，N_n 将自然出现于

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}},\mathcal{O}_n(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}$$

并且我们需要在

$$\mathrm{H}^1(\mathbf{Q},\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}},\mathcal{O}_n(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}).$$

为此，我们考虑曲面 $\mathrm{X}(\mathrm{B})^2$ 的动机上同调群 $\mathrm{H}^3_{\mathcal{M}}(\mathrm{X}(\mathrm{B})^2,\mathrm{Z}(2))$，其元素由对 $(\mathrm{Z}\ f)$ 构成，其中 Z 是 $\mathrm{X}(\mathrm{B})^2$ 上的一条曲线，且 f 是 Z 上的有理函数，其 Weil 除子为零。

设 $\theta : \mathrm{X}(\mathrm{B}) \to \mathrm{X}(\mathrm{B})^2$ 为对角嵌入，则我们将定义 ***Flach*** 元$\Theta^{[p]}(\mathrm{B})$ 为由该对表示的 $\mathrm{H}^3_{\mathcal{M}}(\mathrm{X}(\mathrm{B})^2,\mathrm{Z}(2))$ 中的类

$$\Theta^{[p]}(\mathrm{B}) := (\theta_*\mathrm{X}(\mathrm{B}), p).$$

存在一个阿贝尔–雅可比映射

$$\mathrm{AJ}_{\mathfrak{m}^{[p]}} : \mathrm{H}^3_{\mathcal{M}}(\mathrm{X}(\mathrm{B})^2,\mathbf{Z}(2)) \to \mathrm{H}^1(\mathbf{Q},\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}},\mathcal{O}(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}})$$

该映射由 K-理论中的余维谱序列到 étale 上同调中的余维谱序列所诱导的陈特征映射给出。我们令

$$\kappa^{[p]} := \mathrm{AJ}_{\mathfrak{m}^{[p]}}(\Theta^{[p]}(\mathrm{B})) \in \mathrm{H}^1(\mathbf{Q},\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}},\mathcal{O}(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}})$$

并将此元素称为 $\mathrm{X}(\mathrm{B})^2$ 的 ***Flach*** 类。将映射 $\mathrm{AJ}_{\mathfrak{m}^{[p]}}$ 与从 $\mathrm{H}^1(\mathrm{Q},\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\ \otimes\mathrm{Q}\ \mathcal{O}(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}})$ 到 $\mathrm{H}^1(\mathrm{Q},\mathrm{N}_n)$ 的自然投影映射复合，我们得到所需的元素 $\kappa_n^{[p]} \in \mathrm{H}^1(\mathrm{Q},\mathrm{N}_n)$。

为了应用欧拉系统论证，我们需要分析对每个有理数域 Q 的地方 v，元素 $\kappa_n^{[p]}$ 在局部伽罗瓦上同调 $\mathrm{H}^1(\mathrm{Q}_v,\mathrm{N}_n)$ 中的限制。根据我们的假设，最值得关注的地方是 $v = p$，在此处我们将计算 $\kappa_n^{[p]}$ 在奇异部分 $\mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}(\mathrm{Q}_p,\mathrm{N}_n)$ 中的奇异留数 $\partial_p(\kappa_n^{[p]})$ 的深度。这里，深度是指秩一模 $\mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}(\mathrm{Q}_p,\mathrm{N}_n)$ 除以由 $\partial_p(\kappa_n^{[p]})$ 生成的直线所得商的湮灭子。为此，我们将证明关于 $\kappa_n^{[p]}$ 的所谓互反公式。令 $f^\dagger$ 为 f 的归一化 Jacquet–Langlands 转移，它实现于空间 $\Gamma(\mathrm{Z}(\mathrm{B})\ \mathcal{O})$ 中，该空间由定义在志村

集 $Z(\overline{B})$ 上的 值函数构成。在 $\Gamma(Z(B)\ \mathcal{O})_{\mathfrak{m}}\times\Gamma(Z(\overline{B})\ \mathcal{O})_{\mathfrak{m}}$ 上存在自然配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，我们将称周期 $\mathcal{P}(f^\dagger)$ 为 $=\langle f^\dagger, f^\dagger\rangle$；我们还将其称为 $f^\dagger$ 的 ***Petersson*** 范数，也称为 f 的 四元数周期。

定理 1.2. 假设 p 是 f 的一个 n-可容许素数，且 $\overline{\rho}$ 满足假设 *1*。

(1) 然后我们有一个同构

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}(\mathbf{Q}_p, \mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}}_p, \mathcal{O}_n(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}) \cong \bigoplus_{i=1}^{2}\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}), \mathcal{O}_n)^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}}.$$

(2) 设 $\partial_p^{(i)}(\kappa^{[p]})$ 是 $\partial_p(\kappa^{[p]})$ 在(1)中的$i=1$识别下，向 $\bigoplus_{2}\Gamma(\mathrm{Z}(\mathrm{B})\ \mathcal{O}_n)^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}}$中的第 i个副本的投影，则有

$$(\partial_p^{(i)}(\kappa^{[p]}), f^\dagger\otimes f^\dagger) = \mathcal{P}(f^\dagger). \tag{1.1}$$

这里，1.1 左侧的配对是 $\Gamma(Z(B)\ \mathcal{O}_n)^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}}\times\Gamma(Z(B)\ \mathcal{O}_n)^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}}$ 上的自然配对，由 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 上的配对诱导。这个定理足以说明 $\partial_p(\kappa_n^{[p]})$ 在 $\mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}(\mathrm{Q}_p, \mathrm{N}_n)$ 中的深度由 $\eta=\varpi^\nu$给出，其中 $\nu=\mathrm{ord}_\lambda(\langle f^\dagger, f^\dagger\rangle)$。对于其他地方，可以证明 $\mathrm{res}_v(\kappa_n^{[p]})$ 属于定义 Bloch–Kato Selmer 群的局部条件所定义的空间。然后，我们可以应用 [Flach1],[Weston1] 中发展的欧拉系统论证，证明有限 Bloch–Kato Selmer 群 $\mathrm{H}^1_f(\mathrm{Q}, \mathrm{M}_n)$ 被 η 消灭。接着，我们对每个 n 使用这一论证，从而得到 $\mathrm{H}^1_f(\mathrm{Q}, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho))$ 被 η 消灭。为证明主要结果，我们还需给出 $\mathrm{H}^1_f(\mathrm{Q}, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho))$ 的下界，这通过使用 Taylor–Wiles 方法给出的界来实现。更准确地说，我们按照 [Lun], [KO] 的工作，引入一个较小的 Selmer 群 $\mathrm{H}^1_S(\mathrm{Q}, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho))$，所依据的想法可追溯至 Khare 在 [Kha] 中的工作。作为 Taylor–Wiles 方法的推论，可以证明一个精细的 $\mathrm{R}=\mathrm{T}$ 定理，该定理表明，这个 Selmer 群的长度等于 $\mathrm{ord}_\lambda(\eta(\mathrm{N}^+, \mathrm{N}^-))$，其中某个同余数 $\eta(\mathrm{N}^+, \mathrm{N}^-)$ 刻画了 f 与 $S_2(\Gamma_0(N))$ 中在整除 N^- 的素数处为新形式的模形式之间的同余。另一方面，作为 $\Gamma(Z(B)\ \mathcal{O})_{\mathfrak{m}}$ 在适当局部化的海克代数上自由的推论，同余数 $\eta(\mathrm{N}^+, \mathrm{N}^-)$ 可以取为 η。因此，$\mathrm{ord}_\lambda(\eta)$ 也给出了 $\mathrm{length}_{\mathcal{O}}\mathrm{H}^1_f(\mathrm{Q}, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho))$ 的下界，故 $\mathrm{H}^1_f(\mathrm{Q}, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho))$ 的长度等于 $\mathrm{ord}_\lambda(\eta)$。

由上述概述可知，$\{\kappa_n^{[p]}\}$ 在 n 变化且 p 为一个n-可容许素数时所得到的元素，在 Mazur–Weston [Weston1]的意义下构成一个深度为 η 的部分几何欧拉系统。显然，算术层提升以及由此产生的 Jacquet–Langlands 对应在构造中发挥着重要作用，因此我们称这些元素$\{\kappa_n^{[p]}\}$ 构成一个 Jacquet–Langlands 型的Flach系统。在一个非常类似的情形下，我们将证明，对于某些四元数希尔伯特模曲面[Wang4]，这样的 Flach系统也存在。在这两个情形中，循环都由志村曲线给出，这些志村曲线在一个辅助素数处允许Drinfeld均匀化；由于该有理函数切出了整个特殊纤维，而该特殊纤维与志村曲线在这个辅助素数处的超奇异轨迹一致，这使得证明容易得多。然而，我们相信这并不是一个实质性的限制，并且对于出现在志村簇乘积的上同调中的伴随动机，只要 Jacquet–Langlands 原理

转移可以通过几何方式实现。例如，我们将在未来的工作中讨论作者研究的酉志村簇乘积情形 [LTXZZ]，以及作者本人研究的四元数酉志村簇乘积情形 [Wang3] 。

1.3. 记号与约定。 我们将采用代数数论和代数几何中的常用记号与约定。本文中出现的上同调均指 étale 上同调。对于域 K，我们用 K 表示 K 的可分闭包，并令 G_K =Gal(K/K) 表示 K 的伽罗瓦群。我们令 A 表示有理数域 Q 上的阿代尔环，A^∞ 表示有限阿代尔构成的子环。对于素数 p，$A^{\infty,\,p}$ 表示 A^∞ 的非 p 部分。

当 K 是局部域时，我们用 $\mathcal{O}_K$ 表示其赋值环，用 k 表示其剩余域。我们令 I_K 表示 G_K 的惯性子群。对于一个 G_K-模 M,

(1) H^1(K, M) 的有限部分 H^1_{fin}(K, M) 定义为 $H^1(k, M^{I_K})$。(2) H^1(K, M) 的奇异部分 H^1_{sin}(K, M) 定义为 H^1(K, M) 对于经由膨胀映射得到的 H^1_{fin}(K, M) 在 H^1(K, M) 中的像的商。(3) 令 x 为 H^1(K, M) 的一个元素，我们称 x 在 H^1_{sin}(K, M) 中的像为 x 的奇异留数。

设 K 为一个数域，令 K_v be 表示 K 在一个位处的完备化。假设 $x \in H^1$(K,M)，那么我们将 x 在限制映射下的像记作 $res_v(x)$

$$\mathrm{res}_v : \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{M}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{K}_v, \mathrm{M}).$$

我们将记 $\partial_v(x)$ 为 x 在复合映射下于 $H^1_{sin}(K_v, M)$ 中的像，映射为

$$\mathrm{res}_v : \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{M}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{K}_v, \mathrm{M})$$

以及自然映射 $H^1(K_v,M) \to H^1_{sin}(K_v, M)$。

2. 单值化滤过与志村曲线

2.1.志村曲线和志村集。设 N为一个分解为$N = N^+N^-$ 的正整数，其中 N^+ 和N^- 彼此互素。我们假设N^- 是平方自由的，并且是奇数个素数的乘积。设B为定义在有理数域Q上、判别式为N^- 的定四元数代数，设 B为定义在有理数域Q 上、判别式为pN^-的不定四元数代数。设 $\mathcal{O}_B$ 为B 的一个极大阶，且 $\mathcal{O}_{B,N^+}$ 为 $\mathcal{O}_B$中级结构为N^+ 的一个Eichler 阶。记G(B) 为由 B$^\times$ 给出的定义在有理数域 Q上的代数群，并令 K_{N^+} 为 G(B)(A^∞) 的由 $\widehat{\mathcal{O}}^\times_{B,N^+}$定义的开紧子群。记G(B) 为由 $B^\times$给出的定义在有理数域 Q 上的代数群。注意到我们有一个同构 $\overline{G}(B)(A^{\infty,\,p}) \xrightarrow{\sim} G(B)(A^{\infty,p})$，并且通过此同构，对于 G(B)($A^{\infty,p}$) 的任意开紧子群 K，我们将 K^p 视为 G(B)($A^{\infty,p}$)的一个开紧子群。设 $d \geq 4$ 为满足 $d \nmid pN$ 的一个素数。我们定义开紧子群

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}_{\mathrm{N}^+,d} = \{g = (g_v)_v \in \widehat{\mathcal{O}}^\times_{\mathrm{B},\mathrm{N}^+} : g_v \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod v \text{ for } v = d\}.$$

设 X(B) $= X_{N^+,pN^-,d}$(B) 为定义在有理数域上的、级结构为 K $= K_{N^+,d}$ 上文已解释的志村曲线。该曲线的复形点由以下双陪集给出

$$\mathrm{X}(\mathrm{B})(\mathbf{C}) = \mathrm{G}(\mathrm{B})(\mathbf{Q})\backslash\mathcal{H}^{\pm} \times \mathrm{G}(\mathrm{B})(\mathbf{A}^\infty)/\mathrm{K}.$$

在 Z[1/Nd] 上，存在 X(B) 的一个自然模型 $\mathfrak{X}$(B)，它粗略地表示以下模问题。设 S 是 Z[1/Nd] 上的测试概形，则 $\mathfrak{X}$(B)(S) 是三元组 (A ι, α_{N^+d}) 按同构分类所得的集合，其中

(1)A是 S 上相对维数为 2 的阿贝尔概形；(2) ι: $\mathcal{O}_B \hookrightarrow$ End(A) 是 A 上的 $\mathcal{O}_B$-作用；(3) α_{N^+d} 是一个 $K_{N^+,d}$-级结构，其含义按照 [Buz]: $\alpha_{N^+,d}$ 是同构集合的一个轨道

$$\alpha_{N^+,d} : (\mathcal{O}_B \otimes \mathbf{Z}/N^+d)_S \cong A[N^+d]$$

在 K =$K_{N^+,\ d}$ 的作用下。

也可以将 $K_{N^+,d}$-层结构看作由以下数据组成的一对 (C_{N^+}, α_d):

(1) C_{N^+} 是 A[N^+] 的一个有限平坦子群概形，其阶为 $(N^+)^2$ ，并且在 $\mathcal{O}_B$ 的作用下稳定且局部循环；(2) α_d :$(Z/dZ)^{\oplus 2}{}_S \to A[d]$ 是 S 上群概形的一个 $\mathcal{O}_B$-等变嵌入。

众所周知，这个模问题可由 Z[1/pNd] 上相对维数为 1 的射影概形表示。

上述模问题中的级结构 d 在本文中完全起辅助作用。它使上述模问题刚性化，因此我们得到一个精细模空间。然而，我们只对由 Eichler 阶 $\mathcal{O}_{B,\ N^+}$ 的 $\mathcal{O}_B$ 所定义的级结构为 K_{N^+} 的模形式空间感兴趣，因此我们也将考虑志村曲线 X_{N^+}(B)，其 C 点由双陪集空间给出

$$X_{N^+}(B)(\mathbf{C}) = G(B)(\mathbf{Q})\backslash \mathcal{H}^{\pm} \times G(B)(\mathbf{A}^{\infty})/K_{N^+}.$$

这条曲线在有理数域 Q 上有一个典范模型。我们不会依赖它的整模型，因为该模型仅由一个粗模空间定义。存在两个自然的退化映射

$$\pi_{0,d} : X(B) \to X_{N^+}(B) \quad \text{and} \quad \pi_{1,d} : X(B) \to X_{N^+}(B).$$

我们稍后将谨慎选择素数 d，使得级结构为 K_{N^+} 的模形式与级结构为 $K_{N^+,\ d}$ 的、在素数 d 处为新形式的模形式之间不存在同余。

令 $\overline{K}$为 G(B)(A$^\infty$) 的开紧子群，由 Eichler 阶 $\mathcal{O}_{\overline{B},\ N^+}$ 和上述级结构 d 给出:

$$\overline{K} = \overline{K}_{N^+,d} = \{g = (g_v)_v \in \widehat{\mathcal{O}}^{\times}_{\overline{B},N^+} : g_v \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod v \text{ for } v = d\}.$$

我们用以下双陪集定义志村集 $\overline{Z}$(B)

$$Z(\overline{B}) = G(\overline{B})(\mathbf{Q})\backslash G(\overline{B})(\mathbf{A}^{\infty})/\overline{K}. \tag{2.1}$$

令 $\overline{K_0}(p)$ 表示 G(B)(A$^\infty$) 的开紧子群，该子群由 $\overline{B}$ 中级结构为 $\mathcal{O}_{\overline{B},pN^+}$ 的 Eichler 阶以及上述级结构 $pN^+\ \overline{d}$ 给出。我们将 $Z^{Iw(p)}$(B) 定义为双陪集

$$Z_{Iw(p)}(\overline{B}) = G(\overline{B})(\mathbf{Q})\backslash G(\overline{B})(\mathbf{A}^{\infty})/\overline{K}_0(p). \tag{2.2}$$

如上文在曲线情形中所述， d-层结构也只是辅助性的。为了处理模形式 f 的真正级结构，我们还引入以下志村集。

令 K_{N^+} 为由 Eichler阶 $\mathcal{O}_{B,N^+}$ 给出的 $G(B)(A^\infty)$ 的开紧子群，然后我们令

$$Z_{N^+}(B) = G(B)(\mathbf{Q})\backslash G(B)(\mathbf{A}^\infty)/K_{N^+}. \tag{2.3}$$

注意，有两个退化映射

$$\pi_{0,d} : Z(B) \to Z_{N^+}(B) \quad \text{and} \quad \pi_{1,d} : Z(B) \to Z_{N^+}(B)$$

通过遗忘 d处的层结构。

设 Λ 是一个环。系数取 Λ 的上同调群 $H^0(Z(B), \Lambda)$，就是定义在集合 $Z(B)$ 上、取值于 Λ的连续函数所构成的集合。我们也将这个空间记作 $\Gamma(Z(B), \Lambda)$，并称之为取值于 Λ的 $Z(B)$ 上的四元数模形式空间。相同的记号也适用于志村集 $Z^{Iw(p)}(B)$ 和 $Z_{N^+}(B)$。

我们定义一个双线性配对

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Gamma(Z(B), \mathcal{O}) \times \Gamma(Z(B), E_\lambda/\mathcal{O}) \to \mathcal{O}$$

其定义公式为

$$\langle \zeta, \phi \rangle = \sum_{z \in Z(B)} |\Gamma_z|^{-1} \zeta\phi(z)$$

对于一个任意 $\zeta \in \Gamma(Z(B), \mathcal{O})$ 和 $\phi \in \Gamma(Z(B), E_\lambda/\mathcal{O})$。这里的有限群 Γ_z 定义为

$$B^\times(\mathbf{Q}) \cap zK^{(p)}_{N^+,d}(\mathcal{O}_B \otimes \mathbf{Z}_p)^\times z^{-1}$$

对于 $B(A^\infty)$ 中 z 的任意提升，仍记作同一符号。由于 $K_{N^+,\ d}$ 是整洁的，因此该因子是平凡的；这也是我们希望引入这个辅助整数 d 的另一个原因。因此，这个配对简化为

$$\langle \zeta, \phi \rangle = \sum_{z \in Z(B)} \zeta\phi(z).$$

上述配对诱导出一个 $\mathcal{O}_n$-线性配对

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Gamma(Z(B), \mathcal{O}_n) \times \Gamma(Z(B), \mathcal{O}_n) \to \mathcal{O}_n.$$

我们还可以考虑定义在 Z_{p^2} 上的上述模问题，它与 $X(B)$ 的 Drinfeld 均匀化有关。我们必须修改上述模问题中的第二个数据：要求嵌入 $\iota : \mathcal{O}_B \hookrightarrow \mathrm{End}(A)$ 是特殊的，其含义见 [BC, 131-132]。我们将所得的射影概形仍记作 $\mathfrak{X}(B)$。令 $X(B)$ 为 $\mathfrak{X}(B)$ 在 F_{p^2}上的特殊纤维。切列德尼克–德林费尔德一致化定理断言，形式概形 $\mathfrak{X}(B)^\wedge$ 可以由称为德林费尔德上半平面的形式概形 $\breve{\mathcal{M}}$ 一致化：

$$\mathfrak{X}(B)^\wedge \xrightarrow{\sim} G(B)(\mathbf{Q})\backslash \breve{\mathcal{M}} \times G(B)(\mathbf{A}^{\infty,p})/K^p. \tag{2.4}$$

上述一致化定理意味着模型 $\mathfrak{X}(B)$ 是正则的，且具有半稳定约化，特殊纤维 $X(B)$ 的所有不可约分支都是射影直线。更确切地说，下面的命题描述了其不可约分支的交叠性质。本文中我们采用以下记号：设 W 为一个概形，则记 $P^n(W)$ 为 W 上的 P^n-丛。例如，$P^1(Z(B))$ 是 $Z(B)$ 上的 P^1-丛。

命题 2.1. 我们可以通过志村集 $\mathrm{Z}(\mathrm{B})$ 和$\mathrm{Z}^{\mathrm{Iw}(p)}(\mathrm{B})$来描述概形 $\mathrm{X}(\mathrm{B})$ 。

(1) 概形 $\mathrm{X}(\mathrm{B})$ 是由志村集上的 $\mathbf{P}^1$-丛构成的并集

$$\overline{\mathrm{X}}(\mathrm{B}) = \mathbf{P}^1(\mathrm{Z}^\circ(\overline{\mathrm{B}})) \cup \mathbf{P}^1(\mathrm{Z}^\bullet(\overline{\mathrm{B}})).$$

其中，$\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{B})$ 和 $\mathrm{Z}^\bullet(\mathrm{B})$ 均同构于志村集 $\mathrm{Z}(\mathrm{B})$。

(2) 两个$\mathbf{P}^1$-丛 $\mathbf{P}^1(\mathrm{Z}^\bullet(\mathrm{B}))$ 和 $\mathbf{P}^1(\overline{\mathrm{Z}}^\circ(\mathrm{B}))$ 相交于一个点集，该点集可与志村集 $\mathrm{Z}^{\mathrm{Iw}(p)}(\mathrm{B})$等同。这个点集也与$\mathrm{X}(\mathrm{B})$上的奇点集一致。

证明。 这是由 Drinfeld 均匀化得到的一个众所周知的结果。例如，参见 [Wang1，命题 3.2]。
□

我们记

$$\pi^\circ : \mathrm{Z}_{\mathrm{Iw}(p)}(\overline{\mathrm{B}}) \to \mathrm{Z}^\circ(\overline{\mathrm{B}}) \quad \text{and} \quad \pi^\bullet : \mathrm{Z}_{\mathrm{Iw}(p)}(\overline{\mathrm{B}}) \to \mathrm{Z}^\bullet(\overline{\mathrm{B}})$$

由上述命题中的 (2) 给出的自然特化映射。这两个映射给出了 Z(B) 在 p 处的 Hecke 对应。$\mathrm{Gal}(\mathrm{F}_{p^2}/\mathrm{F}_p)$ 中的非平凡元素作用于 $\mathrm{X}(\overline{\mathrm{B}})$，并交换两个 P^1-丛 $\mathrm{P}^1(\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{B}))$ 和 $\mathrm{P}^1(\mathrm{Z}^\bullet(\mathrm{B}))$。它在集合 $\mathrm{Z}^{\mathrm{Iw}(p)}(\mathrm{B})$ 上的作用是经典的 Atkin–Lehner 对合。有关此内容，请参见 [BD1, §17] ，例如。

2.2. 志村曲线上的算术层提升。设 $f \in \mathrm{S}_2(\Gamma_0(\mathrm{N}))$ 是一个权 2 的新形式，N 如前所述。设 $\mathrm{E} = \mathrm{Q}(f)$ 是 f 的 Hecke 域。设 λ 是 E 中位于 l 之上的一个素点，E_λ 是 E 在 λ 处的完备化。设 ϖ 是 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathrm{E}_\lambda}$ 的局部参数，并记 $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}/\varpi^n$ 为 $n \geq 1$。我们令 $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{\mathrm{N}^+,\mathrm{N}^-}$ （分别为 $\mathbb{T}^{[p]} = \mathbb{T}_{\mathrm{N}^+,p\mathrm{N}^-}$）表示与级结构为 $\mathrm{N} = \mathrm{N}^+\mathrm{N}^-$ （分别为级结构为 $\mathrm{N}p = \mathrm{N}^+\mathrm{N}^-p$）且在整除 N^- （分别整除 $p\mathrm{N}^-$）的素数处为新的尖点形式相对应的 λ-进 Hecke 代数。这意味着 $\mathbb{T}$ 包含 N 的 $v \nmid d$ 处的 Hecke 算子 T_v ，并包含 $v \mid \mathrm{N}^-$ 处的 Hecke 算子 U_v 。类似地， $\mathbb{T}^{[p]}$ 包含 N 的 $v \nmid dp$ 处的 Hecke 算子 T_v ，并包含 $v \mid p\mathrm{N}^-$ 处的 Hecke 算子 U_v 。由于 f 是一个特征形式，我们有一个态射 $\phi_f : \mathbb{T} \to \mathcal{O}$ ，它对应于 f 的 Hecke 特征值系 $a_v(f)$。更确切地说，对于 N 的 $v \nmid$ 处，我们有 $\phi_f(\mathrm{T}_v) = a_v(f)$ ；对于 N 的 $v \mid$ 处，我们有 $\phi_f(\mathrm{U}_v) = a_v(f)$。

定义 **2.2 定义**。设 $n \geq 1$ 为一个整数。我们称素数 p 对 f是 n-可容许的 if

(1) $p \nmid \mathrm{N}$ and $l \nmid p^2 - 1$;
(2) $\varpi^n \mid p + 1 - \epsilon_p(f)a_p(f)$ for some $\epsilon_p(f) \in \{-1, 1\}$.

设 $\phi_{f,n} : \mathbb{T} \to \mathcal{O}_n$ 是映射 $\phi_f : \mathbb{T} \to \mathcal{O}$ 模 ϖ^n的约化。我们用 $\mathfrak{p}_{f,n}$ 表示此映射的核，并用 $\mathfrak{m}_f$ 表示包含 $\mathfrak{p}_{f,n}$的 $\mathbb{T}$ 的唯一极大理想。若附属于 f 的剩余伽罗瓦表示 $\bar{\rho}_{f,\lambda}$ 是绝对不可约的，我们就称 $\mathfrak{m}_f$剩余不可约。我们将始终假设 $\mathfrak{m}_f$ 绝对不可约

定义 2.3。 我们称辅助素数 d对 $\overline{\rho}_{f,\ \lambda}$ 是干净的，如果退化映射诱导出一个同构

$$(\pi_{1,d,*}, \pi_{2,d,*}) : \Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}), \mathcal{O})_{/\mathfrak{m}_f} \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathrm{Z}_{\mathrm{N}^+}(\overline{\mathrm{B}}), \mathcal{O})^{\oplus 2}_{/\mathfrak{m}_f}.$$

注意，根据中山引理，如果 d对 $\overline{\rho}_{f,\ \lambda}$ 是干净的，那么我们有一个同构

$$(\pi_{1,d,*},\pi_{2,d,*}):\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O})_{/\mathfrak{p}_{f,n}}\xrightarrow{\sim}\Gamma(\mathrm{Z}_{\mathrm{N}^+}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O})^{\oplus 2}_{/\mathfrak{p}_{f,n}}. \tag{2.5}$$

引理 2.4. 假设素数 d 对 $\overline{\rho}_{f,\lambda}$ 是干净的，这两个退化映射诱导出一个同构

$$(\pi_{1,d,*},\pi_{2,d,*}):\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}}_p,\mathcal{O}(1))_{/\mathfrak{p}_{f,n}^{[p]}}\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{\mathrm{N}^+}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}}_p,\mathcal{O}(1))^{\oplus 2}_{/\mathfrak{p}_{f,n}^{[p]}}$$

对于每个 $n\geq 1$

证明。 根据伊原引理 [DT，定理 1] 以及 X(B) 在 $\mathrm{X}_{\mathrm{N}^+}$(B) 上是 étale 的事实，该映射

$$(\pi_{1,d,*},\pi_{2,d,*}):\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}}_p,\mathcal{O}(1))_{/\mathfrak{m}^{[p]}}\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{\mathrm{N}^+}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}}_p,\mathcal{O}(1))^{\oplus 2}_{/\mathfrak{m}^{[p]}}$$

是满射的。根据 [BLR2], 的主要结果，我们有如下结论

(1) $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes$ 有理数域$_p,\mathcal{O}(1))_{/\mathfrak{m}_f^{[p]}}\cong\overline{\rho}_{f\,\lambda}^{\oplus d_1}$,对于某个正整数 d_1;

(2) $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{\mathrm{N}^+}(\mathrm{B})\otimes$ 有理数域$_p,\mathcal{O}(1))_{/\mathfrak{m}_f^{[p]}}\cong\overline{\rho}_{f\,\lambda}^{\oplus d_1^\dagger}$,对于某个正整数 $d_1^\dagger$。

假设 $\dim_{k_\lambda}\Gamma(\mathrm{Z}(\mathrm{B})\ \mathcal{O})_{/\mathfrak{m}_f}=d_2$ 且 $\dim_{k_\lambda}\Gamma(\mathrm{Z}_{\mathrm{N}^+}(\mathrm{B})\ \mathcal{O})_{/\mathfrak{m}_f}=d_2^\dagger$。那么 $d_1=d_2$ 且$d_1^\dagger=d_2^\dagger$，由 [LTXZZ 引理 6.4.2]。根据定义 2.3 中 d- 干净性的定义， $d_2=2d_2^\dagger$，因此 $d_1=2d_1^\dagger$。由中山引理可得结论。□

以下结果被称为志村曲线的分歧算术升层定理，最初见于 [BD2，定理5.15，推论 5.18]；另见 [Wang1，定理3.4]，其中给出了使用 Rapoport–Zink 谱序列的证明。

定理 2.5。 设 p 是 f 的一个 n-可容许素数。我们假设剩余伽罗瓦表示 $\bar{\rho}_{f,\ \lambda}$ 满足假设 ***1***。则存在一个满同态$\phi_f^{[p]}$，n： $\mathbb{T}^{[p]}\to\mathcal{O}_n$，使得 $\phi_f^{[p]}$，n 在所有远离 p 的 ***Hecke*** 算子处均与 $\phi_{f,\ n}$ 一致，并将$\mathrm{U}p$ 映至 ϵ_p（f）。我们将 $\phi_f^{[p]}$，n 的核记为 $\mathfrak{p}_f^{[p]}$，n，并将包含 $\mathfrak{p}_{f\,n}^{[p]}$, 的唯一极大理想记为 $\mathfrak{m}_f^{[p]}$。此外，我们有一个 $\mathcal{O}_n$- 模的同构

$$\Psi_n:\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O})_{/\mathfrak{p}_{f,n}}\cong\mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}(\mathbf{Q}_{p^2},\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}}_p,\mathcal{O}(1))_{/\mathfrak{p}_{f,n}^{[p]}}).$$

2.3. **单值化滤过与变形环**。 设 $\mathfrak{m}^?=\mathfrak{m}_f^?$ 和 $\mathfrak{p}_n^?=\mathfrak{p}_{f,\ n}^?$ 对于 $?\in\{\emptyset,[p]\}$。我们令 $\overline{\rho}=\overline{\rho}_{f,\ \lambda}$，并将 $\overline{\rho}$ 在 $\mathrm{G}\mathbb{Q}_v$ 上的限制记为 $\overline{\rho}_v$。由下文将要讨论的适当变形环上的自由性结果 Γ(Z(B) $\mathcal{O})_{\mathfrak{m}}$ 和 H^1(X(B) $\otimes$ $\mathrm{Q}_p,\mathcal{O}$(1)))$_{\mathfrak{m}^{[p]}}$ 可知，我们可以将上述同构改写为

$$\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O}_n)_{\mathfrak{m}}\to\mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}(\mathbf{Q}_{p^2},\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}}_p,\mathcal{O}_n(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}}).$$

此外，借助伽罗瓦变形理论中的工具，我们可以得到 H^1(X(B) $\otimes$ 有理数域$_p,\mathcal{O}_n$(1))$_{\mathfrak{m}^{[p]}}$ 关于 Γ(Z(B) $\mathcal{O}_n)_{\mathfrak{m}}$ 的典范表示。接下来我们将按照 [Wang2, §3.4] 对此进行回顾。

我们考虑如下分解

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathrm{Z}_{\mathrm{Iw}(p)}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O}) &= \Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathrm{Ind}_{\mathrm{Iw}(p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}(\mathcal{O}))\\ &= \Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathrm{St}(\mathcal{O}))\oplus\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O}).\end{aligned}$$

我们定义了 $\Gamma(\mathrm{Z}^{\mathrm{Iw}(p)}(\mathrm{B}),\mathcal{O}_\lambda)^{\mathrm{prim}}$ 的本原部分，使用正合列于 $\Gamma(\mathrm{Z}^{\mathrm{Iw}(p)}(\mathrm{B}),\mathcal{O}_\lambda)$

$$0\to\Gamma(\mathrm{Z}_{\mathrm{Iw}(p)}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O})^{\mathrm{prim}}\to\Gamma(\mathrm{Z}_{\mathrm{Iw}(p)}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O})\xrightarrow{(\pi_*^\circ\oplus\pi_*^\bullet)}\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O}_\lambda)\oplus\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O})\to 0 \tag{2.6}$$

类似地，我们使用正合列定义 $\Gamma(\mathrm{Z}^{\mathrm{Iw}(p)}(\mathrm{B}),\mathcal{O})^{\mathrm{prim}}$ 对 $\Gamma(\mathrm{Z}^{\mathrm{Iw}(p)}(\mathrm{B}),\mathcal{O})$ 的原始商

$$0\to\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O})\oplus\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O})\xrightarrow{(\pi^{\circ *}\oplus\pi^{\bullet *})}\Gamma(\mathrm{Z}_{\mathrm{Iw}(p)}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O})\to\Gamma(\mathrm{Z}_{\mathrm{Iw}(p)}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O})_{\mathrm{prim}}\to 0. \tag{2.7}$$

$\Gamma(\mathrm{Z}^{\mathrm{Iw}(p)}(\mathrm{B}),\mathcal{O}) = \Gamma(\mathrm{Z}(\mathrm{B}),\mathrm{St}(\mathcal{O}))\oplus\Gamma(\mathrm{Z}(\mathrm{B}),\mathcal{O})$ 的分解使我们可以将第一个正合列 (2.6) 改写为

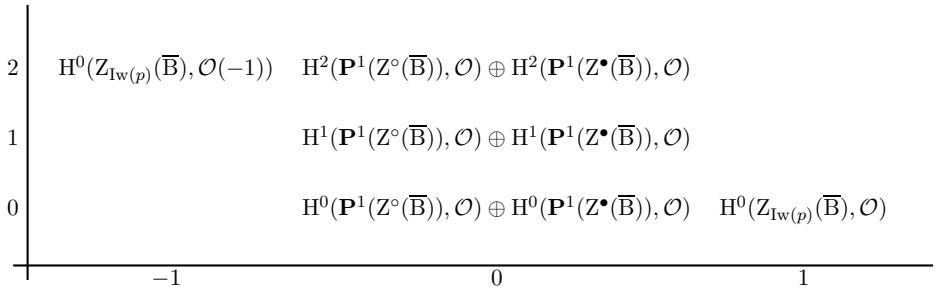
$$0\to\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathrm{St}(\mathcal{O}))^{\mathrm{prim}}\to\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathrm{St}(\mathcal{O}))\to\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O})\to 0 \tag{2.8}$$

这使我们能够将 $\Gamma(\mathrm{Z}^{\mathrm{Iw}(p)}(\mathrm{B}),\mathcal{O})^{\mathrm{prim}}$ 的本原部分与 $\Gamma(\mathrm{Z}(\mathrm{B}),\overline{\mathrm{St}}(\mathcal{O}))^{\mathrm{prim}}$ 的本原部分相对应，其中后者是 $\Gamma(\mathrm{Z}(\mathrm{B}),\mathrm{St}(\mathcal{O}))$ 的本原部分。该分解还使我们能够将第二个正合列 (2.7) 改写为

$$0\to\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O})\to\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathrm{St}(\mathcal{O}))\to\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathrm{St}(\mathcal{O}))_{\mathrm{prim}}\to 0 \tag{2.9}$$

它将原始商 $\Gamma(\mathrm{Z}^{\mathrm{Iw}(p)}(\mathrm{B}),\mathcal{O})^{\mathrm{prim}}$ 与 $\Gamma(\mathrm{Z}(\mathrm{B}),\mathrm{St}(\overline{\mathcal{O}}))$ 的原始商 $\Gamma(\mathrm{Z}(\mathrm{B}),\mathrm{St}(\mathcal{O}))^{\mathrm{prim}}$ 相识别。

$\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\mathrm{Q}_p,\mathcal{O}(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}}$ 的单值化滤过是利用 Rapoport–Zink 谱序列计算的，其第一页由下式给出。



(2.10)

其中我们省略了在极大理想 $\mathfrak{m}^{[p]}$ 处的局部化。因此，单值化滤过

$$\begin{aligned}0\subset^{\mathrm{E}^{1,0}_{2,\mathfrak{m}^{[p]}}}\mathrm{M}_1\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}}_p,\mathcal{O}(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}}&\subset^{\mathrm{E}^{0,1}_{2,\mathfrak{m}^{[p]}}}\mathrm{M}_0\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}}_p,\mathcal{O}(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}}\\ \subset^{\mathrm{E}^{-1,2}_{2,\mathfrak{m}^{[p]}}}\mathrm{M}_{-1}\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}}_p,\mathcal{O}(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}}&\end{aligned} \tag{2.11}$$

由下式给出

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_{2,\mathfrak{m}^{[p]}}^{1,0} = \Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}), \mathrm{St}(\mathcal{O}(1)))_{\mathrm{prim}}^{\mathfrak{m}^{[p]}};\\
&\mathrm{E}_{2,\mathfrak{m}^{[p]}}^{0,1} = 0;\\
&\mathrm{E}_{2,\mathfrak{m}^{[p]}}^{-1,2} = \Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}), \mathrm{St}(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}^{[p]}}^{\mathrm{prim}}.
\end{aligned}$$

对于? $=$ ram、un、mix，我们考虑如下全局变形问题

$$\mathcal{S}^{?} = (\overline{\rho}, \chi_l, \Sigma^{+} \cup \Sigma_{\mathrm{ram}}^{-} \cup \Sigma_{\mathrm{mix}}^{-} \cup \{p\} \cup \{l\}, \{\mathcal{D}_v\}_{v \in \Sigma^{+} \cup \Sigma_{\mathrm{ram}}^{-} \cup \Sigma_{\mathrm{mix}}^{-} \cup \{p\} \cup \{l\}})$$

其中

(1) 对于 $v \in \Sigma^{+} \cup \Sigma_{\mathrm{ram}}^{-}$, $\mathcal{D}_v$ 是对 $\overline{\rho}_v$ 的所有最小分歧提升进行分类的局部变形问题; (2) 对于 $v = p$, $\mathcal{D}_p$ 是 $\mathcal{D}_p^{?}$ 的 $\overline{\rho}_p$ 局部变形问题，依照 [LTXZZa，定义 3.51]; (3) 对于 $v \in \Sigma_{\mathrm{mix}}^{-}$, $\mathcal{D}_v$ 是 $\mathcal{D}_v^{\mathrm{ram}}$ 的 $\overline{\rho}_v$ 局部变形问题，依照 [LTXZZa，定义 3.51]; (4) 对于 $v = l$, $\mathcal{D}_l$ 是 $\mathcal{D}_l^{\mathrm{FL}}$ 的 $\overline{\rho}_l$ 局部变形问题，依照 [LTXZZa，定义 3.51]。

于是，我们得到全局变形环 R^{un}、$\mathrm{R}^{\mathrm{ram}}$ 和 $\mathrm{R}^{\mathrm{mix}}$，其关系为

(1) $\mathrm{R}^{\mathrm{un}} = \mathrm{R}^{\mathrm{mix}}/(x)$; (2) $\mathrm{R}^{\mathrm{ram}} = \mathrm{R}^{\mathrm{mix}}/(s - p^2)$.

我们还定义 $\mathrm{R}^{\mathrm{cong}} = \mathrm{R}^{\mathrm{ram}} \otimes_{\mathrm{R}^{\mathrm{mix}}} \mathrm{R}^{\mathrm{un}} = \mathrm{R}^{\mathrm{mix}}/(x, s - p^2)$。令 $\mathrm{T}^{\mathrm{ram}}$ 为 $\mathbb{T}^{[p]}$ 在 $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes$ 有理数域 $\mathcal{O}))$ 中的像。由定理 2.5，我们有一个同构

$$\Psi_n : \Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}), \mathcal{O})_{/\mathfrak{p}_n} \cong \mathrm{H}_{\mathrm{sin}}^1(\mathbf{Q}_{p^2}, \mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{Q}}_p, \mathcal{O}(1))_{/\mathfrak{p}_n^{[p]}}). \tag{2.12}$$

我们知道 $\mathrm{t}\,\mathrm{T}_{\mathfrak{m}^{[p]}}^{\mathrm{ram}} \neq 0$ 在此同构下。令 T^{un} 为 $\mathbb{T}$ 在 $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\Gamma(\mathrm{Z}(\mathrm{B})\ \mathcal{O}))$ 中的像 $\overline{\ }$.

引理 2.6. 假设假设 *1* 成立，且 d 对于 $\mathfrak{m}$ 是干净的。我们有以下结论。

(1) 我们有一个同构 $\mathrm{T}_{\mathfrak{m}}^{\mathrm{un}} \cong \mathrm{R}^{\mathrm{un}}$，它使 $\Gamma(\mathrm{Z}(\mathrm{B})\ \mathcal{O})_{\mathfrak{m}}$ 成为秩为二的自由 R^{un}-模。*(2)* 我们有一个同构 $\mathrm{T}_{\mathfrak{m}^{[p]}}^{\mathrm{ram}} \cong \mathrm{R}^{\mathrm{ram}}$，它使 $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \mathbf{Q}\ \mathcal{O})_{\mathfrak{m}^{[p]}}$ 成为秩为四的自由 $\mathrm{R}^{\mathrm{ram}}$-模。

证明。其对 [LTXZZa 定理 3.63] 作显然修改后，同样的证明表明 that t

(1) $\Gamma(\mathrm{Z}_{\mathrm{N}^+}(\overline{\mathrm{B}})\ \mathcal{O})_{\mathfrak{m}}$ 是一个自由的 $\mathrm{R}^{\mathrm{un}} = \mathrm{T}_{\mathfrak{m}}^{\mathrm{un}}$-模; (2) $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{\mathrm{N}^+}(\mathrm{B}) \otimes$ 有理数域 $\mathcal{O})_{\mathfrak{m}^{[p]}}$ 是一个自由的 $\mathrm{R}^{\mathrm{ram}} = \mathrm{T}_{\mathfrak{m}^{[p]}}^{\mathrm{ram}}$-模。

事实上，在假设 1 下，$\Gamma(\mathrm{Z}_{\mathrm{N}^+}(\mathrm{B})\ \mathcal{O})_{\mathfrak{m}}$ 根据 [CH1，命题 6.8]，是秩为 1 的自由 $\mathrm{T}_{\mathfrak{m}}^{\mathrm{un}}$ 模。因此，根据 d-干净性，$\Gamma(\mathrm{Z}(\mathrm{B})\ \mathcal{O})_{\mathfrak{m}}$ 是 $\mathrm{T}_{\mathfrak{m}}^{\mathrm{un}}$ 上的秩为 2 的自由模。通过引理 2.4 的同样证明可知，$\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{\mathrm{N}^+}(\mathrm{B}) \otimes$ 有理数域 $\mathcal{O})_{\mathfrak{m}^{[p]}}$ 是秩为 2 的自由 $\mathrm{T}_{\mathfrak{m}^{[p]}}^{\mathrm{ram}}$ 模，从而根据引理 2.4，$\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes$ 有理数域 $\mathcal{O})_{\mathfrak{m}^{[p]}}$ 是秩为 4 的自由 $\mathrm{T}_{\mathfrak{m}^{[p]}}^{\mathrm{ram}}$ 模。□

由 p 的 n-可容许性可知，$H^1(X(B)\otimes$ 有理数域$p, \mathcal{O}_n(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}}$作为$G\mathbb{Q}_p$-模是非分歧的，因此我们可以将其视为 $G^{\mathbf{F}_{p^2}}$-模。

命题 2.7. 存在一个典范的分裂短正合列，其对象为$G^{\mathbf{F}_{p^2}}$-模

$$0 \to \Gamma(Z(\overline{B}), \mathcal{O}_n(1))_{\mathfrak{m}} \to H^1(X(B)\otimes \overline{\mathbf{Q}}_p, \mathcal{O}_n(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}} \to \Gamma(Z(\overline{B}), \mathcal{O}_n)_{\mathfrak{m}} \to 0.$$

证明。 这一结果最初见于 [Wang2，命题 3.11]，我们将在此回顾主要的构造，因为其中一些内容稍后还会用到。首先，模 $\Gamma(Z(B),St(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}^{[p]}}$ 在 R^{mix} 上是自由的，这可用与证明 [LTXZZa，定理 3.6.3]相同的方法得到。它具有以下性质

(1) 我们有典范同构

$$\Gamma(Z(\overline{B}), St(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}^{[p]}} \otimes_{R^{\mathrm{mix}}} R^{\mathrm{un}} \cong \Gamma(Z(\overline{B}), (\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}}$$
$$\Gamma(Z(\overline{B}), St(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}^{[p]}} \otimes_{R^{\mathrm{mix}}} R^{\mathrm{ram}} \cong \Gamma(Z(\overline{B}), St(\mathcal{O}))^{\mathrm{prim}}_{\mathfrak{m}^{[p]}}$$
$$\Gamma(Z(\overline{B}), St(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}^{[p]}} \otimes_{R^{\mathrm{mix}}} R^{\mathrm{ram}} \cong \Gamma(Z(\overline{B}), St(\mathcal{O}))^{\mathfrak{m}^{[p]}}_{\mathrm{prim}};$$

(2) 存在一个 R^{ram}-模的短正合列

$$0 \to \Gamma(Z(\overline{B}), St(\mathcal{O}_\lambda)(1))^{\mathfrak{m}^{[p]}}_{\mathrm{prim}} \to H^1(X(B)\otimes \overline{\mathbf{Q}}_p, \mathcal{O}_\lambda(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}} \to \Gamma(Z(\overline{B}), St(\mathcal{O}_\lambda))^{\mathrm{prim}}_{\mathfrak{m}^{[p]}} \to 0.$$

第一个性质由将 2.8 和 2.9 中的两个正合列分别在 R^{mix} 上与 R^{un} 和 R^{ram} 张量得到。第二部分直接来自 $H^1(X(B)\otimes$ 有理数域$p, \mathcal{O}(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}}$的单值化滤过 (2.11)。这里我们依据以下事实，这些事实可从定义和 Jacquet–Langlands 对应直接看出：

(1) 模 $\Gamma(Z(B),St(\mathcal{O})(\mathbb{1}))^{\mathfrak{m}^{[p]}}$ 本原 和 $\Gamma(Z(B), St(\mathcal{O})(\mathbb{1}))^{\mathrm{prim}}_{\mathfrak{m}^{[p]}}$ 支撑于 R^{ram} 的 R^{mix} 的商上，且它们自然同构；(2)模 $\Gamma(Z(B)\ \mathcal{O}(1))_{\mathfrak{m}}$ 支撑于R^{un} 的 R^{mix}的商上；(3) 模 $H^1(X(B)\otimes$ 有理数域$p, \mathcal{O}(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}}$ 支撑于 R^{ram} 的 R^{mix}的商上。

接下来，我们将上面的 (2)中的正合列与 R^{cong} 在R^{ram}上的张量积进行张量化。由 $H^1(X(B)\otimes$ 有理数域$p, \mathcal{O}(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}}$在 R^{ram} 上的自由性可知，$\Gamma(Z(B), St(\mathcal{O})(1))^{\mathfrak{m}^{[p]}}$ 原始 和 $\Gamma(Z(B), St(\mathcal{O}))^{\mathrm{prim}}_{\mathfrak{m}^{[p]}}$ 在 R^{ram} 上都是自由的。因此，我们得到一个短正合列

$$0 \to \Gamma(Z(\overline{B}), \mathcal{O}(1))_{\mathfrak{m}} \otimes R^{\mathrm{cong}} \to H^1(X(B)\otimes \overline{\mathbf{Q}}_p, \mathcal{O}(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}} \otimes R^{\mathrm{cong}} \to \Gamma(Z(\overline{B}), \mathcal{O})_{\mathfrak{m}} \otimes R^{\mathrm{cong}} \to 0$$

其中我们利用 (1) 来识别二者

$$\Gamma(Z(\overline{B}), St(\mathcal{O}))^{\mathfrak{m}^{[p]}}_{\mathrm{prim}} \otimes_{R^{\mathrm{ram}}} R^{\mathrm{cong}} \quad \text{and} \quad \Gamma(Z(\overline{B}), St(\mathcal{O}))^{\mathrm{prim}}_{\mathfrak{m}^{[p]}} \otimes_{R^{\mathrm{ram}}} R^{\mathrm{cong}}$$

with $\Gamma(Z(B)\ \mathcal{O}_\lambda))_{\mathfrak{m}} \otimes_{R^{\mathrm{un}}} R^{\mathrm{cong}}$。令 $\mathfrak{p}_n^{\mathrm{cong}}$ 为 $\mathfrak{p}_n$ 在 R^{cong} 中的像，该像通过同构 $T^{\mathrm{un}} \cong R^{\mathrm{un}}$ 得到。注意，我们有一个同构 $R^{\mathrm{cong}}/\mathfrak{p}_n^{\mathrm{cong}} \cong \mathcal{O}_n$。再次利用 $\Gamma(Z(B)\ \mathcal{O})_{\mathfrak{m}}$ 在 R^{un} 上的自由性，我们得出所需的短正合列

$$0 \to \Gamma(Z(\overline{B}), \mathcal{O}_n(1))_{\mathfrak{m}} \to H^1(X(B)\otimes \overline{\mathbf{Q}}_p, \mathcal{O}_n(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}} \to \Gamma(Z(\overline{B}), \mathcal{O}_n)_{\mathfrak{m}} \to 0.$$

通过缩减理想 $\mathfrak{p}_n^{\mathrm{cong}}$。 □

备注 2.8。 以下备注将在后续论述中使用。 .

(1) 利用这个分裂正合序列，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}^1_{\mathrm{sing}}(\mathbf{Q}_{p^2},\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}}_p,\mathcal{O}_n(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}})\cong(\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}}_p,\mathcal{O}_n)_{\mathfrak{m}^{[p]}})^{\mathrm{G}_{\mathbf{F}_{p^2}}}\\&\cong(\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O}_n(1))_{\mathfrak{m}}\oplus\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O}_n)_{\mathfrak{m}})^{\mathrm{G}_{\mathbf{F}_{p^2}}}\\&\cong\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O}_n)_{\mathfrak{m}}\end{aligned}$$

这给出了同构

$$\Psi_n:\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O})_{/\mathfrak{p}_n}\cong\mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}(\mathbf{Q}_{p^2},\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}}_p,\mathcal{O}(1))_{/\mathfrak{p}_n^{[p]}})$$

在定理 2.5 中。

(2) 在分裂正合列的表示中

$$0\to\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O}_n(1))_{\mathfrak{m}}\to\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}}_p,\mathcal{O}_n(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}}\to\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O}_n)_{\mathfrak{m}}\to0,\tag{2.13}$$

(2.13) 中的子部分 $\Gamma(\mathrm{Z}(\mathrm{B})\ \mathcal{O}_n(1))_{\mathfrak{m}}$ 来自一个商

$$\bigoplus_{?\in\{\circ,\bullet\}}\mathrm{H}^0(\mathbf{P}^1(\mathrm{Z}^?(\overline{\mathrm{B}})),\mathcal{O}_n(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}}$$

(2.13) 中的商部分 $\Gamma(\mathrm{Z}(\mathrm{B})\ \overline{\mathcal{O}}_n)_{\mathfrak{m}}$ 来自一个商

$$\bigoplus_{?\in\{\circ,\bullet\}}\mathrm{H}^2(\mathbf{P}^1(\mathrm{Z}^?(\overline{\mathrm{B}})),\mathcal{O}_n(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}}.$$

3. Flach 系统的构造

3.1. 动机上同调群。设X 是域 F 上的一个有限型本征光滑簇。对于一个整数 d，考虑复形

$$\bigoplus_{x\in\mathrm{X}^{d-1}}\mathrm{K}_2k(x)\to\bigoplus_{x\in\mathrm{X}^d}k(x)^\times\xrightarrow{d_1}\bigoplus_{x\in\mathrm{X}^{d+1}}\mathbf{Z}\tag{3.1}$$

其中，X^i 表示簇X上余维为 i 的点集，$\mathrm{K}_2k(x)$ 是域 $k(x)$的Milnor$K$-群，第一个映射称为温和符号映射，第二个映射由除子映射给出。动机上同调群

$$\mathrm{H}^{2d+1}_{\mathcal{M}}(\mathrm{X},\mathbf{Z}(d+1))$$

被定义为该复形的上同调：$\mathrm{H}^{2d+1}_{\mathcal{M}}(\mathrm{X},\mathrm{Z}(d+1))$ 的元素由形式和$\sum_i(\mathrm{Z}_i,f_i)$ 表示，其中这些形式和由成对的余维 d 循环Z_i 在X 上以及非零有理函数 f_i 组成，并满足 $\sum_i\mathrm{div}_{\mathrm{Z}_i}(f_i)=0$ 作为 X 上的 Weil 除子。

该群也称为 X 的高阶 Chow 群 $\mathrm{CH}^d(\mathrm{X},1)$。存在一个陈特征映射

$$\mathrm{ch}:\mathrm{H}^{2d+1}_{\mathcal{M}}(\mathrm{X},\mathbf{Z}(d+1))\to\mathrm{H}^{2d+1}(\mathrm{X},\mathbf{Z}_l(d+1))\tag{3.2}$$

由 K-理论的余维谱序列到 étale 上同调的余维谱序列所诱导的陈特征映射给出。接下来，设 $\mathcal{O}$ 是一个分式域为 F、剩余域为 k 且特征 p 不等于 l 的完备局部环。设 $\mathfrak{X}$ 是定义在 $\mathcal{O}$ 上的本征正则概形，

X 是它的一般纤维，X 是它在 k 上的特殊纤维。在此情形下，动机上同调 $\mathrm{H}^{2d}_{\mathcal{M}}(\mathrm{X}, \mathrm{Z}(d))$ 与通常的 Chow 群 $\mathrm{CH}^d(\mathrm{X})$ 一致。存在一个映射

$$\mathrm{div} : \mathrm{H}^{2d+1}_{\mathcal{M}}(\mathrm{X}, \mathbf{Z}(d+1)) \to \mathrm{H}^{2d}_{\mathcal{M}}(\overline{\mathrm{X}}, \mathbf{Z}(d)) \tag{3.3}$$

通过将一对 $(\mathcal{Z}\ f)$ 映射到 f 在 $\mathfrak{X}$ 中 Z 的闭包 $\mathcal{Z}$ 上的除子来定义。注意，该除子完全支撑在 $\mathcal{Z}$ 的特殊纤维 Z 上。

3.2. 志村曲线乘积的正则模型。回顾一下，我们有整模型 $\mathfrak{X}(\mathrm{B})$，它是正则的，但在$\mathbf{Z}_{p^2}$上并不光滑。我们将考虑曲面 $\mathfrak{X}(\mathrm{B})^2$，但此时它将不再是正则概形。我们可以构造$\mathrm{X}(\mathrm{B})^2$ 的正则模型 $\mathfrak{Y}(\mathrm{B})$，并描述其在 $\mathbf{F}_{p^2}$ 上的特殊纤维 Y(B)。我们将进行以下构造并给出定义：

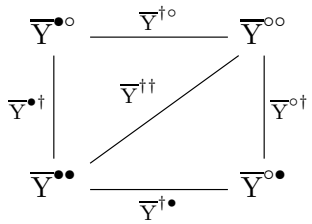
(1)令 $? \in \{\circ, \bullet\}$，记$\mathrm{X}^{?} = \mathrm{P}^1(\mathrm{Z}^{?}(\mathrm{B}))$。令$\mathrm{X}^{\dagger} = \mathrm{Z}^{\mathrm{Iw}(p)}(\mathrm{B})$。(2) 对于 $(?_0?_1) \in \{\circ, \bullet, \dagger\}^2$，记 有理数域$\mathrm{X}^{?_0,?_1} = \mathrm{X}^{?_0} \times \mathrm{X}^{?_1}$。(3) 对于 $(?_0?_1) \in \{\circ, \bullet\}^2$，那么我们注意到

$$\overline{\mathrm{Q}}^{?_0?_1} = \mathbf{P}^1(\mathrm{Z}^{?_0}(\overline{\mathrm{B}})) \times \mathbf{P}^1(\mathrm{Z}^{?_1}(\overline{\mathrm{B}}))$$

是 $\mathfrak{X}(\mathrm{B})^2$ 的特殊纤维 $\mathrm{X}(\mathrm{B})^2$ 的不可约分支。

(4) 设 $\sigma : \mathfrak{Y}(\mathrm{B}) \to \mathfrak{X}(\mathrm{B})^2$ 是沿闭子概形 $\mathrm{Q}^{\circ\circ}$ 对 $\mathfrak{X}(\mathrm{B})^2$ 进行膨胀所得的概形。对于 $(?_0?_1) \in \{\circ, \bullet, \dagger\}^2$，令 $\mathrm{Y}^{?_0,?_1}$ 表示 $\overline{\mathrm{Q}}^{?_0,?_1}$ 在 σ 下的严格变换。

(5) $\mathfrak{Y}(\mathrm{B})$ 的对偶约化图如下：



从而有

$$\overline{\mathrm{Y}}^{(0)}(\mathrm{B}) = \overline{\mathrm{Y}}^{\circ\circ} \sqcup \overline{\mathrm{Y}}^{\bullet\circ} \sqcup \overline{\mathrm{Y}}^{\circ\bullet} \sqcup \overline{\mathrm{Y}}^{\bullet\bullet}$$

and

$$\overline{\mathrm{Y}}^{(1)}(\mathrm{B}) = \overline{\mathrm{Y}}^{\circ\dagger} \sqcup \overline{\mathrm{Y}}^{\bullet\dagger} \sqcup \overline{\mathrm{Y}}^{\dagger\bullet} \sqcup \overline{\mathrm{Y}}^{\dagger\circ} \sqcup \overline{\mathrm{Y}}^{\dagger\dagger}$$

是 Y(B) 的余维 0 和余维 1 分层。

引理 3.1。 概形 $\mathfrak{Y}(\mathrm{B})$ 是正则的，并具有半稳定约化。我们有 $\mathrm{Y}(\mathrm{B})$ 的分层如下。

(1) 映射 $\sigma : Y^{?_0,?_1} \to Q^{?_0,?_1}$ *for* $?_0 \neq ?_1$ 是一个同构；*(2)* 映射 $\sigma : Y^{?_0,?_1} \to Q^{?_0,?_1}$ *for* $(?_0?_1) \in \{(\circ\circ), (\bullet\bullet)\}$ 是沿着分层 $Q^{\dagger\dagger}$对 $Q^{?_0,?_1}$ 的膨胀；*(3)* 分层 $Y^{\dagger\dagger}$ 是 $Q^{\dagger\dagger}$上的一个 P^1-丛。

证明。 这一结果是众所周知的，可由膨胀的标准计算得出。 □

推论 3.2。 上同调 $\mathrm{H}^2(\mathrm{Y}^{(0)}(\mathrm{B}),\mathbf{Z}_l(1))$ 由下式给出

$$\bigoplus_{(?_0?_1)\in\{\circ,\bullet,\dagger\}^2} \mathrm{H}^2(\overline{\mathrm{Q}}^{?_0?_1},\mathbf{Z}_l(1))\oplus \mathrm{H}^0(\mathrm{Q}^{\dagger\dagger},\mathbf{Z}_l)^{\oplus 2}.$$

证明。 这立即由前一个引理得出，因为

$$\mathrm{H}^2(\overline{\mathrm{Y}}^{?_0?_1},\mathbf{Z}_l(1))=\mathrm{H}^2(\overline{\mathrm{Q}}^{?_0?_1},\mathbf{Z}_l(1))\oplus \mathrm{H}^0(\overline{\mathrm{Q}}^{\dagger\dagger},\mathbf{Z}_l)$$

对于 $(?_0?_1)\in\{(\circ\circ),(\bullet\bullet)\}$ 和

$$\mathrm{H}^2(\overline{\mathrm{Y}}^{?_0?_1},\mathbf{Z}_l(1))=\mathrm{H}^2(\overline{\mathrm{Q}}^{?_0?_1},\mathbf{Z}_l(1))$$

对于 $(?_0?_1)\in\{(\circ\bullet),(\bullet\circ)\}$。 □

3.3. **Flach 元素的构造**。 我们将在志村曲面 $\mathrm{X}(\mathrm{B})^2$ 的动机上同调中构造元素，该曲面由一对志村曲线的乘积给出。令 $\theta:\mathrm{X}(\mathrm{B})\to\mathrm{X}(\mathrm{B})^2$ 为对角嵌入， $\theta_*\mathrm{X}(\mathrm{B})$ 为 θ的像。回顾一下， p 是一个整除 B 的判别式的素数。我们考虑元素

$$\Theta^{[p]}(\mathrm{B})=(\theta_*\mathrm{X}(\mathrm{B}),p)$$

它显然属于 (3.1) 中 d_1 的核，因此在 $\mathrm{X}(\mathrm{B})^2$ 上定义了动机上同调群 $\mathrm{H}^3_{\mathcal{M}}(\mathrm{X}(\mathrm{B})^2,\mathrm{Z}(2))$ 中的一个元素 $\Theta^{[p]}(\mathrm{B})$，我们将其称为*Flach* 元。回顾一下，对于每个素数 $v\nmid p\mathrm{N}$，我们都有一个除子映射

$$\mathrm{div}_v:\mathrm{H}^3_{\mathcal{M}}(\mathrm{X}(\mathrm{B})^2,\mathbf{Z}(2))\to\mathrm{H}^2_{\mathcal{M}}(\mathfrak{X}(\mathrm{B})^2\otimes\mathbf{F}_v,\mathbf{Z}(1)). \tag{3.4}$$

注意，对于上述每个 v，$\mathrm{div}_v(\Theta^{[p]}(\mathrm{B}))=0$ 作为 $\mathrm{H}^2_{\mathcal{M}}(\mathfrak{X}(\mathrm{B})^2\otimes\mathrm{F}_v,\mathrm{Z}(1))$ 中的一个元素，这显然成立，因为 p 在 $\mathfrak{X}(\mathrm{B})^2\otimes\mathrm{F}_v$ 上可逆。另一方面，利用正则模型 $\mathfrak{Y}(\mathrm{B})$，我们也有素数 p 对应的除子映射

$$\mathrm{div}_p:\mathrm{H}^3_{\mathcal{M}}(\mathrm{X}(\mathrm{B})^2,\mathbf{Z}(2))\to\mathrm{H}^2_{\mathcal{M}}(\overline{\mathrm{Y}}(\mathrm{B})\otimes\mathbf{F}_{p^2},\mathbf{Z}(1)). \tag{3.5}$$

注记 3.3. 这个元素类似于 Flach 在 [Flach1] 中使用的 Flach 元，后者用于界定椭圆曲线 Tate 模的对称平方的塞尔默群。那里必须谨慎地选取一个特殊的西格尔模单位，而这里的构造要简单得多，同时也符合我们的目的。

3.4. **Flach 元的互反律**。 回顾我们所处的情形。我们有一个模形式 $f\in\mathrm{S}_2^{\mathrm{new}}(\mathrm{N})$。这样的形式 f 存在一个 Jacquet–Langlands 转移 $f^\dagger$ ，将其转移为 $\Gamma(\mathrm{Z}(\mathrm{B})\ \mathcal{O})$ 中的模形式。令 p为 f 的一个 n-可容许素数。我们令 $\mathbb{T}=\mathbb{T}_{\mathrm{N}^+,\mathrm{N}^-}$（分别为 $\mathbb{T}^{[p]}=\mathbb{T}_{\mathrm{N}^+,p\mathrm{N}^-}$）表示对应于级结构为 $\mathrm{N}=\mathrm{N}^+\mathrm{N}^-$ 的尖点形式的 λ-进海克代数（分别对应于级结构为 $\mathrm{N}p=\mathrm{N}^+\mathrm{N}^-p$ 的尖点形式），这些形式在整除 N^- 的素数处（分别在整除 $p\mathrm{N}^-$ 的素数处）是新的。

(1) 由于 f 是特征形式，我们有一个态射 $\phi_f:\mathbb{T}\to\mathcal{O}$，它对应于 f 的 Hecke 特征值系。更确切地说，对于 $v\nmid\mathrm{N}$，有 $\phi_f(\mathrm{T}v)=a_v(f)$；对于 $v\mid\mathrm{N}$，有 $\phi_f(\mathrm{U}v)=a_v(f)$。令 $\phi_{f,\ n}\colon\mathbb{T}\to\mathcal{O}_n$ 为映射 $\phi_f\colon\mathbb{T}\to\mathcal{O}$ 模 ϖ^n 的约化。我们将此映射的核记为 $\mathfrak{p}_{f,\ n}$，并将包含 $\mathfrak{p}_{f,\ n}$ 的唯一极大理想记为 $\mathfrak{m}_f$。我们始终假设 $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_f$ 是绝对不可约的，并记作 $\mathfrak{p}_n=\mathfrak{p}_{f,\ n}$。

(2) 由于 p 对于 f 是 n-容许的，定理 2.5 给出了一个满同态 $\phi_f^{[p]},_n : \mathbb{T}^{[p]} \to \mathcal{O}_n$，使得 $\phi_f^{[p]},_n$ 与 $\phi_f,_n$ 在所有远离 p 的 Hecke 算子处相同，并将 U_p 映到 $\epsilon_p(f)$。我们将 $\phi_f^{[p]},_n$ 的核记为 $\mathfrak{p}_n^{[p]} = \mathfrak{p}_f^{[p]},_n$，并将相应的极大理想记为 $\mathfrak{m}^{[p]} = \mathfrak{m}_f^{[p]}$。

Hecke 代数的乘积 $\mathbb{T}^{[p]} \times \mathbb{T}^{[p]}$ 通过对应自然作用于曲面 $X(B)^2$。由 Künneth 分解，它在上同调 $H^2(X(B)^2 \otimes Q\underline{\ }\mathcal{O}(2))$ 上诱导出 $\mathbb{T}^{[p]\otimes 2}$ 的作用。令 $\underline{\mathfrak{m}}^{[p]}$ 为由 $(\mathfrak{m}^{[p]}, \mathfrak{m}^{[p]})$ 确定的 $\mathbb{T}^{[p]\otimes 2}$ 的极大理想。

引理 3.4. 假设 p 是 f 的 n-可容许素数，且 $\mathfrak{m}$ 绝对不可约。

(1) 我们有一个同构

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{X}(\mathrm{B})^2 \otimes \overline{\mathbf{Q}}, \mathcal{O}(2))_{\underline{\mathfrak{m}}^{[p]}} \cong \mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{Q}}, \mathcal{O}(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}.$$

(2) 我们有一个同构

$$\mathrm{H}^3(\mathrm{X}(\mathrm{B})^2, \mathcal{O}(2))_{\underline{\mathfrak{m}}^{[p]}} \cong \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}, \mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{Q}}, \mathcal{O}(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}).$$

证明。第一部分由 $\mathfrak{m}$ 的不可约性，以及由此得出的 $\mathfrak{m}^{[p]}$ 的不可约性可知；此外，志村曲线 $X(B)$ 的 H^0 和 H^2 是 Eisenstein。第二部分由 $H^3(X(B)^2, \mathcal{O}(2))_{\underline{\mathfrak{m}}^{[p]}}$ 的 Hochschild–Serre 谱序列及第一部分得出。□

我们考虑（3.2）中给出的在 $\mathfrak{m}^{[p]}$ 处局部化的陈特征映射

$$\mathrm{ch}_{\mathfrak{m}^{[p]}} : \mathrm{H}^3_{\mathcal{M}}(\mathrm{X}(\mathrm{B})^2, \mathbf{Z}(2)) \to \mathrm{H}^3(\mathrm{X}(\mathrm{B})^2, \mathcal{O}(2))_{\underline{\mathfrak{m}}^{[p]}}.$$

根据上述引理的第 (2) 部分，这个映射可以改写为

$$\mathrm{AJ}_{\mathfrak{m}^{[p]}} : \mathrm{H}^3_{\mathcal{M}}(\mathrm{X}(\mathrm{B})^2, \mathbf{Z}(2)) \to \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}, \mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{Q}}, \mathcal{O}(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}})$$

而这个映射通常被称为阿贝尔–雅可比映射。我们将把该元素称为

$$\kappa^{[p]} = \mathrm{AJ}_{\mathfrak{m}^{[p]}}(\Theta^{[p]}(\mathrm{B}))$$

Flach 类。本小节其余部分的目标是分析 $\kappa^{[p]}$ 在有理数域的每个素数 v 处的局部行为。

引理3.5。 假设 $v \nmid pN$。那么我们有

$$\mathrm{res}_v(\kappa^{[p]}) \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{fin}}(\mathbf{Q}_v, \mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{Q}}, \mathcal{O}(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}).$$

Proof. 由于 $H^1(X(B)\otimes$ 有理数域 $\mathcal{O}(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}$ 作为伽罗瓦模在 v 处未分歧，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}(\mathbf{Q}_v, \mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{Q}}, \mathcal{O}(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}) &= (\mathrm{H}^2(\mathfrak{X}(\mathrm{B})^2 \otimes \overline{\mathbf{F}}_v, \mathcal{O}(1))_{\underline{\mathfrak{m}}^{[p]}})^{\mathrm{G}_{\mathbf{F}_v}} \\ &= (\mathrm{H}^1(\mathfrak{X}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{F}}_v, \mathcal{O}(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}(-1))^{\mathrm{G}_{\mathbf{F}_v}}.\end{aligned}$$

另一方面，根据 [Weston1，定理 3.1，我们有一个交换图。1]

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^3_{\mathcal{M}}(\mathrm{X}(\mathrm{B})^2 \otimes \mathbf{Q}_v, \mathbf{Z}(2)) & \xrightarrow{\mathrm{ch}_{\mathfrak{m}^{[p]}}} & \mathrm{H}^3(\mathrm{X}(\mathrm{B})^2 \otimes \mathbf{Q}_v, \mathcal{O}(2))_{\underline{\mathfrak{m}}^{[p]}} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{div}_v} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_v} \\ \mathrm{H}^2_{\mathcal{M}}(\mathfrak{X}(\mathrm{B})^2 \otimes \mathbf{F}_v, \mathbf{Z}(1)) & \longrightarrow & (\mathrm{H}^2(\mathfrak{X}(\mathrm{B})^2 \otimes \overline{\mathbf{F}}_v, \mathcal{O}(1))_{\underline{\mathfrak{m}}^{[p]}})^{\mathrm{G}_{\mathbf{F}_v}} \end{array}$$

其中底部映射是针对 $\mathfrak{X}(\mathrm{B})^2 \otimes \mathrm{F}_v$ 的通常循环类映射。

注意，我们有如下对应关系

$$\mathrm{H}^3(\mathrm{X}(\mathrm{B})^2 \otimes \mathbf{Q}_v, \mathcal{O}(2))_{\underline{\mathfrak{m}}^{[p]}} = \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_v, \mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{Q}}_v, \mathcal{O}(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}})$$

由引理 3.4 以及一个识别

$$(\mathrm{H}^2(\mathfrak{X}(\mathrm{B})^2 \otimes \overline{\mathbf{F}}_v, \mathcal{O}(1))_{\underline{\mathfrak{m}}^{[p]}})^{\mathrm{G}_{\mathbf{F}_v}} = \mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}(\mathbf{Q}_v, \mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{Q}}_v, \mathcal{O}(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}})$$

由 $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes$ 有理数域$v, \mathcal{O}(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}$ 的非分歧性可知。于是，右侧的垂直映射 ∂_v 由奇异商映射给出

$$\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_v, \mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{Q}}_v, \mathcal{O}(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}) \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}(\mathbf{Q}_v, \mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{Q}}_v, \mathcal{O}(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}})$$

利用这两个同一化。由于$\mathrm{div}_v(\Theta^{[p]}(\mathrm{B})) = 0$ 作为 $\mathrm{H}^2_{\mathcal{M}}(\mathfrak{X}(\mathrm{B})^2 \otimes \mathrm{F}_v, \mathrm{Z}(1))$ 中的一个元素，由上述交换图可立即推出

$$\mathrm{res}_v(\kappa^{[p]}) \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{fin}}(\mathbf{Q}_v, \mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{Q}}_v, \mathcal{O}(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}).$$

□

接下来我们分析 $\kappa^{[p]}$ 在 p处的局部行为。首先，我们证明以下命题，它是定理 2.5 中针对曲面 $\mathrm{X}(\mathrm{B})^2$ 的算术升层定理的类比。

命题3.6。假设 p 是 n-可容许的 f 素数，且 $\mathfrak{m}$ 绝对不可约。那么我们有一个同构

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}(\mathbf{Q}_p, \mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{Q}}_p, \mathcal{O}_n(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}) \cong \bigoplus_{i=1}^{2} \Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}), \mathcal{O}_n)^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}}.$$

证明。 由于根据 f的 n可容许素数的定义，$\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \mathrm{Q}_p, \mathcal{O}_n(1))$在 p 处非分歧，我们有

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}(\mathbf{Q}_{p^2}, \mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{Q}}_p, \mathcal{O}_n(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}) \cong (\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{Q}}_p, \mathcal{O}_n(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}(-1))^{\mathrm{G}_{\mathbf{F}_{p^2}}}.$$

根据定理 2.5 中所述的志村曲线 $\mathrm{X}(\mathrm{B})$ 的算术升层定理及其在命题 2.7 中的推论，我们有

$$(\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{Q}}_p, \mathcal{O}_n(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}(-1))^{\mathrm{G}_{\mathbf{F}_{p^2}}} \cong \bigoplus_{i=1}^{2} \Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}), \mathcal{O}_n)^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}}.$$

由于 $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}_{p^2}/\mathbf{F}p)$ 中的非平凡元素在右侧的作用是乘以 $\mathrm{U}p$ 特征值的乘积 $\epsilon_p^2(f) = 1$，因此这个同构下降为一个同构

$$(\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{Q}}_p, \mathcal{O}_n(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}(-1))^{\mathrm{G}_{\mathbf{F}_p}} \cong \bigoplus_{i=1}^{2} \Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}), \mathcal{O}_n)^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}}.$$

□

备注 3.7. 对……的识别

$$\bigoplus_{i=1}^{2} \Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}), \mathcal{O}_n)^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}} \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}(\mathbf{Q}_p, \mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{Q}}_p, \mathcal{O}_n(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}).$$

实际上是由典范映射诱导的

$$\mathrm{H}^2(\overline{\mathrm{Y}}^{(0)}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{F}}_p, \mathcal{O}_n(1))_{\underline{\mathfrak{m}}^{[p]}} \to \mathrm{H}^2(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{Q}}_p, \mathcal{O}_n(1))_{\underline{\mathfrak{m}}^{[p]}}$$

通过取两侧的 $\mathrm{G}_{\mathbf{F}_{p^2}}$-不变部分。事实上，很容易得出

$$\mathrm{H}^2(\overline{\mathrm{Y}}^{(0)}(\mathrm{B}) \otimes \overline{\mathbf{F}}_p, \mathcal{O}_n(1))$$

由以下各项的直和给出

$$\bigoplus_{(?_0?_1)\in\{\circ,\bullet\}^2} \bigoplus_{(i_0,i_1)\in\{0,2\}} \mathrm{H}^{i_0}(\mathbf{P}^1(\mathrm{Z}^{?_0}(\overline{\mathrm{B}}), \mathcal{O}_n(i_0/2)) \otimes \mathrm{H}^{i_1}(\mathbf{P}^1(\mathrm{Z}^{?_1}(\overline{\mathrm{B}}), \mathcal{O}_n(i_1/2))$$

以及 $\mathrm{H}^0(\mathrm{Q}^{\dagger\dagger}, \mathcal{O}_n)^{\oplus 2}$（根据推论 3.2）。那么，由备注 2.8 可得我们的断言：空间 $\bigoplus_{i=1}^{2} \Gamma(\mathrm{Z}(\mathrm{B}), \mathcal{O}_n)^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}}$ 可识别为的一个商

$$\bigoplus_{(?_0?_1)\in\{\circ,\bullet\}^2} \bigoplus_{(i_0,i_1)\in\{0,2\}} \mathrm{H}^{i_0}(\mathbf{P}^1(\mathrm{Z}^{?_0}(\overline{\mathrm{B}}), \mathcal{O}_n(i_0/2)) \otimes \mathrm{H}^{i_1}(\mathbf{P}^1(\mathrm{Z}^{?_1}(\overline{\mathrm{B}}), \mathcal{O}_n(i_1/2))$$

而 $\mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}(\mathrm{Q}_p, \mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \mathrm{Q}_p, \mathcal{O}_n(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}})$ 与 $(\mathrm{H}^2(\mathrm{X}(\mathrm{B}) \otimes \mathrm{Q}_p, \mathcal{O}_n(1)))^{\mathrm{G}_{\mathbf{F}_{p^2}}}_{\underline{\mathfrak{m}}^{[p]}}$ 等同。

令 $\partial_p(\kappa^{[p]})$ 为类 $\mathrm{res}_p(\kappa^{[p]})$ 的奇异留数。根据命题 3.6，元素 $\partial_p(\kappa^{[p]})$ 可视为 $\bigoplus^{2} \Gamma(\mathrm{Z}(\mathrm{B}), \mathcal{O}_n)^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}}$ 的一个元素。令 $\partial_p^{(i)}(\kappa^{[p]})$ 为 $\partial_p(\kappa^{[p]})$ 在此等同下投影到 i 个 $\bigoplus \Gamma(\mathrm{Z}(\mathrm{B}), \mathcal{O}_n)^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}}$ 副本中的第 i 个副本所得的 $i=12$ 投影，其中 $i = 1, 2$。$i=1$ 我们定义一个双线性配对

$$(\cdot,\cdot) : \Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}), \mathcal{O})^{\otimes 2} \times \Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}), \mathrm{E}_\lambda/\mathcal{O})^{\otimes 2} \to \mathcal{O}$$

其定义公式为

$$(\otimes_{i=1}^2 \zeta_i, \otimes_{i=1}^2 \phi_i) = \sum_{(z_1,z_2)\in \mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}})^2} \zeta_1\phi_1(z_1) \times \zeta_2\phi_2(z_2)$$

对任意 $\otimes_i^{\mathfrak{p}^{-1}} \zeta_i \in \Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}), \mathcal{O})^{\otimes 2}$ 和 $\otimes_{i=1}^2 \phi_i \in \Gamma(\mathrm{Z}(\mathrm{B}), \mathrm{E}_\lambda/\mathcal{O})^{\otimes 2}$。上述配对诱导出

$$(\cdot,\cdot) : \Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}), \mathcal{O})^{\otimes 2}_{/\mathfrak{p}_n} \times \Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}), \mathrm{E}_\lambda/\mathcal{O})^{\otimes 2}[\mathfrak{p}_n] \to \mathcal{O}_n$$

可改写为

$$(\cdot,\cdot):\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O}_n)^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}}\times\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O}_n)^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}}\to\mathcal{O}_n.$$

以下是本小节的主要结果，我们将其称为*Flach* 元的互反律。

定理 3.8. 设 p 是 f 的 n-容许素数，且 $\mathfrak{m}$ 绝对不可约。则有以下公式

$$(\partial_p^{(i)}(\kappa^{[p]}),\phi_1\otimes\phi_2)=\sum_{z\in\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}})}\phi_1\phi_2(z)$$

对任意 $\phi_1\otimes\phi_2\in\Gamma(\mathrm{Z}(\mathrm{B})\ \mathcal{O}_n)^{\overline{\otimes}2}_{\mathfrak{m}}$以及任意 $i=1,\ 2$成立。

证明。 这将由下面的交换图得出。

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^3_{\mathcal{M}}(\mathrm{X}(\mathrm{B})^2\otimes\mathbf{Q}_{p^2},\mathbf{Z}(2)) & \xrightarrow{\mathrm{ch}_{\mathfrak{m}^{[p]},n}} & \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_{p^2},\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}}_p,\mathcal{O}_n(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}) \\
 & & \downarrow\partial_p \\
 & & \mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}(\mathbf{Q}_{p^2},\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}}_p,\mathcal{O}_n(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{div}_p} & & \uparrow{\scriptstyle \alpha_3} \\
 & & \bigoplus_{i=1}^{2}\Gamma(\mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O}_n)^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}} \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \alpha_2} \\
\mathrm{H}^2_{\mathcal{M}}(\overline{\mathrm{Y}}(\mathrm{B})\otimes\mathbf{F}_{p^2},\mathbf{Z}(1)) & \xrightarrow{\alpha_1} & \mathrm{H}^2(\overline{\mathrm{Y}}^{(0)}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{F}}_p,\mathcal{O}_n(1))^{\mathrm{G}_{\mathbf{F}_{p^2}}}_{\underline{\mathfrak{m}}^{[p]}}
\end{array}$$

其中，不显然的映射由

(1) α_1 是循环类映射

$$\mathrm{H}^2_{\mathcal{M}}(\overline{\mathrm{Y}}(\mathrm{B})\otimes\mathbf{F}_{p^2},\mathbf{Z}(1))\to\mathrm{H}^2(\overline{\mathrm{Y}}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{F}}_p,\mathcal{O}_n(1))^{\mathrm{G}_{\mathbf{F}_{p^2}}}_{\underline{\mathfrak{m}}^{[p]}}$$

随后是自然的限制映射

$$\mathrm{H}^2(\overline{\mathrm{Y}}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{F}}_p,\mathcal{O}_n(1))^{\mathrm{G}_{\mathbf{F}_{p^2}}}_{\underline{\mathfrak{m}}^{[p]}}\to\mathrm{H}^2(\overline{\mathrm{Y}}^{(0)}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{F}}_p,\mathcal{O}_n(1))^{\mathrm{G}_{\mathbf{F}_{p^2}}}_{\underline{\mathfrak{m}}^{[p]}};$$

(2) α_2 由以下内容给出：回顾一下，根据推论 3.2，上同调群

$$\mathrm{H}^2(\overline{\mathrm{Y}}^{(0)}(\mathrm{B}),\mathcal{O}_n(1))$$

由直和给出

$$\bigoplus_{(?_0?_1)\in\{\circ,\bullet\}^2}\ \bigoplus_{(i_0,i_1)\in\{0,2\}}\mathrm{H}^{i_0}(\mathbf{P}^1(\mathrm{Z}^{?_0}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O}_n(i_0/2))\otimes\mathrm{H}^{i_1}(\mathbf{P}^1(\mathrm{Z}^{?_1}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O}_n(i_1/2))$$

and

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{Q}^{\dagger\dagger},\mathcal{O}_n)^{\oplus 2}$$

且 α_2 是从直因子到.....的映射

$$\bigoplus_{(?_0?_1)\in\{\circ,\bullet\}^2}\ \bigoplus_{(i_0,i_1)\in\{0,2\}}\mathrm{H}^{i_0}(\mathbf{P}^1(\mathrm{Z}^{?_0}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O}_n(i_0/2))\otimes\mathrm{H}^{i_1}(\mathbf{P}^1(\mathrm{Z}^{?_1}(\overline{\mathrm{B}}),\mathcal{O}_n(i_1/2))$$

2至⊕ Γ(Z(B) $\mathcal{O}_n)^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}}$,$i$=1(3) α_3 是命题 3.6 中的算术升层同构。

上述图表的交换性证明与 [Weston1，定理 3.11] 相同，使用正则对 (Y(B)$^{(0)}$， $\mathfrak{Y}$(B)) 代替光滑对，并考虑备注 2.8 和备注 3.7。由该图表的交换性， Γ(Z(B) $\mathcal{O}_n)^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}}$ 中的类 $\partial_p^{(i)}(\kappa^{[p]})$ 由函数 $\vartheta_*\mathbf{1}_{\overline{\mathrm{B}}}$ 给出，其中 $\mathbf{1}_{\overline{\mathrm{B}}}$ 是志村集 Z(B) 的特征函数，并且其中 ϑ : Z(B) →Z(B)^2 是志村集的对角嵌入。于是可得

$$\begin{aligned}(\partial_p^{(i)}(\kappa^{[p]}), \phi_1 \otimes \phi_2) &= (\nu_*\mathbf{1}_{\overline{\mathrm{B}}}, \phi_1 \otimes \phi_2)\\ &= \sum_{z \in \mathrm{Z}(\overline{\mathrm{B}})} \phi_1(z)\phi_2(z).\end{aligned}$$

□

备注3.9。 由于N$^-$ 是无平方因子的，且由奇数个素数组成， f ∈S$_2^{\mathrm{new}}$(Γ$_0$(N)) 具有到四元数模形式 $f^\dagger$ ∈Γ(Z(B) $\mathcal{O}$)$_{\mathfrak{m}}$ 的 Jacquet–Langlands 转移。我们将坚持要求 $f^\dagger$ 是归一化的。这意味着存在一点 $z \in$ Z(B)，使得 $f^\dagger(z)$ mod $\lambda \neq 0$。于是，上述命题意味着

$$(\partial_p^{(i)}(\kappa^{[p]}), f^\dagger \otimes f^\dagger) = \langle f^\dagger, f^\dagger \rangle$$

其中右侧是 $f^\dagger$的Petersson范数。我们将写作 $\mathcal{P}(f^\dagger) = \langle f^\dagger, f^\dagger \rangle$ 并称其为四元数周期的 的 f。

4. 伴随塞尔默群的界定

4.1. 塞尔默群概述。 我们将滥用记号，考虑域 E$_\lambda$ 上的一般伽罗瓦表示 $\rho : \mathrm{G}_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$。假设 T 是 V 中稳定的伽罗瓦 $\mathcal{O}$-格，并令 $\mathcal{M} = \mathrm{V}/\mathrm{T}$。这些伽罗瓦模构成正合列

$$0 \to \mathrm{T} \xrightarrow{i} \mathrm{V} \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathcal{M} \to 0.$$

设 $\mathrm{M}_n = \mathcal{M}[\lambda^n]$ 和 $\mathrm{T}_n = \mathrm{T}/\lambda^n$。令 $i_n : \mathrm{M}_n \hookrightarrow \mathrm{M}$ 和 $\mathrm{pr}_n : \mathrm{T} \to \mathrm{T}_n$ 分别为自然的包含映射和投影映射。
我们回顾定义 $\mathcal{M}$ 和 M$_n$的 Bloch–Kato Selmer 群的局部条件的相关定义：

(1) For $v \neq l$, we define $\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_v, \mathrm{V}) = \mathrm{H}^1_{\mathrm{fin}}(\mathbf{Q}_v, \mathrm{V})$;
(2) For $v = l$, we define $\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, \mathrm{V}) = \ker(\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, \mathrm{V}) \to \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, \mathrm{V} \otimes \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}))$;
(3) We define $\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_v, \mathcal{M}) = \mathrm{pr}_*\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_v, \mathrm{V})$ and $\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_v, \mathrm{M}_n) = i_n^*\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_v, \mathcal{M})$ for each v.

然后我们定义 $\mathcal{M}$ 的 Bloch–Kato Selmer 群为

$$\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}, \mathcal{M}) = \ker\{\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}, \mathcal{M}) \to \prod_v \frac{\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_v, \mathcal{M})}{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_v, \mathcal{M})}\}$$

对于 $\mathcal{M}$。我们也以相同方式定义 M_n 的 Bloch–Kato Selmer 群 H^1_f(有理数域, M_n)。此外，我们有

$$H^1_f(\mathbf{Q},\mathcal{M}) = \varinjlim_n H^1_f(\mathbf{Q},M_n)$$

并且有一个正合列

$$0 \to \mathrm{pr}_* H^1_f(\mathbf{Q},V) \to H^1_f(\mathbf{Q},\mathcal{M}) \to Ш(\mathbf{Q},\mathcal{M}) \to 0$$

$\mathcal{M}$ 的 Tate-Shafarevich 群 X(Q $\mathcal{M}$)。

4.2. 关于伴随表示的主定理。 回忆 f 是一个级结构为 $N = N^+N^-$的模形式。我们假设 N^- 是无平方因子的，并且可被奇数个素数整除。在此情形下， f 可通过 Jacquet–Langlands 转移转移到 $S^{\overline{B}}(N^+)$ 中的一个模形式上，我们假设该模形式已归一化，并给出 $\Gamma(Z(B)\ \mathcal{O})$ 中的一个元素 $f^\dagger$。考虑由 Eichler–Shimura 构造提供的其伽罗瓦表示

$$\rho_{f,\lambda} : G_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda) = \mathrm{Aut}(V_{f,\lambda})$$

其表示空间由 $V_\rho = V_{f,\lambda}$ 给出。我们假设剩余 Galois 表示 $\overline{\rho} = \overline{\rho}_{f,\lambda}$ 是绝对不可约的，并满足假设 1 中的所有条件。我们固定一个稳定格 T_ρ ，对应于 $\rho_{f,\lambda}$ ，它在相似意义下唯一。令 T_n 为 T 按 λ^n 约化所得的格，对每个 $n \geq 1$ 均如此。令 $\mathcal{M}_\rho = V_\rho/T_\rho$ ，则我们有一个正合列。

$$0 \to T_\rho \to V_\rho \to \mathcal{M}_\rho \to 0.$$

考虑张量积 $T_\rho \otimes T_\rho$ ，它分解为

$$T_\rho \otimes T_\rho = \mathrm{Sym}^2 T_\rho \oplus \wedge^2 T_\rho. \tag{4.1}$$

考虑 $* \in \{\rho, n\}$ 的表示 $\mathrm{Sym}^2 T_*$ ，我们知道 $\mathrm{Sym}^2 T_\rho$ 的卡蒂埃对偶由 $\mathrm{Sym}^2 T_\rho(-1)$ 给出，这也称为 $\mathrm{Ad}^0(T_\rho)$。当我们用 $\mathcal{M}_\rho$ 替换 T_ρ 时，所有这些构造和定义仍然成立。在接下来的讨论中，我们主要关注 $N = \mathrm{Sym}^2 T_\rho$ 和 $N_n = \mathrm{Sym}^2 T_n$ ，它们的卡蒂埃对偶分别由 $M = \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)$ 和 $M_n = \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)[\lambda^n]$ 给出。下述定理是本文最终结果的关键一步。

定理 4.1. 令 $f \in S_2^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(N))$ 是一个权重为 2 的新形式，其 $N = N^+N^-$ 满足 N^-是无平方因子的，并且由奇数个素数因子组成。令 $f^\dagger$ 为 f 在 $\Gamma(Z(B)\ \mathcal{O})$中的归一化 *Jacquet–Langlands* 转移。令 $\eta = \varpi^\nu$满足 $\nu = \mathrm{ord}_\lambda(\mathcal{P}(f^\dagger))$。

(1) 我们假设剩余伽罗瓦表示 $\overline{\rho}_{f,\lambda}$ 满足假设 *1*；*(2)* 我们进一步假设，

$$H^1(\mathbf{Q}(M_n)/\mathbf{Q}, M_n) = 0$$

对于每个 $n \geq 1$ ，其中 有理数域(M_n) 是伽罗瓦模M_n的分裂域 .

于是 η 消灭塞尔默群 H^1_f(有理数域，$\mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)$)。特别地，

$$\mathrm{leng}_{\mathcal{O}} H^1_f(\mathbf{Q}, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)) \leq \nu$$

4.3. **Flach系统论证**。为证明上述定理，我们将证明在该定理的假设下，η会湮灭每个有限塞尔默群 H^1_f(有理数域,M_n)。这里的论证与 [Flach1] 和 [Weston1] 的论证非常相似。

引理 4.2. 设 p 是 f 的一个 n-可容许素数。那么上同调

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}},\mathcal{O}_n(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}$$

同构于两个 $\underline{\mathrm{T}_n}\otimes\mathrm{T}_n$ 的直和。特别地，存在一个从 $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes$有理数域 $\mathcal{O}_n(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}$ 到 N_n 的投影。

证明。根据与 [BD2, 定理 5.17], 相同的论证，上同调 $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{\mathrm{N}+}(\mathrm{B})\otimes$有理数域 $\mathcal{O}_n(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}}$ 同构于 T_n。由 d 的干净性、引理 2.4 以及引理 2.6 的证明可知，$\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes$有理数域 $\mathcal{O}_n(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}}$同构于两个 $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{\mathrm{N}+}(\mathrm{B})\otimes$有理数域 $\mathcal{O}_n(1))_{\mathfrak{m}^{[p]}}$。引理得证。□

回顾一下，我们有全局上同调类

$$\kappa^{[p]}\in\mathrm{H}^1(\mathbf{Q},\mathrm{H}^1(\mathrm{X}(\mathrm{B})\otimes\overline{\mathbf{Q}},\mathcal{O}(1))^{\otimes 2}_{\mathfrak{m}^{[p]}}).$$

根据上述引理，我们可以将此类投影到H^1(有理数域, N_n)，并将所得的类记为 $\kappa_n^{[p]}$。我们称 $\kappa_n^{[p]}$在 p 处具有奇异深度 η，如果商 $\mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}$(有理数域$_p$, N_n)$/\partial_p(\kappa_n^{[p]})$ 被 η 湮灭。

引理4.3.设 p 为 f的一个 n-可容许素数。则上同调$\mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}$(有理数域$_p$，$\mathrm{N}_n$) 的奇异部分在 $\mathcal{O}_n$ 上是秩为一的自由模，且 ***Flach*** 类 $\kappa_n^{[p]}$具有奇异深度 η。

证明。根据 n-容许素数的定义，容易计算得出，N_n 处的弗罗贝尼乌斯特征值互不相同，且为 1、p、p^2。由于我们有

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}(\mathbf{Q}_p,\mathrm{N}_n)=\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_l(1),\mathrm{N}_n)^{\mathrm{G}_{\mathbf{F}_p}}=(\mathrm{N}_n(-1))^{\mathrm{G}_{\mathbf{F}_p}},$$

$\mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}$($\mathrm{Q}_p$,$\mathrm{N}_n$) 在 $\mathcal{O}_n$ 上是秩为一的自由模。根据命题 3.8 中证明的互反律，关于奇异深度的断言可由备注 3.9 得出。□

引理4.4。令 p 为 f 的 n-可容许素数，并定义

$$\mathrm{H}^1_{\{p\}}(\mathbf{Q},\mathrm{M}_n)=\ker\{\mathrm{H}^1(\mathbf{Q},\mathrm{M}_n)\to\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p,\mathrm{M}_n)\}.$$

因此，我们有

$$\eta\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q},\mathrm{M}_n)\subset\mathrm{H}^1_{\{p\}}(\mathbf{Q},\mathrm{M}_n).$$

证明。我们考虑 $\kappa_n^{[p]}$in H^1(有理数域, N_n) 中的元素。我们已经验证，对于所有 $v\nmid p\mathrm{N}$，res$_v(\kappa_n^{[p]})$ 都属于有限部分。另一方面，关于 [Flach1，引理 2.8] 以及 [Flach1，引理 2.10] 的相同证明在此处同样适用，并表明对于 $v\mid\mathrm{N}$，res$_v(\kappa_n^{[p]})$属于 H^1_f(有理数域$_v$, M_n)。在局部 Tate 对偶性下

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_v:\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_v,\mathrm{N}_n)\times\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_v,\mathrm{M}_n)\to\mathcal{O}_n,$$

众所周知，局部条件 H^1_f(有理数域$_v$, N_n) 与 H^1_f(有理数域$_v$, M_n) 正交。在位置 p，它诱导出一个完美配对

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_p:\mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}(\mathbf{Q}_p,\mathrm{N}_n)\times\mathrm{H}^1_{\mathrm{fin}}(\mathbf{Q}_p,\mathrm{M}_n)\to\mathcal{O}_n.$$

设 s 是 H^1_f(有理数域, M_n) 中的任意元素，则根据全局类域论，我们有

$$\sum_v \langle \mathrm{res}_v(s), \mathrm{res}_v(\kappa_n^{[p]}) \rangle_v = 0.$$

根据上述讨论，这归结为 $\langle \mathrm{res}_p(s), \mathrm{res}_p(\kappa_n^{[p]}) \rangle_p = 0$ 。由引理 4.3，我们知道 $\eta \mathrm{H}^1_{\mathrm{sin}}(\mathrm{Q}_p, \mathrm{N}_n)$ 包含在由 $\partial_p(\kappa_n^{[p]})$ 生成的直线上。因此 $\eta \mathrm{res}_p(s)$ 必须消失。由此得到 $\eta \mathrm{H}^1_f(\mathrm{Q}, \mathrm{M}_n) \subset \mathrm{H}^1_{\{p\}}(\mathrm{Q}, \mathrm{M}_n)$。□

引理 4.5。 设 $\mathrm{F}_n =$ 有理数域(M_n) 为 M_n 的分裂域，且 $\Delta_n = \mathrm{Gal}(\mathrm{F}_n/$有理数域$)$。那么我们有

$$\mathrm{H}^1_{\{p\}}(\mathbf{Q}, \mathrm{M}_n) \subset \mathrm{H}^1(\Delta_n, \mathrm{M}_n)$$

其中，$\mathrm{H}^1(\Delta_n, \mathrm{M}_n)$ 通过膨胀视为$\mathrm{H}^1($有理数域$, \mathrm{M}_n)$ 的一个子群。

证明。 令 $s \in \mathrm{H}^1_{\{p\}}$(有理数域, M_n)，并考虑正合列。

$$0 \to \mathrm{H}^1(\Delta_n, \mathrm{M}_n) \to \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}, \mathrm{M}_n) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{F}_n, \mathrm{M}_n)^{\Delta_n} = \mathrm{Hom}_{\Delta_n}(\mathrm{G}_{\mathrm{F}_n}, \mathrm{M}_n) \to 0. \tag{4.2}$$

令 ψ: $\mathrm{G}_{\mathrm{F}_n} \to \mathrm{M}_n$ 为 s 在 $\mathrm{Hom}_{\Delta_n}(\mathrm{G}_{\mathrm{F}_n}, \mathrm{M}_n)$ 中的像。于是我们需要证明 $\psi = 0$。令 $\tilde{s}$ 为表示 s 的上同调元，并令 F'_n 为 $\tilde{s}$ 的核的固定域。令 Γ 为$\mathrm{Gal}(\mathrm{F}'_n/\mathrm{F}_n)$，那么显然 ψ 可经由 ψ: $\Gamma \to \mathrm{M}_n$ 分解。令 τ 为 p 在 Δ_n 中上方的一个Frobenius 元，并固定其在 $\mathrm{Gal}(\mathrm{F}'_n/$有理数域$)$中的一个提升 τ' 。令 g 为 Γ 中的任意元素。根据 Chebotarev 密度定理，我们可以找到 F'_n 的一个 place v'，使得 $\mathrm{Fr}_{\mathrm{F}'_n/\mathrm{F}_n}(v') = \tau' g$。令 v为 F_n 中 v' 下方的 place，它必然位于 p 之上。

由于 $s_p := \mathrm{res}_p(s)$ 是平凡的，$\tilde{s}|_{\mathrm{Gal}(\mathrm{F}'_{n,v'}/\text{有理数域}_p)}$ 是一个余边界。因此我们有

$$\tilde{s}(\tau' g) \in (\tau' g - 1)\mathrm{M}_n = (\tau - 1)\mathrm{M}_n.$$

取 $g = 1$ 得到 $\tilde{s}(\tau') \in (\tau - 1)\mathrm{M}_n$。另一方面，余循环关系给出

$$\tilde{s}(\tau' g) = \tilde{s}(\tau') + \tau \tilde{s}(g).$$

于是 $\tau \tilde{s}(g) \in (\tau - 1)\mathrm{M}_n$。因此，对于任意 $g \in \Gamma$，由于 $(\tau - 1)\tilde{s}(g) \in (\tau - 1)\mathrm{M}_n$， $\in (\tau - 1)\mathrm{M}_n$ 。于是， ψ 的像包含于$(\tau - 1)\mathrm{M}_n$中。注意， ψ 是 Δ_n-等变的，而 M_n 是不可约的。由于$\mathrm{M}_n \neq (\tau - 1)\mathrm{M}_n$，元素 ψ 为零。□

定理 *4.1* 的证明。对于每个 n，我们为 f 选取一个 n-容许素数。由前面的引理 4.4 和引理 4.5，可得

$$\eta \mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}, \mathrm{M}_n) \subset \mathrm{H}^1(\Delta_n, \mathrm{M}_n).$$

根据定理陈述中的第二个假设，我们知道 $\mathrm{H}^1(\Delta_n, \mathrm{M}_n)$是平凡的。因此，对于每个 n，H^1_f(有理数域,M_n)确实被 η 所湮灭。于是H^1_f(有理数域, $\mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)$)的长度小于或等于 $\nu = \mathrm{ord}_\lambda(\eta)$。□

为了证明主定理，我们将从剩余表示 $\overline{\rho}$的变形理论角度研究 Bloch–Kato Selmer 群 H^1_f(有理数域, $\mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)$)。尽管 Bloch–Kato Selmer群本身与剩余表示 $\overline{\rho}$ 的变形理论联系较少，但我们可以如下引入一个较小的 Selmer 群。我们定义局部

条件 $\mathrm{H}^1_{\mathrm{new}}$(有理数域$v$, $\mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)$)和 $\mathrm{H}^1_{\mathrm{new}}$(有理数域$v$, M_n)如 [Lun，定义 3.6], 另见 [KO，(3.3)、(3.4)]。然后我们定义塞尔默群

$$\mathrm{H}^1_{\mathcal{S}}(\mathbf{Q}, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho))$$

是

$$\ker\{\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)) \to \prod_{v\notin\Sigma^-_{\mathrm{mix}}} \frac{\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_v, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho))}{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_v, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho))} \times \prod_{v\in\Sigma^-_{\mathrm{mix}}} \frac{\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_v, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho))}{\mathrm{H}^1_{\mathrm{new}}(\mathbf{Q}_v, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho))}\}.$$

另一方面，考虑由

$$\mathcal{S}_{\mathrm{mix}} := (\overline{\rho}, \chi_l, \Sigma^+ \cup \Sigma^-_{\mathrm{ram}} \cup \Sigma^-_{\mathrm{mix}} \cup \{l\}, \{\mathcal{D}_v\}_{v\in\Sigma^+\cup\Sigma_{\mathrm{ram}}\cup\Sigma_{\mathrm{mix}}\cup\{l\}})$$

用于对满足以下局部变形条件的 $\overline{\rho}$ 在 $\mathcal{O}$-代数上的变形进行分类:

(1) 对于 $v = l$, $\mathcal{D}_l$ ，将满足 Fontaine–Laffaille 晶体条件的变形分类；(2) 对于 $v \in \Sigma^-_{\mathrm{ram}} \cup \Sigma^+$, $\mathcal{D}_v$ ，是将最小分歧的变形分类的局部变形问题；(3) 对于 $v \in \Sigma^-_{\mathrm{mix}}$, $\mathcal{D}_v = \mathcal{D}_v^{\mathrm{new}}$，是将按照 [Lun，定义 3.6] 的意义下为 new 的变形分类的局部变形问题。

可以看出，$\mathcal{D}_v^{\mathrm{new}}$处的局部变形问题 $v \in \Sigma^-_{\mathrm{mix}}$ 与 $\mathcal{D}_v^{\mathrm{ram}}$的局部变形问题一致，其意义如 [LTXZZa，定义 3.51]所述。这个全局变形问题由变形环$\mathrm{R}_{\mathrm{mix}}$表示。此外，由 [Lun，命题 4.1], （另见 [KO，定理 3.14] ）可知，存在一个同构

$$\mathrm{R}_{\mathrm{mix}} \cong \mathbb{T}_{\mathfrak{m}}. \tag{4.3}$$

考虑在 [PW11, §2.2] 中定义的同余数$\eta_f(\mathrm{N}^+, \mathrm{N}^-)$，它检测 f 与 $\mathrm{S}_2(\Gamma_0(\mathrm{N}))$中的模形式之间的同余，其中这些模形式在整除$\mathrm{N}^-$ 的素数处为新形式； λ-赋值 $\mathrm{ord}_\lambda(\eta_f(\mathrm{N}^+,\mathrm{N}^-))$ 等于 $\mathrm{H}^1_{\mathcal{S}}$(有理数域,$\mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)$)的长度，这是上述 $\mathrm{R} = \mathrm{T}$ 定理的推论，见 [Lun,定理 4.3], [KO,§4.3]。此外还可推出，$\mathcal{Z}_{\mathrm{N}^+}(\mathrm{B}) = \mathcal{O}_\lambda[\mathrm{Z}_{\mathrm{N}^+}(\mathrm{B})]_{\mathfrak{m}}$是 $\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}$上的秩为 1 的自由模。因此， [DDT, 4.17] 意味着 $\eta_f(\mathrm{N}^+,\mathrm{N}^-)$ 可以选为 $f^\dagger$的 Petersson 范数 $\mathcal{P}(f^\dagger)$。于是我们有

$$\mathrm{length}_{\mathcal{O}}\ \mathrm{H}^1_{\mathcal{S}}(\mathbf{Q}, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)) = \mathrm{ord}_\lambda(\mathcal{P}(f^\dagger))$$

另一方面，我们有一个包含关系。

$$\mathrm{H}^1_{\mathcal{S}}(\mathbf{Q}, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)) \hookrightarrow \mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho))$$

根据定义这些塞尔默群的局部条件。事实上，可以证明,

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{new}}(\mathbf{Q}_v, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho))$$

根据 [KO，第 4.4] 条命题，该结果是平凡的。因此我们有

$$\mathrm{length}_{\mathcal{O}}\ \mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)) \geq \mathrm{length}_{\mathcal{O}}\ \mathrm{H}^1_{\mathcal{S}}(\mathbf{Q}, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)) = \mathrm{ord}_\lambda(\mathcal{P}(f^\dagger)).$$

定理 4.6。 *在定理 4.1 的假设下，我们有等式*

$$\mathrm{length}_{\mathcal{O}}\ \mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)) = \mathrm{ord}_\lambda(\mathcal{P}(f^\dagger)).$$

证明。根据前面的定理 4.1，我们有以下不等式

$$\mathrm{ord}_\lambda(\mathcal{P}(f^\dagger)) \geq \mathrm{length}\ \mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)).$$

根据上述讨论，我们有

$$\mathrm{length}_{\mathcal{O}}\ \mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)) \geq \mathrm{length}_{\mathcal{O}}\ \mathrm{H}^1_{\mathcal{S}}(\mathbf{Q}, \mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)) = \mathrm{ord}_\lambda(\mathcal{P}(f^\dagger)).$$

我们终于得到了所需的等式$\mathrm{length}_{\mathcal{O}}\ \mathrm{H}^1_f$(有理数域, $\mathrm{Ad}^0(\mathcal{M}_\rho)$) $= \mathrm{ord}_\lambda(\mathcal{P}(f^\dagger))$。 □

参考文献

[ARS] A. Agashe, K. Ribet 和 W. Stein，《模次数、同余素数与重数一》，载于：Goldfeld, D., Jorgenson, J., Jones, P., Ramakrishnan, D., Ribet, K., Tate, J.（编），《数论、分析与几何》。Springer，波士顿，马萨诸塞州 [BC] J.-F. Boutot 和 H. Carayol，《志村曲线的 p-进一致化：Cerednik 和 Drinfeld 定理》，《模曲线与志村曲线》（奥尔赛，1987/1988），Astérisque，（1991），196–197，45–158。[Buz] K. Buzzard，《某些志村曲线的整模型》，Duke. Math. J. 87，（1997），第3期，591–612。[BD1] M. Bertolini 和 H. Darmon，《Mumford–Tate 曲线上的 Heegner 点》，Invent. Math. 126，（1996），第3期，413–456。[BD2] M. Bertolini，H. Darmon，《椭圆曲线上反圆分 $\mathbb{Z}_p$-扩张的 Iwasawa 主猜想》，Ann. of Math. (2) 162，（2005），1–64。[BDR1] M. Bertolini，H. Darmon 和 V. Rotger，《Beilinson-Flach 元素与欧拉系统 I：合成调节子与 p 进 Rankin L 级数》，Journal of Algebraic Geometry 24 (2015)，355–378。[BDR2] M. Bertolini，H. Darmon 和 V. Rotger，《Beilinson-Flach 元素与欧拉系统 II：Hasse-Weil-Artin L 级数的 Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想》，Journal of Algebraic Geometry 24 (2015)，569–604。[BLR1] S. Bosch，W. Lütkebohmert 和 M. Raynaud，《Néron 模型》，Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 21，Springer-Verlag，柏林，1990，x+325。[BLR2] N. Boston，H. Lenstra 和 K. Ribet，《由二维表示产生的群环商》，C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.312 (1991)，第4期，323–328。[BK] S. Bloch，K. Kato，《动机的 L 函数与 Tamagawa 数》，《Grothendieck Festschrift》，第 I 卷，Progr. Math.，第86卷，330–400。[CH1] M. Chida，M-L. Hsieh，《模形式的反圆分 L-函数特殊值》，J. Reine Angew. Math. 741，（2018），第5期，87–131。[CH2] M. Chida，M-L. Hsieh，《模形式的反圆分 Iwasawa 主猜想》，Compos. Math. 151 (2015)，第5期，865–897。[Dia] F. Diamond，《Taylor-Wiles 构造与重数一》，Invent. Math. 128(2)，（1997），379–391。[DDT] H. Darmon，F. Diamond 和 R. Taylor，《费马大定理》，《数学当前进展》，1995（马萨诸塞州剑桥），1–154，Internat. press，马萨诸塞州剑桥，1994。[DT] F. Diamond 和 R. Taylor，《模 l 表示的非最优级结构》，Invent. Math. 115，（1994），第3期，435–462。[DFG] F. Diamond，M. Flach 和 L. Guo，《模形式伴随动机的 Tamagawa 数猜想》，Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.37，（2004），第5期，663–727。[Flach1] M. Flach，《椭圆曲线对称平方的有限性定理》，Invent. Math. 109(1992)，第2期，307–327。[Flach2] M. Flach，《模形式伴随表示的塞尔默群消去》，《费马大定理研讨会》（安大略省多伦多，1993–1994），249–265，CMS Conf. Proc.，17，Amer. Math. Soc.，罗得岛州普罗维登斯，1995。[Gro] B.H. Gross，《Kolyvagin 关于模椭圆曲线的工作》，L-函数与算术（达勒姆，1989），London Math. Soc. Lecture Note Ser. 153 (1991)，235–256，剑桥大学出版社，剑桥。[Ill1] L. Illusie，《局部单值定理述论》，p-进周期（布尔-叙尔-伊维特，1988），Astérisque，（1994），9–57。

[Ill2] L. Illusie，《Picard-Lefschetz 公式》，《代数几何 2000》，阿祖米诺，Advanced Studies in Pure Mathematics，（2002），249–268。[Kha] C. Khare，《变形环与 Hecke 环之间的同构》，Invent. Math. 154 (2003)，199–222。[Liu1] Y. Liu，《Hirzebruch-Zagier 循环与扭曲三重积塞尔默群》，Invent. Math. 205 (2016)，第3期，693–780。[Liu2] Y. Liu，《椭圆曲线三次三重积塞尔默群的界》，J. Eur. Math. Soc. (JEMS). 21 (2017)，第5期，1411–1508。[LZ] D. Loeffler 和 S. Zerbes，《模形式对称平方的 Iwasawa 理论》，J. Reine Angew. Math. 752 (2019)，179–210。[Lun] B. Lundell，《定量级提升》，American Journal of Mathematics 138(2) (2013)，419–448。[LLZ] A. Lei，D. Loeffler 和 S. Zerbes，《模形式 Rankin–Selberg 卷积的欧拉系统》，Ann. of Math. 180 第2期 (2014)，653–771。[LSZ] D. Loeffler，C. Skinner 和 S.L. Zerbes，《GSp(4) 的欧拉系统》，J. Eur. Math. Soc. 24 (2022)，第2期，669–733。[LTXZZ] Y. Liu，Y. Tian，L. Xiao，W. Zhang 和 X. Zhu，《关于 Rankin–Selberg 动机的 Beilinson–Bloch–Kato 猜想》，Invent. math. 228 (2022)，107–375。[LTXZZa] Y. Liu，Y. Tian，L. Xiao，W. Zhang 和 X. Zhu，《刚性共轭自对偶伽罗瓦表示的变形》，arXiv:2108.06998，预印本，（2021）。[MS21] J. Manning 和 J. Shotton，《通过拼接证明全实域上志村曲线的伊原引理》，Math. Ann. 379 (2021)，187–234。[Maz] B. Mazur，《伽罗瓦变形与 Hecke 曲线》，哈佛大学课程讲义。[Nek] J. Nekovar，《 p-进 Abel-Jacobi 映射与 p-进高度》，《代数循环的算术与几何》，CRM Proc. Lecture Notes，第24卷，Amer.Math.Soc，罗得岛州普罗维登斯，2000，367–379。[KR] S. Kudla 和 M. Rapoport，《志村曲线上的高度配对与 p-进一致化》，Invent. Math. 142 (2000)，第1期，153–223。[KO] C-H. Kim 和 K. Ota，《同余理想与模形式整周期的定量变化》，arXiv:1905.02926，预印本，（2022）。[PW11] R. Pollack 和 T. Weston，《模形式的反圆分 μ-不变量》，Compos. Math. 147(5) (2011)，1353–1381。[Rib1] K. Ribet，《模形式之间的同余关系》，《国际数学家大会论文集》，第1、2卷（华沙，1983）（1984），503–514，PWN，华沙。[Rib2] K. Ribet，《关于由模形式导出的 Gal(Q/Q) 的模表示》，Invent. Math. 100 (1990)，第2期，431–476。[RZ] M. Rapoport 和 Th. Zink，《关于志村簇的局部 ζ 函数：单值滤过与不同特征下的消失循环》，Invent. Math. Vol.68 (1982)，第1期，21–101。[Sai] T. Saito，《权重谱序列与 l 的独立性》，J. Inst. Math. Jussieu. 2 (2003)，第4期，583–634。[Wang1] H. Wang，《志村曲线三重积上的算术层提升与 Gross–Schoen 对角循环 I：分歧情形》，arXiv:2004.00555。[Wang2] H. Wang，《Gross-Kudla-Schoen 对角循环的层提升与二分欧拉系统》，arXiv:2004.14916。[Wang3] H. Wang，《某些四元数酉志村簇的算术层提升》，预印本，arXiv:2204.06976，（2022）。[Wang4] H. Wang，《四元数 Hilbert–Blumenthal 曲面上的 Flach 系统与特征周期》，预印本。[Weston1] T. Weston，《代数循环、模形式与欧拉系统》，J. Reine Angew. Math. 543(2002)，103–145。[Weston2] T. Weston，《代数簇自乘积的塞尔默群与 Chow 群》，Int. Math. Res. Not. (2002)，第39期，2062–2073。[Weston3] T. Weston，《局部各向同性动机的几何欧拉系统》，Compos. Math. 140(2004)，317–332。[Zag] D. Zagier，《椭圆曲线的模参数化》，Canad. Math. Bull. 28(3)(1985)，372–384。

地址：上海数学科学中心，复旦大学，上海市淞沪路2005号，邮编200438，中国。电子邮件地址：wanghaining1121@outlook.com