arXiv:2304.03097v1 [math.DS] 6 Apr 2023

与多项式相关的某些动力学性质

QINQI WU

摘要。设d $\in \mathbb{N}$ 和 p_i 是一个整系数多项式，且 $p_i(0) = 0, 1 \le i \le d$。已证明，如果S 在 $\mathbb{Z}$ 中是厚稠密的，那么 $\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m + p_i(n), m + p_2(n). . . , m + p_d(n) \in S\}$ 在 $\mathbb{Z}^2$ 中是厚稠密的。

与此同时，我们构造一个传递、强混合且非极小的拓扑动力系统（X, T），使得集合 $\{x \in X : \forall$ 开 U $\ni x \ \exists n \in \mathbb{Z}$ s.t. $T^n x \in U, T^{2n} x \in U\}$ 在 X 中不稠密。

1. 引言

1976年，Furstenberg 通过建立多重遍历复现定理（[5, 定理 1.5]），给出了 Szemeredi 定理的动力学证明。该定理指出，在任意保测系统 $(X, \mathscr{X}, \mu, T)$ 中，对于任意 $d \in \mathbb{N}$ 和满足 $\mu(A) > 0$ 的集合 $A \in \mathscr{X}$，总存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\mu(A \cap T^{-n}A \cap \cdots \cap T^{-dn}A) > 0$。拓扑动力系统中的对应结论是拓扑多重复现定理，它指出，对于极小拓扑系统 (X, T) 中任意非空开集 A，以及任意 $d \in \mathbb{N}$，总存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $A \cap T^{-n}A \cap \cdots \cap T^{-dn}A \neq \varnothing$。</final>

多重递归定理的一个直接推论是关于等差数列的经典范德瓦尔登定理（[6, 定理 2.6], [8, 定理 1.4]）。范德瓦尔登定理指出，$\mathbb{Z}$ 的每个分段稠密子集都包含任意长的等差数列。也就是说，若 $S \subset \mathbb{Z}$ 是分段稠密的，那么对所有 $d \in \mathbb{N}$，集合 $\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m, m + n \ldots, m + (d - 1)n \in S, n \neq 0\}$ 非空。Furstenberg 和 Glasner [7] 利用 $\mathbb{Z}$的 Stone–Čech 紧化得到了以下优美的结果。

定理（Furstenberg-Glasner）。设 $d \in \mathbb{N}$，且 S 是 $\mathbb{Z}$中的分段稠密集，则

$$\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : m, m+n, \ldots, m+(d-1)n \in S\}$$

在 $\mathbb{Z}^2$中是分段稠密的。

在 [9], 一个相关系统 $N_d(X)$中，在群 $\mathscr{G}_d = \langle \tau_d$ 的作用下，由 $T^{(d)}\rangle$ 生成的 $\tau_d = T \times T^2 \times \cdots \times T^d$ 以及 $T^{(d)} = T \times \cdots \times T$（d 次）得到了研究，其中 $N_d(X)$ 是 $x^{\otimes d} = (x \ldots, x)$在 $\mathscr{G}_d$ 作用下的轨道闭包。 [9]中证明了，对于一个极小拓扑动力系统 (X, T)，$(N_d(X), \langle \tau_d, T^{(d)}\rangle)$ 也是极小的。Furstenberg-Glasner 定理可由 $N_d(X)$ 的极小性推导出来。关于 $N_d(X)$ 的更多性质，参见 [10], [13]。

日期：2023年3月28日。2020年数学主题分类。主要分类：37B05；37B20。关键词和短语：厚稠密，整系数多项式，诱导系统。

后来 贝格尔博¨克 [1] 仅利用范德瓦尔登定理，为富斯滕伯格-格拉斯纳的结果提供了组合证明。贝格尔森和欣德曼[3] 将这一结果扩展到任意半群中的许多大性概念，以及算术级数之外的分割正则结构。

最近，Huang、Shao 和 Ye [11] 证实了 [3, 问题4.7], 中提出的问题之一，该问题是Furstenberg-Glasner定理的一个多项式推广：设 $d \in \mathbb{N}$ 且 p_i 为一个整系数多项式，满足$p_i(0) = 0, 1 \le i \le d$，若 S 在 $\mathbb{Z}$中是分片综合的，则

$$\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : m + p_i(n), m + p_2(n), \ldots, m + p_d(n) \in S\}$$

在 $\mathbb{Z}^2$ 中是分段综合的。此外，对于一个拓扑动力系统 (X, T)以及一族整系数多项式 $\mathscr{A} = \{p1, \ldots, p_d\}$，其中 $p_i(0) = 0$，在 [11]中提出了一个在群 $\mathscr{G} := \langle T^{\infty}, \sigma \rangle$ 作用下的诱导系统$N_{\infty}(X, \mathscr{A})$，该群由 $T^{\infty} = \cdots \times T \times T \times \cdots$ 和移位映射 σ 生成。已证明，$(N_{\infty}(X, \mathscr{A}), \langle T^{\infty}, \sigma \rangle)$ 具有稠密极小点，当且仅当 (X , T) 也具有稠密极小点。

在本文中，我们将研究 $N_{\infty}(X, \mathscr{A})$ 的更多动力学性质，我们有

定理A. 设(X, T) 是一个拓扑动力系统且 $d \in \mathbb{N}$。设 $\mathscr{A} = \{p1, \ldots, p_d\}$是一族整系数多项式，其中 $p_i(0) = 0, 1 \le i \le d$。则(X ,T)只有一个极小点，当且仅当 $(N_{\infty}(X, \mathscr{A}), \langle T^{\infty}, \sigma \rangle)$ 也是如此。

此外，我们对 [3, 问题 4.7] 中提出的另一个问题给出了肯定的回答。也就是说，

定理B。设 $d \in \mathbb{N}$ 且 p_i 是一个整系数多项式，满足 $p_i(0) = 0, 1 \le i \le d$。如果 S 在 $\mathbb{Z}$ 中是厚稠密的，则

$$\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : m + p_i(n), m + p_2(n), \ldots, m + p_d(n) \in S\}$$

在 $\mathbb{Z}^2$ 中是厚稠密的。

根据 [4, 推论1.8], 对于任意极小拓扑动力系统（X，T），所有在零点为零的整系数多项式 p1，...，p_d，集合 $\{x \in X$：$\forall$开集 U $\ni x$ $\exists n$ 使得 $T^{p_1(n)}x \in U \ldots, T^{p_d(n)}x \in U\}$ 在 X中是稠密的。自然会问，当（X，T）仅仅是传递的时，该集合是否仍然稠密。不幸的是，事实并非如此，我们陈述如下。

定理 C。存在一个非极小的 (X,T)，其具有传递性和强混合性，使得集合 $\{x \in X$: $\forall$开集 U $\ni x$ $\exists n$使得$T^n x \in U$，$T^{2^n}x \in U\}$是一个单点集，因此在 X 中不稠密。

本文组织如下。第2 节介绍本文所使用的基本概念。在第 3 节中，我们研究 $N_{\infty}(X, T)$的性质并证明定理A。在第 4 节中，我们证明定理 B。在第 5 节中，我们给出定理 C 的证明。

致谢。作者谨向邵松教授和叶向东教授致以感谢，感谢他们所进行的有益讨论并提出宝贵意见。

2. 预备知识

在本节中，我们回顾一些在以下各节中需要用到的基本概念和结果。

2.1. 拓扑动力系统。拓扑动力系统（简称 t.d.s.）是指一对 (X , T)，其中 X 是一个带度量 ρ 的紧致度量空间，且 T : X $\to$ X 是一个同胚映射。更一般地，拓扑动力系统是指三元组 (X , G ϕ)，其中 X 是一个紧致度量空间，G 是一个拓扑群，而 ϕ : G $\to$ Homeo(X) 是一个同胚映射，其中 Homeo(X) 表示 X 的同胚映射群。在这种情况下，我们称 G 连续地作用于 X。为简便起见，我们通常用 (X , G) 表示 (X , G ϕ)，并对 g $\in$ G 和 x $\in$X，用 gx 或 g(x) 代替 (ϕ(g))(x)。注意，系统 (X , T) 对应于 G 为 $\mathbb{Z}$ 的情形。

设(X ,G)是一个拓扑动力系统，且 x $\in$X。我们将 x 的轨道记为 $\mathcal{O}$(x,G)= $\{g^n x : g \in G\}$。若对于任意g $\in$ G，gx =x，则称点x $\in$ X 为不动点。我们用 Fix(X, G) 表示所有不动点的集合。若x 的轨道在 X 中稠密，即$\mathcal{O}$(x,G) =X，则称点 x $\in$X为传递点。我们用 Trans_G(X) 表示所有传递点的集合。

若子集 A $\subseteq$ X 满足 GA = A，则称其为不变集。当 Y $\subseteq$ X 是 (X, G) 的闭不变子集时，称系统 (Y, G|$_Y$) 为 (X, G) 的子系统。通常我们省略下标，并将 (Y, G|$_Y$) 记为 (Y, G)。若一个拓扑动力系统是极小的，则称其为极小系统，当且仅当 X 不含非空真闭不变子集。容易验证，一个拓扑动力系统是极小的，当且仅当每个点 x $\in$X 都是传递点。在拓扑动力系统 (X, G) 中，若点 x $\in$X 满足 ($\mathcal{O}$(x, G), G) 是极小系统，则称 x 为极小点。(X, G) 的所有极小点组成的集合记为 Min(X, G)。

设 x $\in$X 且 U $\subseteq$X，令 N_G(x,U) = $\{g \in G : gx \in U\}$。若对于 x 的每个邻域 U，N_G(x,U) 都是无限集，则称点 x $\in$X 是回归的。等价地，x $\in$ X 是回归的，当且仅当存在一个序列 $g_i \in$ G，使得 g_ix $\to$ x，i $\to \infty$。 (X , G) 的所有回归点组成的集合记为 Rec(X , G)。显然，我们有

$$Fix(X,G) \subset Min(X,G) \subset Rec(X,G).$$

如果 (X , T) 和 (Y, T) 是两个拓扑动力系统，则它们的乘积系统是系统 (X $\times$Y, T $\times$ S)。我们将 (X $_n$, T $_{(n)}$) 记作 n 重乘积系统 (X $\times \cdots \times$ X , T $\times \cdots \times$ T)。X $_n$的对角线为 Δ_n (X) = $\{$(x . . . , x) $\in X^n$: x $\in$X $\}$。设 U,V $\subset$X 是两个非空开集，U 和 V 的命中时间集记为

$$N_T(U,V) = \{n \in \mathbb{Z} : U \cap T^{-n}V \neq \emptyset\}.$$

若对任意非空集合 U,V $\subset$X，命中时间 N_T(U,V) 非空，则称 (X , T) 是拓扑传递的。当 X 是度量紧空间时，(X , T) 是传递的，当且仅当存在某个点 x $\in$ Trans_T(X)。

若乘积系统 (X $\times$X , T $\times$T) 是传递的，则称 (X , T) 是弱混合的；若 N_T(U,V) 余有限，则称其为强混合的，即存在 N $\in \mathbb{N}$ 使得 U $\cap$T $^{-}{}_n$V $\neq$/0, $\forall$n $\geq$N。

2.2.富斯滕伯格族。令 $\mathscr{P} = \mathscr{P}(\mathbb{Z})$表示 $\mathbb{Z}$的非空子集的集合。若集合 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{P}$ 的子集，且它向上遗传，即F$_1$ $\subset$F$_2$ 且F$_1$ $\in$ $\mathscr{F}$ 蕴含 F$_2$ $\subseteq$ $\mathscr{F}$，则称其为一个（富斯滕伯格）族。若族 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{P}$的真子集，即既非空也不等于 $\mathscr{P}$ 的全部，则称其为真族。若真族 $\mathscr{F}$ 对有限交封闭，则称 $\mathscr{F}$ 为滤子。对于族 $\mathscr{F}$，对偶族是

$$\mathscr{F}^* = \{F \in \mathscr{P} : Z \setminus F \notin \mathscr{F}\} = \{F \in \mathscr{P} : F \cap F' \neq \varnothing \text{ for all } F' \in \mathscr{F}\}.$$

我们称 $\mathbb{Z}$ 的一个子集是

(1) 如果其间隙有界，则称为稠密集；(2)如果它包含任意长的整数连续段，则称为厚集；(3) 如果它是一个稠密集与一个厚集的交集，则称为分段稠密集；(4)如果对于每个$N \in \mathbb{N}$ 长度为 N 的区间开始的位置构成一个稠密集，则称为厚稠密集。

所有稠密（分别为厚、分段稠密、厚稠密）子集的集合记作 $\mathscr{F}_s$（分别为 $\mathscr{F}_t$、$\mathscr{F}_{ps}$、$\mathscr{F}_{ts}$）。我们有 $\mathscr{F}_{ts}$ 是一个滤子且 $\mathscr{F}^*\mathrm{ps} = \mathscr{F}_{ts}$, $\mathscr{F}^*\mathrm{ts} = \mathscr{F}_{ps}$.

类似地，根据 $\mathbb{Z}$ 中的定义，我们可以定义 $\mathbb{Z}^2$ 中的稠密集（分别为厚集、分段稠密集、厚稠密集）。

2.3. 移位系统、子移位。设 F 是一个有限集，至少包含两个元素，记作 $\mathrm{F} = \{0, 1, \ldots, \mathrm{s}-1\}$ with $\mathrm{s} \in \mathbb{N}, \mathrm{s} \geq 2$。将 F 视为有限离散拓扑空间，并令 $\Omega := \mathrm{F}^{\mathbb{Z}}$。赋予乘积拓扑后，$\Omega_F$ 是一个紧致度量空间。Ω_F 中的点是双向无限序列 $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ with $\mathrm{x}_i \in \mathrm{F}$ for all $\mathrm{i} \in \mathbb{Z}$。定义映射 $\sigma\colon\ \Omega \to \Omega$ by

$$(\sigma x_i) := x_{i+1}, i \in \mathbb{Z} \quad \text{for } x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Omega.$$

显然，σ是从 Ω 到其自身的双射，其逆映射 σ^{-1}由$(\sigma\mathrm{x})_i = \mathrm{x}_{i-1}$ 定义，其中 $\mathrm{i} \in \mathbb{Z}$。因此，σ 是一个同胚。它称为移位。离散流 (Ω, σ) 称为双边移位系统。$(\mathrm{X}\ \sigma)$ 称为子移位，如果 X 是某个满移位 Ω 的闭子集，且在σ的作用下保持不变。用 $\mathbb{Z}_+$ 表示所有非负整数的集合。类似地，当 $\Omega = \mathrm{F}^{\mathbb{Z}^+}$时，我们可以定义单边移位系统。在这种情况下，σ是一个连续满射。

如果 $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$，那么长度为 k 的词是集合 $\mathrm{F}^k := \mathrm{F} \times \cdots \times \mathrm{F}$（重复 k 次）中的一个元素。如果 $\mathrm{b} \in \mathrm{F}^k$，那么 $\mathrm{b} = \mathrm{b}_0 \cdots \mathrm{b}_{k-1}$，其中 $\mathrm{b}_i \in \mathrm{F}$，对 $\mathrm{i} = 0, \ldots, \mathrm{k}-1$。$\mathrm{b}_i$称为 b 的各项，第 j 项为 b_{j-1}。F 上的有限词集合记作 $\mathrm{F}^* := \cup\{\mathrm{F}^k : \mathrm{k} \in \mathbb{Z}^+\}$（$\mathrm{F}^0$ 包含空词），它在运算 $(\mathrm{b}, \mathrm{c}) \mapsto \mathrm{bc} := \mathrm{b}_0 \cdots \mathrm{b}_{|b|-1}\mathrm{c}_0 \cdots \mathrm{c}_{|c|-1}$ 下构成一个半群。我们将 b^k记作 $\mathrm{bb}\cdots\mathrm{b}$（重复 k 次，$\mathrm{k} \geq 2$）。

如果存在块 r 和 l，使得 $\mathrm{c} = \mathrm{lbr}$，则称有限非空块 b 出现在块 c 中，等价地，称 c 包含 b。在这种情况下，我们称 b 在 c 中由 l 先于、由 r 后随。如果 $\mathrm{l} = \varnothing$（分别地，$\mathrm{r} = \varnothing$），则称 c 以 b 开始（分别地，以 b 结束）。

设$(\mathrm{X}\sigma)$ 是一个子移位。若 $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ 且 $\mathrm{j} \in \mathbb{Z}$，则块 $\mathrm{x}_j \cdots \mathrm{x}_{j+n}$通常记作 $\mathrm{x}[\mathrm{j};\ \mathrm{j}+\mathrm{n}]$。当

$$b = x_j \cdots x_{j+|b|-1} = x[j; j+|b|-1].$$

如果 b 是一个有限块且 $\mathrm{j} \in \mathbb{Z}$，那么以 b 为基础、位于位置 j 的柱集是 Ω 中所有在位置 j 出现 b 的元素构成的集合，也就是该集合

$$C_j[b] := \{x \in X : x[j; j+|b|-1] = b\}.$$

Ω 中的每个柱集都是闭集也是开集。

3. 诱导系统 $N_\infty(X\ \mathscr{A})$

本节中，对于给定的有限个 $\mathscr{A}$整系数多项式以及拓扑动力系统$(X,\ T)$，我们引入诱导系统$N_\infty(X\ \mathscr{A})$。我们将研究$N_\infty(X\ \mathscr{A})$的极小点和回归点的更多性质。定理 B 等价于定理3.5。

3.1. $N_\infty(X\ \mathscr{A})$ 的定义。设 $d\ \in\mathbb{N}$and $\mathscr{A}=\{p_1,p2,\ldots,p_d\}$ 是一组整系数多项式，其中 $p_i(0)\ =0,1\le i\ \le d$。$(X^d)^{\mathbb{Z}}$ 中的点记为

$$\mathbf{x}=(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}=((x_n^{(1)},x_n^{(2)},\ldots,x_n^{(d)}))_{n\in\mathbb{Z}}.$$

令 $\vec{p}(n)\ =(p_1(n),\ p_2(n)\ldots,\ p_d(n))$，并令 $T^{\vec{p}(n)}\colon X^d\ \to X^d$ 定义为

$$T^{\vec{p}(n)}(x_1,x_2,\ldots,x_d)=(T^{p_1(n)}x_1,T^{p_2(n)}x_2,\ldots,T^{p_d(n)}x_d).$$

定义 $T^{\infty}\colon (X^d)^{\mathbb{Z}}\to(X^d)^{\mathbb{Z}}$，使得

$$T^{\infty}(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}=(T^{(d)}\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

令 $\sigma:(X^d)^{\mathbb{Z}}\to(X^d)^{\mathbb{Z}}$ 为移位映射，即对所有 $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in(X^d)^{\mathbb{Z}}$

$$(\sigma\mathbf{x})_n=\mathbf{x}_{n+1},\forall n\in\mathbb{Z}.$$

令 $x^{\otimes d}=(x,\ x\ldots,\ x)\ \in X^d$,

$$\Delta_\infty(X)=\{x^{(\infty)}\triangleq(\ldots,x^{\otimes d},x^{\otimes d},\ldots)\in(X^d)^{\mathbb{Z}}:x\in X\}.$$

对于每个 $x\ \in X$，令

$$\omega_x^{\mathscr{A}}\triangleq(T^{\vec{p}(n)}x^{\otimes d})_{n\in\mathbb{Z}}=((T^{p_1(n)}x,T^{p_2(n)}x,\ldots,T^{p_d(n)}x))_{n\in\mathbb{Z}}.$$

并设

$$N_\infty(X,\mathscr{A})=\overline{\bigcup\{\mathscr{O}(\omega_x^{\mathscr{A}},\sigma):x\in X\}}\subseteq(X^d)^{\mathbb{Z}}.$$

显然，$N_\infty(X\ \mathscr{A})$在 T^{∞}的作用以及 $T^{\infty}\circ\sigma=\sigma\circ T^{\infty}$ 下是不变的。因此，$(N_\infty(X\ \mathscr{A})\ \langle T^{\infty},\sigma\rangle)$是一个 $\mathbb{Z}^2$-拓扑动力系统。如果(X ,T) 是传递的，那么对于 (X , T) 的每个传递点x，$N_\infty(X\ \mathscr{A})=\mathscr{O}(\omega_x^{\mathscr{A}},\langle T^{\infty},\sigma\rangle)$。

3.2. 与 $N_\infty(X\ \mathscr{A})$ 相关的性质。我们先给出几个引理。

引理 3.1。 [11,引理 2.2(2)]设 $(X\ \langle T,\ S\rangle)$ 是一个极小系统，且 $T\ \circ S=S\circ T$，其中 T，$S:\ X\ \to X$ 是同胚映射。那么，T（分别是 S）的极小点集在 X 中稠密。

引理3.2.设 $\pi:(X,T)\to(Y,S)$ 是一个因子映射。如果 (X, T) 是极小子集，则 (Y, S) 也是极小子集。

证明。设(Y_1,T)是Y的一个非空闭子集。由于$\pi_i^{-1}(Y_1)$ 是非空、闭且不变的，我们有 $\pi_i^{-1}(Y_1)=X$。于是 $Y_1=Y$。即 (Y, S) 是极小的。□

定理 3.3. 如果 $\mathrm{Min}(X,T)\ =\{x\}$，那么 $\mathrm{Min}(N_\infty(X\ \mathscr{A})\ \langle T^{\infty},\sigma\rangle)\ =\{x^{(\infty)}\}$。

证明。 令 M为 $N_\infty(X\ \mathscr{A})$，则 $(M\ \langle T^\infty,\ \sigma\rangle)$ 是一个极小的 $\mathbb{Z}^2$-作用拓扑动力系统。记 M_1 为 T^∞ 在 M中的所有极小点的集合 3.1， M_1 在 M中稠密。

我们假设 $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}:=(y_n^{(1)},\ldots,y_n^{(d)})_{n\in\mathbb{Z}}\in M_1$。那么 $(\overline{\mathscr{O}((y_n),T^\infty)},T^\infty)$ 是一个极小系统， $\overline{\mathscr{O}((y_n),T^\infty)}$是$N_\infty(X\ \mathscr{A})$ 的一个闭 T^∞-不变子集。

令 $\pi_{n,i}$ 为定义如下的因子映射。

$$\pi_{n,i}:\left(\overline{\mathscr{O}((\mathbf{y}_n),T^\infty)},T^\infty\right)\to\left(\overline{\mathscr{O}}(y_n^{(i)},T),T\right),(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{Z}}\mapsto z_n^{(i)}.$$

由引理 3.2 可知，$(\overline{\mathscr{O}}(y_n^{(i)},T),T)$ 是极小的，因此对任意 $n\in\mathbb{Z},1\le i\le d$，都有 $y_n^{(i)}=x$。于是，$M=M_1=\{x^{(\infty)}\}$。也就是说，$x^{(\infty)}$是 $(N_\infty(X\ \mathscr{A})\ \langle T^\infty,\sigma\rangle)$ 的唯一极小点。 □

引理 3.4. 如果 极小子集$(N_\infty(X\ \mathscr{A})\ \langle T^\infty,\sigma\rangle)=\{((x_n^{(1)},x_n^{(2)},\ldots,x_n^{(d)}))_{n\in\mathbb{Z}}\}$是一个单点集，那么 $\left((x_n^{(1)},x_n^{(2)},\ldots,x_n^{(d)})\right)_{n\in\mathbb{Z}}=x^{(\infty)}$对于某个$x\in X$。此外，$x$ 是 (X,T) 的唯一极小点。

证明。由于 $\left((x_n^{(1)},x_n^{(2)},\ldots,x_n^{(d)})\right)_{n\in\mathbb{Z}}$是唯一的极小点，我们有

$$\sigma\left((x_n^{(1)},x_n^{(2)},\ldots,x_n^{(d)})\right)_{n\in\mathbb{Z}}=\left((x_n^{(1)},x_n^{(2)},\ldots,x_n^{(d)})\right)_{n\in\mathbb{Z}},$$
$$T^{(\infty)}\left((x_n^{(1)},x_n^{(2)},\ldots,x_n^{(d)})\right)_{n\in\mathbb{Z}}=\left((x_n^{(1)},x_n^{(2)},\ldots,x_n^{(d)})\right)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

那么对于任意 $m,n\in\mathbb{Z}$，我们有$x_{im}^{(\infty)}=x_{in}:=x_i$对于某个 $x_i\in Fix(X,T)$。显然

$$x_i^{(\infty)},x_j^{(\infty)}\in Fix(N_\infty(X,\mathscr{A}),\langle T^\infty,\sigma\rangle)\subset Min(N_\infty(X,\mathscr{A}),\langle T^\infty,\sigma\rangle).$$

因此，对于任意的 $1\le i,j\le d$，均有 $x_i=x_j:=x$。

如果 $y\in Min(X,T)$，那么 $y^{(\infty)}\in Min(N_\infty(X\ \mathscr{A})\ \langle T^\infty,\sigma\rangle)=\{x^{(\infty)}\}$这意味着 $x=y$。因此，$Min(X,T)=\{x\}$。□

定理3.5. 设(X,T) 是一个拓扑动力系统，且 $d\in\mathbb{N}$。设 $\mathscr{A}=\{p_1,\ldots,p_d\}$是一族整系数多项式，满足 $p_i(0)=0,1\le i\le d$。则(X,T) 只有一个极小点，当且仅当 $(N_\infty(X\ \mathscr{A})\ \langle T^\infty,\sigma\rangle)$ 也是如此。

证明。 由引理 3.3 和 3.4。 □

注 3.6。 在定理 3.5中，作用 T^∞在 $N_\infty(X\ \mathscr{A})$上的作用是必要的。一般来说，|极小子集$(N_\infty(X\ \mathscr{A})\sigma)|$在 |极小子集$(X、\ T)|=1$时不总是为 1，参见例 1。

例1. 假设 $S=\{n^2:\ n\in\mathbb{Z}\}$。令 $x\in\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 被定义为

$$x(n)=1\iff n\in S.$$

令 $X=\overline{\{T^n x:n\in\mathbb{Z}\}}$，其中 T 是左移位。于是 (X,T) 是一个子移位。点 $y:=\mathbf{0}=\cdots000\cdots$是 (X,T) 的唯一极小点，因此 $|Min(X,T)|=1$。

设 $\mathscr{A}=\{p_1(n)=n^2\}$。由于 x 是 X 的传递点，我们有 $N_\infty(X,\mathscr{A})=\mathscr{O}(\omega_x^{\mathscr{A}},\langle T^\infty,\sigma\rangle)$。我们断言 $|\mathrm{Min}(N_\infty(X,\mathscr{A}),\sigma)|\geq 2$。注意

$$\omega_x^{\mathscr{A}}=(\ldots,T^4x,Tx,\underset{\bullet}{x},Tx,T^4x,\ldots)=(T^{n^2}x)_{n\in\mathbb{Z}},$$

$$\sigma^k\omega_x^{\mathscr{A}}=(\ldots,T^{(k+2)^2}x,T^{(k+1)^2}x,\underset{\bullet}{T^{k^2}x},T^{(k-1)^2}x,\ldots)$$

其中“ ”表示第零坐标。

注意 $z:=1_{\{0\}}=\cdots 0\underset{\bullet}{1}0\cdots$。对于 $k\in\mathbb{N}$，我们有

$$T^{k^2}x=\cdots 0^{(2k-2)}\underset{\bullet}{1}0^{(2k)}\cdots \text{ and } \lim_{k\to+\infty}T^{k^2}x=z\in X.$$

Then

$$\lim_{k\to+\infty}\sigma^k\omega_x^{\mathscr{A}}=z^{(\infty)}\in N_\infty(X,\mathscr{A}) \text{ and } \sigma(z^{(\infty)})=z^{(\infty)}.$$

即，$z^{(\infty)}\in \mathrm{Fix}(N_\infty(X,\mathscr{A}),\sigma)\subset \mathrm{Min}(N_\infty(X,\mathscr{A}),\sigma)$。显然，

$$y^{(\infty)}=(\ldots,\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\ldots)\in Min(N_\infty(X,\mathscr{A}),\sigma).$$

因此，$|\mathrm{Min}(N_\infty(X,\mathscr{A}),\sigma)|\geq 2$。

3.3. 线性多项式的情形。设 $\mathscr{A}=\{p1,\ldots,p_d\}$，其中 $p_i(n)=a_in$ $1\leq i\leq d$，且 $a1,\ldots,a_d$ 是互不相同的非零整数。在这种情况下，我们回顾一下，对于任意拓扑动力系统 (X,T)，

$$(N_\infty(X,\mathscr{A}),\langle T^\infty,\sigma\rangle)\cong(N_{\mathscr{A}}(X,T),\langle T^{(d)},\tau_{\vec{a}}\rangle)$$

其中 $N_{\mathscr{A}}(X,T)=\overline{\mathscr{O}}(\Delta_d(X),\tau_{\vec{a}})$，且 $\tau_{\vec{a}}=T^{a_1}\times\cdots\times T^{a_d}$，其中 $\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_d)$。

令 $\mathscr{A}=\{p1,\ldots,p_d\}$，则对每个 $x\in X$

$$\omega_x^{\mathscr{A}}=\left((T^{a_1n},T^{a_2n},\ldots,T^{a_dn})\right)_{n\in\mathbb{Z}}=(\ldots,\tau_{\vec{a}}^{-1}x^{\otimes d},\underset{\bullet}{x^{\otimes d}},\tau_{\vec{a}}x^{\otimes d},\ldots)\in(X^d)^{\mathbb{Z}}.$$

注意

$$\begin{aligned}\sigma\omega_x^{\mathscr{A}}&=\left((T^{a_1(n+1)},T^{a_2(n+1)},\ldots,T^{a_d(n+1)})\right)_{n\in\mathbb{Z}}\\&=\left(\tau_{\vec{a}}(T^{a_1n},T^{a_2n},\ldots,T^{a_dn})\right)=\tau_{\vec{a}}^{\infty}\omega_x^{\mathscr{A}},\end{aligned}$$

其中 $\tau_{\vec{a}}^{\infty}=\cdots\times\tau_{\vec{a}}\times\tau_{\vec{a}}\times\cdots$，且对所有 $n\in\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\sigma^n\omega_x^{\mathscr{A}}&=(\ldots,\tau_{\vec{a}}^n\tau_{\vec{a}}^{-1}x^{\otimes d},\underset{\bullet}{\tau_{\vec{a}}^nx^{\otimes d}},\tau_{\vec{a}}^n\tau_{\vec{a}}x^{\otimes d},\ldots)\\&=\tilde{\tau}_{\vec{a}}(\ldots,\tau_{\vec{a}}^nx^{\otimes d},\underset{\bullet}{\tau_{\vec{a}}^nx^{\otimes d}},\tau_{\vec{a}}^nx^{\otimes d},\ldots),\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\tau}_{\vec{a}}=\cdots\times\tau_{\vec{a}}^{-1}\times\underset{\bullet}{\mathrm{id}_{X^d}}\times\tau_{\vec{a}}\times\tau_{\vec{a}}^2\times\cdots$。因此，我们有

$$N_\infty(X,\mathscr{A})=\{(\ldots,\tau_{\vec{a}}^{-1}\mathbf{y},\underset{\bullet}{\mathbf{y}},\tau_{\vec{a}}\mathbf{y},\ldots):\mathbf{y}\in N_{\mathscr{A}}(X,T)\}.$$

我们定义了

$$\phi:(N_{\mathscr{A}}(X,T),\tau_{\vec{a}})\to(N_\infty(X,\mathscr{A}),\sigma),\mathbf{y}\mapsto(\ldots,\tau_{\vec{a}}^{-1}\mathbf{y},\underset{\bullet}{\mathbf{y}},\tau_{\vec{a}}\mathbf{y},\ldots),$$

且它是一个同构。因此 $(N_\infty(X\ \mathscr{A})\ \sigma) \cong (N_{\mathscr{A}}(X, T)\ \tau_{\vec{a}})$，并且

$$(N_\infty(X,\mathscr{A}),\langle T^\infty,\sigma\rangle) \cong (N_{\mathscr{A}}(X,T),\langle T^{(d)},\tau_{\vec{a}}\rangle).$$

在这种情况下，我们有关于回归点的以下性质。

定理 3.7. $|\mathrm{Rec}(X, T)| = 1$ 当且仅当 $|\mathrm{Rec}(N_{\mathscr{A}}(X, T)\ \langle T^{(d)}\tau_{\vec{a}}\rangle)| = 1$。

证明。必要性显而易见。

现在假设 $\mathrm{Rec}(X, T) = \{x\}$。如果 $(y_1, \ldots, y_d) \in \mathrm{Rec}(N_{\mathscr{A}}(X, T)\ \langle T^{(d)}\tau_{\vec{a}}\rangle)$，则存在 m_i、n_i 使得

$$\lim_{i\to\infty}(\tau_{\vec{a}})^{m_i}(T^{(d)})^{n_i}(y_1,\ldots,y_d) = (y_1,\ldots,y_d).$$

即，$\lim_{i\to\infty} T^{m_i a_j + n_i} y_j = y_j$ 对任意 $1 \le j \le d$ 成立。则 $y_i \in \mathrm{Rec}(X, T) = \{x\}$。

因此，$(y_1,\ldots,y_d) = x^{(d)}$，我们有 $|\mathrm{Rec}(N_{\mathscr{A}}(X, T)\ \langle T^{(d)}\tau_{\vec{a}}\rangle)| = 1$。

□

但一般而言，对于非线性多项式的情形，定理 3.7 并不成立。存在一个系统 (X, T) 使得 $|\text{回返}(X,T)| = 1$ 但 $|\text{回返}(N_\infty(X\ \mathscr{A})\ \langle T^\infty,\tilde{\sigma}\rangle)| \ge 2$ 对于某个 $\mathscr{A}$ 成立，见例 2。

示例 2。我们首先构造原系统 (X, T)。

我们在 $\mathbb{R}^2$ 中的系统（X，T）的第一部分是单位圆 $\mathbb{S}^1$ 的一个可数子集 A。设 a_i、$i \in \mathbb{Z}$ 和 a_∞ 是 $\mathbb{S}^1$ 中的不同点，满足 $\lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} a_{-i} = a_\infty$，见图 1，并令 $A = \{a_i : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{a_\infty\}$。将 T 限制在集合 A 上，定义 $T(a_i) = a_{i+1}$ 和 $T(a_\infty) = a_\infty$。

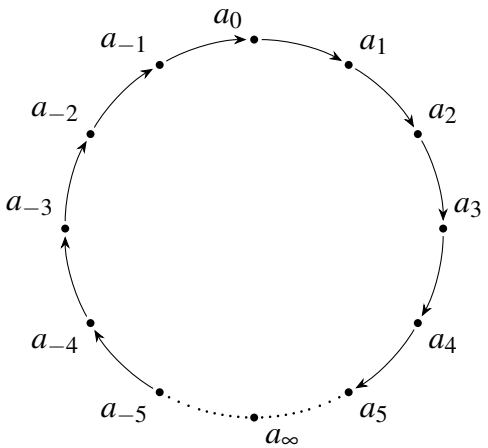


图 1. 系统（A，$T|_A$）

（X，T）的第二部分仅由一条位于 $\mathbb{R}^2$ 中的轨迹 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 构成，其中 $T(x_i) = x_{i+1}$，并趋近于集合 A。将选择该轨迹，使得

$$d(x_n, A) := \min\{d(x_n, y) : y \in A\} \searrow 0, n \to \infty$$

其中 d 是欧几里得度量。

固定一族两两不相交的开集 U(a$_n$)，其中包含 a$_n$。现在我们将更详细地描述这条轨迹。对于任意 n $\in \mathbb{Z}_+$，我们取

$$x_{n^2} \in U(a_0), x_{n^2+1} \in U(a_1), \ldots, x_{n^2+n} \in U(a_n),$$

$$x_{n^2+n+1} \in U(a_{-n}), x_{n^2+n+2} \in U(a_{-n+1}), \ldots, x_{n^2+2n} \in U(a_{-1}), x_{(n+1)^2} \in U(a_0).$$

我们还提供了图片，见图2和图3。

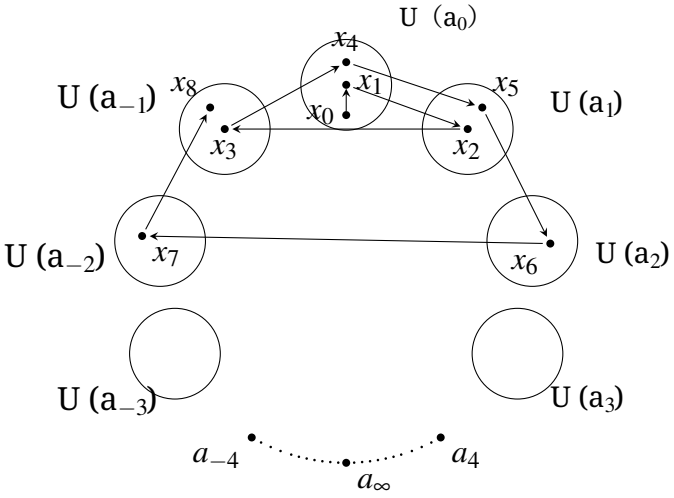


图2。 {x$_0$, x1，. . .，x$_8$}

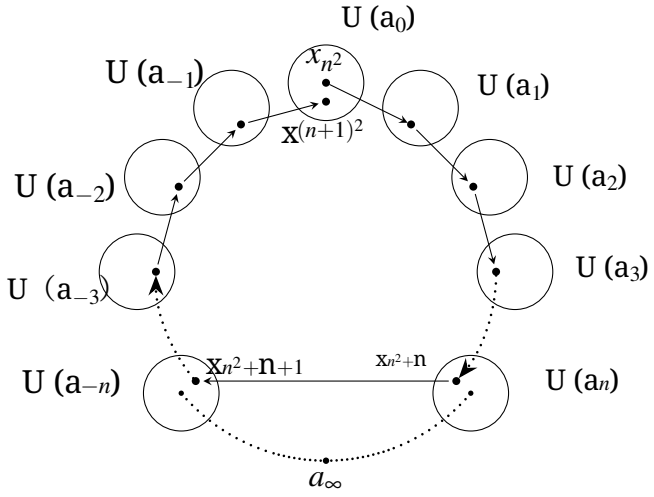


图 3. {x$_{n^2}$, . . .,x$_{n^2+n}$, x$_{n^2+n+1}$, . . . , x$_{(n+1)^2}$}

映射 T : X $\to$ X 是连续的：在构造趋近集合 A 的轨迹 {x$_n$}$_{n\in\mathbb{Z}}$ 时，我们采用一般规则：对于某个 j $\in \mathbb{Z}$，连续点 x$_i$、x$_{i+1}$ 分别包含在 U(a $_j$) 和 U (a $_{j+1}$) 中。极少数情况下会偏离这一规则，此时点 x$_i$、x$_{i+1}$ 要么“远离”集合 A，要么都“接近”不动点 a$_\infty$。每当 x$_i$、x$_{i+1}$ 出现这种例外时，点 x$_i$ 位于 a$_\infty$ 的“右侧”，而 x$_{i+1}$ 位于 a$_\infty$ 的“左侧”。事实上，我们将会有无穷多个偏离

我们所说的一般规则的例外，但它们会越来越接近不动点 a_∞。因此，T 的连续性不会受到破坏。

由(X,T) 的构造可知，Rec(X, T) $=\{a_\infty\}$。现在我们考虑诱导系统 (N_∞(X $\mathscr{A}$) $\langle T^\infty, \sigma\rangle$)，其中 $\mathscr{A}=\{n^2\}$。注意，

$$\omega_{x_0}^{\mathscr{A}} = (T^{n^2}x_0)_{n\in\mathbb{Z}} = (x_{n^2})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

一方面，我们有

$$\sigma^n\omega_{x_0}^{\mathscr{A}} \to a_0^{(\infty)} \in \overline{\mathscr{O}(\omega_{x_0}^{\mathscr{A}},\sigma)} \subseteq N_\infty(X,\mathscr{A}), \sigma a_0^{(\infty)} = a_0^{(\infty)}$$

其中 $a_0^{(\infty)}$ =(. . .,a_0, a0,...)。因此 $a_0^{(\infty)} \in$Rec(N_∞(X $\mathscr{A}$) $\langle T^\infty,\sigma\rangle$)。另一方面，$a_\infty^{(\infty)}$: =(.. ., a_∞,a_∞, .. .)在 $\langle T^\infty,\sigma\rangle$-作用下自然地是一个回归的点。

因此，$a_0^{(\infty)}$, $a_\infty^{(\infty)} \in$Rec(N_∞(X $\mathscr{A}$) $\langle T^\infty,\sigma\rangle$)and |Rec($\langle T^\infty,\sigma\rangle$)| ≥ 2.

4. 定理 B 的证明

本节中，我们证明定理 B。回顾一下，F 在 $\mathbb{Z}$ 中是厚稠密的，当且仅当对于每个 N $\in\mathbb{N}$，长度为 N 的区间串开始的位置构成一个相对稠密集；F $\in\mathbb{Z}^2$ 是厚稠密的，当且仅当对于每个 M、N $\in\mathbb{N}$，大小为 M $\times$N 的块串开始的位置构成一个 $\mathbb{Z}^2$ 的相对稠密集。

假设 S $\subset\mathbb{Z}$ 是厚稠密的。令 x : $= 1_{\mathbb{Z}\setminus S} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$。即，

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{if } n\in S; \\ 1, & \text{else.} \end{cases}$$

考虑由 x 生成的 Bebutov 系统；即，令

$$X_S = \overline{\{T^n x : n\in\mathbb{Z}\}},$$

x 的轨道闭包。于是，(X_S, T)是一个传递子移位，其中 T是移位映射。设 x, y $\in X_S$, X 上的度量 ρ 定义为

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\min\{|n| : x_n \neq y_n\}}, & \text{if } x\neq y; \\ 0, & \text{if } x = y. \end{cases}$$

命题 4.1。极小子集(X, T) $=\{\mathbf{0}\}$。

证明。显然，0 是一个极小点。对于任意 y $\in X_S$，存在 $n_i\to\infty$ 使得 T^{n_i}x $\to$y，其中 x $= 1_{\mathbb{Z}\setminus S}$。显然，任意长度 n 的词 $0^{(n)}$ 在 y 中出现无穷多次。因此，$\mathbf{0}\in\mathscr{O}$(y, T)，这意味着 0 是唯一的极小点。 □

设d $\in\mathbb{N}$和 $\mathscr{A}=\{p_1, p2, .., p_d\}$是一组整系数多项式，且 $p_i(0)$ =0, $1\leq$ i $\leq$ d。则有

命题 4.2. 极小子集($N_\infty(X_S,\mathscr{A})$ $\langle T^\infty,\sigma\rangle$) $=\{\mathbf{0}^{(\infty)}\}$.

证明。 根据命题 4.1 和定理 3.5，我们有 $\mathbf{0}^{(\infty)}$ 是唯一的极小点，属于 ($N_\infty(X_S$, $\mathscr{A}$) $\langle T^\infty$, $\sigma\rangle$)。 □

引理 4.3. 设 (X ⟨T,S⟩) 是一个 $\mathbb{Z}^2$-作用拓扑动力系统。如果 x 是传递点，K 是唯一的极小子集。那么对于 K 的任意邻域 U,

$$N_{\mathbb{Z}^2}(x,U) := \{(m,n) : T^m S^n x \in U\}$$

是厚稠密的。

证明。令 U 为 K 的任意邻域。由于 K 是 X 的唯一极小子集，U 包含 X 的所有闭不变子集。因此，$X = \bigcup_{i,j=-\infty}^{\infty} T^{-i}S^{-j}U$。由 X 的紧致性，存在某个 $N \in \mathbb{N}$，使得 $X = \bigcup_{m,n=-N} T^{-i}S^{-j}U$。因此，

$$N_{\mathbb{Z}^2}(x,U) = \{(m,n) : T^m S^n x \in U\}$$

是 $\mathbb{Z}^2$ 中的一个稠密集。

我们不妨设 $U_i \subseteq U$ 是 K 的一个邻域，使得对于任意 $1 \le k_1, k_2 \le i$，只要 $T^j S^{j^2} x \in U_i$，就有 $T^{j_1+k^1} S^{j_2+k^2} x \in U$。由于对于 $i \in \mathbb{N}$，$N_{\mathbb{Z}^2}(x,U_i)$ 是稠密的，因此 $N_{\mathbb{Z}^2}(x,U)$ 是厚稠密的。

□

现在我们可以证明定理 B 了。

定理 B 的证明。设 $d \in \mathbb{N}$、p_i 是整数多项式，且 $p_i(0) = 0, 1 \le i \le d$，并且 $S \subseteq \mathbb{Z}$ 是厚稠密的。假设 (X_S, T) 是本节开头定义的拓扑动力系统。设 $x = 1_{\mathbb{Z}\setminus S}$。我们知道

$$N_T(x, B_1(\mathbf{0})) = \{n \in \mathbb{Z} : T^n x \in B_1(\mathbf{0})\} = S$$

其中 $B_1(0) = \{y \in X_S : \rho(0,y) < 1\} := \{y \in X_S : y_1 = 0\}$。

根据定理 4.2，诱导系统 $(N_\infty(X_S, \mathscr{A}) \ \langle T^\infty, \sigma\rangle)$ 有唯一的极小点 $\mathbf{0}^{(\infty)}$。那么，对于任意邻域 $\widetilde{U}$，$\mathbf{0}^{(\infty)}$ 有

$$N^{\mathscr{A}}_{\mathbb{Z}^2}(x,U) = \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : (T^\infty)^m \sigma^n \omega_x^{\mathscr{A}} \in \widetilde{U}\}$$

在 $\mathbb{Z}^2$ 中是厚稠密的（由引理 4.3），其中 $\widetilde{U} = \prod_{j=-\infty}^{-1} X^d \times U^d \times \prod_{j=1}^{\infty} X^d$，$U \subset X$ 是包含 0 的邻域。特别地，令

$$\widetilde{U} = \prod_{j=-\infty}^{-1} X^d \times (B_1(\mathbf{0}))^d \times \prod_{j=1}^{\infty} X^d.$$

由此可得

$$\begin{aligned} N^{\mathscr{A}}_{\mathbb{Z}^2}(x, B_1(\mathbf{0})) &= \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : (T^\infty)^m \sigma^n \omega_x^{\mathscr{A}} \in \widetilde{U}\} \\ &= \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : T^{m+p_1(n)} x \in B_1(\mathbf{0}), \ldots, T^{m+p_d(n)} x \in B_1(\mathbf{0})\} \\ &= \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : m + p_1(n), \ldots, m + p_d(n) \in S\}. \end{aligned}$$

因此，

$$\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : m + p_1(n), m + p_2(n), \ldots, m + p_d(n) \in S\}$$

是 $\mathbb{Z}$ 的厚密集集。 2

□

5. 定理 C 的证明

本节中，我们构造一个满足定理 C 的拓扑动力系统 (X, T)。

5.1. 例子的构造。设 $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^+}$。映射 T : $\Omega \to \Omega$ by (T x_i) :=x_{i+1}, i $\in \mathbb{Z}^+$。(Ω, T) 是一个单边移位系统。

假设

$$A_1 = (1),$$
$$A_2 = (10^{(b_1)}101),$$
$$\dots$$
$$A_{n+1} = A_n 0^{(b_n)} A_n 0^{(n)} A_n,$$

设 $b_n > 15a_{n-1}$ 其中 $a_n = |A_n|$ 是 A_n 的长度。

令 x $=\lim_{n\to\infty} A_n^{\infty}$且 X $= \overline{\mathcal{O}(x, T)}$，则 (X , T) 是一个子移位。根据构造，x 是一个回归点，且 (X , T) 是传递的。设 x, y $\in$X，X 上的度量 ρ 定义为

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1/(1+\min\{n : x_n \neq y_n\}), & \text{if } x \neq y; \\ 0, & \text{if } x = y. \end{cases}$$

命题 5.1。（X, T）是强混合的。

证明。根据 x 的构造，对于任意 m $\geq$n，$A_n 0^{(m)} A_n$ 都出现在 x 中，因此 $N_T([A_n],[A_n])$ 是一个余有限集，其中 $[A_n] := \{x \in X : x[0; |A_n - 1|] = A_n\}$。

由于（X, T）是传递的，对于任意非空开集 U,V，存在 n $\in \mathbb{N}$使得 C $=$U $\cap$T^{-n}V $\neq \varnothing$。于是

$$N_T(U,V) = N_T(T^{-n}U, T^{-n}V) \supset N_T(T^{-n}C, C) \supset n + N(C,C).$$

假设 T ^{k}x $\in$C，并取 j 使得 T $^k([A_j]) \subset$C，我们有

$$N_T(U,V) \supset n + N_T([A_k],[A_k]),$$

这意味着该系统是强混合的。 □

命题 5.2。对于任意 y $\in$X，y $\neq \mathbf{0}$，（y, y）不是 T $\times$T ^{2}-回归的。

证明。我们假设 y $\neq \mathbf{0}$ 是回归的。于是，词 1 在 y 中出现无穷多次。由于词 1 总是以 A_n的形式出现，这意味着对于某个固定的 n，A_n 在 y 中出现无穷多次。因此存在一个 k $\in \mathbb{Z}^+$，使得 (T ^{k}y)[0; |A $_n$| − 1] = A_n。

我们可以取合适的 p_n ，使得

$$T^k y = C_1 0^{(b_{p_1})} C_2 0^{(b_{p_2})} C_3 0^{(b_{p_3})} \dots C_m 0^{(b_{p_m})} \dots$$

其中，词 $0^{(b_{p_m})}$不出现在任何一个 C1, . . . ,C$_m$ 中。根据 X 的结构，我们有 $C_1 = A_n D$，其中 D 是某个词；C$_m$ 必须是 A$_{p_m}$ 的子词，而 C_{m+1} 必须是 $A_{p_m} 0^{(m)} A_{p_m}$的子词。注意，x(n) 是 x 在第 n 个位置上的元素。

情形 1。若 $\{n_i\}$ 是一个序列，使得 T ^{n_i}y $\to$y。我们知道 T ^{n_i}(T ^{k}y) $\to$T ^{k}y，T ^{k}y(0) = y(k) = 1。如有必要，取某个子序列后，我们可以假设第 n_i 个位置

$T^k y$ 位于 $C_{p_{m(i)}}$，其中某个 m(i) 处。也就是说，

$$\sum_{k=1}^{m(i)-1}(|C_k|+b_{p_k}) \le n_i < \sum_{k=1}^{m(i)-1}(|C_k|+b_{p_k})+|C_{m(i)}|.$$

由于 C_1 是 A_{p_1} 的子词，且 C_{m+1} 是 $A_{p_m}0^{(m)}A_{p_m}$ 的子词。因此我们有

$$\begin{cases} |C_{m+1}| \le |A_{p_m}0^{(m)}A_{p_m}| < b_{p_m}, \\ \sum_{k=i}^{m-1}(|C_k|+b_{p_k})+|C_m| \le b_{p_{m+1}}. \end{cases}$$

Then

$$\sum_{k=1}^{m(i)-1}(|C_k|+b_{p_k})+|C_{m(i)}| < 2n_i < \sum_{k=1}^{m(i)}(|C_k|+b_{p_k}),$$

并且 $T^k y$ 的第 $2n_i$ 个位置出现在 $0^{(b_{p_{m(i)}})}$。即，

$$y(2n_i+k) = T^k y(2n_i) = 0, \forall i \in \mathbb{N}.$$

对于任意 $i \in \mathbb{N}$，我们有 $\rho(T^{2n_i}y, y) > 1/(k+1)$，这意味着 $T^{2n_i}y \nrightarrow y$.

情形 2。若 $\{n_i\}$ 是一个序列，使得 $T^{2n_i}y \to y$。我们知道 $T^{2n_i}(T^k y) \to T^k y$，$T^k y(0) = y(k) = 1$。必要时取某个子序列后，我们可以假设 $T^k y$ 的第 $2n_i$ 个位置出现在某个 $m(i) \ge 3$ 的 $C_{p_{m(i)}}$ 处。即，

$$\sum_{k=1}^{m(i)-1}(|C_k|+b_{p_k}) \le 2n_i < \sum_{k=1}^{m(i)-1}(|C_k|+b_{p_k})+|C_{m(i)}|.$$

由于 C_m 是 A_{p_m} 的子词，且 C_{m+1} 是 $A_{p_m}0^{(m)}A_{p_m}$ 的子词，我们有

$$\sum_{k=1}^{m(i)-2}(|C_k|+b_{p_k})+|C_{m(i-1)}| < n_i < \sum_{k=1}^{m(i)-1}(|C_k|+b_{p_k}),$$

$T^k y$ 的第 n_i 个位置始终位于 $0^{(b_{p_{m(i)-1}})}$。于是 $y(n_i+k) = T^k y(n_i) = 0, \forall i \in \mathbb{N}$.我们有 $\rho(T^{n_i}y, y) > 1/(k+1)$ 对任意 $i \in \mathbb{N}$ 均成立，这意味着 $T^{n_i}y \nrightarrow y$。□

由上述命题可知，(X, T) 的多重回归点集合为 $\{\mathbf{0}\}$，因此在 X 中不稠密。定理 C 的证明至此完成。

5.2. 一个问题。这仍然是一个问题，即

问题 1. 设 (X , T) 是传递的。在 (X, T) 满足什么条件时，该集合

$$\{x \in X : \forall U \ni x, \exists\, n \ s.t.\ T^{p_1(n)}x \in U, \ldots, T^{p_d(n)}x \in U\}$$

对于所有在零点处消失的整系数多项式 $p_1, \ldots, p_d$，是否总会在 X 中稠密?

我们将有效条件记为 P。显然，P 可以是“$(X,\ T)$ 是极小的”或“$(X,\ T)$ 是一个 E-系统 [1]”。定理 C 的含义是，P 不可能是 $(X,\ T)$ 的任何混合性质。

[1] 若 (X,T) 是传递的，并且存在一个 T -不变测度 μ，使得 $\mathrm{supp}(\mu) := \{x \in X :$ 对于 x 的任意邻域 U，$\mu(U) > 0\} = X$，则称其为 E-系统。

参考文献

[1] M. Beiglb¨ock，利用组合工具获得大量等差数列。Proc. Amer. Math.Soc.137 (2009)，第 12 期，3981–3983。[2] V. Bergelson和 A. Leibman，范德瓦尔登定理与 Szemer´edi 定理的多项式扩展。J.Amer. Math.Soc. 9 (1996)，第 3 期，725–753。[3] V.Bergelson和 N. Hindman，大集合中包含的分割正则结构十分丰富。J. Combin. TheorySer. A 93 (2001)，第 1 期，18–36。[4] V. Bergelson和 A. Leibman，范德瓦尔登定理与 Szemer´edi 定理的多项式扩展。J.Amer. Math.Soc. 9 (1996)，第 3期，725–753。[5] H.Furstenberg，对角线测度的遍历行为与 Szemer´edi 关于等差数列的一个定理。J.Analyse Math. 31 (1977)，204–256。[6] H. Furstenberg，遍历理论与组合数论中的递归。M. B. Porter 讲座。Princeton UniversityPress，Princeton，N.J.，1981。[7] H.Furstenberg和 E. Glasner，子集动力学与范德瓦尔登定理。拓扑动力学与应用（Minneapolis，MN，1995），197–203，Contemp. Math.，215，Amer.Math. Soc.，Providence，RI，1998。[8] H.Furstenberg，B. Weiss，拓扑动力学与组合数论。J. Analyse Math. 34 (1978)，61–85(1979)。[9] E.Glasner，拓扑遍历分解及其在极小变换幂的乘积中的应用。J.Anal. Math. 64(1994)，241–262。[10] E. Glasner，W.Huang，S. Shao，B. Weiss 和 X. Ye，拓扑特征因子与幂零系统。J.Eur. Math.Soc.，即将出版。arXiv:2006.12385。[11] W. Huang，S.Shao 和 X.Ye，由多项式诱导的拓扑动力系统及组合后果。arXiv:2301.07873。[12] A. Leibman，幂零群作用的多重递归定理。Geom.Funct. Anal. 4 (1994)，第 6期，648–659。[13] Z.Lian 和 J. Qiu，拓扑动力系统中等差数列空间的前幂零因子。J.Dynam. DifferentialEquations，即将出版。arXiv:2010.01803。

中国科学技术大学数学系，中国安徽省合肥市，邮编：230026。电子邮箱：qinqiwu@mail.ustc.edu.cn