arXiv:2304.03099v2 [quant-ph] 5 Mar 2024

无序 SU(N)对称海森堡链中的有限尺寸亚热态区间

Dimitris Saraidaris,[1,2] Jheng-Wei Li,[1,3] Andreas Weichselbaum,[4] Jan von Delft,[1] 和 Dmitry A. Abanin[5,6]

[1] *Arnold Sommerfeld Center for Theoretical Physics, Center for NanoScience, and Munich Center for Quantum Science and Technology, Ludwig-Maximilians-Universität München, 80333 Munich, Germany*

[2] *Department of Physics, Freie Universität Berlin, 14195 Berlin, Germany*[3] *Université Grenoble Alpes, CEA, Grenoble INP, IRIG, Pheliqs, F-38000 Grenoble, France*

[4] *Department of Condensed Matter Physics and Materials Science,Brookhaven National Laboratory, Upton, New York 11973-5000, USA*[5] *Department of Theoretical Physics, University of Geneva, 1211 Geneva, Switzerland*

[6] *Department of Physics, Princeton university, Princeton, New Jersey 08544, USA*（日期：2024年3月6日）

SU(N) 对称性与多体局域化（MBL）相不相容，即使存在强无序也是如此。然而，近期研究表明，有限尺寸的 SU(2) 系统会呈现非遍历的亚热行为，其特征是本征态热化假说失效，且激发本征态的纠缠熵介于面积律与体积律之间。本文采用含时密度矩阵重整化群（tDMRG）方法，将此前对 SU(2) 对称无序海森堡模型的研究扩展至更大的系统。我们模拟了从弱纠缠初态出发、持续至较长时间的量子淬火动力学，发现较强无序下存在稳健的亚热行为。尽管我们发现，随着系统尺寸增大，系统趋于热化的倾向有所增强，但亚热化区间仍会在中间时间尺度上持续存在，因此有望通过实验探测到。在较弱无序下，我们观察到热化特征；然而，与常规热化系统不同，纠缠熵呈现缓慢的次线性增长。此外，我们还研究了 SU(3) 对称无序海森堡模型的动力学。同样，强无序会使系统进入亚热化区间，不过，与 SU(2) 情形相比，热化相的范围更广。我们的发现表明，在具有非阿贝尔连续对称性的自旋链中，亚热化区间具有稳健性；同时，这些发现也与此前研究所指出的结论一致：在较大的系统尺寸和较长时间尺度下，系统最终会热化。

一、导论

相互作用孤立系统的非平衡动力学近来备受关注，这既是因为其具有重要的理论意义，也因为它在实验中的应用。在不存在外部热浴时，系统的动力学由其组成部分之间的内禀相互作用决定。对于所有微观态均可到达的遍历孤立系统，会演化至热平衡。只要子系统足够小，这类系统本身就会充当其子系统的热浴。在这种情况下，对于任意物理初态，经过足够长的时间后，系统的局域可观测量会达到热期望值——这一行为可由著名的本征态热化假说（ETH）来理解 [1——3]。

强无序的存在会彻底改变这种行为，并导致遍历性崩溃。关于无序导致局域化的首个证据，发表于P.W.Anderson的开创性论文 [4], ，即所谓的安德森局域化，指的是单粒子局-域化。此外，近期关于孤立系统的理论研究 [5–17] 和实验研究 [18–28] 发现，在多体环境下，强无序能够抑制热化。因此，近年来出现的多体局域化（多体局域化）（综述见 [29, 30]）及其相变 [31–38], 引起了广泛关注。多体局域化相构成了一种新的物质动力学相，其中遍历性被打破，并且初态的信息在系统的整个演化过程中得以保留。多体局域化相的关键特征是，此类系统具有一组完备的准局域运动积分（准局域运动积分） [11, 12]。这导致激发本征态的纠缠熵 $S(\ell) = -\mathrm{Tr}\left(\rho^{(\ell)} \ln \rho^{(\ell)}\right)$ 对大小为 ℓ 的连续区块遵循面积律标度，并且在量子淬火 [8–13]中，纠缠熵随时间呈对数增长。

尽管有限尺寸系统中的多体局域化现象学已得到充分确立，但近期一项精确对角化研究 [39], 基于将有限尺寸数值结果外推至系统尺寸和时间均趋于无穷的极限，质疑了一维多体局域化相在该极限下的稳定性。随后发表的论文对这一解读提出了质疑，见文献 [40, 41]。此外，文献 [38] 指出，可达到的系统尺寸可能不足以就多体局域化-热化转变（或其是否存在）得出结论。我们注意到，在二维系统中，有论据表明稀有热斑会导致系统极其缓慢地热化 [42]。然而，在强无序的一维系统中，雪崩不稳定性并不起作用。我们强调，多体局域化相最终是否稳定这一重要问题不在本文讨论范围之内。

在本文中，我们探讨 SU(N) 对称性、热化与局域化之间的相互作用。为此，我们研究无序的 SU(N) 对称系统是否可行。

海森堡链会发生热化，或者呈现遍历性破缺的特征。我们的研究有两个动机。首先，先前的研究证实，无序系统的遍历性破缺取决于其对称性。虽然阿贝尔对称性允许多体局域化相存在，其中随机磁场中的海森堡链是多体局域化相里研究最为广泛的系统之一 [8, 31, 43, 44]，非阿贝尔对称性 对遍历性破缺施加了严格限制 [45]。对于具有离散非阿贝尔对称性的模型，人们讨论过两种情形。第一种可能性是，这类系统形成多体局域化相，其中对称性自发破缺至一个阿贝尔子群 [46]。另一种可能是，它们呈现保对称性的量子临界玻璃（QCG）[47]，；然而，最近有研究指出，后一种相在微扰下并不稳定，因为共振会大量增殖，最终导致热化 [48]。人们认为，具有无限维表示的连续非阿贝尔对称群，与具有完备局域积分运动常数（LIOM）的标准多体局域化并不相容 [45, 49]。

其次，在最近一项关于无序SU(2)- 对称海森堡系统的研究中 [50] 发现，当无序足够强时，会出现一个中间态，该态既不完全是多体局域化，也不是热化。我们在下文中将这一态称为次热态，其激发本征态的纠缠标度介于面积律和体积律之间。在这篇论文中，作者对规模最大达 $L \leq 24$ 个格点的链进行了精确对角化（ED）分析，并观察到系统的行为明显处于次-热状态。此外，强无序重整化群（SDRG）分析显示，长程共振最终会大量出现，导致本征态的非遍历结构在规模极大的系统中崩溃，即使系统受到非常强的无序作用也是如此。

在本文中，我们通过研究无序 SU(N) 对称海森堡模型的动力学性质，拓展了文献 [50] 中的工作。具体而言，我们考察亚热行为是否会出现在更大的系统中，以及是否会出现在 SU(3) 对称模型中。分析基于短程纠缠初态在无序海森堡哈密顿量作用下的时间演化，这些初态以矩阵乘积态（矩阵乘积态）的形式表示。我们采用的演化方法是含时密度矩阵重整化群（tDMRG） [51–53]。我们计算所得时间演化态的等时自旋-自旋关联和纠缠熵，并分析它们随长度及时间演化的标度关系。

II. 模型与方法

我们考虑无序的 SU(N) 对称海森堡模型 [54]，适用于 $N = 2$ 和 3 种粒子味道，由哈密顿量描述，

$$H = \sum_{i=1}^{L-1} J_i \, \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}. \tag{1}$$

这里，$\mathbf{S}_i$ 是一维链上第 i 个格点的 SU(N)基本表示生成元，该链长度为 L，并满足开放边界条件。最近邻耦合始终取反铁磁形式，其数值从归一化的幂律概率分布中随机抽取

$$P(J) = \frac{\alpha}{J^{1-\alpha}} \, \theta(1-J) \qquad (0 < J < 1) \tag{2}$$

与早期理论研究 [55–57] 和实验 [58]一致。实参数 $\alpha > 0$ 控制无序的强度，其中当 $\alpha = 1$时得到普通随机耦合 $J \in [0, 1]$，而当 $\alpha \to \infty$时得到均匀耦合。通过选择上限 $J < 1$来设定能量单位。对一对采样耦合常数 $J_1 < J_2$，较大值与较小值之比的平均值在 $\alpha \to 0$、$\langle \frac{J_2}{J_1} \rangle \to \infty$时发散（其典型值为 $\exp\langle \ln \frac{J_2}{J_1} \rangle = e^{1/\alpha}$[50]；尽管该值在 $\alpha = 1$处平滑变化，但在$\alpha < 1$时也会迅速发散）。这表明，在强无序状态$\alpha < 1$下，沿链的耦合具有很强的非均匀性，这也会导致链上出现弱耦合的键。

在本文中，我们聚焦于强 无序区域$\alpha \leq 1$，其中已有研究报道 $N = 2$ 有限自旋链存在亚热行为 [50]。为了验证所提出的亚热行为，我们使用 tDMRG 研究能量接近零的弱纠缠初态的实时动力学。这类状态位于多体谱的中部。我们的方法具有两方面优势。首先，对于无序系统而言，tDMRG 是一种具有良好可控性的精确矩阵乘积态（MPS）方法，使我们能够模拟远大于精确对角化所能处理的系统尺寸 [59]（我们研究的系统尺寸最大达到 $L = 144$）。其次，在我们的 MPS 框架内，我们不仅可以研究局域可观测量的实时弛豫，还可以直接测量小型子系统的平均纠缠熵标度 [60]。这两者都是系统趋向热化、亚热化或多体局域化（MBL）的重要指标。

下文中，我们首先通过采用二阶Trotter 分解、时间步长$dt = 0.1$ 以及有效键维数为 $D^* = 2048$个多重态的 tDMRG，对若干无序实现下给定的初态进行实时模拟。我们利用所得的时间演化矩阵乘积态，研究小型子系统的平均纠缠熵的标度行为，以及最近邻关联函数$\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1} \rangle$ 在实时演化过程中和长时间极限下的行为。如下文所述，关联函数衰减至热平衡值是热化的标志，而其非热值则表明系统处于非热化区域。为了提取系统性的行为，我们将分别改变SU(2)和 SU(3) 对称模型的系统尺寸 L 以及无序强度 α 。

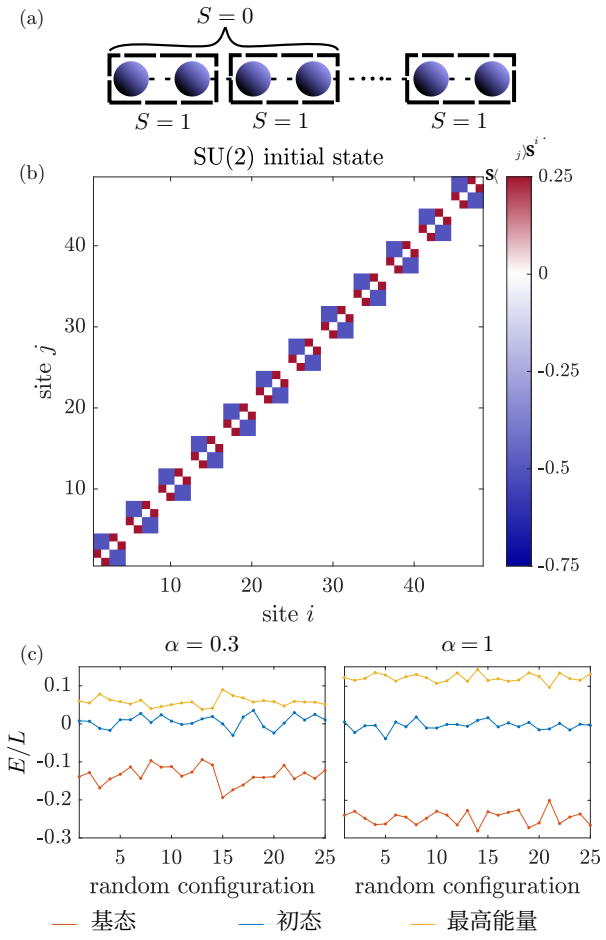

图1。(a)SU(2)模型初态结构的示意图：相邻自旋在奇数键上形成三重态，成对的相邻三重态耦合形成单态。(b) SU(2) 初态的自旋-自旋关联 $\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \rangle$ 色彩图。形成三重态或单态的自旋之间的关联分别为 $\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \rangle = +0.25$ （深红色）或-0.75 （深蓝色）。(c)无序强度为 $\alpha = 0.3$ （左）和 1（右）时，25个随机构型的基态（GS）、初态和最高能量，其中 $E_{\text{highest}}(J) = -E_{\text{GS}}(-J)$。

III. SU(2)-对称模型

在本节中，我们聚焦于无序SU(2) 海森堡模型。首先，我们引入一个初态并研究其时间演化。其次，我们展示纠缠熵和自旋-自旋关联测量的结果。

A. 初态

在热化的背景下，实时演化的初态选择十分重要，因为能量谱的不同部分可能表现出定性上不同的动力学。当引入无序时，能量谱两端附近的态通常会先于谱中部的态发生局域化，而谱中部的态密度较高。如果此类转变确实会随能量密度发生，这就意味着能量谱中出现了分隔热态与多体局域化态的迁移率边。在本文中，我们将把注意力限制在谱的中部，通过制备能量接近零的初态来实现。此类态预计会表现出最强的热化倾向。此外，由于总自旋是一个守恒量，以下我们将聚焦于具有 $S_{\text{tot}} = 0$ 的单态扇区。对于半填充条件下强相互作用费米子的实验装置而言，[20]这种选择具有相关性。

具体而言，我们始终制备初态矩阵乘积态 $|\psi_{t=0}\rangle$，如图 1（a、b）所示：奇数键上的每一对最近邻自旋都组合成一个三重态，$\mathbf{S} = 1$，然后将相邻的两个此类三重态融合成一个自旋单态。因此，长度为4的倍数的链的总自旋为零。以这种方式制备的初态矩阵乘积态具有较小的键维数。重要的是，如图 1（c）所示，对于任意无序实现，这个初态的能量始终接近于零。

B. 纠缠熵标度

子系统层面的纠缠熵行为，是判断系统最终热化还是局域化的一个有用指标。特别是，如果系统在演化的最终时刻已（接近）热化，我们预计 $S(\ell)/\ln 2$（其中 ℓ 为子系统尺寸）会遵循体积律行为，随 ℓ 线性增长，斜率接近 1，对应于无限温度态。相比之下，对于 MBL系统，$S(\ell)/\ln 2$ 会随时间对数增长，并在 $t \to \infty$ 处饱和于一个与 ℓ线性相关的值，但其斜率小于 1，且取决于初态 [10, 13]。

在我们的分析中，我们计算了所有块大小为 ℓ（$1 \le \ell \le 8$）的子系统的平均纠缠熵，并将其作为时间 t 的函数，计算截至最大模拟时间 t_{f}。由于我们研究的系统存在无序，我们不希望将研究局限于半链纠缠熵，因为这只对应于长度为$L/2$的两个子系统的纠缠熵。相反，我们希望在子系统层面研究这些无序系统的行为，并通过分析不同大小的子系统来提取纠缠熵标度结果。更具体地说，对于任意固定的无序实现，我们计算平均纠缠熵，

$$S_{\text{ent}}(\ell) = -\frac{1}{N^{(\ell)}} \sum_{\kappa=x_i}^{x_f} \text{Tr}(\rho_\kappa^{(\ell)} \ln \rho_\kappa^{(\ell)}) \,. \tag{3}$$

这是对由位置 $\kappa \in [x_i, x_f]$（区块内最左侧自旋的位置）指定的 $N^{(\ell)}$ 个连续区块位置取平均。为减少有限尺寸效应，我们

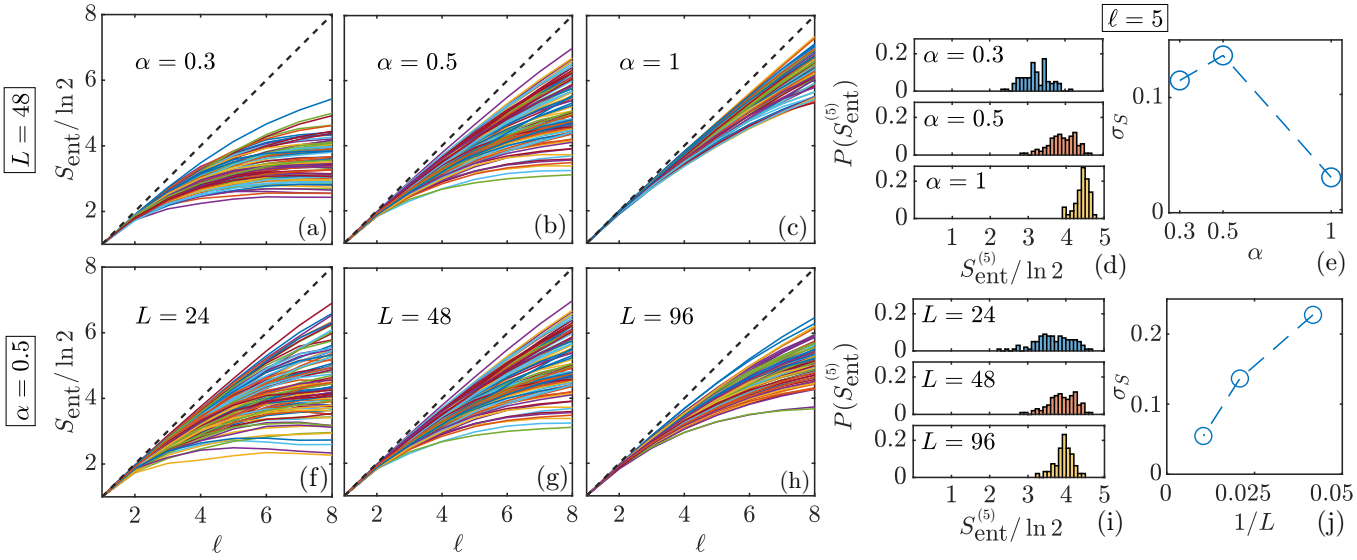

图2. 纠缠熵 $S^{(\ell)}$ 纠缠在最终演化时间 $t_{\rm f}$ 下，对于系统尺寸 L、无序强度 α 和子系统尺寸 ℓ 的各种组合。除 $\alpha = 1$、 $L = 48$ 外，所有情况下我们均选择了 $t_{\rm f} = 500$；对于 $\alpha = 1$、 $L = 48$，由于更长演化时间的计算成本较高，我们使用了 $t_{\rm f} = 150$。顶行：固定 $L = 48$、 $\alpha \in \{0.3, 0.5, 1\}$。底行：固定 $\alpha = 0.5$、 $L \in \{24, 48, 96\}$（为便于比较，因此中间面板(b) 和(g) 完全相同）。（a-c、f-h）： $S_{\rm ent}$ 对 ℓ 的依赖关系，其中每条线代表一种不同的无序构型，每个面板显示100种无序构型。（d、i）： $\ell = 5$对应的 $S_{\rm ent}$ 值的分布。（e、j）：(d、i)中分布的方差。

在上述平均中不计入链最左端和最右端的 $L/6$ 个自旋，因此 $x_i = L/6 + 1$ 和 $x_f = 5L/6 - \ell + 1$。

在图 2中，我们绘制了 $S_{\rm ent}(\ell)$ 在最终时间 $t_{\rm f}$ 作为 ℓ 的函数，对于不同参数区域中的每个无序实现。在 $L = 48$ 强无序下的 [$\alpha = 0.3$ 图 2（a）中，或 $\alpha = 0.5$ 图 2（b）中], 我们发现，即使经过很长时间，大多数无序实现仍处于体积律与面积律之间， $t_{\rm f} = 500$。这表明系统在这些演化时间内尚未热化，呈现出亚热行为。另一方面，在较弱的有效无序下（$\alpha = 1$），我们观察到 $S_{\rm ent}$在几乎所有无序实现中都趋近于体积律，其斜率接近1，而且在更短的时间 $t = 150$[图 2（c）]。

为进一步区分亚热和热化行 P为（$S_{\rm ent}$）及其方 σ_S 差，我们计算了 $\ell = 5$ 在 $t = t_{\rm f}$ [图 2（d、e）], 对于系统尺寸$L = 48$ 以及不同无序强度的情况。我们注意到，系统本征态的纠缠熵方差此前也曾被用于研究无序伊辛模型 [61], ，其中最大方差被用作有限尺寸系统中多体局域化—热化交叉的指标。在我们的研究中，我们将重点关注量子淬火后的纠缠熵以及亚热—热化交叉。我们在图 2（d）中观察到，在较弱的无序下，分布变窄，并且 σ_S 随着 α的增加趋近于零，而在较强的无序下，分布仍然较宽，具有显著的方差 $\sigma_S \gtrsim 0.1$ [图 2（e）],表明在所研究的系统尺寸下存在亚热行为。

为了研究（亚）热态的依赖关系系统尺寸的影响，我们计算了 $L = 24$ 和 96 以及无序强度 $\alpha = 0.5$下的纠缠熵。见图2(f-h)，在 $t_{\rm f} = 500$ 处，所有系统尺寸都明显呈现亚热行为。然而，增大系统尺寸会增强系统趋向热化的倾向，这反映在纠缠熵方差的减小上，见 σ_S [图2(j)]。

为分析纠缠熵随时间的增长，我们研究了 $S_{\rm ent}(t)$在 $\ell = 5$ 对于上文讨论的参数组合的时间演化（见图 3 ）。黑色数据点显示了 $S_{\rm ent}(t)$对于 $\alpha = 1$的某一特定无序实现，其似乎遵循体积律，如图 2(c)所示。有趣的是，纠缠熵随时间呈对数增长，这与传统热化系统中的线性行为形成对比。因此，对于较弱的无序（$\alpha = 1$），我们预计系统能够达到热态，尽管动力学非常缓慢。

为了进一步了解亚热态的结构，我们研究了那些未达到体积律标度的无序实现的纠缠增长 $t_{\rm f}$，这些实现因此表现出最显著的非遍历行为。为此，我们对 $S_{\rm ent}(t$按 $S^{(5)}$ 纠缠标度最低的 25% 无序实现 $t = 500$ 在图2所示参数组合下取平均，结果见图3。对于对应强无序的所有参数情况，我们都观察到纠缠熵随时间呈对数增长，$S_{\rm ent} \sim \log t$。 在 $L = 48$ (蓝线)处，纠缠熵的增长取决于无序强度，其中无序最强时增长最缓——

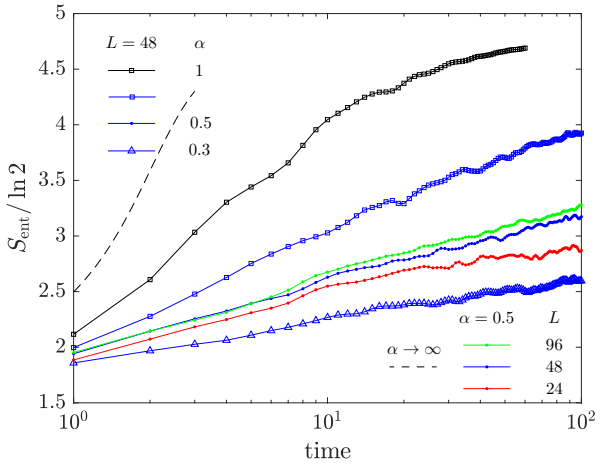

图3. 纠缠熵 $S_{\rm ent}(\ell = 5)/$ 随时间呈 $\ln 2$ 增长 t 参数组合与图2相同，对在 $t_{\rm f}$处纠缠熵最低的25个（共100个）样本取平均。黑线表示一个单独的样本，其 $L = 48$ 和 $\alpha = 1$ 表现出非常接近体积律的行为，并具有可能的最大前因子，$S^{(\ell)}_{\text{纠缠}}/\ln 2 \le \ell = 5$（上方坐标轴）。作为对比，虚线表示均匀海森堡模型中的纠缠增长（$\alpha \to \infty$， $J_i = 1$， $\forall i$）。

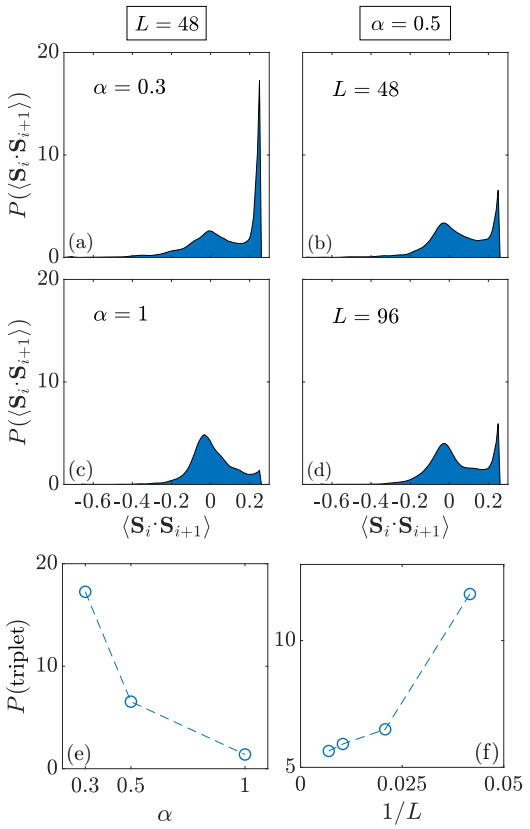

图 4. 对所示每种系统尺寸 L 和无序强度 α 的组合，将奇数键初始化为自旋三重态后，在 100 次实现中，于最终时刻 $t_{\rm f}$ 的最近邻自旋-自旋关联分布。数据是相对于 $x \equiv \langle \mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+1} \rangle$ 收集的，采用均匀的分箱大小 $dx = 0.01$，此处显示为归一化分布 $\int P(x)dx = 1$。根据定义，在时刻 $t = 0$， $P(x) = \delta(x - \frac{1}{4})$。除 $\alpha = 1$、 $L = 48$ 外，所有情况均取 $t_{\rm f} = 500$；对于后两者，我们取 $t_{\rm f} = 150$。(a–c)：固定 $L = 48$、 $\alpha \in \{0.3, 0.5, 1\}$。(d)： $L = 96$、 $\alpha = 0.5$ 。(e、f)：在最终时刻 $t_{\rm f}$ 仍局域于三重态的键的百分比，随 α 或 $1/L$变化；由于钉扎尺寸的关系，这里等价于 $P(x)$，其中 $x \simeq \langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1} \rangle_{\rm triplet} = 0.25$，即最后一个分箱中的平均权重 $(0.24 < x \le 0.25)$。

最慢的增长。此外，在 $\alpha = 0.5$处，我们注意到，当 L 增加时，这些实现的纠缠熵增长略快。然而，这种相对于系统尺寸的漂移非常缓慢，表明亚热化区间在实验相关时间尺度内具有稳健性。最终，我们预计会发生热化；然而，动力学极其缓慢，因此我们无法精确确定非常长的热化时间尺度以及所需的系统尺寸。

C. 自旋-自旋关联

热化的一个定义性特征是，系统在时间演化过程中会失去对其初始条件的记忆。也就是说，若系统处于热态，那么即使它处于纯态，在达到稳态后，局域可观测量的取值也会与适当的吉布斯系综所描述的热期望值一致。如果将初态的能量密度设为谱的中部， $\langle H \rangle \sim 0$，那么局域约化热密度矩阵将对应于无限温度极限 $T \to \infty$。因此，我们预计最近邻关联在长时间极限下会演化至$\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1} \rangle \sim 0$ 。另一方面，在多体局域化相中，某些局域可观测量在长时间后仍会与其初始值相关，这反映了局域运动积分的出现。在 SU(2) 亚热无序自旋链中，我们预计强耦合自旋对的自旋-自旋关联会随时间近似守恒 [50]。因此，我们预计其中一些初始化为三重态的自旋对（链中总对数的一半）由强 键耦合，将保留初始的三重态关联， $\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1} \rangle \simeq 0.25$。

图 4 展示了经过足够长时间（$t_f = 500$）后得到的最近邻自旋关联分布，其中仅关注由奇数键耦合、且在 $t = 0$时形成三重态的自旋对。我们考虑系统尺寸为 $L = 48$ 、无序强度为 $\alpha \in \{0.3, 0.5, 1\}$的系统。对于无序值 $\alpha = 0.5$，我们还研究了不同的系统尺寸 $L = \{24, 48, 96, 144\}$。在 $t_f = 500$时，我们在强无序（$\alpha = 0.3$）下观察到遍历性破缺的有力证据，因为仍处于三重态的键的比例相当显著 [图 4(e)]，，这与上文讨论的纠缠熵结果一致。随着无序减弱，这种趋势也随之减弱

较弱。类似地，在无序强度为 $\alpha = 0.5$的情况下，随着系统尺寸增加，仍保持局域化的初始三重态键的百分比在 $\langle \mathbf{S}_i\mathbf{S}_{i+1}\rangle \simeq 0.25$缓慢下降 [图4(f)]。特别是，将这一百分比外推至无限尺寸极限 $1/L \to 0$，局域化键的百分比似乎仍高于$P(0.25) \gtrsim 5\%$。与图4 上方各面板中的体分布相比，这表明，即使对于 $L \to \infty$，在 $x = \langle \mathbf{S}_i\mathbf{S}_{i+1}\rangle \simeq 0.25$右边界附近的峰值仍然存在且十分显著。这可以被视为系统中所谓弱连接的结果 [参见围绕公式 (2) 的讨论] ；就局域（最近邻）期望值而言，这些弱连接导致系统尺寸收敛得非常缓慢。三重态关联的持续存在表明近似守恒定律的存在，这些定律对应于由 J耦合的相邻自旋对的总自旋，该耦合远大于它们与其他相邻自旋的耦合 [50]。然而，也可以观察到图 4(f)中最左侧两个数据点开始出现下降趋势，因此最终可能会进一步削弱局域化键的整体存在。总体而言，对于强无序（$\alpha = 0.5$），遍历性破缺行为取决于系统尺寸，并且随着 L 增加，系统趋向于非常缓慢的热化；而对于较弱无序（$\alpha = 1$），即使对于小型系统，也已经存在热化的证据 [图 4(c)]。

到目前为止，纠缠熵和长时间下自旋-自旋关联的行为都显示出存在亚热化区间的证据，该区间同时依赖于无序和系统大小。为了理解这一体系的动力学，图 5 展示了初始化为自旋三重态的键的自旋-自旋关联的时间演化。从 $\alpha = 0.5$ 和 $L = 48$（左图）开始，我们绘制了 $\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}\rangle$ 对所有奇数键（因此 $\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}\rangle (t = 0) = 0.25$）的时间演化，这些键来自具有不同熵标度的无序实现（图2）。具体而言，在图5 中，中上部和中下部面板分别对应于图2 中纠缠标度最低、中等和最高的无序实现。我们可以区分出三种不同的动力学行为。首先，存在关联在时间演化过程中得到良好保持的键（蓝线），这表明可能涌现出了局域运动积分。对于表现出较高纠缠熵的实现，其中大多数

键呈现出在 0 附近振荡的关联（红线），表明相应的局域可观测量达到平衡态。在所有情况下，也存在具有其他非平凡动力学的键，表现出频率和振幅各异的振荡（黄线）。这反映了耦合的强烈非均匀性所导致的系统复杂动力学。

这种情况 $\alpha = 0.3$ [与图中右侧面板 5] 所示的现象类似。纠缠熵最低的实现（图5(d)）同时包含相关性守恒的键和呈现非平凡动力学的键。对于 $\alpha = 0.3$，我们观察到的实现至多呈现中间态的熵标度。这样的实现

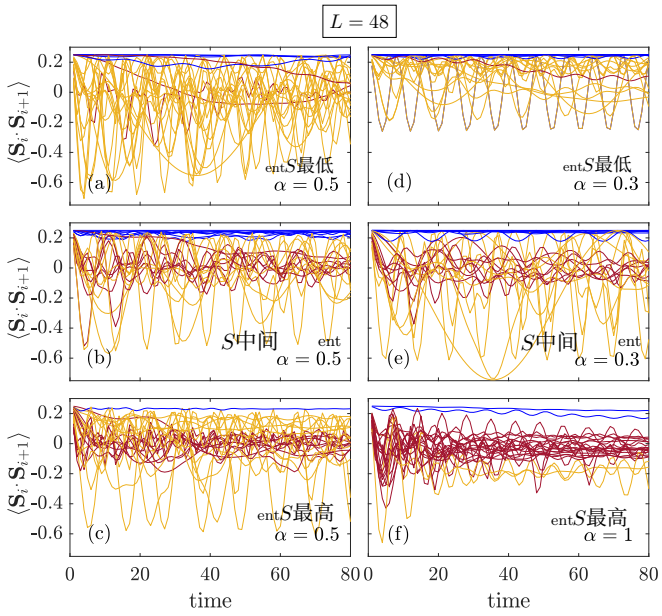

图5。 $\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}\rangle$ 奇数键的时间演化，展示了具有不同S_{ent} 行为的 $L = 48$ 系统中单个无序实现的结果，具体如从上到下所示：标签“最低”“中间”或“最高” S_{ent} 表示，在图2(a-c)中指定 α 的所有无序实现中，分别选取了具有最低、中间或最高 S_{ent} 标度的无序实现，其中我们定义最低 S_{ent}为： $S^{(8)}_{\text{ent}} < 4$，中间 S_{ent}为： $4 \le S^{(8)}_{\text{ent}} \le 6$，最高 S_{ent}为： $S^{(8)}_{\text{ent}} > 6$。蓝色（红色或黄色）线分别对应趋近于 $\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}\rangle$ 最大值（接近零或其他值）的键 $+0.25$ 。

[图5(e)] 呈现出与 [图5(b)],相似的动力学，因为两者具有相似的熵标度。另一方面，对于较弱的无序 $\alpha = 1$，在纠缠熵最高的实现中，绝大多数键都围绕 0 振荡（热化键），这与纠缠熵达到热化的体积律相一致。

上述结果为亚热化区间中的动力学提供了直观图景，与先前的研究结果 [45, 50, 62]一致。具体而言，在可达到的演化时间内未发生热化，源于存在成对的强耦合自旋，而这些自旋的总自旋是一个近似的运动积分。

IV. SU(3)-对称模型

接下来，我们考察无序 SU(3) 对称海森堡模型的动力学。首先，我们需要了解自旋-自旋关联的预期取值范围。假设各个自旋处于 SU(N) 的 N 维基本不可约表示中。对于 SU(N) 不变态，两点

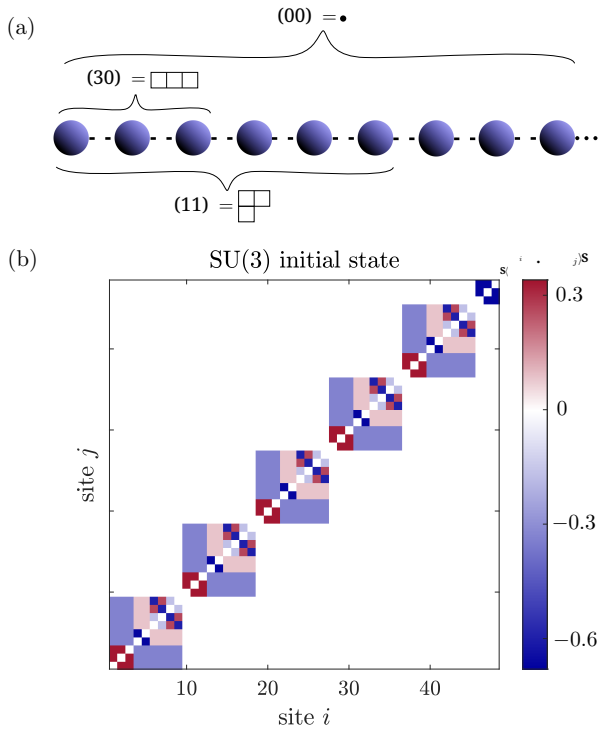

图6。(a)：SU(3) 模型初态结构示意图。(b)：SU(3) 初态的自旋-自旋关联 $\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \rangle$ 色彩图。该状态包含对称子空间和全反对称子空间中的最近邻键，分别具有 $\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \rangle = +1/3$ （红色）和 $-2/3$ （蓝色）。

维数为 $N^2 \times N^2$ 的密度矩阵具有维数为 $d_S \equiv N(N+1)/2$ 的对称子空间，以及维数为 $d_A \equiv N(N-1)/2$ 的反对称子空间。于是，自旋-自旋关联为

$$\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \rangle = \tfrac{1}{2}\left(p_S - p_A - \tfrac{1}{N}\right) \tag{4}$$

其中，p_S 和 p_A 分别是双自旋态在对称或反对称子空间中的总权重。对于无限温度下的热态，$\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \rangle = \frac{1}{2}(\frac{d_S}{N^2} - \frac{d_A}{N^2} - \frac{1}{N}) = 0$，对任意 N均成立。对于 $N = 3$，两个相邻自旋的全对称态具有相关性 $\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \rangle = +1/3$，而全反对称态则具有 $\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \rangle = -2/3$。

A. SU(3) 模型初态

与 SU(2) 情形类似，我们选择一个能量接近谱中部（$\langle H \rangle \sim 0$）的初态。每个格点子空间的选择也受到如下事实的限制：总矩阵乘积态同样假设处于单态扇区（00）中。

下文中，我们采用基于杨表的 SU(3) 标准多重态标记 [63, 64]。具体而言，SU(3) 中每个多重态需要两个标记，$q \equiv (q_1, q_2) \equiv (q_1 q_2)$，它们分别表示两行杨表中第一行和第二行的方框数为 q_1+q_2 和 q_2。因此，定义表示为 $\mathbf{3} \equiv$ (10)，其对偶表示为 $\bar{\mathbf{3}} \equiv$(01)。自旋算符在伴随表示 $\mathbf{8} =$(11) 下变换，该表示由 (10) $\otimes$ (01) $=$ (00) $+$ (11) 得到，其中 (00) $\equiv \mathbf{1}$ 是标量单态。此外，(10) $\otimes$ (10) $=$ (20) $+$ (01)，其中 (20) $\equiv \mathbf{6}$ 是对称子空间，而 (01) $\equiv \bar{\mathbf{3}}$ 是反对称子空间。

为构造初态，将连续的三个格点区块融合为完全对称多重态（30），如图 6（a）所示。随后，将这样的三个相邻区块通过先将其中两个区块融合成（任意但固定的）伴随（11）表示，进而融合为一个整体单态。如图 6（b）所示，该状态并不关于链的中心对称，但随机化的海森堡耦合也同样如此。链右边界的最后三个自旋单独构成一个完全反对称子空间中的键，正如我们所希望的那样，以便保持相同的系统尺寸 L，如SU(2) 分析中一样，从而我们也可以对海森堡耦合使用相同的无序实现 J_i。

该初态的平均能量约为$E/L \sim -0.1$，针对不同的随机无序构型进行了测试，参数取值为 $\alpha = 0.3$ 和 0。5。图 6(b) 展示了 SU(3) 初态的自旋-自旋关联，揭示了其结构。自旋-自旋关联值为 $x \equiv \langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \rangle = +1/3$ （红色）和$\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \rangle = -2/3$ （蓝色）的彩色方框分别对应初始时处于完全对称和完全反对称子空间中的自旋对，下文将它们称为“极端”键。

B. 结果

与对 SU(2) 模型的分析类似，我们始终从上文定义的同一初态开始[图 6）] 该初态通常位于谱的中部附近。对于 SU(3) 的情况，我们始终聚焦于 $L = 48$。随后，我们采用 tDMRG 进行时间演化，使用 $dt = 0.1$ Trotter 时间步长，并保留最多 $D^* = 1024$个 SU(3) 多重态（对应约 $D \lesssim 18000$个态）。为便于直接比较，在 SU(3) 研究中，对于每组参数组合（ J_i 个随机耦合）L， α我们采用了与 SU(2) 情况相同的一组无序实现。

对于 $\alpha = 0.3$、$L = 48$ 和 $\alpha = 0.5$，$L = 48$对于这些在SU(2)模型中表现出非遍历行为的情形，我们计算了 SU(3) 对称哈密顿量下时间演化态的自旋-自旋关联，结果如图 7 所示。从图 7(a) 可以看出，初态中局域于全反对称子空间（$x = -2/3$）的键的百分比约为 15%，而局域于全对称子空间（$x = 1/3$）的约为 20%。在 $t_f = 500$ ，该百分比显著降低至 $< 3\%$ [，即具有 $P(x) < 3$ ，鉴于分箱

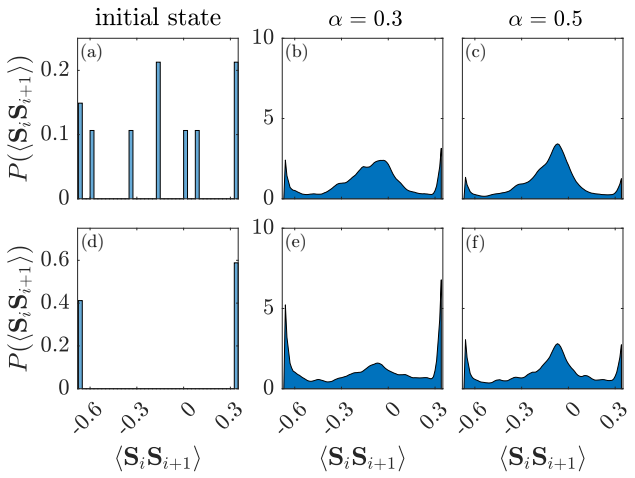

图 7。长度为 $L = 48$ 的无序 SU(3) 系统在时间演化至时间 $t_{\rm f} = 500$ 后的最近邻自旋-自旋关联分布，初态如图6 所示；上方各面板（a-c）中为所有键（或仅极值初态键）［下方各面板（d-f）］, 分别对应。左侧面板（a,d）： $t = 0$时的初始键分布。中间面板（b,e）：$\alpha = 0.3$。右侧面板（c,f）： $\alpha = 0.5$。分布 P（x）的获得方式与图4类似，分箱宽度相同，为$dx = 0.01$。左侧面板中以归一化柱状直方图表示（柱宽为 dx），中间和右侧面板中则以归一化分布函数表示。

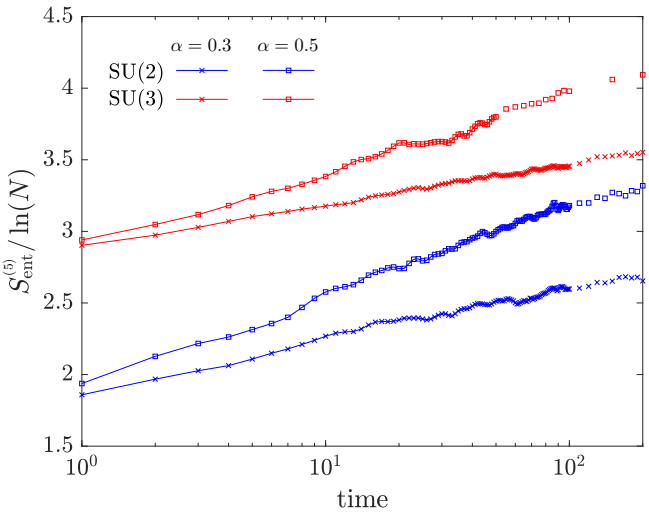

图 8. $\ell = 5$ 子系统的纠缠熵随时间的增长，对于 SU(2) 和 SU(3)模型以及 $L = 48$, $\alpha = \{0.3, 0.5\}$ N 。数据除以 ln 进行归一化，因此具有共同的上界 $S^{(\ell)}{}_{\rm ent}/\ln N \le \ell = 5$。对于每种参数组合，我们聚焦于图 2 中纠缠熵标度最低的 25% 实现，如图 3所述。

宽度 $dx = 0.01$] 在图 7（b、c）中两种强无序情况均如此。因此，亚热行为虽然仍然存在，但在这里并不像SU(2) 情况下那么明显，这表明 SU(3) 链的热化速度稍快。

图中的上方各面板7 展示了利用所有键的数据得到的键分布。研究最初处于完全对称态（$\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j\rangle = +1/3$）或反对称态（$\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j\rangle = -2/3$）的自旋对的行为也颇有启发［（见图6(a)]）。对于这类“极端”键（约占所有键的 35% ），其自旋 - 自旋关联函数在 $t_{\rm f}$ 时的分布展示于图7的下方各面板中。这些图表明，此类自旋对在长时间后仍保留初始关联的概率更高，这说明在这些演化时间内，动力学并未完全达到遍历。

接下来，我们研究纠缠熵的动力学。图 8 对比了 SU(3) 情形与 SU(2) 链在相同无序构型下纠缠熵 $S_{\rm ent}(t)$ / ln N随时间的增长。与图 3类似，我们选取了在 $S_{\rm ent}$ 处达到的 $t_{\rm f}$值最低的 25% 个样本。图 $S_{\rm ent}$ 清楚地显示，SU(3) 模型在量子淬火后的 $S_{\rm ent}$ 对数增长，表明其具有亚热行为。与图 8中同样给出的 SU(2) 数据相比，$S_{\rm ent}$/ ln N在 SU(3) 情形下达到的数值更高。不过，这可以归因于我们所选初态在 SU(3) 情形下具有更强的纠缠。另一方面，图 8中的半对数图显示，对于相同的 $N = 2$, $N = 3$ 在相同的 α取值下斜率相近。这种纠缠熵行为表明，无序的 SU(3) 对称链在相对较长的时间尺度内也表现出非遍历动力学；与此同时，上述自旋-自旋关联分析表明，与 SU(2) 情形相比，SU(3) 链表现出略强的热化倾向。

V. 结论

总之，我们研究了 SU(N) 对称性对无序自旋链中热化（缺失）的影响。为此，我们考察了从对称的弱纠缠态出发，在一次量子淬火中 SU(N) 对称无序海森堡模型的实时演化。借助利用 SU(N) 对称性的基于矩阵乘积态的方法，我们得以研究大型系统的长时间动力学，其系统规模远超以往使用精确对角化进行研究的规模。

对于 SU(2) 模型，我们发现其现象与文献 [50] 的结果一致：在强无序下，系统呈现亚热化区间，其特征是纠缠增长缓慢且没有热化；这被归因于近似运动积分的出现，而这些运动积分由强耦合相邻自旋对的总自旋给出。我们研究了 $S_{\rm ent}$ 和关联函数的分布，发现它们分布较宽；随着系统尺寸增大，这些分布缓慢收窄，表明系统最终会缓慢热化。在较弱的无序下，我们观察到系统发生热化，表现为纠缠熵达到

近乎最大的体积律标度。有趣的是，在这一范围内，纠缠动力学同样缓慢。值得注意的是，近期一篇论文 [65]，研究了无序 SU(2) 对称模型的经典对应系统，并观察到自旋输运呈现亚扩散区间。

最后，我们研究了先前论文中未曾考虑的 SU(3)对称模型，研究范围是SU(2) 模型表现出非遍历性的参数区域。自旋-自旋关联结果表明，尽管亚热行为确实存在，但与SU(2)情况相比，其表现不那么显著。类似地，纠缠熵的增长仍然是对数形式的，但 S_{ent} 达到的数值高于在相同无序强度和系统尺寸下的SU(2)情况。因此，我们得出结论：SU(3)对称链的现象学与 SU(2) 情况相似，但表现出更强的热- 化倾向。

结合 SU(2) 情形下强无序重整化群中的共振分析，我们的结果表明，SU(N)对称自旋链即使在强无序下，对于任意 N 也会最终热化。然而，亚热化区间在 $N = 2,3$ 时是稳健的，其纠缠模式不同于多体局域化相或热化相。通过量子模拟实验观测到这种非遍历行为的特征将会很有意思。

致谢

我们的数值模拟采用了 QSpace 张量库 [53, 66, 67]，该库能够在张量网络算法中利用一般的非阿贝尔对称性。在本文中，这使我们能够在 DMRG 模拟中充分利用 SU(2) 和 SU(3) 系统。本研究部分由德国研究基金会根据德国卓越战略 EXC-2111（项目编号：390814868）资助（JWL、JvD），同时也是慕尼黑量子谷计划的一部分；该计划由巴伐利亚州政府利用巴伐利亚高科技议程附加资金提供支持。A.W. 获得了美国能源部《科学》办公室基础能量科学、材料科学与工程部的支持。D. A. A. 获得了欧洲研究委员会（ERC）根据欧盟“地平线 2020”研究与创新计划（资助协议编号：864597）提供的支持，以及瑞士国家科学基金会的支持。

附录

在本附录中，我们提供有关用于分析的模拟可靠性的信息。上述。为此，我们关注无序较弱的情形，其中 $\alpha = 1$ 以及 $L = 48$。如图 2 (c)所示，这种情形展现出更接近体积律的纠缠熵标度，因此，确保时间演化结果不受显著截断所导致的计算误差影响是明智之举。

DMRG 中最具参考价值的精度指标是约化密度矩阵的舍弃权重 [68]:

$$\epsilon = 1 - \sum_{k=1}^{M} w_k \tag{5}$$

其中，w_k 为约化密度矩阵的本征值，M 为计算中保留的主要本征值的数量。

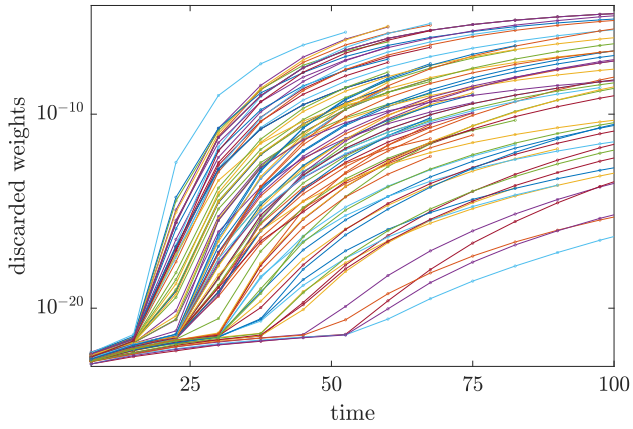

图 9. 无序强度为 $\alpha = 1$ 且 $L = 48$ 时舍弃权重的时间演化。

在图 9中，我们展示了截断权重的时间演化 ϵ 对于参数为$\alpha = 1$的实现，$L = 48$。一些模拟的截断权重已达到 $10^{-6} - 10^{-5}$量级，这就是我们在图 $t_f = 150$ 中仅展示截至该时刻结果的原因。2（c）对于这一特定情况。不过，这与我们关于较弱的无序SU(2)对称模型的论点一致：与其他参数情形相比，它已经在更早的时间表现出热化趋势，但纠缠熵呈对数增长，如图 3所示。

[1] J.M.Deutsch, 《封闭系统中的量子统计力学》, 物理评论A43,2046（1991年）。[2] M. Srednicki, 《混沌与量子热化》, 《物理评论E》50, 888（1994年）。[3] M. Rigol、V. Dunjko 和M.Olshanii, 《一般孤立量子系统中的热化及其机制》, 《自然》452,854（2008年）。[4] P.W. Anderson, 《某些随机晶格中的扩散缺失》, Phys. Rev.109, 1492（1958年）。[5] D. Basko、I.Aleiner和 B. Altshuler, 《具有局域化单粒子态的弱相互作用多电子系统中的金属–绝缘体转变》, 《物理年鉴》321, 1126（2006年）。[6] I. V. Gornyi、A. D.Mirlin和D.G. Polyakov, 《无序线中的相互作用电子：安德森局域化与低-t 输运》, 《物理评论快报》95, 206603（2005年）。[7] V.Oganesyan和 D.A.Huse, 《高温下相互作用费米子的局域化》, 《物理评论B》75,155111（2007年）。[8] M. ˇZnidariˇc、T.Prosen 和P.Prelovˇsek, 《随机场中的海森堡XXZ磁体中的多体局域化》, 《物理评论B》77, 064426（2008年）。[9] R.Vosk和 E.Altman, 《一维多体局域化作为动力学重整化群不动点》, 《物理评论快报》110, 067204（2013年）。[10] M. Serbyn、Z.Papi´c和 D. A.Abanin, 《相互作用强无序系统中纠缠的普适性慢增长》, 《物理评论快报》110, 260601（2013年）。[11] M. Serbyn、Z.Papi´c 和D. A.Abanin, 《局域守恒律与多体局域化态的结构》, 《物理评论快报》111,127201（2013年）。[12] D. A. Huse、R.Nandkishore和V.Oganesyan, 《完全多体局域化系统的现象学》, 《物理评论B》90, 174202（2014年）。[13] J.H. Bardarson、F.Pollmann 和J. E.Moore, 《多体局域化模型中纠缠的无界增长》, 《物理评论快报》109,017202（2012年）。[14] V. Ros、M.M¨uller 和 A. Scardicchio, 《多体局域化相中的运动积分》, NuclearPhysicsB891, 420（2015年）。[15] P. Ponte、Z. Papi´c、F. Huveneers和 D.A. Abanin, 《周期驱动系统中的多体局域化》, 《物理评论快报》114,140401（2015年）。[16] D. A. Abanin、W. DeRoeck 和F.Huveneers, 《周期驱动系统中的多体局域化理论》, 《物理年鉴》372, 1（2016年）。[17] A. Lazarides、A.Das和 R.Moessner, 《周期驱动下多体局域化的命运》, 《物理评论快报》115, 030402（2015年）。[18] I. Bloch、J.Dalibard 和W.Zwerger, 《超冷气体中的多体物理》, 《现代物理评论》80, 885（2008年）。[19] R.Blatt和C. Roos, 《利用囚禁离子进行量子模拟》, 《自然·物理》8, 277（2012年）。[20] M. Schreiber、S. S. Hodgman、P. Bordia、H.P. L¨uschen、M. H. Fischer、R.Vosk、E. Altman、U.Schneider和I. Bloch, 《准随机光学晶格中相互作用费米子多体局域化的观测》, 《科学》349, 842（2015年）。[21] M. Ovadia、D. Kalok、I. Tamir、S. Mitra、B.Sac'ep'e 和 D. Shahar, 《有限温度绝缘体的证据》, 《科学报告》 5(2015年)。[22] J. Richerme, B. Neyenhuis, P. W. Hess, P. Hauke, M. Heyl, D. A. Huse 和 C. Monroe, 《利用可编程随机无序量子模拟器研究多体局域化》, 《自然·物理》12，907（2016）。[23] J. yoon Choi、S. Hild、J. Zeiher、P. Schauß、A. Rubio-Abadal、T. Yefsah、V. Khemani、D. A. Huse、I. Bloch 和 C. Gross, 《探索二维系统中的多体局域化转变》, 《科学》352，1547（2016）。[24] S. Choi、J. Choi、R. Landig、G. Kucsko、H. Zhou、J. Isova、F. Jelezko、S. Onoda、H. Sumiya、V. Khemani、C. von Keyserlingk、N. Y. Yao、E. Demler 和 M. D. Lukin, 《在无序偶极多体系统中观测离散时间晶体序》, 《自然》543，221（2017）。[25] P. Bordia、H. L¨uschen、U. Schneider、M. Knap 和 I. Bloch, 《周期性驱动多体局域化量子系统》, 《自然·物理》13，460（2017）。[26] K. Xu、J.-J. Chen、Y. Zeng、Y.-R. Zhang、C. Song、W. Liu、Q. Guo、P. Zhang、D. Xu、H. Deng、K. Huang、H. Wang、X. Zhu、D. Zheng 和 H. Fan, 《利用超导量子处理器模拟多体局域化》, 《物理评论快报》120，050507（2018）。[27] A. Lukin、M. Rispoli、R. Schittko、M. E. Tai、A. M. Kaufman、S. Choi、V. Khemani、J. L´eonard 和 M. Greiner, 《探测多体局域化系统中的纠缠》, 《科学》364，256（2019）。[28] M. Rispoli、A. Lukin、R. Schittko、S. Kim、M. E. Tai、J. L´eonard 和 M. Greiner, 《多体局域化转变处的量子临界行为》, 《自然》573，385（2019）。[29] F. Alet 和 N. Laflorencie, 《多体局域化：导论与专题选讲》, 《物理学报告》19，498（2018），量子模拟 / 量子模拟。[30] D. A. Abanin、E. Altman、I. Bloch 和 M. Serbyn, 《专题讨论：多体局域化、热化与纠缠》, 《现代物理评论》91，021001（2019）。[31] A. Pal 和 D. A. Huse, 《多体局域化相变》, 《物理评论B》82，174411（2010）。[32] E. J. Torres-Herrera 和 L. F. Santos, 《多体局域化转变处的动力学》, 《物理评论B》92，014208（2015）。[33] R. Vosk、D. A. Huse 和 E. Altman, 《一维系统中多体局域化转变的理论》, 《物理评论X》5，031032（2015）。[34] A. C. Potter、R. Vasseur 和 S. A. Parameswaran, 《多体离域化转变的普适性质》, 《物理评论X》5，031033（2015）。[35] T. Devakul 和 R. R. P. Singh, 《多体离域化转变处面积律纠缠的提前失效》, 《物理评论快报》115，187201（2015）。[36] S. P. Lim 和 D. N. Sheng, 《通过密度矩阵重整化群和精确对角化研究多体局域化及其转变》, 《物理评论B》94，045111（2016）。[37] R. Singh、J. H. Bardarson 和 F. Pollmann, 《纠缠动力学与双分区涨落中的多体局域化转变特征》, 《新物理学杂志》18，023046（2016）。[38] R. K. Panda、A. Scardicchio、M. Schulz、S. R. Taylor 和

M. ˇZnidariˇc, 《我们能否研究多体局域化转变? 》, 《欧洲物理快报》128，67003（2020）。[39] J. ˇSuntajs、J. Bonˇca、T. c. v. Prosen 和 L. Vidmar, 《量子混沌对多体局域化提出的挑战》, 《物理评论E》102，062144（2020）。[40] D. Abanin、J. Bardarson、G. De Tomasi、S. Gopalakr-ishnan、V. Khemani、S. Parameswaran、F. Pollmann、A. Potter、M. Serbyn 和 R. Vasseur, 《区分局域化与混沌：有限尺寸系统中的挑战》, 《物理年鉴》427, 168415（2021）。[41] P. Sierant、D. Delande 和 J. Zakrzewski, 《安德森局域化与多体局域化转变的Thouless时间分析》, 《物理评论快报》124，186601（2020）。[42] W. De Roeck 和 F. m. c. Huveneers, 《多体局域化系统中离域化的稳定性与不稳定性》, 《物理评论B》95，155129（2017）。[43] D. J. Luitz、N. Laflorencie 和 F. Alet, 《随机场海森堡链中的多体局域化边缘》, 《物理评论B》91, 081103（2015）。[44] M. Serbyn、A. A. Michailidis、D. A. Abanin 和 Z. Papi´c, 《多体局域化相中的幂律纠缠谱》, 《物理评论快报》117，160601（2016）。[45] A. C. Potter 和 R. Vasseur, 《多体局域化的对称性约束》, 《物理评论 B 》94，224206（2016）。[46] R. Vasseur、A. J. Friedman、S. A. Parameswaran 和 A. C. Potter, 《粒子-空穴对称性、多体局域化与拓扑边缘模》, 《物理评论B》93，134207（2016）。[47] R. Vasseur、A. C. Potter 和 S. A. Parameswaran, 《高温随机自旋链的量子临界性》, 《物理评论快报》114, 217201（2015）。[48] B. Ware、D. Abanin 和 R. Vasseur, 《非阿贝尔量子链中非遍历相的微扰不稳定性》, 《物理评论B》103，094203（2021）。[49] S. J. Thomson, 《一维哈伯德模型中的无序诱导的自旋-电荷分离》, 《物理评论B》107, L180201（2023）。[50] I. V. Protopopov、R. K. Panda、T. Parolini、A. Scardic-chio、E. Demler 和 D. A. Abanin, 《非阿贝尔对称性与无序：宽广的非遍历区间和反常热化》, 《物理评论X》10，011025（2020）。[51]A. J. Daley、C. Kollath、U. Schollw¨ock 和 G. Vidal, 《利用自适应有效希尔伯特空间进行时间依赖密度矩阵重整化群计算》, 《统计力学杂志：理论与实验》2004，P04005（2004）。[52] S. R. White 和 A. E. Feiguin, 《利用密度矩阵重整化群进行实时演化》, 《物理评论快报》93, 076401 (2004)。[53] A. Weichselbaum, 《张量网络中的非阿贝尔对称性：一种量子对称空间方法》, 《物理年鉴》327, 2972 (2012)。[54] 关于使用精确对角化研究无序 SU(N) 链，参见 B. Dabholkar 和 F. Alet，即将发表。[55] G. Theodorou 和 M. H. Cohen, 《无序 N- 甲基吩嗪四氰基醌二甲烷的顺磁磁化率》, 《物理评论快报》37, 1014 (1976)。[56] S.-k. Ma、C. Dasgupta 和 C.-k. Hu, 《随机反铁磁链》, 《物理评论快报》43, 1434 (1979)。[57] C. Dasgupta 和 S.-k. Ma, 《随机海森堡反铁磁链的低温性质》, 《物理评论B》22, 1305 (1980)。[58] J. C. Scott、A. F. Garito、A. J. Heeger、P. Nannelli 和 H. D. Gillman, 《聚（膦酸金属盐）的磁性质：结构无序对一维反铁磁链的影响》, 《物理评论B》12, 356 1975( )。[59] T. Chanda、P. Sierant 和 J. Zakrzewski, 《矩阵乘积态的时间动力学：重新审视大系统中的多体局域化转变》, 《物理评论B》101, 035148 2020( )。[60] X. Yu、D. J. Luitz 和 B. K. Clark, 《多体局域化转变中的双峰纠缠熵分布》, 《物理评论B》94, 184202 (2016年)。[61] J. A. Kj¨all、J. H. Bardarson 和 F. Poll mann, 《无序量子伊辛链中的多体局域化》, 《物理评论快报》113, 107204 (2014)。[62] I. V. Protopopov、W. W. Ho 和 D. A. Abanin, 《SU(2) 对称性对多体局域化和热化的影响》, 《物理评论B》96, 041122 (2017年)。[63] A. Young, 《关于定量代换分析》, 《伦敦数学会会报》，556 (1930)。[64] R. N. Cahn, *Semi-simple Lie algebras and their representations*（Benjamin/Cummings 出版公司，1984）。[65] A. J. McRoberts、F. Balducci、R. Moessner 和 A. Scardicchio, 《无序经典海森堡链中的亚扩散自旋输运》, 《物理评论B》108, 094204 (2023)。[66] A. Weichselbaum, 《张量网络中非阿贝尔对称性的 X 符号》, 《物理评论研究》2, 023385 (2020)。[67] A. Weichselbaum, 《QSpace 张量库 (v4.0) 》, https://bitbucket.org/qspace4u/ (2006-2023)。[68] U. Schollw¨ock, 《密度矩阵重整化群》, 《现代物理评论》77, 259 (2005)。