arXiv:2304.03123v1 [math.DS] 6 Apr 2023

首次敏感同胚

MAYARA ANTUNES 和 BERNARDO CARVALHO

Abstract. 我们为紧致度量空间上的同胚引入首次敏感性，即对该空间开球首次递增时刻的一种条件。连续统意义下扩张的同胚、希尔伯特立方体上的移位映射，以及某些部分双曲微分同胚都满足这一条件。我们证明，在假设首次敏感性的情况下，存在具有局部不稳定连续统的同胚，这些连续统满足与连续统意义下扩张同胚的局部不稳定连续统类似的性质。由此，我们证明首次敏感性（加上一些技术性假设）蕴含正拓扑熵。

1. Introduction

在混沌系统的研究中，双曲系统扮演着核心角色。双曲性被视为混沌的源头 [2], [27] ，但人们发现它是如此强的概念，以至于许多混沌系统并不满足这一条件。事实上，Pugh 和 Shub 的研究 [26] 表明，较弱的双曲性就足以产生混沌动力学。具有双曲行为的不稳定流形的存在，足以证明对初始条件的敏感性和正拓扑熵等性质，因此部分双曲微分同胚是非双曲混沌系统的重要例子。本文探讨的一个总体思路是，理解双曲系统的若干特征如何能够出现在混沌系统中；换言之，如何利用混沌性质证明双曲动力学的某些部分。仅假设对初始条件的敏感性，我们能证明的内容并不多，即使空间具有良好的性质（例如是闭曲面）也是如此，因为存在一些敏感曲面同胚，它们并不具备双曲系统的若干特征。事实上，我们在命题3.18 中讨论了一个例子：它具有敏感性，拓扑熵为零，只有一个周期点，且该点是不动点；其局部稳定（不稳定）集是正则流轨道的线段，因此在向后（向前）迭代时不会增长。

关于不同轨道分离的一种经典且强得多的性质是扩张性。对扩张曲面同胚的研究可以追溯到 Hiraide [16] 和 Lewowicz [21] 的工作，他们给出了扩张性的完整刻画：曲面扩张同胚恰好是伪阿诺索夫同胚。证明中的一个重要步骤是，扩张性意味着稳定集和不稳定集构成一对具有有限个奇点的横截奇异叶状结构。事实上，这两项工作都详细研究了扩张同胚的局部稳定集/不稳定集的性质，并发现它们具有与双曲局部稳定/不稳定流形相似的性质。

Date：2023年4月7日。*Key words and phrases.* 首次敏感性、局部不稳定集、正拓扑熵。
2010 *Mathematics Subject Classification*：主要分类 37D10；次要分类 37B99。

考虑比敏感性更强而比扩张性更弱的动力学性质，并理解我们如何能够为这些性质获得部分双曲动力学，这正是本文所考虑的主要性质——首次敏感性——定义的动机。在对其进行精确定义之前，重要的是要注意到，文献中已经考虑过膨胀性的一些推广 [4,5,8–11,18–20,23,25],，其中更一般的一种是 Kato 在 [18]中引入的连续统意义下的扩张。已知 Peano连续统上的 cw-扩张同胚具有敏感性 [15] ，因此，连续统扩张性推广了扩张性，同时又比敏感性更强。此外，Peano连续统上的 cw- 扩张同胚在空间的每一点都具有一致直径的局部稳定 / 不稳定连续统 [19] ，其性质类似于膨胀和双曲情形，而这足以证明正拓扑熵 [18]。这使得连续统扩张性成为符合上文所阐述的本文理念的一种动力学性质。现在我们继续定义首次敏感性，为此我们先定义并解释敏感性。

定义 1.1. 定义在紧致度量空间 (X,d) 上的映射 $f\colon X\to X$ 若满足敏感，则称其为敏感映射；也就是说，存在 $\varepsilon>0$，使得对于任意 $x\in X$ 和任意 $\delta>0$，都存在$y\in X$，满足 $d(x,y)<\delta$，且 $n\in\mathbb{N}$满足 $d(f^n(x)\ f^n(y))>\varepsilon$.。数值 ε称为 f 的敏感常数。

敏感性意味着，对于每个初始条件，都存在任意接近但彼此不同的初始条件，使其未来迭代彼此分离。我们也可以这样解释敏感性。记 $B(x,\delta)=\{y\in X;\ d(y,x)<\delta\}$ 为以 x 为中心、半径为 δ 的球，敏感性意味着存在 $\varepsilon>0$，使得对于每个球 $B(x,\delta)$，都存在 $n\in\mathbb{N}$，使得

$$\operatorname{diam}(f^n(B(x,\delta)))>\varepsilon,$$

其中 $\operatorname{diam}(A)=\sup\{d(a,b);a,b\in A\}$ 表示 A 的直径。因此，敏感性会增大空间中非平凡球的直径。现在我们定义空间中球的首次增长时间。

定义1.2 (首次增长时间)。令 $f\colon X\to X$ 为一个敏感同胚，其敏感常数为 $\varepsilon>0$，定义在紧致度量空间 $(X,\ d)$ 上。给定$x\in X$和 $r>0$，令 $n_1(x,\ r,\ \varepsilon)\in\mathbb{N}$为 $B(x,\ r)$ 的首次迭代，其直径大于 ε，即 $n_1(x,\ r,\ \varepsilon)$ 满足:

$$\operatorname{diam} f^{n_1(x,r,\varepsilon)}(B(x,r))>\varepsilon\quad\text{and}$$

$$\operatorname{diam} f^{j}(B(x,r))\le\varepsilon\quad\text{for every}\quad j\in[0,n_1(x,r,\varepsilon))\cap\mathbb{N}.$$

我们将数值 $n_1(x,\ r,\ \varepsilon)$ 称为球 $B(x,\ r)$ 的 首次增长时间 （相对于 ε）。

定义 1.3 （首次敏感性）。我们称 f 为首次时刻敏感（或简称首次时刻敏感），如果存在一个函数序列（r_k）$_{k\in\mathbb{N}}$: $X\to\mathbb{R}_+^*$ 从一个常值函数 r_1 开始，并单调递减至 0，使得对于每个$\gamma\in(0,\ \varepsilon]$ 存在 $m_\gamma>0$ 满足以下不等式:

(F1) $|n_1(x,r_{k+1}(x),\gamma)-n_1(x,r_k(x),\gamma)|\le m_\gamma$
(F2) $|n_1(x,r_k(x),\gamma)-n_1(x,r_k(x),\varepsilon)|\le m_\gamma$

对于每个 $x\in X$ 以及每个 $k\in\mathbb{N}$，使得 $r_k(x)\le\gamma$。

条件(F1)的含义如下：如果我们开始减小以 x 为中心的球的半径（序列$(r_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$），并持续检查相对于 γ（数字 $n_1(x, r_k(x)\ \gamma)$）的球 $B(x, r_k(x))$ 的首次递增时刻，我们会得到：当 $r_k(x)$变为 $r_{k+1}(x)$ 时，首次递增时刻$n_1(x, r_k(x)\ \gamma)$ 与 $n_1(x, r_{k+1}(x)\ \gamma)$ 之差被常数m_γ 所界定，该常数不依赖于 $k \in \mathbb{N}$ 或 $x \in X$ （见图1）。条件 (F2)的含义如下：如果我们将敏感常数 ε 减小至 γ，并检查相对于 γ 和 ε（数字 $n_1(x, r_k(x)\ \gamma)$和$n_1(x, r_k(x)\ \varepsilon)$）的球 $B(x, r_k(x))$ 的首次递增时刻，我们会得到它们之差被常数 m_γ 所界定，该常数既不依赖于 $k \in \mathbb{N}$，也不依赖于 $x \in X$（见图 2）。

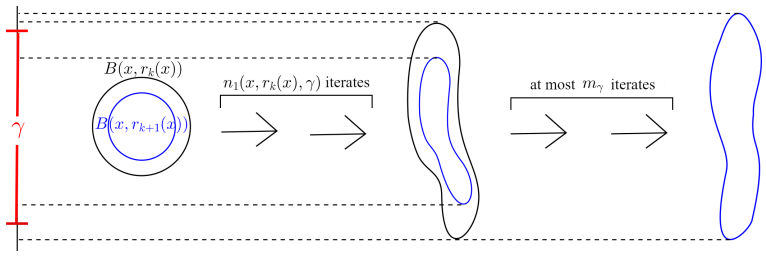

FIGURE 1. 性质 F1

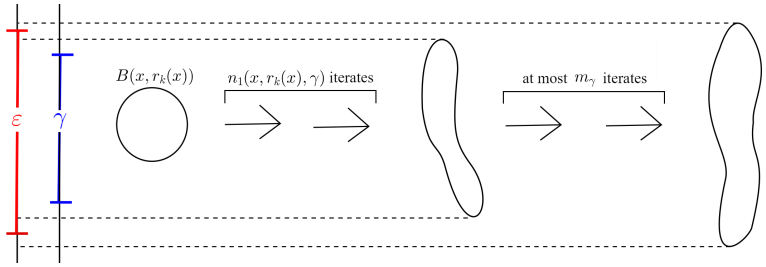

FIGURE 2. 性质 F2

首次敏感性可在任意度量空间中定义，但就我们的研究而言，我们对空间施加了额外的假设。我们假设 (X, d) 是一个满足以下条件的紧致连通度量空间：

（P1）存在 $r > 0$，使得对于每个 $r' \in (0, r)$ 和每个 $x \in X$，$B(x, r')$ 都是连通的；（P2）映射 $(x, s) \to \overline{B}(x, s)$ 在豪斯多夫拓扑中连续；

其中$\overline{A}$表示集合 A的闭包。（P1）和（P2）表示半径足够小的球是连通的，并且这些球随其中心和半径连续变化。这些是对空间拓扑的温和条件，例如所有闭流形、希尔伯特立方体 $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$以及更一般地说，Peano连续统都满足这些条件。Peano连续统是紧致、连通且局部连通的度量空间，并赋有凸度量（参见 [17]）。

现在我们介绍本文的结构。在第2节中，我们证明，首次敏感性意味着空间中每一点都存在一致直径的局部不稳定连续统；这些连续统满足与 cw-扩张同胚的局部不稳定连续统类似的性质。我们称它们为局部 cw-不稳定连续统。第2节专门证明它们的存在性并讨论其主要性质。在第3节中，我们讨论首次敏感同胚的主要例子：连续统意义下扩张的同胚、希尔伯特立方体 $[0,1]^{\mathbb{Z}}$上的全移位，以及一些部分双曲微分同胚。我们还简要讨论如何在每种情形下找到局部 cw-不稳定连续统。在第4节中，我们介绍为证明首次敏感性意味着正拓扑熵所作的尝试，解释其中的困难，并说明如何通过加入一些技术性假设来克服这些困难。

2. Local cw-unstable continua

设 $f\colon X \to X$ 是一个紧致度量空间 (X,d) 的同胚。我们将 $x \in X$ 的*c*-稳定集 视为该集合

$$W^s_c(x) := \{y \in X;\ d(f^k(y), f^k(x)) \le c \ \text{ for every } \ k \ge 0\}$$

以及 *c*-不稳定集 的 x 作为集合

$$W^u_c(x) := \{y \in X;\ d(f^k(y), f^k(x)) \le c \ \text{ for every } \ k \le 0\}.$$

我们将稳定集的 $x \in X$ 视为该集合

$$W^s(x) := \{y \in X;\ d(f^k(y), f^k(x)) \to 0 \ \text{ when } \ k \to \infty\}$$

以及 x 的不稳定集作为该集合

$$W^u(x) := \{y \in X;\ d(f^k(y), f^k(x)) \to 0 \ \text{ when } \ k \to -\infty\}.$$

x 的半径为 c 的动力学球是集合

$$\Gamma_c(x) = W^u_c(x) \cap W^s_c(x).$$

如果存在 $c > 0$ 使得以下条件成立，我们就称 f 是扩张的

$$\Gamma_c(x) = \{x\} \quad \text{for every} \quad x \in X.$$

如果存在 $c > 0$ ，使得对于每个 $x \in X$， $\Gamma_c(x)$ 都是全不连通的，我们就称 f 是连续统意义下扩张的。我们用 $C^s_c(x)$ 表示 x的 c稳定连续统，即 x 在 $W^s_c(x)$ 上的连通分支；用 $C^u_c(x)$ 表示 x的c不稳定连续统，即 x 在 $W^u_c(x)$ 上的连通分支。

局部不稳定/稳定连续统的存在性：

文献 [19]证明了，对于 cw-扩张同胚，以下结论成立：

定理 2.1。 [[19]] 中的定理 *1.6*：如果 $f\colon X \to X$ 是 *Peano* 连续统(X,d)上的 *c w*-扩张同胚，其连续统扩张常数为 $c > 0$，那么对于每个 $\varepsilon > 0$ ，都存在 $\delta > 0$ 使得

$$diam(C^s_\varepsilon(x)) \ge \delta \quad and \quad diam(C^u_\varepsilon(x)) \ge \delta \quad for\ every \quad x \in X.$$

这意味着任意点 $x \in X$ 的 ε-稳定集和 ε-不稳定集都包含在 x处相交且直径一致的连续统。本小节中，我们仅利用首次敏感性证明一个类似的结果。

定理 2.2。 设 $f:\ X \to X$ 是定义在紧致连通度量空间上的同胚，且满足性质（*P1*）和（*P2*）。

(a) 如果 f 是首次时刻敏感的，那么对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$ 使得

$$diam(C^u_\varepsilon(x)) \geq \delta \quad for\ every \quad x \in X.$$

(b) 如果 f^{-1} 是首次时刻敏感的，那么对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得

$$diam(C^s_\varepsilon(x)) \geq \delta \quad for\ every \quad x \in X.$$

我们指出，在该定理的证明中，我们仅使用首次敏感性的定义中的性质（F1），而性质 (F2) 将对本节后面证明这些连续统的主要性质起重要作用。为证明这一结果，我们首先注意到，对于固定的敏感常数 ε，首次增长时间 $n_1(x,\ r,\ \varepsilon)$ 基本上取决于半径 r，而并非确切取决于 $x \in X$。

引理2.3. 如果 $f:\ X \to X$ 是敏感的，敏感常数为 ε，且 X 是满足假设 （P2）的紧致度量空间，那么对于每个 $r > 0$，存在$N \in \mathbb{N}$ 使得

$$n_1(x, r, \varepsilon) \leq N \quad for\ every \quad x \in X.$$

证明。 如果结论不成立，那么存在 $r > 0$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $x_n \in X$，使得 $n_1(x_n, r, \varepsilon) \geq n$。这意味着】【。

$$\operatorname{diam}(f^j(B(x_n, r))) \leq \varepsilon \quad \text{for every} \quad j \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

若 $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$，则 f的一致连续性以及空间X 上的性质（P2）保证

$$\operatorname{diam}(f^j(B(x, r))) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(f^j(B(x_{n_k}, r))) \leq \varepsilon \quad \text{for every} \quad j \in \mathbb{N},$$

与敏感性相矛盾。 □

定理 2.2 的证明。假设 f 是敏感同胚，其敏感常数为 $c > 0$，并选取 $r \in (0, c)$，它由空间 X 上的性质（P1）给出，使得对于每个 $r' \in (0, r)$，$B(x, r')$ 都是连通的。任取 $\varepsilon \in (0, r)$，并注意到 ε 也是 f 的一个敏感常数。根据假设（F1），存在 $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$: $X \to \mathbb{R}^*_+$ 和 $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$，满足

$$n_1(x, r_{k+1}(x), \varepsilon) - n_1(x, r_k(x), \varepsilon) \leq m_\varepsilon.$$

对于每个 $m \in \mathbb{N}$，令 $x_m = f^{-m}(x)$，并且对于每个 $k \in \mathbb{N}$，考虑

$$r_{k,m} = r_k(x_m) \quad \text{and} \quad n_{k,m} = n_1(x_m, r_{k,m}, \varepsilon).$$

引理 2.3 保证存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$n_1(x, r_1(x), \varepsilon) \leq N \quad \text{for every} \quad x \in X.$$

于是，(F1) 保证对于每个 $m \geq N$，我们都可以选取 $k_m \in \mathbb{N}$，使得

$$n_{k_m-1,m} < m \leq n_{k_m,m}.$$

由此可得

$$|n_{k_m,m} - m| < |n_{k_m,m} - n_{k_m-1,m}| < m_\varepsilon.$$

n_{k_m}、$_m$ 和 r_{k_m}、$_m$ 的定义保证了

$$\operatorname{diam}(f^j(B(x_m, r_{k_m,m})) \leq \varepsilon \quad \text{for every} \quad j \in [0, n_{k_m,m}) \cap \mathbb{N}$$
$$\text{and} \quad \operatorname{diam}(f^{n_{k_m,m}}(B(x_m, r_{k_m,m}))) > \varepsilon.$$

由于 f^{-1} 一致连续，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\text{diam}(A) \geq \varepsilon \quad \text{implies} \quad \text{diam}(f^{-n}(A)) \geq \delta \quad \text{for every} \quad n \in [0, m_\varepsilon].$$

这确保了

$$\text{diam}(f^m(B(x_m, r_{k_m,m}))) = \text{diam}(f^{m-n_{k_m,m}}(f^{n_{k_m,m}}(B(x_m, r_{k_m,m})))) \geq \delta.$$

对于每个 $m \geq N$，令 $C_m = f^m(\overline{B(x_m,\ r_{k_m,\ m})})$，并注意到 C_m 是一个满足以下条件的连续统：

(1) $x \in C_m$;(2)diam$(C_m) \geq \delta$; (3)
diam$(f^{-j}(C_m)) \leq \varepsilon$ 当 $0 \leq j \leq m$.

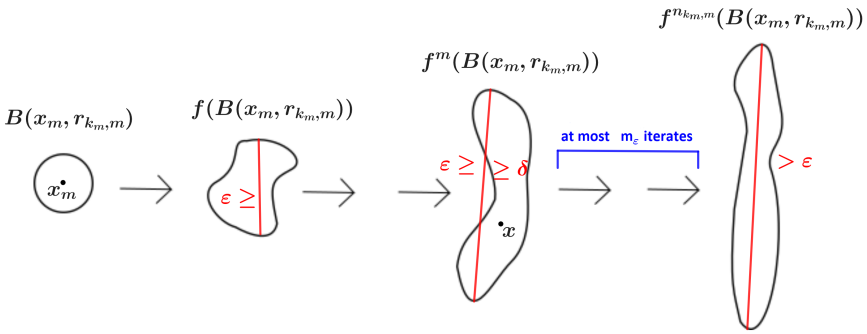

FIGURE 3. 选择 k_m e C_m。

因此，如果 C_x 是序列$(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 在豪斯多夫度量中的一个聚点连续体，即，

$$C_x = \lim_{l\to\infty} C_{m_l},$$

那么 C_x 满足：

(1) C_x 是一个连续统，因为它是连续统的豪斯多夫极限；(2)
diam$(C_x) \geq \delta$，因为对于每个 $m_l \geq N$，都有 diam$(C_{m_l}) \geq \delta$；
(3) $x \in C_x$，因为对于每个 $m_l \geq N$，都有 $x \in C_{m_l}$；(4) $C_x \subset W^u_\varepsilon$
(x)，因为对于每个 $j \in \mathbb{N}$，我们都有

$$\text{diam}(f^{-j}(C_x)) = \lim_{l\to\infty}(f^{-j}(C_{m_l})) \leq \varepsilon.$$

这证明了对于每个 $x \in X$，diam$(C^u_\varepsilon(x)) \geq \delta$，并完成了第一条目的证明。对于条目 (b)，其中 f^{-1} 是首次时刻敏感的，类似的论证表明，在这种情况下，对于每个 $x \in X$，都有 diam$(C^s_\varepsilon(x)) \geq \delta$。

□

这实际上推广了定理2.1，因为我们可以在假设定理2.2 的条件下证明如下结论。首先，我们注意到，Peano 连续统不一定满足空间上的假设 (P1) 和 (P2)，但每个 Peano 连续统都可以赋予一个凸度量，在这种情况下，假设 (P1) 和 (P2) 均成立。连续统 D 上的度量 X 称为 凸的，如果对每个 x，$y \in X$，都存在 $z \in X$ 使得

$$D(x,z)=\frac{D(x,y)}{2}=D(y,z). \tag{3}$$

这确保开球的闭包等于闭球，即，

$$\overline{B_D(x,\delta)}=\{y\in X\,;\,D(x,y)\le\delta\}\quad\text{for every}\quad x\in X\quad\text{and}\quad\delta>0.$$

然后，定理 3.3在 [24]中确保（P2）得到满足。参见 [17, 命题 10。6] 其中给出了具有凸度量的球满足（P1）的证明。我们将在命题 3.4 中证明，当连续统胀性定义在满足（P1）和（P2）的空间上时，它蕴含首次敏感性，特别是对于赋予凸度量的 Peano连续统也是如此。因此，定理2.1 在空间赋予凸度量的假设下，是定理2.2 的一个特殊情形。对于一般度量，我们可以如下论证。

引理 2.4。 如果 d 和 D 是定义在同一空间 X 上并生成相同拓扑的紧致度量，那么对于每个 $\varepsilon>0$，都存在 $\rho>0$，使得

$$D(x,y)<\rho\quad implies\quad d(x,y)<\varepsilon\quad for\ every\quad (x,y)\in X\times X.$$

证明。 若情况并非如此，则存在 $\varepsilon>0$ 使得对于每个 $n\in\mathbb{N}$，都存在 $(x_n,\ y_n)\in X\times X$ 使得

$$D(x_n,y_n)<\frac{1}{n}\quad\text{and}\quad d(x_n,y_n)\ge\varepsilon.$$

因此，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的序列，它们在度量 D 上具有相同的聚点，但在度量 d上彼此至少相距 ε。因此，如果$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 在度量 D上收敛到 z，那么$(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 也会如此。但在度量 d 上，它们不可能同时收敛到 z，于是我们得到一个在度量 D 上收敛到 z、却不在度量 d上收敛的序列，这与它们生成相同拓扑相矛盾。□

定理 2.1 的证明。 令 diam_d 和 diam_D 分别表示度量 d和 D上的直径。对于每个 $\varepsilon>0$，选取 $\varepsilon'\in(0,\varepsilon)$，使其满足引理 2.4 所给出的条件：

$$D(x,y)<\varepsilon'\quad\text{implies}\quad d(x,y)<\varepsilon\quad\text{for every}\quad(x,y)\in X\times X.$$

如果 $x\in X$ 和 $y\in C^u_\varepsilon(x)$，也就是说，

$$D(f^{-n}(x),f^{-n}(y))<\varepsilon'\quad\text{for every}\quad n\in\mathbb{N},$$

那么 ε' 的选取保证

$$d(f^{-n}(x),f^{-n}(y))\le\varepsilon\quad\text{for every}\quad n\in\mathbb{N}.$$

因此，$C^u_{\varepsilon'}(x)$ 是度量 ε 上的一个 d-不稳定连续统。现在令 $\rho\in(0,\varepsilon')$ 为定理 2.2 所给出的对象，使得

$$\mathrm{diam}_D(C^u_{\varepsilon'}(x))\ge\rho\quad\text{for every}\quad x\in X.$$

前一个引理保证了 $\delta\in(0,\rho)$ 的存在，使得

$$d(x,y)<\delta\quad\text{implies}\quad D(x,y)<\rho\quad\text{for every}\quad(x,y)\in X\times X.$$

由此可得

$$\mathrm{diam}_d(C^u_{\varepsilon'}(x))\ge\delta\quad\text{for every}\quad x\in X$$

由于 $\mathrm{diam}_D(C^u_{\varepsilon'}(x))\ge\rho$。因此，$C^u_\varepsilon(x)$ 是度量 d 上的一个 ε-不稳定连续统，其直径至少为 δ，对每个 $x\in X$ 都成立。类似的论证可以证明，$C^s_\varepsilon(x)$ 是度量 d 上的一个 ε-稳定连续统，其直径至少为 δ，对每个 $x\in X$ 都成立。□

局部 cw-不稳定连续统的性质：

定理的证明 2.2 实际上比结果本身的陈述更为重要，因为它为我们提供了一种创建局部不稳定连续统的替代方法，我们将在本文中使用这种方法，并可概括如下。对于每个 $x \in X$以及每个 $m \in \mathbb{N}$ 我们选择一个适当的半径 $r_m > 0$ 使得

$$n_1(f^{-m}(x), r_m, \varepsilon) \in [m, m + m_\varepsilon]$$

且这意味着该序列的任何聚点连续体

$$(f^m(B(f^{-m}(x), r_m)))_{m\in\mathbb{N}}$$

是一个 ε-不稳定连续统，其直径至少为 δ，这源于 f^{m_ε} 的一致连续性。在本小节中，我们将讨论以这种方式构造的连续统的主要性质，并将其与 cw-扩张同胚的局部不稳定连续统的性质进行比较。为此，我们如下定义这类连续统的集合：

$$\mathcal{F}^u = \left\{ C = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(\overline{B(f^{-n_k}(x), r_{n_k})}) \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in X,\ n_k \to \infty, r_{n_k} \to 0, \gamma \in (0, \varepsilon], \\ n_1(f^{-n_k}(x), r_{n_k}, \gamma) \in (n_k, n_k + m_\gamma] \end{array} \right\}.$$

的元素 $\mathcal{F}^u$ 称为局部 cw-不稳定连续统，是本节讨论的主要对象。我们在定理 2.2 中证明了，存在经过每个 $x \in X$的局部 cw-不稳定连续统。我们将证明局部 cw-不稳定连续统是不稳定的，也就是说，每个 $C \in \mathcal{F}^u$ 都满足

$$\operatorname{diam}(f^k(C)) \to 0 \quad \text{when} \quad k \to -\infty,$$

并且，当它们向前迭代时，其直径会一致地增大（仅取决于敏感常数 γ）。这些性质类似于cw-膨胀同胚的局部稳定/不稳定连续统所满足的性质，这也是我们将 $\mathcal{F}^u$ 局部连续统不稳定称为连续统的原因。

定义 $\mathcal{F}^u$ 中的敏感常数 γ 将决定局部cw-不稳定连续统的增长和减少次数。因此，我们将 $\mathcal{F}^u$ 中与不同敏感常数相关联的连续统区分如下：对于每个$\gamma \in (0, \varepsilon]$, 令

$$\mathcal{F}^u_\gamma = \left\{ C = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(\overline{B(f^{-n_k}(x), r_{n_k})}) \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in X,\ n_k \to \infty, r_{n_k} \to 0, \\ n_1(f^{-n_k}(x), r_{n_k}, \gamma) \in (n_k, n_k + m_\gamma] \end{array} \right\}.$$

我们注意到 $\mathcal{F}^u$ 和 $\mathcal{F}^u_\gamma$取决于敏感常数 ε，在本节中我们将始终选择 ε 与定理 2.2证明开头的选择相同。在下一个结果中，我们证明 $\mathcal{F}^u_\gamma$ 中的连续统的直径在至多 ε 次迭代内增长超过 $2m_\gamma$。证明中我们使用以下记号：若 $A \subset X$，则$n_1(A, \varepsilon)$ 表示集合 A 相对于 ε 的首次增长时间。

命题 2.5. 如果 $C \in \mathcal{F}^u_\gamma$，则存在 $\ell_\gamma \in \{0, 1, \ldots, 2m_\gamma\}$ 使得

$$diam(f^{\ell_\gamma}(C)) \geq \varepsilon.$$

证明。 如果 $C \in \mathcal{F}^u_\gamma$，则存在 $x \in X$， $n_k \to \infty$ 和 $r_{n_k} \to 0$ 使得

$$C = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(\overline{B(f^{-n_k}(x), r_{n_k})}) \quad \text{and}$$

$$n_1(f^{-n_k}(x), r_{n_k}, \gamma) \in (n_k, n_k + m_\gamma] \quad \text{for every} \quad k \in \mathbb{N}.$$

性质 (F2) 表示,

$$|n_1(f^{-n_k}(x), r_{n_k}(x), \gamma) - n_1(f^{-n_k}(x), r_{n_k}(x), \varepsilon)| \leq m_\gamma$$

这就保证了

$$n_1(f^{-n_k}(x), r_{n_k}, \varepsilon) \in (n_k, n_k + 2m_\gamma].$$

因此,

$$n_1(f^{n_k}(B(f^{-n_k}(x), r_{n_k})), \varepsilon) \in \{1, 2, \ldots, 2m_\gamma\} \quad \text{for every} \quad k \in \mathbb{N}$$

从而，存在 $\ell_\gamma \in \{1, 2, \ldots, 2m_\gamma\}$ 以及一个无限子集 $K \subset \mathbb{N}$，使得

$$n_1(f^{n_k}(B(f^{-n_k}(x), r_{n_k})), \varepsilon) = \ell_\gamma \quad \text{for every} \quad k \in K.$$

因此,

$$\operatorname{diam}(f^{\ell_\gamma}(C)) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(f^{\ell_\gamma}(f^{n_k}(\overline{B(f^{-n_k}(x), r_{n_k})}))) \geq \varepsilon$$

证明完毕。 □

在下一个命题中，我们证明局部 cw-不稳定连续统在未来会规律地增大。

命题 2.6. 若 $C \in \mathcal{F}^u$，则对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $n' \in \{n, \ldots, n + m_\varepsilon\}$，使得 $\mathit{diam}(f^{n'}(C)) \geq \varepsilon$。

证明。若 $C \in \mathcal{F}^u$，则对某个 $\gamma \in (0, \varepsilon)$，有 $C \in \mathcal{F}^u_\gamma$，因此存在$x \in X$, $n_k \to \infty$ 和 $r_{n_k} \to 0$，使得

$$C = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(\overline{B(f^{-n_k}(x), r_{n_k})}) \quad \text{and}$$

$$n_1(f^{-n_k}(x), r_{n_k}, \gamma) \in (n_k, n_k + m_\gamma] \quad \text{for every} \quad k \in \mathbb{N}.$$

与前一个命题的证明一样，性质 (F2) 保证

$$n_1(f^{-n_k}(x), r_{n_k}, \varepsilon) \in (n_k, n_k + 2m_\gamma] \quad \text{for every} \quad k \in \mathbb{N}.$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们使用性质（F1）进行缩减；如有必要，对每个 $k \in \mathbb{N}$，将半径 r_{n_k} 缩减为 r_{t_k}，使得

$$n_1(f^{-n_k}(x), r_{t_k}, \varepsilon) \in \{n_k + n, \ldots, n_k + n + m_\varepsilon\}.$$

这意味着

$$n_1(f^{n_k}(B(f^{-n_k}(x), r_{t_k})), \varepsilon) \in \{n, \ldots, n + m_\varepsilon\} \quad \text{for every} \quad k \in \mathbb{N}$$

因此，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在 $\ell_k \in \{n, \ldots, n + m_\varepsilon\}$ 使得

$$\operatorname{diam}\left(f^{\ell_k}(f^{n_k}(B(f^{-n_k}(x), r_{n_k})))\right) \geq \operatorname{diam}\left(f^{\ell_k}(f^{n_k}(B(f^{-n_k}(x), r_{t_k})))\right) > \varepsilon.$$

因此，存在 $n' \in \{n, \ldots, n + m_\varepsilon\}$，且存在一个无限子集 $K \subset \mathbb{N}$，使得

$$\operatorname{diam}\left(f^{n'}(f^{n_k}(B(f^{-n_k}(x), r_{n_k})))\right) > \varepsilon \quad \text{for every} \quad k \in K$$

因此,

$$\operatorname{diam}(f^{n'}(C)) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(f^{n'}(f^{n_k}(\overline{B(f^{-n_k}(x), r_{n_k})}))) \geq \varepsilon.$$

证明至此完成。 □

这种正则性确保局部 cw-不稳定连续统的增长时间集合是相对稠密的。回顾一下，子集 $S \subset \mathbb{N}$ 是相对稠密的，当且仅当存在 $p(S) \in \mathbb{N}$使得

$$\{n, n+1, \dots, n+p(S)\} \cap S \neq \emptyset \quad \text{for every} \quad n \in \mathbb{N}.$$

子集 $C \subset X$ 相对于敏感常数$c > 0$ 的增长时间集合是集合

$$S_{C,c} = \{n \in \mathbb{N} \,;\, \operatorname{diam}(f^n(C)) \geq c\}.$$

推论 2.7。 如果 $C \in \mathcal{F}^u$，则$S_{C,\,\varepsilon}$ 是相对稠密。

证明。 命题2.6保证

$$\{n, n+1, \dots, n+m_\varepsilon\} \cap S_{C,\varepsilon} \neq \emptyset \quad \text{for every} \quad n \in \mathbb{N},$$

也就是说，$S_{C,\,\varepsilon}$ 与 $p(C) = m_\varepsilon$ 对每个 $C \in \mathcal{F}^u$都是相对稠密的。 □

这些结果表明，每个首次敏感同胚都是相对稠密敏感的。回顾一下，紧致度量空间 (X, d) 上的同胚 $f\colon X \to X$ 是 相对稠密敏感的，如果存在 $c > 0$，使得对于每个非空开子集 $U \subset X$，$S_{U,c}$ 都是相对稠密的。

推论 2.8。 如果 f 是首次时刻敏感的，那么它是相对稠密敏感的。

证明。 设 U为 X中的一个非空开子集，并令 $x \in U$, $\gamma \in (0, \varepsilon)$ 满足$B(x, 2\gamma) \subset U$，再根据定理 2.2选取 $C \subset \mathcal{F}^u$，使得 $C \subset C^u_\gamma(x)$。由于 $\operatorname{diam}(C) \leq 2\gamma$ 且 $x \in C$，可得 $C \subset U$，这意味着$S_{C,\varepsilon} \subset S_{U,\varepsilon}$。 命题 2.6 保证$S_{C,\varepsilon}$ 是相对稠密的，而前述包含关系保证 $S_{U,\varepsilon}$ 是相对稠密的。□

命题2.6 的另一个直接推论是，局部 cw-不稳定连续统的后续迭代在达到 ε的大小后，其直径不可能变得任意小。

推论 2.9. 存在 $\delta > 0$，使得如果 $C \in \mathcal{F}^u_\gamma$，那么

$$diam(f^n(C)) \geq \delta \quad for\ every \quad n \geq 2m_\gamma.$$

证明。 推论 2.7 的证明保证，对于每个 $n \geq 2m_\gamma$，都存在 $m \in S_{C,\,\varepsilon}$使得 $|m - n| \leq m_\varepsilon$。 令 $\delta > 0$由 f和 f^{-1}的一致连续性给出，使得若 $\operatorname{diam}(A) \geq \varepsilon$，则

$$\operatorname{diam}(f^k(A)) \geq \delta \quad \text{whenever} \quad |k| \leq m_\varepsilon.$$

由于 $\operatorname{diam}(f^m(C)) \geq \varepsilon$ 且 $|m - n| \leq m_\varepsilon$，因此 $\operatorname{diam}(f^n(C)) \geq \delta$。 □

这个推论是以下 cw-扩张同胚重要性质在首次敏感同胚情形下的版本：

命题 2.10。 [18, 命题 2。2]。存在 $\delta \in (0, \varepsilon)$ 使得如果 A 是 X 的子连续体，且直径 $(A) \leq \delta$ 以及

$$diam(f^n(A)) \geq \varepsilon \quad for\ some \quad n \in \mathbb{N},$$

then

$$diam(f^j(A)) \geq \delta \quad for\ every \quad j \geq n.$$

在本小节的最后一个结果中，我们证明局部 cw-不稳定连续统是（全局）不稳定的。我们还回顾一下，对于 cw-扩张同胚，局部稳定连续统和局部不稳定连续统分别是稳定和不稳定的（参见[18]）。

命题 2.11。若 $C \in \mathcal{F}^u$，则 $\lim_{n\to\infty} diam(f^{-n}(C)) = 0$。

证明。若 $C \in \mathcal{F}^u_\gamma$，则存在 $x \in X$, $n_k \to \infty$ 和 $r_{n_k} \to 0$，使得

$$C = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(\overline{B(f^{-n_k}(x), r_{n_k})}) \quad \text{and}$$

$$n_1(f^{-n_k}(x), r_{n_k}, \gamma) \in (n_k, n_k + m_\gamma] \quad \text{for every} \quad k \in \mathbb{N}.$$

只需证明，对每个 $\alpha \in (0, \gamma)$，都存在 $\ell_\alpha \in \mathbb{N}$，使得

$$\operatorname{diam}(f^{-n}(C)) \le \alpha \quad \text{for every} \quad n \ge \ell_\alpha.$$

由于

$$n_k < n_1(f^{-n_k}(x), r_{n_k}, \gamma) \le n_1(f^{-n_k}(x), r_{n_k}, \varepsilon),$$

由性质 (F2)可知

$$n_k - n_1(x_{n_k}, r_{n_k}, \alpha) < n_1(f^{-n_k}(x), r_{n_k}, \varepsilon) - n_1(f^{-n_k}(x), r_{n_k}, \alpha) \le m_\alpha.$$

令 $\ell_\alpha = m_\alpha + 1$，并注意到若 $n \ge \ell_\alpha$，则前一个不等式保证

$$n_k - n_1(f^{-n_k}(x), r_{n_k}, \alpha) < n.$$

对于每个 $n \ge \ell_\alpha$，考虑满足以下条件的 $k_n \in \mathbb{N}$

$$n \le n_k \quad \text{for every} \quad k \ge k_n,$$

回忆 $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$。这意味着

$$0 \le n_k - n < n_1(f^{-n_k}(x), r_{n_k}, \alpha) \quad \text{for every} \quad k \ge k_n$$

因此,

$$\operatorname{diam}(f^{-n}(f^{n_k}(B(f^{-n_k}(x), r_{n_k})))) = \operatorname{diam}(f^{n_k-n}(B(f^{-n_k}(x), r_{n_k}))) \le \alpha$$

对于每个 $k \ge k_n$。这保证

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(f^{-n}(f^{n_k}(B(f^{-n_k}(x), r_{n_k})))) \le \alpha$$

对于每个 $n \ge \ell_\alpha$。因此

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(f^{-n}(C)) &= \operatorname{diam}\left(f^{-n}\left(\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(\overline{B(f^{-n_k}(x), r_{n_k})})\right)\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}\left(f^{-n}(f^{n_k}(B(f^{-n_k}(x), r_{n_k})))\right) \\ &\le \alpha \end{aligned}$$

对每个 $n \ge \ell_\alpha$，这就完成了证明。 □

在本节末尾，我们指出，在首次敏感性的定义中没有提及映射 $\gamma \mapsto m_\gamma$。在下面的命题中，我们选择满足(F1) 和(F2)的数m_γ，并使 $\gamma \mapsto m_\gamma$ 为非递增函数。这将在第 4 节中使用。

命题 2.12。如果 f 是一个具有敏感常数 $\varepsilon > 0$ 的首次敏感同胚，那么对于每个 $\gamma \in (0, \varepsilon)$，存在 $m_\gamma > 0$ 满足 *(F1)*、*(F2)*，并且：如果 $\delta < \gamma$，那么 $m_\gamma \le m_\delta$。

证明。 对于每个 $\gamma \in (0,\varepsilon)$，考虑 $m'_\gamma > 0$，根据首次敏感性的定义，其满足

(F1) $|n_1(x, r_{k+1}(x), \gamma) - n_1(x, r_k(x), \gamma)| \le m'_\gamma$
(F2) $|n_1(x, r_k(x), \gamma) - n_1(x, r_k(x), \varepsilon)| \le m'_\gamma$

对每个 $x \in X$ 以及每个满足 $r_k(x) \le \gamma$ 的 $k \in \mathbb{N}$。我们首先证明，若$\delta \le \gamma$，则 $3m'_\delta$ 也能界定上述差值。事实上，若 $\delta \le \gamma$，则

$$n_1(x, r_k(x), \gamma) \ge n_1(x, r_k(x), \delta)$$

因此，

$$|n_1(x, r_k(x), \varepsilon) - n_1(x, r_k(x), \gamma)| \le |n_1(x, r_k(x), \varepsilon) - n_1(x, r_k(x), \delta)| \le m'_\delta, \tag{1}$$

其中，第二个不等式由 (F2) 保证。此外，利用三角不等式、(F1)、(F2) 和 (1)，我们得到：

$$\begin{aligned} |n_1(x, r_{k+1}(x), \gamma) - n_1(x, r_k(x), \gamma)| &\le |n_1(x, r_{k+1}(x), \gamma) - n_1(x, r_{k+1}(x), \delta)| + \\ &\quad |n_1(x, r_{k+1}(x), \delta) - n_1(x, r_k(x), \delta)| + \\ &\quad |n_1(x, r_k(x), \delta) - n_1(x, r_k(x), \gamma)| \\ &\le |n_1(x, r_{k+1}(x), \varepsilon) - n_1(x, r_{k+1}(x), \delta)| + \\ &\quad |n_1(x, r_{k+1}(x), \delta) - n_1(x, r_k(x), \delta)| + \\ &\quad |n_1(x, r_k(x), \delta) - n_1(x, r_k(x), \varepsilon)| \\ &\le 3m'_\delta. \end{aligned}$$

为定义 $(m_\gamma)_{\gamma\in(0,\varepsilon)}$，我们如下定义一个序列 $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$：令 $m_1 = 3m'_{\frac{\varepsilon}{2}}$，并对每个 $n \ge 2$ 归纳地定义，

$$m_n = \max\{3m'_{\frac{\varepsilon}{n}}, m_{n-1} + 1\}.$$

对每个 $n \ge 2$ 和 $\gamma \in \left[\frac{\varepsilon}{n}, \frac{\varepsilon}{n-1}\right)$，令 $m_\gamma \stackrel{=}{=} m_n$。由于序列 $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$递增，因此 $\gamma \mapsto m_\gamma$ 非递增。最后，我们证明，对每个$\gamma \in (0,\varepsilon)$，$m_\gamma$ 满足 (F1) 和 (F2)。给定 $\gamma \in (0,\varepsilon]$，存在 $n \ge 2$ 使得 $\gamma \in \left[\frac{\varepsilon}{n}, \frac{\varepsilon}{n-1}\right)$。由于 $\frac{\varepsilon}{n} \le \gamma$，因此

$$|n_1(x, r_{k+1}(x), \gamma) - n_1(x, r_k(x), \gamma)| \le 3m'_{\frac{\varepsilon}{n}} \le m_n = m_\gamma \quad \text{and}$$

$$|n_1(x, r_k(x), \varepsilon) - n_1(x, r_k(x), \gamma)| \le m'_{\frac{\varepsilon}{n}} \le m_n = m_\gamma,$$

对于每个 $x \in X$ 以及每个满足 $r_k(x) \le \gamma$ 的 $k \in \mathbb{N}$。 □

3. Examples of first-time sensitive homeomorphisms

本节讨论三类具有首次敏感性的不同系统：连续统意义下扩张的同胚、希尔伯特立方体 $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ 上的移位映射，以及某些部分双曲微分同胚。我们将在三个独立的小节中分别讨论它们。

连续统意义下扩张的同胚：

我们先在本小节回顾连续统扩张性的定义。

定义 3.1。 如果存在 $c > 0$，使得对于每个 $x \in X$， $W_c^u(x) \cap W_c^s(x)$ 都是全不连通的，则称 f 是连续统意义下的扩张 。等价地，对于每个非平凡连续统 $C \subset X$（即 C 不是单点集），都存在 $n \in \mathbb{Z}$，使得

$$\operatorname{diam}(f^n(C)) > c.$$

数值 $c > 0$ 称为 f 的连续统扩张常数。

我们将证明，在满足（P1）和（P2）的空间上，连续统扩张性蕴含首次敏感性。为证明这一点，我们需要以下引理，它将进一步推导出满足假设 (P2) 的空间上定义的敏感同胚的首次递增时刻的若干性质。

引理3.2. 如果 $f\colon\ X \to X$ 是敏感的，敏感常数为 $\varepsilon > 0$，且 X满足假设 （P2），那么存在一个序列 $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}\colon\ X \to \mathbb{R}_+^*$ 从$r_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ 开始并单调递减至 0 ，使得 $(n_1(x, r_k(x)\ \varepsilon))_{k\in\mathbb{N}}$ 是严格递增的，并且

$$diam(f^{n_1(x,r_k(x),\varepsilon)}(B(x, r_{k+1}(x)))) = \varepsilon \quad for\ every \quad x \in X \quad and \quad k \in \mathbb{N}.$$

证明。 对于每个 $x \in X$，令 $r_1(x) = \frac{\varepsilon}{2}$，并注意到 $f^{n_1(x,r_1(x)\ \varepsilon)}$的连续性和假设 (P2) 保证，如果 r 足够接近 r_1，那么

$$\operatorname{diam}(f^{n_1(x,r_1(x),\varepsilon)}(B(x, r))) > \varepsilon.$$

此外，如果 r 足够小，那么 f 的一致连续性可以保证不中返

$$\operatorname{diam}(f^{n_1(x,r_1(x),\varepsilon)}(B(x, r))) < \varepsilon.$$

由假设 (P2) 可知，存在 $r_2(x) \in (0, r_1(x))$ 使得

$$\operatorname{diam}(f^{n_1(x,r_1(x),\varepsilon)}(B(x, r_2(x)))) = \varepsilon.$$

首次增长时间 $n_1(x, r_2(x)\ \varepsilon)$ 的 $B(x, r_2(x))$ 相对于 ε 满足

$$\operatorname{diam}(f^{n_1(x,r_2(x),\varepsilon)}(B(x, r_2(x)))) > \varepsilon \quad \text{and}$$

$$\operatorname{diam}(f^j(B(x, r_2(x)))) \le \varepsilon \quad \text{for every} \quad j \in \{0, \dots, n_1(x, r_2(x), \varepsilon) - 1\}.$$

这意味着 $n_1(x,\ r_2(x)\ \varepsilon) > n_1(x,\ r_1(x)\ \varepsilon)$，因为

$$\operatorname{diam}(f^j(B(x, r_2(x), \varepsilon))) \le \varepsilon \quad \text{for every} \quad j \in \{0, \dots, n_1(x, r_1(x), \varepsilon)\}$$

且 $\operatorname{diam}(f^{n_1(x,r_2(x)\ \varepsilon)}(B(x, r_2(x)))) > \varepsilon$。通过归纳法，我们可以定义一个递减的实数序列 $(r_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$，使得 $(n_1(x, r_k(x)\ \varepsilon))_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个递增的正整数序列，并且译文翻译完毕。

$$\operatorname{diam}(f^{n_1(x,r_k(x))}(B(x, r_{k+1}(x)))) = \varepsilon \quad \text{for every} \quad k \in \mathbb{N}.$$

由于这可以对每个 $x \in X$ 完成，证明即告完成。 □

注 3.3. 我们注意到，如果 $(n_1(x,\ r_k(x)\ \varepsilon))_{k\in\mathbb{N}}$ 严格递增，那么

$$\lim_{k\to\infty} r_k(x) = 0.$$

事实上，如果情况并非如此，则存在 $r > 0$，以及一个子序列 $(r_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $k_n \to \infty$ 且

$$r_{k_n}(x) > r \quad \text{for every} \quad n \in \mathbb{N}.$$

因此，

$$n_1(x, r_{k_n}, \varepsilon) \le n_1(x, r, \varepsilon) \quad \text{for every} \quad n \in \mathbb{N}$$

这意味着子序列 $(n_1(x, r_{k_n}(x)\ \varepsilon))_{n\in\mathbb{N}}$ 有界。但这与 $(n_1(x, r_k(x)))_{k\in\mathbb{N}}$ 严格递增的假设相矛盾，因为这意味着 $\lim_{k\to\infty} n_1(x, r_k(x)) = \infty$。

定理 3.4. 定义在满足假设（*P1*）和（*P2*）的紧致连通度量空间上的 *cw*-扩张同胚具有首次敏感性。

证明。 首先，注意到，由于 X 满足性质 (P1)，因此它是局部连通的，特别地，是一个 Peano 连续统。定义在 Peano 连续统上的每个 cw-扩张同胚都是敏感的。这是 [15, 定理 11], 的推论，其中证明了定义在 Peano 连续统上的 cw-扩张同胚没有稳定点，即不存在满足以下条件的点： $x \in X$ 对每个$\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 使得

$$B(x, \delta) \subset W^s_\varepsilon(x).$$

因此，我们有 f 是敏感的，并令 $\varepsilon > 0$ 为 f的敏感常数。令 $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 为引理 3.2 给出的序列 $(n_1(x, r_k(x)\ \varepsilon))_{k\in\mathbb{N}}$ ，使其严格递增，且

$$\operatorname{diam}(f^{n_1(x,r_k(x),\varepsilon)}(B(x, r_{k+1}(x)))) = \varepsilon \quad \text{for every} \quad x \in X \quad \text{and} \quad k \in \mathbb{N}.$$

我们首先证明首次敏感性定义中的性质 (F2)。假设 (F2) 不成立，也就是说，对于某个常数 $\gamma \in (0, \varepsilon]$，存在序列 $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset X$ 和 $(k_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ ，使得当 $m \to \infty$ 时 $k_m \to \infty$ ，并且

$$\lim_{m\to\infty} (n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \varepsilon) - n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \gamma)) = \infty.$$

我们可以假设:

$$n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \gamma) < n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \varepsilon) \quad \text{for every} \quad m \in \mathbb{N}$$

并且，因此，那

$$\gamma < \operatorname{diam} f^{n_1(x_m,r_{k_m}(x_m),\gamma)}(B(x_m, r_{k_m}(x_m))) \le \varepsilon \quad \text{for every} \quad m \in \mathbb{N}.$$

对于每个 $m \in \mathbb{N}$，连续统

$$C_m = f^{n_1(x_m,r_{k_m}(x_m),\gamma)}(\overline{B(x_m, r_{k_m}(x_m))}).$$

满足以下条件:

(1) $\operatorname{diam}(C_m) \ge \gamma$;
(2) $\operatorname{diam}(f^{-j}(C_m)) \le \varepsilon,\ \forall j \in [0, n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \gamma)]$;
(3) $\operatorname{diam}(f^j(C_m)) \le \varepsilon,\ \forall j \in [0, n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \varepsilon) - n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \gamma) - 1]$.

设 C 是序列 $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 在豪斯多夫拓扑中的一个聚点连续体，即,

$$C = \lim_{l\to\infty} C_{m_l}.$$

性质 (1) 保证 $\operatorname{diam}(C) \ge \gamma$。由于

$$\lim_{m\to\infty} (n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \varepsilon) - n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \gamma) = \infty$$

and

$$n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \varepsilon) \ge n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \varepsilon) - n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \gamma)$$

由此可得,

$$\lim_{m\to\infty} n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \varepsilon) = \infty.$$

引理 2.3 保证 $\lim_{m\to\infty} r_{k_m}(x_m) = 0$，否则

$$(n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \varepsilon))_{m\in\mathbb{N}}$$

将有一个有界子序列。这意味着

$$\lim_{m\to\infty} n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \gamma) = \infty.$$

因此，性质（2）和（3）保证

$$\operatorname{diam}(f^j(C)) = \lim_{l\to\infty}(f^j(C_{m_l})) \le \varepsilon \quad \text{for every} \quad j \in \mathbb{Z}$$

且 C 是一个非平凡的 ε-稳定且 ε-不稳定连续统，这与连续统意义下的扩张性相矛盾。这证明了性质（F2）。现在，我们证明性质（F1）。

假设（F1）不成立，也就是说，对于某个常数 $\gamma \in (0, \varepsilon]$，存在序列 $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset X$ 和 $(k_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$，使得当 $m \to \infty$ 时 $k_m \to \infty$，并且

$$\lim_{m\to\infty} |n_1(x_m, r_{k_m+1}(x_m), \gamma) - n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \gamma)| = \infty.$$

利用已对序列 $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 证明的性质（F2），存在 $m_\gamma \in \mathbb{N}$ 使得

$$|n_1(x, r_k(x), \varepsilon) - n_1(x, r_k(x), \gamma)| < m_\gamma$$

对于每个 $x \in X$ 以及满足 $r_k(x) < \gamma$ 的每个 $k \in \mathbb{N}$。由简单的三角不等式可知

$$\lim_{m\to\infty} |n_1(x_m, r_{k_m+1}(x_m), \varepsilon) - n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \varepsilon)| = \infty.$$

选择一个正数序列 $(\ell_m)_{m\in\mathbb{N}}$，满足 $\lim_{m\to\infty} \ell_m = \infty$，并且

$$|n_1(x_m, r_{k_m+1}(x_m), \varepsilon) - n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \varepsilon)| \ge 2\ell_m \quad \text{for every} \quad m \in \mathbb{N}.$$

令 $\delta \in (0, \varepsilon)$ 由 [18, 命题 2。2] 使得如果 A 是X 的子连续体，且 $\operatorname{diam}(A) \le \delta$ 并且

$$\operatorname{diam}(f^n(A)) \ge \varepsilon \quad \text{for some} \quad n \in \mathbb{N},$$

then

$$\operatorname{diam}(f^j(A)) \ge \delta \quad \text{for every} \quad j \ge n.$$

由于对于每个 $m \in \mathbb{N}$，我们有

$$n_1(x_m, r_{k_m+1}(x_m), \varepsilon) \ge |n_1(x_m, r_{k_m+1}(x_m), \varepsilon) - n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \varepsilon)|$$

我们得到

$$\lim_{m\to\infty} n_1(x_m, r_{k_m+1}(x_m), \varepsilon) = \infty$$

并利用引理2.3，如同在 (F2) 的证明中一样，我们得到

$$\lim_{m\to\infty} r_{k_m+1}(x_m) = 0.$$

因此，我们可以假设

$$r_{k_m+1}(x_m) < \delta/2 \quad \text{for every} \quad m \in \mathbb{N}.$$

对于每个 $m \in \mathbb{N}$，令

$$C_m = f^{n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \varepsilon)+\ell_m}(\overline{B(x_m, r_{k_m+1}(x_m))}).$$

回想一下，我们选择序列 $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 时使其满足

$$\operatorname{diam}(f^{n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \varepsilon)}(\overline{B(x_m, r_{k_m+1}(x_m))})) = \varepsilon$$

对每个 $m \in \mathbb{N}$ 都成立。由于 $\overline{B(x_m, r_{k_m+1}(x_m))}$ 是 X 的一个子连续体，依据该空间的性质（P1），且其直径小于 δ，我们得到

$$\operatorname{diam}(f^j(\overline{B(x_m, r_{k_m+1}(x_m))})) \geq \delta \quad \text{for every} \quad j \geq n_1(x_m, r_{k_m}(x_m), \varepsilon).$$

特别是，

$$\operatorname{diam}(C_m) = \operatorname{diam}(f^{n_{1,\varepsilon}(x_m, r_{k_m}(x_m))+\ell_m}(\overline{B(x_m, r_{k_m+1}(x_m))})) \geq \delta.$$

因此，对每个 $m \in \mathbb{N}$，以下条件成立：

(4) $\operatorname{diam}(C_m) \geq \delta$，(5) 对每个 $j \in \{0, \ldots, \ell_m\}$，$\operatorname{diam}(f^{-j}(C_m)) \leq \varepsilon$，以及 (6) 对每个 $j \in \{0, \ldots, \ell_m\}$，$\operatorname{diam}(f^j(C_m)) \leq \varepsilon$。

考虑一个聚点连续体

$$C = \lim_{i \to \infty} C_{m_i}$$

在豪斯多夫拓扑下，我们有 C 是一个连续统，因为它是连续统的极限，$\operatorname{diam}(C) \geq \delta$，因为

$$\operatorname{diam}(C_m) \geq \delta \quad \text{for every} \quad m \in \mathbb{N},$$

and

$$\operatorname{diam}(f^j(C)) = \lim_{i \to \infty} \operatorname{diam}(f^j(C_{m_i})) \leq \varepsilon \quad \text{for every} \quad j \in \mathbb{Z}$$

因为 $\ell_m \to \infty$。因此， C 是一个非平凡的 ε-稳定且 ε-不稳定连续统，这与连续体膨胀性相矛盾。这证明了性质（F1），并完成了证明。□

定理 2.2 确保空间中每一点都存在具有一致直径的 cw-不稳定连续统 $x \in X$。由于 cw-不稳定连续统确实是局部不稳定的，因此它们包含在局部不稳定连续统中 $C^u_\varepsilon(x)$。有一段时间，我们试图证明局部不稳定连续统是 cw- 不稳定的，也就是说，属于$\mathcal{F}^u$。我们只能在以下附加假设下证明这一点：

定义3.5。设 f 是紧致度量空间 X 的一个同胚，且$0 < r < c$。我们称球 $B(x, r)$ 相对于 c 的首次增长时间由子集 $C \subset B(x, r)$ 控制，如果

$$n_1(x, r, c) = n_1(C, c).$$

设 f 是具有连续统扩张常数 $c = 2\varepsilon > 0$的 cw-扩张同胚。如果空间中每个半径为 $r < \varepsilon$ 的球 $B(x, r)$的首次增长时间，都由 $C^u_\varepsilon(x) \cap B(x, r)$中 x 的连通分支控制，则称局部不稳定连续统控制空间中球的增长时间。

命题3.6。 如果 f 是一个连续统胀性常数为 $2\varepsilon > 0$ 的cw-扩张同胚，且局部不稳定连续统控制空间中球的增长时间，那么 $C^u_\varepsilon(x) \in \mathcal{F}^u$ 对每个 $x \in X$均成立。

证明。 令 $\delta \in (0, \varepsilon)$ 由定理 2.1 给出，使得

$$\operatorname{diam}(C^u_\varepsilon(x)) \geq \delta \quad \text{for every} \quad x \in X,$$

并选择 $m_{2\varepsilon} \in \mathbb{N}$，使得对每个 $x \in X$，都存在 $k \in \{0, \ldots, m_{2\varepsilon}\}$，满足此条件。

$$\operatorname{diam}(f^k(C^u_\varepsilon(x))) > \varepsilon.$$

对于每个 $x \in X$ 和 $m \in \mathbb{N}$，令

$$r_m(x) = \operatorname{diam}(f^{-m}(C^u_\varepsilon(x)))$$

并注意到

$$r_m(x) \le 2\varepsilon \quad \text{for every} \quad m \in \mathbb{N} \quad \text{and}$$
$$r_m(x) \to 0 \quad \text{when} \quad m \to \infty,$$

回忆自 [18]，即

$$C^u_\varepsilon(x) \subset W^u(x) \quad \text{for every} \quad x \in X.$$

我们将证明

(1) $f^m(B(f^{-m}(x), r_m(x))) \to C^u_\varepsilon(x)$ when $m \to \infty$, and
(2) $n_1(f^{-m}(x), r_m(x), 2\varepsilon) \in (m, m + m_{2\varepsilon}]$ for every $m \in \mathbb{N}$.

注意，$r_m(x)$ 的选择确保了

$$C^u_\varepsilon(x) \subset f^m(B(f^{-m}(x), r_m(x))) \quad \text{for every} \quad m \in \mathbb{N}.$$

因此，如果 C 是该序列的聚点连续体。

$$(f^m(B(f^{-m}(x), r_m(x))))_{m\in\mathbb{N}},$$

则有 $C^u_\varepsilon(x) \subset C$。由 $(r_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ 和 $m_{2\varepsilon}$ 的选取可知

$$n_1(f^{-m}(x), r_m(x), 2\varepsilon) \le m + m_{2\varepsilon} \quad \text{for every} \quad m \in \mathbb{N}.$$

局部不稳定连续统控制空间中各球的增长时间这一假设确保了

$$n_1(f^{-m}(x), r_m(x), 2\varepsilon) > m \quad \text{for every} \quad m \in \mathbb{N},$$

因为在这种情况下，我们有

$$n_1(f^{-m}(x), r_m(x), 2\varepsilon) = n_1(f^{-m}(C^u_\varepsilon(x)), 2\varepsilon) > m.$$

这证明了（2），并且还确保 C 是一个 ε-不稳定连续统，因为 C 将是一个序列 $(f^{m_i}(B(f^{-m_i}(x), r_{m_i})))_{i\in\mathbb{N}}$ 的极限，其中 $m_i \to \infty$ 且

$$\operatorname{diam}(f^j(B(f^{-m_i}(x), r_{m_i}))) \le 2\varepsilon \quad \text{for every} \quad j \in \{0, \dots, m_i\} \quad \text{and} \quad i \in \mathbb{N}.$$

于是可得 $C \subset C^u_\varepsilon(x)$，因为 $C^u_\varepsilon(x)$ 是 $W^u_\varepsilon(x)$ 中 x 的连通分支，由此得出（1）及证明。□

希尔伯特立方体 $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ 上的移位：

令 $X = [0,1]^{\mathbb{Z}}$，并考虑 X 上的以下度量：对于每个 $\underline{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 和 $\underline{y} = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，若它们属于 X，令

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \sup_{i\in\mathbb{Z}} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}}.$$

考虑双边后移位

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & [0,1]^{\mathbb{Z}} & \to & [0,1]^{\mathbb{Z}} \\ & (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} & \mapsto & (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}} \end{array}.$$

在本节中，我们证明 σ 是首次时刻敏感的，并刻画其连续弱局部不稳定连续体。

定理 3.7.移位映射 σ: $[0,1]^{\mathbb{Z}} \to [0,1]^{\mathbb{Z}}$ 是首次时刻敏感。

证明。我们首先证明 σ 是敏感的（这可见于 [1]）。我们证明任意 $\varepsilon < c = \frac{1}{4}$ 是 σ的敏感常数。给定 $\delta > 0$ 和 $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X$，选择 $i_0 \in \mathbb{Z}$ 使得 $c/2^{i_0} < \delta$。令

$$y_{i_0} = \begin{cases} x_{i_0} + c, & \text{if } x_{i_0} \in [0, 1/2] \\ x_{i_0} - c, & \text{if } x_{i_0} \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

那么，序列 $y = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_{i_0-1}, y_{i_0}, x_{i_0+1} \ldots)$，也就是说 x 仅改变第 i_0 个坐标 x_{i_0} 且 y_{i_0}，属于 X，并包含在以 x 为中心、半径为 δ 的球内，因为

$$d(\underline{y}, \underline{x}) = \sup_{i\in\mathbb{Z}} \left(\frac{|y_i - x_i|}{2^{|i|}} \right) = \frac{|x_{i_0} \pm c - x_{i_0}|}{2^{i_0}} = \frac{c}{2^{i_0}} < \delta.$$

此外，请注意，

$$d(\sigma^{i_0}(\underline{x}), \sigma^{i_0}(\underline{y})) = \sup_{i\in\mathbb{Z}} \left(\frac{|x_{i+i_0} - y_{i+i_0}|}{2^{|i|}} \right) = |x_{i_0} - x_{i_0} \pm c| = c > \varepsilon$$

且这足以证明 σ 是敏感的。现在我们证明 σ 是首次时刻敏感的。对于每个 $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X$ 和 $y = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X$，我们有

$$\begin{aligned} \underline{y} = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in B(\underline{x}, \varepsilon) \quad &\Leftrightarrow \quad \sup_{i\in\mathbb{Z}} \left(\frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}} \right) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad |x_i - y_i| < 2^{|i|}\varepsilon \quad \text{for every} \quad i \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad y_i \in (x_i - 2^{|i|}\varepsilon, x_i + 2^{|i|}\varepsilon) \quad \text{for every} \quad i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

类似的论证可以证明，

$$\underline{y} = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \sigma^j \left(B\left(\underline{x}, \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \right)$$

当且仅当，

$$y_i \in \left(x_{i+j} - 2^{|i+j|} \frac{\varepsilon}{2^n}, x_{i+j} + 2^{|i+j|} \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \cap [0, 1] \quad \text{for every} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

对于每个 $\underline{x} \in X$、$n \in \mathbb{N}$ 和 $j \in \mathbb{N}$，我们有

$$2^{j-n}\varepsilon \leq \operatorname{diam} \left(\sigma^j \left(B\left(\underline{x}, \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \right) \right) \leq 2^{j-n+1}\varepsilon. \tag{2}$$

事实上，对每个 $i \in \mathbb{Z}$ 和 $j \in \mathbb{N}$，令

$$I_{i,j} = \left(x_{i+j} - 2^{|i+j|} \frac{\varepsilon}{2^n}, x_{i+j} + 2^{|i+j|} \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \cap [0, 1],$$

我们有

$$\operatorname{diam} \left(\sigma^j \left(B\left(\underline{x}, \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \right) \right) = \sup_{i\in\mathbb{Z}} \frac{\operatorname{diam}(I_{i,j})}{2^{|i|}},$$

并且由于

$$2^{j-n}\varepsilon \leq \frac{\operatorname{diam}(I_{i,j})}{2^{|i|}} \leq 2^{j-n+1}\varepsilon$$

对于每个 $i \in \mathbb{Z}$，我们得到所需的不等式。对于每个 $\gamma \in (0, \varepsilon]$，选择$k_\gamma \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\varepsilon}{2^{k_\gamma+1}} \leq \gamma < \frac{\varepsilon}{2^{k_\gamma}}. \tag{3}$$

由不等式（2）可得

$$\operatorname{diam} \left(\sigma^j \left(B\left(\underline{x}, \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \right) \right) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k_\gamma+1}} \leq \gamma \quad \text{when} \quad 0 \leq j \leq n - k_\gamma - 2,$$

and

$$\operatorname{diam}\left(\sigma^j\left(B\left(\underline{x},\frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right)\right)\geq\frac{\varepsilon}{2^{k_\gamma}}>\gamma\quad\text{if}\quad j\geq n-k_\gamma.$$

这意味着，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，$n_1\left(\underline{x},\frac{\varepsilon}{2^n},\gamma\right)$ 要么是 $n-k_\gamma-1$，要么是 $n-k_\gamma$。因此，

$$n_1\left(\underline{x},\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},\gamma\right)-n_1\left(\underline{x},\frac{\varepsilon}{2^n},\gamma\right)\leq 2$$

and

$$n_1\left(\underline{x},\frac{\varepsilon}{2^n},\varepsilon\right)-n_1\left(\underline{x},\frac{\varepsilon}{2^n},\gamma\right)\leq k_\gamma+2$$

（在最后一个不等式中，我们用到了 $n_1\left(\underline{x},\frac{\varepsilon}{2^n},\varepsilon\right)$ 要么是 n，要么是 $n+1$）。由于这对每个 $n\in\mathbb{N}$都成立，考虑 $m_\gamma=k_\gamma+2$，可知 $(m_\gamma)_{\gamma\in(0,\varepsilon]}$ 满足半径序列 $\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$对应的性质（F1）和（F2）。鉴于 $\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$单调递减至 0，我们得出 σ 是首次时刻敏感的。注意到$\gamma\mapsto m_\gamma$ 是非递增的，因为 $m_\gamma=k_\gamma+2$ 其中 k_γ 满足（3）。□

注3.8。我们指出，无限维紧致度量空间上不存在连续统意义下扩张的同胚。Kato 在 [18] 推广了 Ma˜n´e 关于膨胀同胚的结果后证明了这一点 [22]。尽管首次敏感同胚与连续统意义下扩张的同胚具有一些重要性质（如第2节所证），但无法将 Kato/Ma˜n´e 的证明改用于首次敏感同胚。

命题3.7 的一个直接推论如下：

推论3.9. 在无限维紧致度量空间上存在首次敏感同胚。

注3.10. 我们指出，Kato定理保证 $\sigma\colon\ [0,1]^{\mathbb{Z}}\to[0,1]^{\mathbb{Z}}$ 不是连续统膨胀的，但很容易在任意小的动力球中选取非平凡连续统。对每个 $r>0$，连续统

$$C_r=\prod_{i<0}\{0\}\times[0,r]\times\prod_{i>0}\{0\}$$

是非退化的，并且

$$\operatorname{diam}(\sigma^n(C_r))\leq\operatorname{diam}(C_r)=r\quad\text{for every}\quad n\in\mathbb{Z}.$$

我们注意到，C_r 既是 r-稳定连续统，也是 r-不稳定连续统，但它既非连续统稳定，也非连续统不稳定，因为它的直径在未来或过去都不会增大。我们还注意到，C_r 既稳定又不稳定，因为

$$\operatorname{diam}(\sigma^n(C_r))\leq\frac{r}{2^{|n|}}\quad\text{for every}\quad n\in\mathbb{Z}.$$

注3.11. 我们指出，在空间的每个点上，σ 都包含并非稳定的局部稳定连续统，以及并非不稳定的局部不稳定连续统。对每个 $\varepsilon\in(0,c)$和 $x=(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in X$，非平凡连续统

$$C_{\underline{x}}=\prod_{i\in\mathbb{Z}}\{[x_i-\varepsilon,x_i+\varepsilon]\cap[0,1]\}$$

包含于$W^s_\varepsilon(x)\cap W^u_\varepsilon(\underline{x})$。事实上，如果 $y=(y_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in C_x$，那么

$$y_i\in[x_i-\varepsilon,x_i+\varepsilon]\quad\text{for every}\quad i\in\mathbb{Z}$$

这就意味着

$$\begin{aligned} d(\sigma^n(\underline{x}),\sigma^n(\underline{y})) &= \sup_{i\in\mathbb{Z}} \frac{|x_{i+n}-y_{i+n}|}{2^{|i|}} \\ &\leq \sup_{i\in\mathbb{Z}} \frac{\varepsilon}{2^{|i|}} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

对于每个 $n \in \mathbb{Z}$。此外， C_x 并不稳定。事实上，对于每个 $\alpha \in (0,\varepsilon]$，序列 $y=(y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 定义如下

$$y_i = \begin{cases} x_i, & i<0 \\ x_i+\alpha, & i\geq 0 \text{ and } x_i \in [0,1/2] \\ x_i-\alpha, & i\geq 0 \text{ and } x_i \in (1/2,1] \end{cases}$$

属于 C_x，但

$$\begin{aligned} d(\sigma^n(\underline{y}),\sigma^n(\underline{x})) &= \sup_{i\in\mathbb{Z}} \frac{|y_{i+n}-x_{i+n}|}{2^{|i|}} \\ &= \sup_{i\geq -n} \frac{|x_{i+n}\pm\alpha-x_{i+n}|}{2^{|i|}} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

对于每个 $n\in\mathbb{N}$，即 $y \notin W^s(x)$。这保证了

$$\operatorname{diam}(\sigma^n(C_{\underline{x}})) \geq \varepsilon \quad \text{for every} \quad n\geq 0$$

且 C_x 不是稳定的。类似的论证证明， C_x 是一个并非不稳定的局部不稳定连续统。

下一个命题刻画了移位映射的局部 cw-不稳定连续统。

命题 3.12. 连续统 C 属于 $\mathcal{F}^u$ 当且仅当存在 $x=(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in [0,1]^{\mathbb{Z}}$ 和 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 使得

$$C=\prod_{i\in\mathbb{Z}}\{[x_i-2^{i-k}\varepsilon, x_i+2^{i-k}\varepsilon]\cap[0,1]\}.$$

证明。 根据定理 3.7的证明，任意 $\varepsilon < c = \frac{1}{4}$ 都是 σ的敏感常数，首次敏感性定义中的序列 $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$，并且对每个 $\gamma\in(0,\varepsilon]$ 都存在 $k_\gamma\in\mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\varepsilon}{2^{k_\gamma+1}} \leq \gamma < \frac{\varepsilon}{2^{k_\gamma}}, \quad m_\gamma = k_\gamma+2, \quad \text{and}$$

$$n_1\left(\underline{y},\frac{\varepsilon}{2^n},\gamma\right) \in \{n-k_\gamma-1, n-k_\gamma\} \text{ for every } \underline{y}\in[0,1]^{\mathbb{Z}} \text{ and } n\in\mathbb{N}. \tag{4}$$

因此，如果 $C\in\mathcal{F}^u$，则 $C\in\mathcal{F}^u_\gamma$对于某个 $\gamma\in(0,\varepsilon)$，从而存在 $x\in[0,1]^{\mathbb{Z}}$，以及递增序列 $(l_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 和 $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}$ 使得

$$C=\lim_{j\to\infty}\sigma^{n_j}\left(\overline{B\left(\sigma^{-n_j}(\underline{x}),\frac{\varepsilon}{2^{l_j}}\right)}\right) \quad \text{and}$$

$$n_1\left(\sigma^{-n_j}(\underline{x}),\frac{\varepsilon}{2^{l_j}},\gamma\right) \in (n_j, n_j+m_\gamma] \quad \text{for every} \quad j\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

如定理的证明中所述3.7，我们有

$$\overline{B\left(\sigma^{-n_j}(\underline{x}),\frac{\varepsilon}{2^{l_j}}\right)}=\prod_{i\in\mathbb{Z}}\left\{\left[x_{i-n_j}-2^{|i|}\frac{\varepsilon}{2^{l_j}},x_{i-n_j}+2^{|i|}\frac{\varepsilon}{2^{l_j}}\right]\cap[0,1]\right\}$$

并且，因此，

$$\sigma^{n_j}\left(\overline{B\left(\sigma^{-n_j}(\underline{x}),\frac{\varepsilon}{2^{l_j}}\right)}\right)=\prod_{i\in\mathbb{Z}}\left\{\left[x_i-2^{|n_j+i|}\frac{\varepsilon}{2^{l_j}},x_i+2^{|n_j+i|}\frac{\varepsilon}{2^{l_j}}\right]\cap[0,1]\right\}$$

对于每个 $j\in\mathbb{N}$。因此，

$$\begin{aligned}C&=\lim_{j\to\infty}\prod_{i\in\mathbb{Z}}\left\{\left[x_i-2^{|n_j+i|}\frac{\varepsilon}{2^{l_j}},x_i+2^{|n_j+i|}\frac{\varepsilon}{2^{l_j}}\right]\cap[0,1]\right\}\\&=\prod_{i\in\mathbb{Z}}\left\{\left[x_i-\lim_{j\to\infty}2^{|n_j+i|-l_j}\varepsilon,x_i+\lim_{j\to\infty}2^{|n_j+i|-l_j}\varepsilon\right]\cap[0,1]\right\}.\end{aligned}$$

注意，极限 $\lim_{j\to\infty}2^{|n_j+i|-l_j}$ 存在，因为前述闭球的迭代收敛到 C （根据假设），因此它们的每个坐标以及每个区间的半径也都收敛。此外，（4）确保

$$n_1\left(\sigma^{-n_j}(\underline{x}),\frac{\varepsilon}{2^{l_j}},\gamma\right)\in\{l_j-k_\gamma-1,l_j-k_\gamma\}\quad\text{for every}\quad j\in\mathbb{N},$$

并且这一点与 (5) 一起确保

$$n_j\in\{l_j-k_\gamma-m_\gamma-1,\dots,l_j-k_\gamma-1\}\quad\text{for every}\quad j\in\mathbb{N},$$

也就是说，

$$n_j-l_j\in\{-k_\gamma-m_\gamma-1,\dots,-k_\gamma-1\}\quad\text{for every}\quad j\in\mathbb{N}.$$

因此，对于每个 $i\in\mathbb{Z}$，都存在 $j_0\in\mathbb{N}$，使得

$$|n_j+i|=n_j+i\quad\text{for every}\quad j\geq j_0,$$

于是，

$$|n_j+i|-l_j\in\{-k_\gamma-m_\gamma-1+i,\dots,-k_\gamma-1+i\}\quad\text{for every}\quad j\geq j_0.$$

由于极限 $\lim_{j\to\infty}2^{|n_j+i|-l_j}$ 存在，因此存在

$$-k\in\{-m_\gamma-k_\gamma,\dots,-k_\gamma-1\}$$

并且 $j_1\geq j_0$，使得

$$2^{|n_j+i|-l_j}=2^{i-k}\quad\text{for every}\quad j\geq j_1.$$

所以，$\lim_{j\to\infty}2^{|n_j+i|-l_j}=2^{i-k}$，于是，

$$C=\prod_{i\in\mathbb{Z}}\{[x_i-2^{i-k}\varepsilon,x_i+2^{i-k}\varepsilon]\cap[0,1].$$

现在，假设存在 $k\in\mathbb{N}$，使得

$$C=\prod_{i\in\mathbb{Z}}\{[x_i-2^{i-k}\varepsilon,x_i+2^{i-k}\varepsilon]\cap[0,1]\}.$$

我们将证明

$$C=\lim_{j\to\infty}\sigma^j\left(\overline{B\left(\sigma^{-j}(\underline{x}),\frac{\varepsilon}{2^{j+k}}\right)}\right).$$

如上所述，

$$\sigma^j\left(\overline{B\left(\sigma^{-j}(\underline{x}),\frac{\varepsilon}{2^{j+k}}\right)}\right)=\prod_{i\in\mathbb{Z}}\{[x_i-2^{|i+j|-j-k}\varepsilon,x_i+2^{|i+j|-j-k}\varepsilon]\cap[0,1]\}$$

对于每个 $j\in\mathbb{N}$。因此，如果 $i\in\mathbb{N}$ 且 $j\geq|i|$，那么

$$|i+j|=i+j,\quad 2^{|i+j|-j-k}=2^{i-k},$$
$$[x_i-2^{|i+j|-j-k}\varepsilon,x_i+2^{|i+j|-j-k}\varepsilon]=[x_i-2^{i-k}\varepsilon,x_i+2^{i-k}\varepsilon],$$

因此，

$$C\quad\text{and}\quad\sigma^j\left(\overline{B\left(\sigma^{-j}\left(\underline{x},\frac{\varepsilon}{2^{j+k}}\right)\right)}\right)$$

在 $-i$ 和 i 之间具有相同的坐标。由于这对每个 $i\in\mathbb{N}$ 和$j>|i|$都成立，因此足以得出所需的极限，从而完成证明。□

注释3.13。我们注意到，上述证明中的所有对象都取决于你为该空间选择的度量，从半径序列 $(\frac{\varepsilon}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$，到数字$m_\gamma$ 以及 $\mathcal{F}^u$中的局部cw-不稳定连续统。我们邀请读者在希尔伯特立方体上使用不同的度量证明类似的结果，并观察这些对象如何变化。

部分双曲微分同胚：

在本小节中，我们将在部分双曲微分同胚的背景下讨论首次敏感性。本文的思想和技术源自拓扑动力学，尽管我们需要讨论可微性以定义部分双曲性，但我们仍将尽力留在拓扑动力学的领域中。

定义3.14。微分同胚 $f\colon M\to M$ 闭光滑流形的微分同胚称为部分双曲的，如果切丛分裂为三个 Df-不变子丛 $TM=E^s\oplus E^c\oplus E^u$，其中 E^s 是一致收缩的，E^u 是一致扩张的，其中一个是非平凡的，且该分裂是支配的（有关此定义的更多细节请参见 [12]）。

部分双曲微分同胚的经典且重要的例子，是由闭光滑流形 M 上的 Anosov 微分同胚 $f\colon M\to M$ 与恒等映射或单位圆上的旋转$\mathbb{S}^1$取直积得到的。这些例子是首次时刻敏感的，这是以下更一般命题的推论。回顾一下，等度连续同胚 g 的定义是其迭代映射族 $(g^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 等度连续。

命题 3.15. 如果 f 是首次敏感同胚，且 g 是等度连续同胚，那么 $f\times g$ 是首次时刻敏感的。

证明。令 $f\colon X\to X$ 为一个首次敏感同胚，$g\colon Y\to Y$为紧致度量空间 X 和 Y 之间的等度连续同胚。我们考虑空间 $X\times Y$上的乘积度量。令 $\varepsilon>0$ 为 f的一个敏感常数，并令 $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 为由首次敏感性给出的函数序列，使得对于每个 $\gamma\in(0,\varepsilon]$ 都存在满足性质（F1）和（F2）的 $m_\gamma>0$。由于 g 是等度连续的，且 Y 是紧致的，因此存在 $\delta_\gamma>0$ 使得

$$B_Y(y,\delta_\gamma)\subset W^s_{\gamma,g}(y)\cap W^u_{\gamma,g}(y)\quad\text{for every } y\in Y.$$

定义 s_k： $X \times Y \to \mathbb{R}_+^*$ 由 $s_k(x,y) = r_k(x)$ 给出，这意味着

$$n_{1,f\times g}((x,y), s_k(x,y), \gamma) = n_{1,f}(x, r_k(x), \gamma)$$

对于每个 $(x,y) \in X \times Y$ 和 $k \in \mathbb{N}$，使得 $r_k(x) \leq \delta_\gamma$。由于序列 $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $(n_{1,f}(x, r_k(x), \gamma))_{k\in\mathbb{N}}$ 满足性质（F1）和（F2），因此 $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $(n_{1,f\times g}((x,y), s_k(x,y), \gamma))_{k\in\mathbb{N}}$ 也满足这些性质，且具有相同的m_γ。由于这对每个 $\gamma > 0$都成立，我们得出 $f \times g$ 是首次时刻敏感的。□

对于阿诺索夫流的时间-1映射，结论同样成立，证明基本相同，其中流的方向充当等度连续同胚。我们还证明，存在具有双曲行为且控制空间中球的首次增长时间的连续统，意味着具有首次时刻敏感性。

定理3.16。设 f： $X \to X$ 是紧致度量空间（X，d）上的敏感同胚。若存在 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < 1$，使得对于每个球 B（x，r），存在一个连续统 $C_{x,\,r} \subset B$（x，r），它控制 B（x，r）的首次增长时间，且直径为 $diam$（$C_{x,\,r}$）$\geq r$ 并满足：

$$\lambda_1^{-n} d(y,z) \leq d(f^n(y), f^n(z)) \leq \lambda_2^{-n} d(y,z) \tag{6}$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 y，$z \in C_{x,\,r}$，则 f 是首次时刻敏感的。

证明。设 $c > 0$ 是 f，$\varepsilon \in$ 的敏感常数（0，c]，并定义

$$r_k(x) = 2\lambda_1^k \varepsilon \quad \text{for every} \quad x \in X \quad \text{and every} \quad k \in \mathbb{N}.$$

取 $a \in \mathbb{N}$ 使得 $\lambda_2^a < \frac{1}{4}$，并令 $m_\varepsilon = a + 1$。对于每个球 B（x，r_k（x））$\,$，按照假设考虑一个连续统 $C_{x,\,r_k}$（x）$\subset B$（x，r_k（x））。由于 diam($C_{x,\,r_k}$（x））$\geq r_k$（x），存在 y，$z \in C_{x,\,r_k}$（x）使得 d（y，z）$= r_k$（x）。因此，

$$d(f^k(y), f^k(z)) \geq \lambda_1^{-k} d(y,z) = 2\lambda_1^{-k}\lambda_1^k \varepsilon = 2\varepsilon > \varepsilon,$$

这意味着

$$n_1(x, r_k(x), \varepsilon) \leq k \quad \text{for every} \quad k \in \mathbb{N}.$$

此外，对于每个 $k \geq a$,

$$d(f^{k-a}(y), f^{k-a}(z)) \leq \lambda_2^{-k+a} d(y,z) = 2\lambda_1^k \lambda_2^{-k+a} \varepsilon \leq 2\lambda_2^a \varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

（第二个不等式由 $\lambda_1^k \lambda_2^{-k} \leq 1$ 保证，因为根据假设 $\lambda_1 \leq \lambda_2$）。这意味着

$$n_1(C_{x,r_k(x)}, \varepsilon) \geq k - a,$$

由于 $C_{x,r_k(x)}$ 控制 $B(x, r_k(x))$ 的首次增长时间，因此可得

$$n_1(x, r_k(x), \varepsilon) \geq k - a.$$

因此，

$$k - a \leq n_1(x, r_k(x), \varepsilon) \leq k$$

以及，然后

$$|n_1(x, r_{k+1}(x), \varepsilon) - n_1(x, r_k(x), \varepsilon)| \leq |k + 1 - (k - a)| = a + 1$$

对于每个 $k \geq a$ 以及每个 $x \in X$。现在，对于每个 $\gamma \in (0, \varepsilon)$，考虑 $\ell_\gamma, k_\gamma \in \mathbb{N}$，满足

$$2\lambda_2^{k_\gamma} \varepsilon \leq 2\lambda_1^{\ell_\gamma + 1} \varepsilon \leq \gamma < 2\lambda_1^{\ell_\gamma} \varepsilon,$$

并令

$$m_\gamma = \max\{k_\gamma, |k_\gamma - \ell_\gamma + 1|\}.$$

因此，对于每个 $k \geq \max\{\ell_\gamma, k_\gamma\}$,

$$d(f^{k-\ell_\gamma}(y), f^{k-\ell_\gamma}(z)) \geq \lambda_1^{\ell_\gamma - k} d(y,z) = 2\lambda_1^{\ell_\gamma}\varepsilon > \gamma$$

and

$$d(f^{k-k_\gamma}(y), f^{k-k_\gamma}(z)) \leq 2\lambda_2^{k_\gamma - k}\lambda_1^k \varepsilon \leq 2\lambda_2^{k_\gamma}\varepsilon < \gamma$$

因此,

$$k - k_\gamma \leq n_1(x, r_k(x), \gamma) \leq k - \ell_\gamma.$$

因此,

$$\begin{aligned} |n_1(x, r_{k+1}(x), \gamma) - n_1(x, r_k(x), \gamma)| &\leq |k + 1 - \ell_\gamma - (k - k_\gamma)| \\ &= |k_\gamma - \ell_\gamma + 1| \end{aligned}$$

and

$$|n_1(x, r_k(x), \varepsilon) - n_1(x, r_k(x), \gamma)| \leq k - (k - k_\gamma) = k_\gamma$$

对于每个 k，使得 $r_k(x) \leq \gamma$，确保性质（F1）和（F2）。 □

回忆一下，对于一个部分双曲微分同胚， $x \in M$ 的强不稳定流形是切于 $E^u(x)$的子流形，并记作 $W^{uu}_\varepsilon(x)$。稳定流形定理保证强不稳定流形满足前一个定理中的估计式（6）。因此，强不稳定流形（或其某个子流形）控制空间中球的增长时间的部分双曲微分同胚是首次时刻敏感的。

在关于部分双曲微分同胚的局部 cw-不稳定连续统的讨论中，强不稳定流形似乎起着核心作用，因此考虑以下问题似乎很自然:

问题1。局部 *cw*-不稳定连续统是否必然是部分双曲微分同胚的强不稳定流形?

我们证明，对于 $\mathbb{T}^n$ 的线性Anosov 微分同胚与 id 的恒等映射 $\mathbb{S}^1$ 的乘积，这个问题可以得到肯定回答。

命题 3.17。 如果 f_A 是一个线性 *Anosov* 微分同胚的环面 $\mathbb{T}^n$ 且id 是 $\mathbb{S}^1$的恒等映射，那么对于乘积 $f_A \times id$ 在 $\mathbb{T}^{n+1}$ 上，$\mathcal{F}^u$ 中的连续统是强不稳定流形。

证明。 令 $g = f_A \times id$与 $C \in \mathcal{F}^u$。则 $C \in \mathcal{F}^u_\gamma$对于某个 $\gamma \in (0, \varepsilon)$，因此，存在 $x = (y, z) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1$， $n_k \to \infty$，以及 $r_{n_k} \to 0$ 使得

$$C = \lim_{k\to\infty} g^{n_k}(\overline{B(g^{-n_k}(x), r_{n_k})}) \quad \text{and}$$

$$n_1(g^{-n_k}(x)\ r_{n_k},\ \gamma) \in (n_k,\ n_k + m_\gamma] \text{对每个} k \in \mathbb{N}.$$

我们将证明 $C \subset \mathbb{T}^n \times \{z\}$。事实上，在乘积度量下,

$$B_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1}(x, r) = B_{\mathbb{T}^n}(y, r) \times (z - r, z + r)$$

因此，对每个 $k \in \mathbb{N}$,

$$B(g^{-n_k}(x), r_{n_k}) = B_{\mathbb{T}^n}(f_A^{-n_k}(y), r_{n_k}) \times (z - r_{n_k}, z + r_{n_k}).$$

由于 $r_{n_k} \to 0$和 g^{n_k}在（$z - r_{n_k}$， $z + r_{n_k}$）上充当恒等映射，因此可得

$$C = \lim_{k\to\infty} g^{n_k}(\overline{B(g^{-n_k}(x), r_{n_k})}) \subset \lim_{k\to\infty} f_A^{n_k}(\overline{B(f_A^{-n_k}(y), r_{n_k})}) \subset \mathbb{T}^n \times \{z\}.$$

由于 $g = f_A$ 在 $\mathbb{T}^n \times \{z\}$上，根据 f_A 的局部乘积结构可得$C \subset W^{uu}_{\varepsilon}(x)$。□

对于作为 Anosov流时间-1映射的部分双曲微分同胚，其情形似乎与上述命题类似，但我们认为斜乘积部分双曲微分同胚的情形可能并非如此。不过，这超出了本文的讨论范围。

敏感但非首次时刻敏感：

在本小节中，我们将详细介绍引言中简要讨论过的一个 $\mathbb{T}^2$ 敏感同胚的例子。它并非首次时刻敏感，也不具备双曲系统的若干重要特征。我们从环面上的无理流开始，该流由常向量场生成F （其每条轨道在 $\mathbb{T}^2$上都稠密），并将 F 乘以一个非负光滑函数 g: $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ 该函数仅在一点 $p \in \mathbb{T}^2$处为零。由向量场 φ 生成的流 gF 在 p 上有一个不动点、一个稳定轨道（即在过去稠密）和一个不稳定轨道（即在未来稠密）；除这三条轨道外，任意轨道在过去和未来都稠密（见图4）。

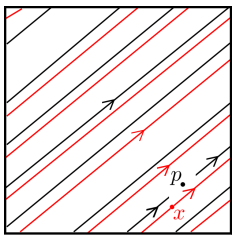

FIGURE 4. 修正无理流。

命题3.18. 如果 f: $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 是由向量场 gF生成的流的时间-*1*映射，则 f 敏感但并非首次时刻敏感。

证明。为证明 f 是敏感的，我们只需注意，在空间$B(x,r)$的每个开球中，都有点属于 p 的稳定轨道，也有点不属于 p的稳定轨道。回想一下， p 稳定轨道的向后部分，以及不属于 p 稳定轨道的点的向前轨道，在 $\mathbb{T}^2$上都是稠密的。因此，我们可以找到 $y, z \in B(x,r)$，使得 $y \in W^s(p)$，且 z的未来轨道在 $\mathbb{T}^2$ 上稠密，于是存在 $k \in \mathbb{N}$，使得 $d(f^k(y)\ f^k(z)) > \frac{1}{2}$。为证明$f$ 不是首次时刻敏感的，我们采用 [3] 中的技巧；其中证明了 φ 不是几何扩张的，而是运动学扩张的，这意味着轨道分离并非几何意义上的，因为一般轨道是平行直线，但局部不同的轨道应当在时间上分离。我们将这一论证形式化如下。

对于每个 $x \in \mathbb{T}^2$ 和 $\varepsilon > 0$ ，令 $C_\varepsilon(x)$为 x 在包含于 $B(x,\varepsilon)$中的 x 的流轨道内的连通分支。我们将证明存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$W^u_{\varepsilon}(x) \subset C_{\varepsilon}(x) \quad \text{for every} \quad x \neq p. \tag{7}$$

若 x 属于 p 的稳定轨道，则（7）与包含 x 的 cw-不稳定连续统的存在相矛盾，而这些连续统理应在未来增大（见定理 2.2

和命题 2.5），但由于它是包含在 p 的稳定轨道中的一小段流轨道，因此它不可能在未来增大。

令 $\varepsilon > 0$ 使得：如果 $y \in W^u_\varepsilon(x)$与 x 和 y 的轨道片段的长度为 ε，且彼此相距 α，那么对于每个 $k \in \mathbb{N}$，$f^{-k}(x)$和$f^{-k}(y)$ 的长度为 ε 的轨道片段也彼此相距 α。ε 的存在性源于无理流的轨道是平行直线，并且 φ 的轨道包含在无理流的轨道中。如果 $y \in W^u_\varepsilon(x) \setminus C_\varepsilon(x)$，那么它位于不同的局部轨道中，但其过去轨道沿着 x 的过去轨道运行。令 $\alpha > 0$ 为 x 和 y 的长度为 ε 的轨道片段之间的距离。选择时刻$(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得 $f^{-n_k}(x)$收敛于 p。对 ε 的选择确保 $f^{-n_k}(y)$ 与 p 的距离保持大于 $\frac{\alpha}{2}$；由于 φ只有一个不动点 p，因此存在下界 $n \in \mathbb{N}$，使得f 的迭代次数足以确保 y 的轨道与 p相距 2ε；与此同时，x 的轨道所需的迭代次数趋于无穷大，因为 $f^{-n_k}(x)$ 收敛于 p。这确保了 $k \in \mathbb{N}$ 的存在，使得

$$d(f^{-n_k-n}(x), f^{-n_k-n}(y)) > \varepsilon$$

这与 $y \in W^u_\varepsilon(x)$ 相矛盾。 □

4. Positive topological entropy

在混沌系统的研究中，拓扑熵是一种重要的不变量，用于衡量动力学的复杂程度。拓扑熵为正与此类系统的混沌性质密切相关。众所周知，正拓扑熵意味着存在不同的混沌概念（示例及相关参考文献见 [13] ）。下面精确定义拓扑熵。在本节中，$f\colon X \to X$ 表示紧致度量空间上的一个同胚。给定 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\delta > 0$，若对每个 x、$y \in E$、$x \neq y$，都存在 $k \in \{0, \dots, n\}$ 使得 $\mathrm{d}(f^k(x)\ f^k(y)) > \delta$，则称 $E \subset X$ 是 (n, δ)-分离的。令 $s(n, \delta)$ 表示 (n, δ)-分离子集 $E \subset X$ 的最大基数（由于 X 是紧致的，$s(n, \delta)$ 有限）。令

$$h(f, \delta) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s_n(f, \delta).$$

注意，当 δ 减小至 0 时，$h(f, \delta)$ 增大，并定义

$$h(f) = \lim_{\delta\to 0} h(f, \delta).$$

命题 3.18 中的例子是 $\mathbb{T}^2$ 上的敏感同胚，其拓扑熵为零。事实上，[28] 中证明了，紧二维流形上的每个连续流都具有零拓扑熵。Kato 证明了，当cw-扩张同胚定义在具有正拓扑维数的紧度量空间上时，它们具有正拓扑熵 [19]。具有若干类似于双曲不稳定流形性质的局部不稳定连续统的存在，保证了若干不同的（n，δ）-分离点的存在（更多细节请参见[18] 中的定理 4.1）。

在本小节中，我们针对首次敏感同胚的情形得到了类似的结果。需要指出的是，我们未能证明首次敏感性总是蕴含正拓扑熵。本文探讨的思路遵循 Kato 对连续统意义下扩张的同胚交换局部不稳定连续统与局部 cw-不稳定连续统的证明。该思路遇到了一些困难

只有借助一些额外假设，我们才能克服这些困难。下文将对此进行说明。

需要注意的第一个区别是，对于首次时刻敏感同胚，局部不稳定连续统的存在性——这些连续统同时也是稳定的，因而不会在未来增大（见注释 3.10 和 3.11）——不允许我们以任意局部不稳定连续统开始证明。选择一个局部cw-不稳定连续统足以处理这一问题，因为它们会在未来增大。第二个区别由下面的例子说明，它提醒我们，在 Kato的证明中，将一个不稳定连续统迭代至其直径增大之后，我们可以取一对不同的不稳定子连续统，对它们再次进行迭代并使其增大，而且这一过程可以在未来无限进行。然而，对于首次时刻敏感同胚，这不一定成立，因为局部cw-不稳定连续统可能包含若干个真稳定子连续统。

例 4.1。 设 $c = \frac{1}{4}$ 和 $\varepsilon \in (0, c)$。考虑命题 3.12 中的连续统不稳定连续统：

$$D = \prod_{i\in\mathbb{Z}}([x_i - 2^i\varepsilon, x_i + 2^i\varepsilon] \cap [0, 1]).$$

选择 $M \in \mathbb{N}$ 使得 $2^M\varepsilon > c$，因此，

$$\operatorname{diam}(\sigma^M(D)) > c.$$

对于每个 $m \geq M$，令

$$y_m = \min([x_m - 2^m\varepsilon, x_m + 2^m\varepsilon] \cap [0, 1]) \text{ and}$$
$$z_m = \max([x_m - 2^m\varepsilon, x_m + 2^m\varepsilon] \cap [0, 1]).$$

定义连续统 C_1 和 C_2 如下：

$$C_1 = \prod_{i<0}\{x_{i+M}\} \times [y_M, y_M + 1/12] \times \prod_{i>0}[y_{i+M}, y_{i+M} + 1/12]$$

and

$$C_2 = \prod_{i<0}\{x_{i+M}\} \times [z_M - 1/12, z_M] \times \prod_{i>0}[z_{i+M} - 1/12, z_{i+M}].$$

注意， C_1 和 C_2 是 $\sigma^M(D)$ 的子连续统，并满足

(1) $d(C_1, C_2) > 1/12$，(2) 对每个 $n \in \mathbb{N}$，
$\operatorname{diam}(\sigma^n(C_1)) = 1/12$，以及 (3) 对每个 $n \in \mathbb{N}$，
$\operatorname{diam}(\sigma^n(C_2)) = 1/12$。

□

这种通过不断分裂不稳定连续统使其在未来增大的性质，是 Kato 在连续统意义下扩张的同胚情形下证明拓扑熵为正的核心。下文将其表述为适用于任意同胚的定义，并重复 Kato 的证明，以证明该性质蕴含正拓扑熵。我们用 $\mathcal{C}(X)$ 表示 X 的所有子连续统构成的集合，并用 d_H表示 $\mathcal{C}(X)$ 上定义的 Hausdorff 距离：

$$d_H(C, C') = \inf\{\varepsilon > 0;\ C \subset B(C', \varepsilon) \quad \text{and} \quad C' \subset B(C, \varepsilon)\}.$$

定义 4.2。 我们称 $C \in \mathcal{C}(X)$ 可以无限次分裂以增大，如果存在 $\delta > 0$和 $M \in \mathbb{N}$，使得 $\operatorname{diam} f^M(C) \geq \delta$，并且对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0, 1\}^n$，都存在满足以下条件的 $C_{i_1 i_2 \cdots i_n} \in \mathcal{C}(X)$：

(1) 直径 $f^M(C_{i_1 i_2 \cdots i_n}) \geq \delta$，(2)
$C_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n} \subset f^M(C_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1}})$，以及
(3) $d_H(C_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1} 0},\ C_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1} 1}) \geq \frac{\delta}{3}$。

定理 4.3. 设 $f\colon X \to X$ 是一个紧致度量空间上的同胚。若存在一个可以无限次分裂以增加的连续统，则 f 具有正拓扑熵。

证明. 设 $C \in \mathcal{C}(X)$、$\delta > 0$、$M \in \mathbb{N}$ 和 $(C_{i_1 i_2 \cdots i_n})_{i_1,\ldots,i_n,n}$ 如前述定义所述。对每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n$，选取

$$y_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in C_{i_1 i_2 \cdots i_n},$$

并令

$$x_{i_1 i_2 \cdots i_n} = f^{-nM}(y_{i_1 i_2 \ldots i_n}).$$

归纳应用上述定义中的条件 (2)，我们得到

$$x_{i_1 i_2 \cdots i_n} \in C \quad \text{for every} \quad (i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n \quad \text{and} \quad n \in \mathbb{N}.$$

我们证明，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，集合

$$A_n = \{x_{i_1 i_2 \cdots i_n} \mid (i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n\}$$

是 $(nM, \delta/3)$-分离的。事实上，若 $x_{i_1 \cdots i_n}, x_{j_1 \cdots j_n} \in A_n$ 互不相同，则存在 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 使得

$$j_l = i_l \quad \text{for every} \quad l \in \{1, \ldots, k-1\}, \quad \text{and} \quad j_k \neq i_k.$$

不失一般性，假设 $i_k = 0$ 且 $j_k = 1$。条件 (3) 保证

$$d_H(C_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 0}, C_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 1}) \geq \delta/3,$$

并且由于条件 (2) 保证

$$f^{kM}(x_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 0 i_{k+1} \cdots i_n}) \in C_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 0} \quad \text{and}$$
$$f^{kM}(x_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 1 j_{k+1} \cdots j_n}) \in C_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 1},$$

因此可得

$$d(f^{kM}(x_{i_1 \cdots i_n}), f^{kM}(x_{j_1 \cdots j_n})) \geq \delta/3.$$

由于对于每个 $n \in \mathbb{N}$，A_n 有 2^n 个元素，且是 $(nM, \delta/3)$-分离的，因此可得

$$s(nM, \delta/3) \geq 2^n \quad \text{for every} \quad n \in \mathbb{N}.$$

因此，

$$\begin{aligned} h(f, \delta/3) &= \limsup_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \cdot \log s(n, \delta/3) \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \left(\tfrac{1}{nM} \cdot \log s(nM, \delta/3)\right) \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \tfrac{1}{nM} \cdot \log 2^n \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \tfrac{n}{nM} \cdot \log 2 \\ &= \tfrac{1}{M} \cdot \log 2 \ > \ 0 \end{aligned}$$

因此，$h(f) > 0$。 □

命题 4.4。 *Peano* 连续统上 *cw-expansive* 同胚的每个局部不稳定连续统都可以不断分裂并增大。

证明。设 $c>0$ 是 f的连续统扩张常数，且 $\varepsilon\in(0,c)$。Kato 在 [18]中证明了以下结论：

(1) 对每个 $\gamma\in(0,\varepsilon)$，存在 $m_\gamma\in\mathbb{N}$，使得对于每个 ε-不稳定连续统 C，只要 $\operatorname{diam}(C)\geq\gamma$，就有 $n_1(C,\varepsilon)\leq m_\gamma$；(2) 存在 $\delta>0$，使得对于每个 $n\geq n_1(C,\varepsilon)$ 以及每个 ε-不稳定连续统 C，都有 $\operatorname{diam}(f^n(C))\geq\delta$。

设 C 是一个 ε-不稳定连续统，取 $\gamma\in(0,\operatorname{diam}(C))$，考虑上述 (1) 和 (2) 给出的 m_γ 和 δ，并令 $M=\max\{m_\gamma,m_{\delta/3}\}$。因此，$\operatorname{diam}(f^M(C))\geq\delta$，且我们可以选取 $f^M(C)$ 的子连续统 C_0 和 C_1，使得

$$\operatorname{diam}(C_i)\geq\delta/3\quad\text{for}\quad i\in\{0,1\},\quad\text{and}\quad d_H(C_0,C_1)\geq\delta/3.$$

由于 $M\geq m_{\delta/3}$，可得 $\operatorname{diam}(f^M(C_i))\geq\delta$，对每个 $i\in\{0,1\}$，并且同样地，我们可以选取连续统 C_{i0} 和 C_{i1}，其直径大于 $\delta/3$，且$d_H(C_{i0},C_{i1})\geq\delta/3$。归纳地，我们可以定义族 $(C_{i_1i_2\cdots i_n})_{i_1,\ldots,i_n,n}$，使其满足定义 4.2 中的条目 (1)、(2) 和 (3)。□

对于首次敏感同胚，局部连续统不稳定连续统在向前迭代时会增大。因此，要证明它们可以被分裂得更大，只需证明它们可以在 $\mathcal{F}^u$ 中被连续统分裂。下一个定义将这一想法形式化。

定义 4.5。我们称 $C\in\mathcal{F}^u$ 可以在 $\mathcal{F}^u$ 中被无限次分裂，如果存在$\delta>0$使得 $C\in\mathcal{F}^u_\delta$，并且对每个 $n\in\mathbb{N}$ 以及 $(i_1,\ldots,i_n)$，都存在$C_{i_1i_2\cdots i_n}\in\mathcal{C}(X)$ 满足：

(1) $C_{i_1i_2\cdots i_n}\in\mathcal{F}^u_\gamma$ 对某个 $\gamma\geq\delta$ 成立；
(2) $C_{i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n}\subset f^{2m_\delta}(C_{i_1i_2\cdots i_{n-1}})$；以及
(3) $d_H(C_{i_1i_2\cdots i_{n-1}0},C_{i_1i_2\cdots i_{n-1}1})\geq\frac{\delta}{3}$。

命题4.6。对于首次敏感同胚，如果一个连续统可以在 $\mathcal{F}^u$ 中无限分裂，那么它可以通过无限分裂来增加。

证明。如果 $C\in\mathcal{F}^u$ 可以在 $\mathcal{F}^u$中无限分割，那么存在 $\delta>0$ 和一个族（$C_{i_1i_2\cdots i_n}$）$_{i_1i_2\cdots i_n,\ n}$ 满足定义4.5中的条件（1）、（2）和（3）。令 $M=m_{2\delta}$ 并考虑 $\delta'\in(0,\delta)$ 由引理 2.9 给出，使得

$$\operatorname{diam}(f^M(C))\geq\delta'\quad\text{and}\quad\operatorname{diam}(f^M(C_{i_1i_2\cdots i_n}))\geq\delta'$$

对于每个（i_1，...，i_n）$\in\{0,1\}^n$ 以及每个 $n\in\mathbb{N}$。定义4.2中的条件（1）、（2）和（3）可由此轻易得到。□

由此得到的一个结果是，在 $\mathcal{F}^u$ 中存在一个可以在 $\mathcal{F}^u$ 中被无限分割的连续统，将意味着一个首次敏感同胚具有正拓扑熵。出现的一个困难是，对于 $C\in\mathcal{F}^u$ 我们可以选择 x，$y\in f^{2m_\delta}(C)$，使得 $d(x,y)\geq\frac{\delta'}{3}$，并且定理 2.2确保存在连续统 C_0，$C_1\in\mathcal{F}^u_\delta$ 分别包含 x 和 y，但我们无法证明 C_0和 C_1包含于 $f^{2m_\delta}(C)$ 中。因此，下面的问题仍然悬而未决：

问题 2. 首次敏感同胚的 $\mathcal{F}^u$ 中的连续统能否在 $\mathcal{F}^u$ 中被无限细分？

假设问题2 的答案可能是否定的，我们尝试采用另一种方法来证明正拓扑熵，下面将对此进行说明。对于连续统意义下扩张的同胚，文献 [7] 证明了双曲连续统逐点度量的存在，这推广了文献 [14]中膨胀同胚情形下的双曲度量。下面我们将介绍双曲连续统逐点度量，并讨论在对 $\mathcal{F}^u$施加额外假设的情况下，首次敏感同胚是否存在双曲首次敏感度量。之后，我们将说明双曲首次敏感度量的存在足以证明正拓扑熵。令

$$E = \{(p, q, C) : C \in \mathcal{C}(X),\, p, q \in C\}.$$

对于 $p, q \in C$，记作 $C_{(p,q)} = (p, q, C)$。记号 $C_{(p,q)}$意味着 $p, q \in C$，且 $C \in \mathcal{C}(X)$。定义

$$f(C_{(p,q)}) = f(C)_{(f(p),f(q))}$$

并考虑这些集合

$$\mathcal{C}^s_\varepsilon(X) = \{C \in \mathcal{C}(X) \,:\, \operatorname{diam}(f^n(C)) \le \varepsilon \text{ for every } n \ge 0\} \quad \text{and}$$

$$\mathcal{C}^u_\varepsilon(X) = \{C \in \mathcal{C}(X) \,:\, \operatorname{diam}(f^{-n}(C)) \le \varepsilon \text{ for every } n \ge 0\}.$$

这些集合分别恰好包含 ε-稳定连续统和 ε-不稳定连续统的 f。

定理 4.7 (双曲 cw-度量-[6])。 **</style}若：** $X \to X$ 是紧致度量空间 X上的 c w-扩张同胚，则存在一个函数 D: $E \to \mathbb{R}$满足以下条件。

(1) 度量性质:

(a) $D(C_{(p,q)}) \ge 0$ *with equality if, and only if,* C *is a singleton,*

(b) $D(C_{(p,q)}) = D(C_{(q,p)})$,

(c) $D([A \cup B]_{(a,c)}) \le D(A_{(a,b)}) + D(B_{(b,c)})$, $a \in A, b \in A \cap B, c \in B$.

(2) 双曲性：存在常数 $\lambda \in (0、1)$ 以及满足以下条件的 $\varepsilon > 0$

(a) *if* $C \in \mathcal{C}^s_\varepsilon(X)$ *then* $D(f^n(C_{(p,q)})) \le 4\lambda^n D(C_{(p,q)})$ *for every* $n \ge 0$,

(b) *if* $C \in \mathcal{C}^u_\varepsilon(X)$ *then* $D(f^{-n}(C_{(p,q)})) \le 4\lambda^n D(C_{(p,q)})$ *for every* $n \ge 0$.

(3) 相容性：对于每个 $\delta > 0$，存在 $\gamma > 0$，使得

(a) *if* $diam(C) < \gamma$, *then* $D(C_{(p,q)}) < \delta$ *for every* $p, q \in C$,

(b) *if there exist* $p, q \in C$ *such that* $D(C_{(p,q)}) < \gamma$, *then* $diam(C) < \delta$.

对于首次敏感同胚的情形，我们无法期望在整个集合 E 上得到一个函数，因为任意小的动力球中都可能存在连续统。因此，我们将集合 E 限制为仅考虑 $\mathcal{F}^u$ 中的连续统，如下所示

$$E^u = \{(p, q, C) \,:\, C \in \mathcal{F}^u,\, p, q \in C\}$$

并得到一个类似的结果。不过，我们需要向 $\mathcal{F}^u$ 添加两个假设，以便能够精确定义函数 D 及其性质。首先，我们要求 $\mathcal{F}^u$ 在 f^{-1}下不变，即

$$\text{if} \quad C \in \mathcal{F}^u, \quad \text{then} \quad f^{-1}(C) \in \mathcal{F}^u.$$

在第二种情况下，我们要求 $\mathcal{F}^u$ 在连通并下是闭的，即

$$\text{if} \quad A, B \in \mathcal{F}^u \quad \text{and} \quad A \cap B \neq \emptyset, \quad \text{then} \quad A \cup B \in \mathcal{F}^u.$$

我们试图证明，对于首次敏感同胚，这些假设总是成立，但仍有一些我们无法规避的技术细节。以下是我们在首次敏感同胚情形下得到的首次敏感度量。该证明改编自连续统逐点度量切换连续统扩张性的证明，以及 Kato 为首次敏感性证明的局部不稳定连续统的性质和我们在第2节中证明的局部 cw-不稳定连续统的性质。

定理4.8 (双曲首次敏感度量)。设 $f\colon X \to X$ 是紧致连通度量空间 X 上的首次敏感同胚，满足假设（*P1*）和（*P2*），且敏感常数为 $\varepsilon > 0$。若 $\mathcal{F}^u$ 在 f^{-1} 作用下不变，且对连通并封闭，则存在函数 $D\colon E^u \to \mathbb{R}$ 满足以下条件。

（1）度量性质：

(a) $D(C_{(p,q)}) > 0$ *for every* $C_{(p,q)} \in E^u$,
(b) $D(C_{(p,q)}) = D(C_{(q,p)})$,
(c) $D([A \cup B]_{(a,c)}) \le D(A_{(a,b)}) + D(B_{(b,c)})$, $a \in A, b \in A \cap B, c \in B$.

（2）双曲性：存在满足以下条件的 $\lambda \in (0,1)$

(a) *if* $C_{(p,q)} \in E^u$, *then* $D(f^{-n}(C_{(p,q)})) \le 4\lambda^n D(C_{(p,q)})$ *for every* $n \ge 0$.

（3）相容性：对于每个 $\delta > 0$，存在 $\gamma > 0$ 使得

(a) *if* $diam(C) < \gamma$, *then* $D(C_{(p,q)}) < \delta$ *for every* $p, q \in C$,
(b) *if there exist* $p, q \in C$ *such that* $D(C_{(p,q)}) < \gamma$, *then* $diam(C) < \delta$.

定理的证明 *4.8*。对于每个 $\gamma \in (0,\ \varepsilon)$，考虑 $m_\gamma > 0$，由命题2.12给出。令 $m = m_{\frac{\varepsilon}{2}}$，$\lambda = 2^{-1/m}$，并定义函数

$$\begin{array}{rccc} \rho: & \mathcal{F}^u & \to & \mathbb{R} \\ & C & \mapsto & \lambda^{n_1(C,\varepsilon)}. \end{array}$$

考虑映射 $D: E^u \to \mathbb{R}$，其定义为

$$D(C_{(p,q)}) = \inf \sum_{i=1}^{n} \rho(A^i_{(a_{i-1},a_i)})$$

其中，下确界取遍所有满足 $C = \bigcup_{i=1}^n A^i$ 的 $n \ge 1$ $a_0 = p$、a_1、……、$a_n = q$，以及 A^1、……、$A^n \in \mathcal{F}^u$。该定理的证明基于以下不等式。

$$D(C_{(p,q)}) \le \rho(C) \le 4D(C_{(p,q)}) \tag{8}$$

对每个 $C_{(p,q)} \in E^u$。

(1) 度量性质：条目(b) 和 (c) 是函数定义的直接结果 D，而条目 (a) 则是以下事实的结果：如果 $C \in \mathcal{F}^u$，那么 $n_1(C,\ \varepsilon)$ 是一个有限正数，因此 $\rho(C) > 0$，然后不等式 (8) 确保

$$D(C_{(p,q)}) \ge \frac{1}{4}\rho(C) > 0.$$

(2) 双曲性：如果 $C \in \mathcal{F}^u$，则

$$\operatorname{diam}(f^{-n}(C)) \le \varepsilon \quad \text{for every} \quad n \ge 0,$$

$$n_1(C,\varepsilon) < +\infty \quad \text{and} \quad \operatorname{diam}(f^{n_1(C,\varepsilon)}(C)) > \varepsilon.$$

这意味着

$$n_1(f^{-n}(C),\varepsilon) = n + n_1(C,\varepsilon) \quad \text{for every} \quad n \geq 0,$$

因此，以下结论对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都成立：

$$\begin{aligned} \rho(f^{-n}(C)) &= \lambda^{n_1(f^{-n}(C),\varepsilon)} = \lambda^{n+n_1(C,\varepsilon)} \\ &= \lambda^n \lambda^{n_1(C,\varepsilon)} = \lambda^n \rho(C). \end{aligned}$$

不等式 (8) 保证以下结论对每个 $n \in \mathbb{N}$:

$$D(f^{-n}(C_{(p.q)})) \leq \rho(f^{-n}(C)) = \lambda^n \rho(C) \leq 4\lambda^n D(C_{(p.q)}).$$

回想一下假设： $\mathcal{F}^u$ 在 f^{-1} 下不变，因此

$$f^{-n}(C) \in \mathcal{F}^u \quad \text{for every} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(3) 相容性：不等式 (8) 保证 ρ 与 diam 之间的相容性足以推出 D 与 diam 之间的相容性。下面证明 ρ 与 diam 之间的相容性：

(a) 给定 $\delta > 0$，选取 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\lambda^n < \delta$。令 $\gamma > 0$，由 f 的连续性可知，若 $C \in C(X)$ 满足 $\operatorname{diam}(C) < \gamma$，则

$$\operatorname{diam}(f^i(C)) < \varepsilon \quad \text{whenever} \quad |i| \leq n.$$

这意味着 $n_1(C, \varepsilon) > n$ 并且，因此，

$$\rho(C) = \lambda^{n_1(C,\varepsilon)} < \lambda^n < \delta.$$

(b)给定 $\delta > 0$，令 $\gamma = \lambda^{2m_\delta}$。如果 $\rho(C) < \gamma$，那么

$$\lambda^{n_1(C,\varepsilon)} < \lambda^{2m_\delta} \quad \text{and} \quad n_1(C,\varepsilon) > 2m_\delta.$$

命题 2.5 保证了 $C \notin \mathcal{F}^u_\delta$。命题 2.12 确保

$$C \notin \mathcal{F}^u_\alpha \quad \text{for any} \quad \alpha \in (\delta, \varepsilon).$$

事实上，如果 $\alpha > \delta$，那么 $m_\alpha \leq m_\delta$ 并且，因此，

$$n_1(C,\varepsilon) > 2m_\delta \geq 2m_\alpha,$$

并且再次由命题 2.5 可知 $C \notin \mathcal{F}^u_\alpha$。由于 $C \in \mathcal{F}^u$，因此可得 $C \in \mathcal{F}^u_\alpha$ 对某个 $\alpha \in (0, \delta)$，并且因此，

$$\operatorname{diam}(C) \leq \alpha < \delta.$$

□

第一个不等式由 D 的定义保证，而下面的结果则保证另一个不等式。其证明改编自 [7] 中的引理 2.4。

引理 4.9。 函数 ρ 满足：

$$\rho\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) \leq 2\rho(C_1) + 4\rho(C_2) + \cdots + 4\rho(C_{n-1}) + 2\rho(C_n) \tag{9}$$

对于所有 $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{F}^u$，使得对于每个 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$，$C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$】【。

证明。首先，我们将为 $n=2$ 证明这一结果。考虑 $C=A\cup B$，其中 A，$B\in\mathcal{F}^u$ 且 $A\cap B\neq\emptyset$。我们断言，要么

$$n_1(A,\varepsilon)\leq m+n_1(C,\varepsilon)\quad\text{or}\quad n_1(B,\varepsilon)\leq m+n_1(C,\varepsilon). \tag{10}$$

事实上，我们知道直径 $f^{n_1(C,\varepsilon)}(C)>\varepsilon$，因此

$$\operatorname{diam} f^{n_1(C,\varepsilon)}(A)>\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{or}\quad\operatorname{diam} f^{n_1(C,\varepsilon)}(B)>\frac{\varepsilon}{2}.$$

假设我们处于第一种情形（第二种情形类似）。由于 $A\in\mathcal{F}^u$，性质 (F2) 保证

$$|n_1(A,\varepsilon/2)-n_1(A,\varepsilon)|\leq m,$$

并且由于

$$n_1(A,\varepsilon/2)\leq n_1(C,\varepsilon)\leq n_1(A,\varepsilon)$$

由此可得

$$n_1(A,\varepsilon)-n_1(C,\varepsilon)\leq m,$$

因此（10）中的第一个不等式成立，命题得证。如果 $n_1(A,\varepsilon)\leq m+n_1(C,\varepsilon)$，则

$$\rho(A)=\lambda^{n_1(A,\varepsilon)}\geq\lambda^{m+n_1(C,\varepsilon)}=\lambda^m\lambda^{n_1(C,\varepsilon)}=\frac{1}{2}\rho(C),$$

由于 $0<\lambda<1$ 和 $\lambda^m=1/2$，这意味着 $2\rho(A)\geq\rho(C)$。同样地，如果$n_1(B,\varepsilon)\leq m+n_1(C,\varepsilon)$ 我们得到 $2\rho(B)\geq\rho(C)$，并得出结论

$$\rho(C)\leq 2\max\{\rho(A),\rho(B)\}. \tag{11}$$

这就完成了 $n=2$情况下的证明。通过归纳，假设对于给定的 $n\geq 3$，引理的结论对每个 $k<n$ 都成立，并令 $C=\bigcup_{i=1}^n C_i$，其中

$$C_i\cap C_{i+1}\neq\emptyset\quad\text{for every}\quad i\in\{1,\dots,n-1\}\quad\text{and}$$
$$C_i\in\mathcal{F}^u\quad\text{for every}\quad i\in\{1,\dots,n\}.$$

在下文中，假设 $\mathcal{F}^u$ 在连通并下封闭这一条件在几个步骤中会用到，不过我们不会提及这一点。考虑以下不等式。

$$\rho(C_1)\leq\rho(C_1\cup C_2)\leq\cdots\leq\rho(C_1\cup\cdots\cup C_{n-1})\leq\rho(C). \tag{12}$$

如果 $\rho(C)\leq 2\rho(C_1)$，那么（9）得以证明；如果 $2\rho(C_1\cup\cdots\cup C_{n-1})<\rho(C)$，那么（11）意味着 $\rho(C)\leq 2\rho(C_n)$，这也意味着（9）。因此，我们假设

$$2\rho(C_1)<\rho(C)\leq 2\rho(C_1\cup\cdots\cup C_{n-1}).$$

由此以及（12）可知，存在 $1<r<n$ 使得

$$2\rho(C_1\cup\cdots\cup C_{r-1})<\rho(C)\leq 2\rho(C_1\cup\cdots\cup C_r).$$

第一个不等式以及（11）可知

$$\rho(C)\leq 2\rho(C_r\cup\cdots\cup C_n).$$

因此，

$$\rho(C)=\frac{\rho(C)}{2}+\frac{\rho(C)}{2}\leq\rho(C_1\cup\cdots\cup C_r)+\rho(C_r\cup\cdots\cup C_n).$$

由于这两项满足（9），根据归纳假设，证明得以完成。 □

定理 4.10. 设 $f\colon X \to X$ 是紧致连通度量空间 X 上的首次敏感同胚，满足假设（*P1*）和（*P2*）。如果 $\mathcal{F}^u$在 f^{-1} 下不变，且对连通并封闭，那么 f 具有正拓扑熵。

证明。我们将证明存在 $M \in \mathbb{N}$、$\delta > 0$和 $C \in \mathcal{F}^u$，使得 $\operatorname{diam}(f^M(C)) \geq \delta$，并且对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n$，都存在$C_{i_1 i_2 \cdots i_n} \in \mathcal{F}^u$ 满足：

(1) $\operatorname{diam}(f^M(C_{i_1 i_2 \cdots i_n})) \geq \delta$; (2) (a) $C_0 \cap f^M(C) \neq \emptyset$和 $C_1 \cap f^M(C) \neq \emptyset$; (b) $C_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n} \cap f^M(C_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1}}) \neq \emptyset$; (3) $d_H(C_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1} 0}, C_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1}, 1}) \geq \delta/3$; (4) 对每个 $k \in \mathbb{N}, n \geq k$和 $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n$,

$$\operatorname{diam}\left(\bigcup_{j=0}^{n-k} f^{-jM}(C_{i_1 \cdots i_{k+j}})\right) < \frac{\delta}{3}.$$

我们首先证明这族连续统的存在性（$C_{i_1 i_2 \cdots i_n}$）$_{i_1 i_2 \cdots i_n,\ n}$ 然后证明只需证明正拓扑熵即可。在定理 4.8 中，我们证明了存在一个首次敏感度量 $D\colon E^u \to \mathbb{R}$ 其双曲常数为 $\lambda \in (0,1)$。考虑 $\delta > 0$，由推论 2.9给出，且满足：若 $C \in \mathcal{F}^u_\gamma$，则

$$\operatorname{diam}(f^n(C)) \geq \delta \quad \text{for every} \quad n \geq 2m_\gamma.$$

diam 与 D 之间的相容性确保存在 $\alpha \in (0, \delta)$，使得

$$D(C) < \alpha \quad \text{implies} \quad \operatorname{diam}(C) < \frac{\delta}{6}.$$

考虑 $M \in \mathbb{N}$，使得 $M \geq 2m_{\delta/6}$ 并且

$$\frac{4\lambda^M}{1-\lambda^M} < \alpha,$$

并任选 $C \in \mathcal{F}^u_{\delta/6}$。推论 2.9 保证

$$\operatorname{diam} f^k(C) \geq \delta \quad \text{for every} \quad k \geq 2m_{\delta/6}.$$

由于 $M \geq 2m_{\delta/6}$，因此 diam $f^M(C) \geq \delta$。于是，我们可以选取 x_0和 x_1，使其属于$f^M(C)$，且 $d(x_0, x_1) \geq \delta$。定理 2.2保证存在 C_0，$C_1 \in \mathcal{F}^u_{\delta/6}$满足 $x_0 \in C_0$ 以及 $x_1 \in C_1$。因此，

$$\operatorname{diam}(C_i) \leq \frac{\delta}{6} \quad \text{and} \quad x_i \in C_i \cap f^M(C)$$

对每个 $i \in \{0,1\}$，因此 $d_H(C_0, C_1) \geq \delta/3$ (证明了C、C_0 和 C_1的条目 (2) (a)、(3) 和 (4))。此外，推论 2.9 保证

$$\operatorname{diam}(f^M(C_0)) \geq \delta \quad \text{and} \quad \operatorname{diam}(f^M(C_1)) \geq \delta,$$

因为 $M \geq 2m_{\delta/6}$，这意味着 C_0 和 C_1满足条目 (1)。现在，对每个 $i \in \{0,1\}$，考虑 $x_{i,0}$，$x_{i1} \in f^M(C_i)$，使得 $d(x_{i0}, x_{i1}) \geq \delta$并且 C_{i0}，$C_{i1} \in \mathcal{F}^u_{\delta/6}$满足

$$x_{i,0} \in C_{i,0} \quad \text{and} \quad x_{i,1} \in C_{i,1}.$$

因此，

$$d_H(C_{i0}, C_{i1}) \geq \delta/3 \quad \text{for each} \quad i \in \{0,1\}$$

and

$$\operatorname{diam} f^M(C_{ij}) \geq \delta \quad \text{for each} \quad (i,j) \in \{0,1\}^2.$$

此外， D 的双曲性确保了

$$D(f^{-M}(C_{ij})) \leq 4\lambda^M D(C_{ij}) < \alpha \quad \text{for every} \quad (i,j) \in \{0,1\}^2,$$

这意味着彩票计划

$$\operatorname{diam}(f^{-M}(C_{ij})) \leq \frac{\delta}{6} \quad \text{for every} \quad (i,j) \in \{0,1\}^2.$$

因此，对于每个 $(i,\ j) \in \{0,1\}^2$,

$$\operatorname{diam}(C_i \cup f^{-M}(C_{ij})) \leq \operatorname{diam}(C_i) + \operatorname{diam}(f^{-M}(C_{ij})) < \frac{\delta}{3}.$$

图 5 展示了这些选择和估计。按照相同的步骤归纳

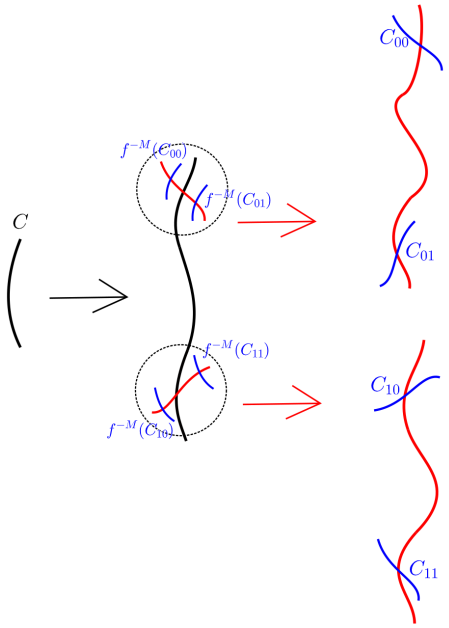

FIGURE 5. 局部 cw-不稳定连续统 $\delta/3$ 与过去迭代相距指数级小。

分别地，对于每个 $n \geq 2$ 和 $(i_1 i_2 \cdots i_{n-1}) \in \{0,1\}^{n-1}$ 我们构造连续统，$C_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1},0}$和 $C_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1},1}$ 在 $\mathcal{F}^u_{\delta/6}$ 中，

$$C_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1},0} \cap f^M(C_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1}}) \neq \emptyset \quad \text{and} \quad C_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1},1} \cap f^M(C_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1}}) \neq \emptyset$$

and

$$d_H(C_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1} 0}, C_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1} 1}) \geq \delta/3.$$

由于 $C_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n} \in \mathcal{F}^u$，于是由推论 2.9,

$$\operatorname{diam} f^M(C_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n}) \geq \delta.$$

D 的性质（三角不等式和 $\mathcal{F}^u$上的双曲性）确保对于每个 $k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$和（$i_1, i_2, \cdots, i_n$） $\in \{0,1\}^n$我们有

$$\begin{aligned} D\left(\bigcup_{j=1}^{n-k} f^{-jM}(C_{i_1\cdots i_{k+j}})\right) &\leq \sum_{j=1}^{n-k} D(f^{-jM}(C_{i_1\cdots i_{k+j}})) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n-k} 4\lambda^{-jM} \\ &\leq 4\left(\frac{\lambda^M}{1-\lambda^M}\right) \\ &< \alpha, \end{aligned}$$

这里我们只写 $f^{-jM}(C_{i_1\cdots i_{k+j}})$，省略标记点，这些标记点是

$$f^{-(j-1)M}(x_{i_1,\cdots,i_{k+j-1}}) \quad \text{and} \quad f^{-(j+1)M}(x_{i_1,\cdots,i_{k+j+1}})$$

其中，对于每个 $l \in \mathbb{N}$，i_l 是交集 $C_{i_1\cdots i_l} \cap f^M(C_{i_1\cdots i_{l-1}})$ 中的一点。由于根据假设，

$$\bigcup_{j=1}^{n-k} f^{-jM}(C_{i_1\cdots i_{k+j}}) \in \mathcal{F}^u,$$

D 与直径的相容性确保了魏

$$\operatorname{diam}\left(\bigcup_{j=1}^{n-k} f^{-jM}(C_{i_1\cdots i_{k+j}})\right) < \frac{\delta}{6}$$

因此，

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}\left(\bigcup_{j=0}^{n-k} f^{-jM}(C_{i_1\cdots i_{k+j}})\right) &\leq \operatorname{diam}(C_{i_1\cdots i_k}) + \operatorname{diam}\left(\bigcup_{j=1}^{n-k} f^{-jM}(C_{i_1\cdots i_{k+j}})\right) \\ &< \frac{\delta}{6} + \frac{\delta}{6} = \frac{\delta}{3}. \end{aligned}$$

这证明了满足(1)至(4)的族 $(C_{i_1\ldots i_n})_{i_1,\ \ldots i_n,\ n}$ 的存在性。为了证明这意味着正拓扑熵，我们使用(2)并选择点

$$x_i \in C_i \cap f^M(C) \quad \text{for each} \quad i \in \{0,1\},$$

并且对于每个 $n \geq 2$ 以及 $(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_n) \in \{0,1\}^n$，选择

$$x_{i_1 i_2\cdots i_n} \in C_{i_1 i_2\cdots i_n} \cap f^M(C_{i_1 i_2\cdots i_{n-1}}).$$

我们将证明，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，该集合

$$A_n = \{y_{i_1 i_2\cdots i_n} = f^{-nM}(x_{i_1 i_2\cdots i_n});\ (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n\}$$

是$(nM, \delta/3)$–分离的。事实上，若 $y_{i_1\cdots i_n}, y_{j_1\cdots j_n} \in A_n$互不相同，则存在 $k \in \{1,2,\ldots,n\}$使得 $j_k \neq i_k$并且

$$j_l = i_l \quad \text{for every} \quad l \in \{1,\ldots,k-1\}.$$

不失一般性，假设 $i_k = 0$ 和 $j_k = 1$。由于

$$y_{i_1 i_2\cdots i_n} = f^{-nM}(x_{i_1 i_2\cdots i_n}) \in f^{-nM}(C_{i_1 i_2\cdots i_n})$$

and

$$y_{j_1 j_2\cdots j_n} = f^{-nM}(x_{j_1 j_2\cdots j_n}) \in f^{-nM}(C_{j_1 j_2\cdots j_n}),$$

我们有的是

$$f^{kM}(y_{i_1\cdots i_n}) \in f^{(-n+k)M}(C_{i_1 i_2\cdots i_n}) \subset \bigcup_{j=0}^{n-k} f^{-jM}(C_{i_1 i_2\cdots i_{k+j}})$$

and

$$f^{kM}(y_{j_1\cdots j_n}) \in f^{(-n+k)M}(C_{j_1 j_2\cdots j_n}) \subset \bigcup_{j=0}^{n-k} f^{-jM}(C_{j_1 j_2\cdots j_{k+j}})$$

条目 (4) 确保了

$$f^{kM}(y_{i_1\cdots i_n}) \in B(x_{i_1\cdots i_{k-1}0}, \delta/3) \quad \text{and} \quad f^{kM}(y_{j_1\cdots j_n}) \in B(x_{i_1\cdots i_{k-1}1}, \delta/3),$$

这就意味着

$$d(f^{kM}(y_{i_1\cdots i_n}), f^{kM}(y_{j_1\cdots j_n})) \geq \delta/3,$$

因为 $d(x_{i_1\cdots i_{k-1}0}, x_{i_1\cdots i_{k-1}1}) \geq \delta$ 根据条目 (3)（回顾一下 $x_{i_1\cdots i_{k-1}0}, x_{i_1\cdots i_{k-1}1} \in C_{i_1\cdots i_{k-1}i_n}$）。由于对于每个 $n \in \mathbb{N}$, A_n 具有 2^n 个元素，并且是$(nM, \delta/3)$-分离的，因此可得

$$s(nM, \delta/3) \geq 2^n \quad \text{for every} \quad n \in \mathbb{N}.$$

因此,

$$\begin{aligned} h(f, \delta/4) &= \limsup_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \cdot \log s(n, \delta/4) \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \left(\tfrac{1}{nM} \cdot \log s(nM, \delta/4)\right) \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \tfrac{1}{nM} \cdot \log 2^n \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \tfrac{n}{nM} \cdot \log 2 \\ &= \tfrac{1}{M} \cdot \log 2 \ > \ 0 \end{aligned}$$

因此， $h(f > 0)$. □

问题 3. 所有首次时刻敏感同胚是否都满足关于 $\mathcal{F}^u$ 的不变性以及在连通并下的闭性假设?

Acknowledgements

Bernardo Carvalho 获得了 Progetto di Eccellenza MatMod@TOV 项目（编号 PRIN 2017S35EHN）和 CNPq 项目（编号 405916/2018-3）的资助，Māyara Antunes 也获得了 Fapemig 项目（编号 APQ-00036-22）的资助。

References

[1] G.Acosta,A.Illanes, H.M.Lango. 诱导映射的传递性。 *Topology and its applications* **156** 2009 1013 1033

()-。[2] D.V.Anosov. 负曲率紧流形上的测地流。 *Trudy mat. Inst.*, ()。[3] A. Artigue.运动学扩张流。 *V.A Steklova* **90** 1967 *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, (2016)**36**(2), 390 421 10 1017 2014 65 -。doi:。/etds.。A. Artigue.鲁棒 N-扩张曲面微分同胚, [4] *Discrete and Continuous Dynamical Systems* **36** 2016 2367 2376

, () -。[5] A. Artigue,D.Carrasco-Olivera,关于测度扩张微分同胚的注记, *J. Math.*, (), -。[6] A. Artigue, B. Carvalho,W.Cordeiro, J. Vieitez. 超越拓扑双曲性：L-跟踪性质。 *Journal of Differential Equations*, **268**, 第6期, 第3057-3080页（2020）。 *Anal. Appl.* **428** 2015 713 716

[7]A. Artigue, B. Carvalho, W. Cordeiro, J. Vieitez. 连续统意义下的双曲性。arXiv:2011.08147.[8] A. Artigue, M.J. Pac ´ *Communi-*
cations in Contemporary Mathematics **19** 2017
ıfico, J. Vieitez. 曲面上的 N-扩张同胚。 , , ( ). [9] B. Carvalho, W. Cordeiro, 具有影随性质的 N-扩张同胚。 *Jour-*
nal of Differential Equations **261** 2016 3734 3755 , ( ) - . [10] B.
Carvalho, W. Cordeiro, 正向 N-扩张同胚与 L-影随性质。 *Journal of Dynamics and Differential Equations*,
31, no. 2, p. 1005-1016 (2019). [11] W. Cordeiro, M. Denker, X. Zhang, 关于刻画性质与测度扩张性。 *Discrete*
and Continuous Dynamical Systems **37** 2017 1941 1957 , , ( ), - . [12] S.
Crovisier, R. Potrie. 部分双曲动力学导论。 *School on Dynamical*
Systems ICTP Trieste 3 1, 2015 , , , no. ( ). [13]
T. Downarowicz. 正拓扑熵意味着混沌 DC
2 *Proceedings of the AMS*。 , no.
142 2014 137
1, 149 ( ), – A. Fathi. , *hyperbolicity and Hausdorff dimension*. Commun. Math.
[14] *Expansiveness*
Phys., 126 (1989). [15] J. R. Hertz. 连续统意义下扩张的同胚不存在稳定点。arXiv 预印本 math/0208102 (2002).
[16] K. Hiraide. 紧曲面上的膨胀同胚是伪阿诺索夫同胚。
Osaka J. . ( ) - . [17] A.
Math **27** 1990 117 162
Illanes, S. Nadler. 超空间：基础与最新进展。 *CRC Press*, 216 (1999). [18] H. Kato, 连续统意义下的扩张同胚。
Canadian Journal of Mathematics, 45 576 598 1993 , no. 3, p. - ( ). [19] H. Kato, 关于连续统上的连续统意义下 *Topology*
完全扩张同胚。*and its Applications* **53** 3, 239 258 1993 , ,
no. p. - ( ). [20] J. Li, R. Zhang, 广义扩张性的层级, *Journal of Dynamics and Differential*
Equations 2015 1 18 . ( ), - . [21] E.
Lorenz, 大气可预测性的三种方法。 *Bulletin of the American Meteo-*
rological Society 50 1969 5 345 349 ( ) : - . [22] R.
Ma ˜ ´ *Transactions of the Amer-* ne. 膨胀同胚
ican Mathematical Society **252** 313 319 1979
与拓扑维数。 , , p. – ( ). [23] C.A. Morales, 扩张性的推广， *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 32 , no. 1, (2012)
293-301.[24] S. B. Nadler. 通过超空间收缩刻画局部连通连续统。
Proceedings of the American Mathematical Society, 67, no. 1, p. 167-176, (1977). [25] M.J. Pacifico, J.L.
Vieitez, 曲面微分同胚的熵扩张性与支配，Rev. Mat. Complut., 21, (2008), 293-317. [26] C. Pugh, M. Shub, 稳定遍
历动力系统与部分双曲性。
J. Complexity ( ), no. 1, 125– .
13 1997 179
[27] S. Smale. 可微动力系统。 *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967) 747-817. [28] L.-S. Young. 紧致二维流形上连续
流的熵， *Topology* **16**, 第4期 (1977) 469-471.

B. Carvalho

数学系，罗马第二大学`托尔·维尔加塔 克拉
科维亚街.50 - 00133 罗马 - RM，意大利
mldbnr01@uniroma2.it

M. B. Antunes

弗卢米嫩塞联邦大学沃尔塔雷东达工业与冶金工程学院 -UFF
Avenida dos Trabalhadores, 420, Vila Santa Cec´ılia Volta
Redonda - RJ, 巴西。mayaraantunes@id.uff.br