arXiv:2304.03150v2 [math.PR] 3 Oct 2023

二维连续高斯自由场的游走分解

Juhan Aru、Titus Lupu 和 Avelio Sepúlveda

摘要。本文证明，二维连续高斯自由场（高斯自由场）具有一种游程分解：一方面，它类似于布朗运动的经典游程分解；另一方面，它也可以被视为连续高斯自由场的一种FK表示。特别地，二维连续高斯自由场可以写成无穷多个互不相交的正负符号游程之和，这些游程由带有独立同分布符号的临界二维布朗环汤的簇的闵可夫斯基含量测度给出。尽管二维连续高斯自由场甚至不是一个符号测度，我们证明，在自然条件下，将其分解为正部分和负部分的方式是唯一的。

1. 引言

二维连续高斯自由场（GFF）是连续高度函数的一个普适模型，已成为共形不变连续随机几何研究中的核心对象。这主要是因为它与其他对象有着密切联系，例如 Schramm-Loewner 演化、布朗环汤和 Liouville 量子引力测度（参见综述 [GHS19、WP21、BP23]），以及若干已知的或猜想的、趋向高斯自由场的收敛结果 [NS97、Ken01、RV07、BLR20]。

本文阐述如何证明将二维连续高斯自由场分解为一列（无穷）符号测度之和，且这些测度的支撑集互不相交。在自然条件下，这种分解是唯一的，并且可由度量图高斯自由场的严格游程分解取标度极限得到。因此，尽管该场并非逐点定义，甚至不是符号测度，我们的结果仍表明，高斯自由场存在一种自然的正负部分分解。一方面，所得分解具有许多与布朗运动的经典游程分解相同的性质 [Itô72]（但也展现出一些令人惊讶的新性质）。另一方面，我们的分解也可视为连续统高斯自由场的一种 FK 表示。

我们在一个有界单连通开区域 $D \subset \mathbb{C}$ 中讨论，并考虑 D 上的零边界高斯自由场 Φ。为固定归一化方式，我们将高斯自由场视为由以下泛函积分得到的场

$$\exp\Big(-\frac{1}{2}\int_D \|\nabla\varphi\|^2\Big)\mathcal{D}\varphi.$$

日期：2010 数学主题分类。60G15;60G60;60J65; 60J67; 81T40。关键词与短语。共形环路系综；高斯自由场；同构定理；局部集；环路汤；度量图；Schramm–Loewner 演化。

更准确地说， Φ 是一个中心化高斯过程，其协方差由狄利克雷格林函数 $G_D(z,\ w)$ 给出，该函数在对角线上具有如下发散行为

$$G_D(z,w) \sim \frac{1}{2\pi}\log|z-w|^{-1}.$$

在这种归一化下，高度间隙的值（将在后文使用，并在 [SS09] 中引入）为 $2\lambda = \sqrt{\pi}/2$。

本文的主要贡献体现在三个定理中：首先，我们陈述游程分解的存在性与唯一性；其次，我们列出这一分解的性质，这些性质与一维布朗运动的游程分解具有很强的相似性，并且与二维临界布朗环汤建立了联系。最后，我们证明，自然定义的度量GFF 的游程分解收敛于连续高斯自由场的游程分解。其他贡献包括命题 36，该命题将连续高斯自由场描述为随机场自旋模型的重标度极限，并解释了分解的FK 表示观点；猜想 39 预测了离散GFF的游程分解应具有怎样的连续统极限；以及命题 31，该命题获得了度量图高斯自由场的符号簇环域穿越概率的一致连续性。我们利用了GFF、CLE_4 和布朗环汤 [之间已知的耦合] SS09、SW12、ASW17、QW18、ALS20a、ALS20b [，并在]SS13、ASW17、ALS20a、ALS20b中引入的技术基础上开展研究；本文最具技术性的部分是唯一性证明。

偏　离分解的存在性由以下定理给出　　.

定理 1（二维高斯自由场的游程分解）。设 Φ 是 D 中的零边界高斯自由场。存在唯一的一族正测度（ν_k）$_{k\geq 1}$，其支撑集为（C_k）$_{k\geq 1}$，以及一族符号（σ_k）$_{k\geq 1}$，满足以下条件：

(1) 我们可以写成

$$\Phi = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\nu_k, \tag{1.1}$$

其中，求和按 C_k 的直径从大到小排列。该和几乎必然在所有索博列夫空间 $H^{-1-\varepsilon}$（D）（即索博列夫范数意义下）中对$\varepsilon > 0$ 收敛。

(2) 该分解满足以下马尔可夫性质。对于任意一条从边界出发的光滑简单路径 $\gamma \subset D$，令 γ^{exc} 表示与 γ 相交的所有集合 C_k 的并集的闭包。几乎必然可以写成 $\Phi = \Phi^{\gamma^{exc}} + \Phi_{\gamma^{exc}}$，其中

$$\Phi_{\gamma^{exc}} = \sum_{k:C_k\cap\gamma\neq\emptyset}\sigma_k\nu_k,$$

其中的求和同样按照 C_k 直径的大小递减排列，并且几乎必然在所有索引为 $H^{-1-\varepsilon}$（D）的索博列夫空间中收敛，$\varepsilon > 0$。此外，在给定 γ^{exc} 的条件下，场 $\Phi^{\gamma^{exc}}$ 与 $\Phi_{\gamma^{exc}}$ 相互独立，并且其分布为区域 $D\backslash\gamma^{exc}$中的零边界高斯自由场。

(3) 该集合 $(C_k)_{k\geq 1}$ 两两不交、局部有限，并且其中每个 C_k 都是连通的。

[1]局部有限意味着，对于任意 $\varepsilon > 0$，直径大于 ε 的 C_k 只有有限多个。

我们将$(C_k)_{k\geq 1}$ 称为（符号）游程簇，将$(\nu_k)_{k\geq 1}$ 称为符号游程，并将三元组$(C_k, \sigma_k, \nu_k)_{k\geq 1}$ 称为 Φ的游程分解。

以下定理列出了游程分解的更多性质。

定理 2（游程分解的性质）。设 Φ 是 D 中的零边界高斯自由场，且 （（C_k、 ν_k、 σ_k））$_{k\geq 1}$ 分别表示定理 *1* 中游程分解的游程簇、测度及其符号。则有以下性质：

（*1*）游程分解 （（C_k、 ν_k、 σ_k））$_{k\geq 1}$ 关于 Φ 可测。（*2*）在 （（C_k、 ν_k、 σ_k））$_{k\geq 1}$ 的联合分布中，符号 $(\sigma_k)_{k\geq 1}$ 与其余部分相互独立，并且服从独立同分布的拉德马赫随机变量的分布。（*3*）对于所有 $k \geq 1$，测度 ν_k 由 C_k 的闵可夫斯基含量测度给出，其定义为

$$\nu_k(f) := \lim_{r\to 0} \frac{1}{2} |\log r|^{1/2} \int_D f(z) 1_{d(z,C_k)\leq r} dz,$$

对于所有 $f \in C(D)$。特别地，对于所有 $k \geq 1$， ν_k 由 C_k 决定。

(4) C_k的分布与$_{k\geq 1}$ 中强度为临界强度 $\alpha = 1/2$ 的二维布朗环绕汤的簇（拓扑闭包）的分布相同，这些簇按直径递减排列。此外，最外层簇的外边界集合 C_k 的分布为 CLE_4。

此外，还可以通过证明一个收敛结果来说明“游程分解”这一名称的由来：该结果从度量图高斯自由场上定义良好的游程分解出发。确切的设定见第 5 节；关于离散高斯自由场的情形，见猜想 39。我们认为，其游程分解收敛到另一种连续统分解，其中各个“游程”仍是正测度和负测度，但符号不再相互独立，而是随着嵌套交替出现。

定理 3（游程分解的收敛性）。设 Φ 是 D 上的零边界高斯自由场 ~ ~，且 ϕ_n 是定义在 D_n 上并与 ~耦合的零边界度量图高斯自由场序列，其中 Φ 为高斯自由场，满足几乎必然地 $\phi_n \to \Phi$ 在 $H^{-\varepsilon}(D)$ 中，对某个 $\varepsilon > 0$。此外，取 ϕ_n的游程分解 $(C_k^n, \tilde{\nu}_k^n, \tilde{\sigma}_k^n)_{k\geq 1}$~。

对于每个 $k > 0$、 $\widetilde{C}_k^{(n)} \to C_k$、 $\tilde{\nu}_k^{(n)} \to \nu_k$ 和 $\tilde{\sigma}_k^{(n)} \to \sigma$，当 $n \to \infty$ 时，第一分量依概率并在豪斯多夫拓扑下收敛，第二分量则在测度弱拓扑下收敛。

我们通过进一步的说明来详细阐述这些定理。

i. 已知二维连续高斯自由场不是符号测度，特别是不能写成两个 σ-有限正测度之差。因此，将其如此重写为不交符号测度之和本身就已经是一个非平凡的问题。ii. 此前，对于临界二维伊辛模型的磁化场的连续统极限，人们已知一种类似的分解；在这种情形下，它是晶格伊辛模型标准FK表示的连续统模拟。磁化场的连续统极限是在 [CGN15]中构造的。连续统FK 分解在 [CN09], 中被提出猜想，并在 [CJN21]中完成了证明。 [2] 一个关键的输入是对界面和相关函数的标度极限的详细理解

[2]我们感谢 F. Camia 为我们澄清了伊辛分解的这段历史。

临界Ising 和FK-Ising 模型 [CDCH+14、CDCH16、CHI15、CS12、Smi10]。与自由场情形不同，在Ising 情形中，重整化面积测度是通过离散面积测度的收敛论证构造的，而在连续统极限中，游程分解相对于连续统磁化场并不可测。这种可测性的失败源于两个不同的连续统 FK簇可能彼此接触，并且将一个 Ising 自旋簇分解为 FK 簇的方式有多种。

iii.事实上，与上文提到的伊辛情形类似，我们的偏离分解也可以被视为高斯自由场的连续统FK表示。确实，正如 [LW16], 所˜观察到的，度量图高斯自由场的 ϕ_n 符号簇可以被视为离散高斯自由场的随机场伊辛模型的某种 FK 表示，该模型由符号(ϕ_n)给出。命题 36 表明，连续高斯自由场是该模型的一个经重整化的标度极限，从而使 FK 视角更加明确。有趣的是，这种相对于离散高斯自由场不可测的 FK 分解，在连续统极限中变得可测。

iv. 与前一条评论相关，我们认为，离散高斯自由场的游程分解不会收敛到我们的连续统分解——精确表述见猜想39。连续高斯自由场的这一替代性连续统分解并不满足同样良好的独立性性质，例如，符号游程的符号并不相互独立。

v.二维连续高斯自由场分解为测度的符号和（不具备唯一性、可测性以及对该分解结构的明确描述）的存在性，也可以利用度量图的子序列收敛结果，并借助 [Lup18] 的结果而获得，但无需进一步的 SLE 理论。

vi.要证明该分解的存在性和唯一性，我们只需使用 GFF 及其局部集（包括CLE_4, SLE_4）的基本性质，因此尤其不使用同构定理。事实上，游程簇也可以仅用嵌套的 CLE_4 来表示: 见注释 17。

vii. 我们预计，在非单连通域中，分解的存在性和唯一性以及所有性质同样成立。然而，这会增加一些技术问题，而我们决定不在本文中处理这些问题。

viii. 该 该和的收敛性很可能可以改进为 $H^{-\varepsilon}$ ，适用于所有 $\varepsilon > 0$.

ix. 对于 (1.1) 中的收敛，符号所引起的补偿至关重要，而全变差测度 $\Sigma_{i\geq 1}\nu_i$ 在 D 的每个开子集中都发散。簇上的具体排序 $(C_i)_{i\geq 1}$ 有一定的自由度。不过，重要的是固定该排序时不依赖于符号 $(\sigma_i)_{i\geq 1}$。请注意，我们并未预先要求符号具有任何独立性，而是将其作为推论得出。

x. 人们可能会想知道，要使上述分解具有唯一性，所需的最小假设是什么。不过，答案或许并不简单：1）正如前面提到的，我们预计还存在另一种自然的游程分解，它来自离散高斯自由场的游程分解的收敛；2）一旦在不规则函数类中进行研究，如果没有进一步的假设，这类分解通常并不唯一。事实上，例如，符号测度的哈恩分解也仅在相差测度为 0 的集合的意义下唯一。或者，举一个具体例子，考虑在 $[0,1]$, 上的布朗运动情形，不过将其视为 $L^2([0,1])$ 的概率测度。现在来寻找将 $[0,1]$ 分解为闭且连通的互不相交集合的方法。

其中布朗运动要么非正，要么非负。很容易看出，除非我们引入一些额外条件——例如在发现某些游走后满足某种马尔可夫性质、游走的符号独立性，或者某种极大性条件——否则，除了取每个偏离的支撑集所得到的自然分解外，我们还可以找到许多其他分解。事实上，我们总可以先取自然分解，然后进一步将其中任意一个闭区间写成可数个更小闭区间的并，至多相差一个零测度集。只要我们在 $L^2([0,1])$ 中进行研究，剩余的零测度集便可以直接忽略，以上列出的所有条件也都能满足。

ξ。该定理还可以进一步调整，从而用偏离的泊松点过程来表示二维连续高斯自由场，这与通过拼接布朗游走的泊松点过程（PPP）来表示布朗运动的经典方法非常相似。事实上，正如 [WW13], 所示，可以在以边界上的均匀随机点为锚点的环空间上定义一个无限测度，使得整个 CLE_4 可以通过强度测度为该测度的单个 PPP 构造出来——更详细的解释见 [WW13] 第 4 节，或 [AS18] 第 6.1 节。现在，如前所述，CLE_4 只给出了最外层游走簇的外边界，但我们可以进一步将簇和符号测度纳入上述强度测度，从而得到一个针对锚定于边界的簇的强度测度。这样便可通过 PPP 对所有最外层簇进行抽样；再在每个簇的内部迭代，即可得到完整的分解。

xii. 探索其他随机广义函数是否也存在类似的分解，将会非常有趣。事实上，Jego、Lupu 和 Qian 成功证明了由次临界布朗环汤构造的随机场也存在类似的分解 [JLQ23]。此外，他们还为临界情形下分解的存在性提供了一种替代证明，该证明不依赖于高斯自由场的局部集（也不依赖 CLE_4, SLE_4），但无法保证唯一性和可测性。

本文其余部分安排如下：我们在第 2 节汇总主要对象的定义；在第3节证明定理 1 的存在性部分，并推导定理 2 的性质。在第 4 节证明该分解的唯一性，在第 5 节证明收敛。最后，在第 6 节讨论若干其他方面：首先，我们证明度量图上穿越概率的一致连续性。随后，我们说明如何将连续高斯自由场视为自旋模型的标度极限，以及为何也可以将我们的分解视为一种 FK 表示。同一节中，我们还讨论离散高斯自由场的游程分解的猜想标度极限。

致谢。 作者感谢Wendelin Werner在ETH期间进行的许多有益且富有启发性的讨论。J.A.的研究获得瑞士国家科学基金会卓越资助194648的支撑集，他也是NCCR Swissmap的成员。A.S.的研究获得ANID AFB170001资助、FONDECYT研究启动项目N°11200085以及ERC 101043450 Vortex的支撑集。

2. 定义与预备知识

为方便读者，我们在此汇集二维连续高斯自由场及其局部集、CLE_4 和布朗环汤的定义。更多信息请参见例如 [ALS20a、ALS20b] 的预备知识部分，或书籍 [WP21]。

连续统高斯自由场（高斯自由场）是布朗运动的推广，将时间轴替换为一个 d 维区域。更准确地说，它定义如下。

定义 4（高斯自由场）。令 $D \subseteq \mathbb{C}$ 表示一个有限连通区域。D 中的二维零边界连续高斯自由场是中心化高斯过程 $(\Phi, f)_{f \in C_c^\infty(\mathbb{C})}$，其协方差为

$$\mathbb{E}\left[(\Phi, f)(\Phi, g)\right] = \int\int_{D \times D} f(z) G^D(z, w) g(w)\, dz dw; \quad f, g \in C_c^\infty(\mathbb{C}),$$

其中，G^D 表示 D中拉普拉斯算子的零边界格林函数。

对于任意开集 U（它是至多可数个有限连通区域的并），我们将 U 上的零边界高斯自由场定义为各连通分支中相互独立的零边界高斯自由场的不交并。对于任意 $\varepsilon > 0$，高斯自由场几乎必然属于 $H^{-\varepsilon}(U)$，但我们也可以将高斯自由场视为更大区域 $U' \supseteq U$上的随机分布，并将其在 U 之外延拓为零。连续高斯自由场基本上可以通过其马尔可夫性质 [BPR20, BPR21, AP22] 来刻画；而与高斯自由场耦合且满足强马尔可夫性质的随机集称为局部集。关于局部集及其性质的更一般讨论，请参见 [Aru15, SS13, WP21]。

定义 5 (局部集)。考虑一个随机三元组(Φ, A, Φ_A)，其中 Φ 是 D 中的高斯自由场，A 是 D 的随机闭子集，而 Φ_A 是一个随机广义函数，限制在 $D\backslash A$ 上时可视为调和函数。我们称 A 是 Φ 的局部集，如果在给定 (A, Φ_A) 的条件下，$\Phi^A := \Phi - \Phi_A$ 是 $D\backslash A$ 中的高斯自由场。

这里列出局部集的一些性质，我们在文中会隐式或显式地用到这些性质；推导过程及更多性质可参见例如[SS13、Aru15] 。

引理 6。高斯自由场的局部集具有以下性质。

(1) 任意局部集都能以唯一的方式与给定的高斯自由场耦合：设 $(\Phi, A, \Phi_A, \Phi_A)$ 是一个耦合，其中 (Φ, A, Φ_A) 和 (Φ, A, Φ'_A) 满足该定义的条件。那么，几乎必然有 $\Phi_A = \Phi'_A$。因此，局部集是耦合 (Φ, A) 的性质，因为 Φ_A 是 (Φ, A) 的可测函数。*(2)* 若 A 和 B 是与同一个高斯自由场 Φ 耦合的局部集，且 (A, Φ_A) 和 (B, Φ_B) 在给定 Φ 的条件下相互独立，则 $A \cup B$ 也是与 Φ 耦合的局部集，并且在 $A \cup B$ 的边界上与 A 或 B 的距离为正的每一点处，$\Phi_{A\cup B}$ 的边界值分别与 Φ_B 或 Φ_A 的边界值一致[3]。此外，$B\backslash A$ 是 Φ^A 的局部集，且 $(\Phi^A)_{B\backslash A} = \Phi_{B\cup A} - \Phi_A$。*(3)* 设 $(\Phi, (A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\Phi_{A_n})_{n\in\mathbb{N}})$ 是一列在给定同一个高斯自由场 Φ 的条件下相互独立、且与之耦合的局部集。此外，假设 A_n 是递增的。那么 $A_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ 是一个局部集。此外，若几乎必然对所有 $n \in \mathbb{N}$，A_n 都与边界连通，则几乎必然有 $\Phi_{A_n} \to \Phi_A$。

特别是，我们将用到以下类型局部集的存在性和唯一性：[ASW17] 中引入并在 [ALS20a], 中研究的双值局部集，以及 [ALS20a, ALS20b]中引入的首次通过集。关于薄局部集、有界类型局部集的定义，可参见例如 [ASW17, ALS22]。

[3]我们称，若对于任何收敛于 x 的 $x_n \notin A \cup B$序列 $\Phi_{A\cup B}(x_n) - \Phi_A(x_n) \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时，$\Phi_{A\cup B}$ 在点 $x \in \partial(A \cup B) \cap \partial A$ 与 Φ_A 一致。

定理 7(双值局部集：存在性与唯一性)。 设 a、 $b > 0$ 满足$a + b \geq 2\lambda$。则可以将一个薄的[4] 有界型局部集 $\mathbb{A}_{-a,\ b} \neq \emptyset$ 与一个高斯自由场 Φ耦合，使得对于 $D\backslash\mathbb{A}_{-a,\ b}$ 的每个连通分支 O ，调和函数 Φ_A 等于 $-a$ 或 b。此外，集合$\mathbb{A}_{-a,\ b}$ 是

- 唯一性是指：若 A' 是与同一个 Φ耦合的另一个 ***BTLS***，并且几乎必然满足上述条件，那么 $A' = \mathbb{A}_{-a,\ b}$ 几乎必然成立；
- 与之耦合的高斯自由场的可测函数；
- 在以下意义下单调：若 $[-a, b] \subset [-a', b']$ 且 $b + a \geq 2\lambda$，那么几乎必然有 $\mathbb{A}_{-a,\ b} \subset \mathbb{A}_{-a',\ b'}$。

文献 [ASW17] 指出，任意一个双值集的闵可夫斯基维数几乎必然严格小于 2（其几乎必然的豪斯多夫维数已在文献[SSV22]中精确计算）；我们将利用这一关于 $\mathbf{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda}$的事实。

双值局部集对我们很重要，因为我们分解中的符号游程边界是通过迭代双值局部集 $\mathbf{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda}$得到的。游程簇本身则由首次通过集给出。

定义 8 （首次通过集）。 设 $a \in \mathbb{R}$ 和 Φ 是 D 中的高斯自由场。我们将 Φ 的 $-a$ 水平首次通过集定义为 Φ 的局部集，使得 $\partial D \subseteq \mathbb{A}_{-a}$，并具有以下性质：

(1) 在每个 O $D\backslash\mathbb{A}_{-a}$连通分支内，调和函数 $\Phi_{\mathbb{A}_{-a}}|_{D\backslash\mathbb{A}_{-a}}$ 等于 $-a$。*(2)* $\Phi_{\mathbb{A}_{-a}} + a \geq 0$, 即，对于任意光滑的正测试函数 f，我们有$(\Phi_{\mathbb{A}_{-a}} + a, f) \geq 0$，换言之 $\nu := \Phi_{\mathbb{A}_{-a}} + a$ 是一个正测度，其支撑集为 $\mathbb{A}_{-a}$。

关键结果如下。

定理 9. / [定理 *4.3* 和命题 *4.5*ALS20a], [命题 *5.7*ALS20b]/对于所有 $a \geq 0$， Φ 的水平 *-a* 首次通过集 $\mathbb{A}_{-a}$ 存在，且满足以下性质：

（*1*）唯一性：如果 A' 是与 Φ 耦合且满足定义 *8* 的另一个局部集，则几乎必然有 $A' = \mathbb{A}_{-a}$。（*2*）可测性：$\mathbb{A}_{-a}$ 是 Φ的可测函数。（*3*）单调性：如果 $a \leq a'$，那么$\mathbb{A}_{-a} \subseteq \mathbb{A}_{-a'}$（*4*）局部有限性：对于任意 $\varepsilon > 0$ ，$D \setminus \mathbb{A}_{-a}$ 中直径大于 ε的连通分支只有有限多个。

2.1. **不同对象之间的耦合**。在 [SS09、SS13] 中，研究表明 SLE_4 可以看作连续高斯自由场的一条等值线。Miller 与 Sheffield [MS11] 发现，CLE_4 也可以与高斯自由场进行耦合。在 [ASW17] 中，后一种耦合被改用二值集的语言重新表述——二值集 $\mathbf{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda}$ 具有 CLE_4 地毯的分布。

定理10 （ [ASW17]第4节）。 设 Φ 是 D 中的高斯自由场，且$\mathbb{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda}$ 是其层级为-2λ 和 2λ的 ***TVS***。那么， $\mathbb{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda}$ 服从 CLE_4 地毯的分布。此外， 它还满足以下性质：

(1) $\mathbb{A}_{-2\lambda,2\lambda}$ 的环（即 $D\backslash\mathbb{A}_{-2\lambda,2\lambda}$ 的连通分支的边界）是连续的简单环。$\mathbb{A}_{-2\lambda,2\lambda}$ 是所有环的并集的闭包。

[4]“薄”意味着 Φ_A 几乎处处等于一个调和函数，参见 [Sep19]。

(2) $\mathbb{A}_{-2\lambda,2\lambda}$ 的环集合是局部有限的，即对于任意 $\varepsilon > 0$ ，直径大于 ε 的环只有有限多个。*(3)* 几乎必然，$\mathbb{A}_{-2\lambda,2\lambda}$ 中任意两个环都不相交，且没有环与边界相交；此外，几乎必然每个固定点都被某个环包围。*(4)* 给定 $\mathbb{A}_{-2\lambda,2\lambda}$ ，$\mathbb{A}_{-2\lambda,2\lambda}$ 中各环的标签的条件分布是取值为 $\pm 2\lambda$ 且概率相等的独立同分布随机变量。

根据 Sheffield 和 Werner 奠基性的工作，我们还知道，在单连通区域中，CLE_4 环可以用临界布朗环汤（BLS）来描述。

定理11 （ [SW12]中的定理1.6）。设 D 为一个单连通区域，并考虑其中的临界布朗环汤 $\mathcal{L}$ D。那么，CLE_4 环恰好是该布朗环汤中最外层簇的外边界。

该定理与定理10一起推出了 $\mathrm{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda}$ 的以下马尔可夫性质

命题*12*。设 Φ 为单连通区域 D 中的一个高斯自由场，且 $\gamma: [0,1] \mapsto D$ 为一条简单连续曲线，满足 $\gamma(0) \in \partial D$ 且 $\gamma((0,1)) \subseteq D$。定义 γ^{ext} 为 $A_{-2\lambda,2\lambda}$ 中所有与 γ相交的环的并集的闭包。我们有，γ^{ext} 是 Φ的一个 *BTLS*，其中$\Phi_{\gamma^{ext}}$ 可如下刻画：取 $\mathcal{I}$ 为 $A_{-2\lambda,2\lambda}$ 中所有与 γ相交的环 ℓ 的内部的并集，则对于任意 $z \in \mathcal{I}$， $\Phi_{\gamma^{ext}}(z) = \pm 2\lambda$ ；对于所有 $z \in D \backslash \mathcal{I}$， $\Phi_{\gamma^{ext}}(z) = 0$ 。

事实上，定理11的关系还可以进一步加强。首先，在 [QW19] 中，作者证明了可以将临界布朗环绕汤、CLE_4 和零边界高斯自由场耦合在同一个概率空间上，使得CLE_4 如上所述描述最外层BLS簇的外边界，并且高斯自由场的Wick平方等于BLS的重整化占据时间。我们不会直接使用这一论述，不过我们将使用一种特定的加强版本，该版本进一步指出，根据其边界给定的布朗环簇与在 [ALS20a]中定义和构造的首次通过集相对应。

命题13 ([ALS20b]中的推论5.4)。 设 D 是一个单连通区域。给定 $\mathcal{L}_{1/2}^{D}$中一个布朗环汤簇的外边界 ℓ 后，该簇本身的拓扑闭包的分布与$\mathbb{A}_{-2\lambda}$ 内部的一个首次通过集相同，$\mathrm{Int}(L)$ 是被 Υ围住的内部。

最后， [ALS20a] 中观察到，可以通过其Minkowski 内容测度来识别限制在首次通过集上的高斯自由场。

定理 14 （ [ALS20a]中的定理 5.1）。设 D 为单连通区域， Φ 为高斯自由场，并假设$\mathbb{A}_{-a}$ 是层级为 $-a$的首次通过集。按照定义 *5* 中对 $\Phi = \Phi_{\mathbb{A}_{-a}} + \Phi^{\mathbb{A}_{-a}}$ 的记号，我们得到如下结论。测度 $\nu_{\mathbb{A}_{-a}} := \Phi_{\mathbb{A}_{-a}} + a$ 是$\mathbb{A}_{-a}$的可测函数。此外，它与规范 $r \mapsto |\log(r)|^{1/2} r^2$下的闵可夫斯基含量测度成正比。更确切地说，几乎必然地，对于任意在 D中具有紧支撑的连续 f ，

$$\nu_{\mathbb{A}_{-a}} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{2} |\log(r)|^{1/2} \int_D f(z) \mathbf{1}_{d(z, \mathbb{A}_{-a}) \leq r} dz.$$

3. 游程分解的存在性及其性质

本节中，我们证明游程分解的存在性，以及定理 2 中所述的性质。这两者都可以相当直接地由有界

型高斯自由场局部集和首次通过集理论推出，不过在收集并整合相关结果与技巧，以及处理绝对收敛性缺失的问题时，需要格外谨慎。

我们首先对开且强非连通集合上的高斯自由场的 H^{-1} 范数给出一个初等估计，这些集合可以写成直径较小的开区域的不交并。这个引理用于证明，来自小游走的游程分解贡献可以求和。

^引理 15. </style}假设 是一个递减开集序列（不一定连通），其连通分支的最大直径趋于0，当 $\varepsilon \to 0$ 时。考虑$\Phi^{\widehat{D}_n}$ $\widehat{D}_n$ 中的一个高斯自由场。则 $\mathbb{E}\left[\|\Phi^{\widehat{D}_n}\|^2_{H^{-1}(D)}\right] \to 0$，当 $n \to \infty$】

【。

证明。 这由控制收敛定理（$G_{\widehat{D}_n} \le G_D$）和计算得出。

$$\mathbb{E}\left[\|\Phi^{\widehat{D}}\|^2_{H^{-1}(D)}\right] = \iint\limits_{\widehat{D}\times\widehat{D}} G_D(x,y)G_{\widehat{D}}(x,y)dxdy \to 0, \quad \text{as } n \to \infty.$$

□

现在我们可以证明主定理中的存在性部分了。

定理 *1* 中游程分解存在性的证明。我们先考虑定理10给出的高斯自由场、CLE_4 环和独立同分布符号之间的耦合 $(\Phi,\ \mathrm{CLE}_4 = (\ell_k)_{k\ge k},\ (\sigma_k)_{k\ge 1})$。我们可以按环的直径降序排列。注意，该定理意味着几乎处处相等

$$\Phi = \sum_{k\ge 1} 2\lambda\sigma_k 1_{\mathrm{Int}(\ell_k)} + \Phi^{\mathrm{Int}(\ell_k)},$$

其中，给定 CLE_4 环 $(\ell_k)_{k\ge1}$, $\Phi^{\mathrm{Int}(\ell_k)}$ 后，$\mathrm{Int}(\ell_k)$ 内的 $(\ell_k)_{k\ge1}$ 是相互独立的零边界高斯自由场[5] ，而 $(\sigma_k)_{k\ge1}$ 是独立同分布的拉德马赫随机变量。利用引理 15 控制尾部后，我们可以将注意力限制在 $k \in \mathbb{N}$ 的子集 J_ε 上，其中 C_k 的直径至少为 $\varepsilon > 0$。由于 CLE_4 环的集合局部有限， J_ε 是有限的。

现在，考虑 $k \in J_\varepsilon$。在给定 ℓ_k 的条件下， Φ 限制在 $\mathrm{Int}(\ell_k)$ 上的分布与 $2\lambda\sigma_k + \Phi^{\mathrm{Int}\,\ell_k}$ 相同，其中 $\Phi^{\mathrm{Int}(\ell_k)}$ 的条件分布是 $\mathrm{Int}(\ell_k)$ 内高斯自由场的分布。现在我们采样 $A_k := \mathsf{A}_{-2\lambda}(\sigma_k\Phi^{\mathrm{Int}(\ell_k)})$，并定义正测度 $\nu_k := \sigma_k\Phi^{\mathrm{Int}(\ell_k)}{}_{A_k} + 2\lambda$。根据定义 8，该测度支撑在 A_k 上。于是我们有

$$2\lambda\sigma_k + \Phi^{\mathrm{Int}(\ell_k)} = \sigma_k\nu_{\mathbb{A}_{-2\lambda}} + \Phi^{\mathrm{Int}(\ell_k)\setminus\mathbb{A}_{-2k}}.$$

因此，我们得到以下分解

$$\Phi = \sum_{k\in J_\varepsilon}\left(\sigma_k\nu_{A_k} + \Phi^{\mathrm{Int}(\ell_k)\setminus A_k}\right) + \sum_{k'\notin J_\varepsilon}\left(2\lambda\sigma_{k'}1_{\mathrm{Int}\,\ell_{k'}} + \Phi^{\mathrm{Int}(\ell_{k'})}\right),$$

其中，最外层边界 ℓ_k 和 $\ell_{k'}$ 按直径降序排列。现在我们在 $D \setminus \bigcup_{k\in J_\varepsilon} A_k$ 的每个连通分支内迭代这一过程。

为了写出这一迭代构造的结果，我们需要固定一些记号。我们将第 $n-$ 次迭代中直径大于 ε 的最外层环和簇记为 $(\ell_{n,\ k})_{k\in J_{n,\ \varepsilon}}$，$(C_{n,\ k})_{k\in J_{n,\ \varepsilon}}$，并按直径递减排序；相应的符号和闵可夫斯基测度记为 $(\sigma_{n,\ k})_{k\in J_{n,\ \varepsilon}}$，$(\nu_{n,\ k})_{k\in J_{n,\ \varepsilon}}$。

[5]注意 $\Phi^{\mathbb{A}_{-2\lambda},\ 2\lambda} = \sum_k \Phi^{\mathrm{Int}(\ell_k)}$

于是，该迭代给出以下几乎处处相等：

$$\Phi = \sum_{k\in\cup_{n\le N} J_{n,\varepsilon}} \left(\sigma_k \nu_{A_{n,k}} + \Phi^{\mathrm{Int}(\ell_{n,k}\setminus A_{n,k})}\right) + \sum_{\substack{(n',k'):\\ k'\notin J_{n',\varepsilon}\\ n'\le N}} \left(2\lambda\sigma_k 1_{\mathrm{Int}(\ell_k)} + \Phi^{\mathrm{Int}(\ell_{n,k})}\right),$$

其中，第一个有限和中的排序仍按直径从大到小进行。这种写法使我们能够直接应用引理 15，从而得到一个为 $o_\varepsilon(1)$ 阶的误差，与第二项中的迭代层级 N 无关。定理 1 的第 (1) 部分现由几乎处处的鞅收敛定理，以及以下事实得出：对于任意 $\varepsilon > 0$，几乎必然存在一个有限的 N，使得所有直径大于 ε 的环都已被发现（对于单层情形，这只是 CLE_4，的局部有限性；对于嵌套情形，参见例如 [APP23] 中的定理 1.5）。

定理 1 中 (3) 所列的游程簇 $(C_k)_{k\ge1}$ 的性质由构造可知成立。马尔可夫性质可由以下断言推出，并结合上述论证再次说明，我们可以按直径递减的顺序对符号游程求和。

断言 16。 考虑 γ 一条从边界出发的光滑简单路径。令 $(C_k, \ell_k)_{k\in I}$表示满足 $C_k \cap \gamma \neq \emptyset$ 的最外层簇的集合，并将它们的外边界记为ℓ_k。令 I_ε 表示满足 C_k 的直径至少为 ε 的 $k \in I$ 的集合，并定义 $A_\varepsilon = \cup_{k\in I_\varepsilon} C_k \cup \cup_{k\in I} \ell_k$。则 A_ε是一个局部集，且满足 $\phi_{A_\varepsilon} = \sum_{i\in I_\varepsilon} \sigma_i \nu_i + \sum_{i\in I\setminus I_\varepsilon} 2\lambda\sigma_i 1_{z\in \mathrm{Int}\, L_i}$。

证明。该结论直接由命题 12 中对 $\mathsf{A}_{-2\lambda,2\lambda}$ 的马尔可夫性质反复应用，并结合 FPS 的强马尔可夫性质及上述构造得出。

□

□

我们继续讨论游程分解（即定理 2）的更多性质，并假设该分解是唯一的。本质上，这相当于从文献中精心挑选一些有趣的结果。

We a现在我们可以证明定理 2 了，假设唯一性已经成立。

定理 *2* 的证明。性质 (1) 和 (2) 直接由上述构造得出。性质 (3) 则由通过高度为 $\pm2\lambda$ 的首次通过集构造游程簇和游走，以及定理 14 得出。

最外层簇的外边界的分布也可从构造中直接看出。进一步地，通过反复应用定理11，将临界 BLS 簇的外边界与上述构造中的游程簇的外边界对应起来，再应用定理 13，将临界 BLS 簇与上述游程簇对应起来，即可得到它们与二维布朗环汤簇的对应关系。□

为完成本节，我们在此解释如何通过迭代 CLE_4 来观察整个符号簇。此类迭代最初在 [Aïd15] 中被考虑，用于对刘维尔测度进行几何鞅近似；随着 [ALS20a, ALS20b] 的研究，人们逐渐明确了其与布朗环汤簇之间的关系。

注 17。 /通过嵌套 *CLE* 描述符号簇$_4$/ 我们看到，给定一个偏离簇的外边界后，该簇本身服从高度为 2λ 的 *FPS* 分布。不过，也可以通过迭代双值集来获得首次通过集；例如，

参见 [APS20] 中的引理 *2.5* 及其下方的讨论。那里确实解释了，可以通过迭代双值局部集 $\mathbb{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda}$ 直到补集的每个连通分支都具有边界条件 2λ，从而得到高度为 2λ 的 *FPS*。更具体地说，我们先对 $\mathbb{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda}$ 进行采样，然后在每个不带标签 2λ 的环内重复这一构造。这样一来，我们就能在每个点周围观察到一个取值于 $2\lambda\mathbb{Z}$、并在到达 2λ 时停止的随机游走。由于$\mathbb{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda}$ 服从 CLE_4，的分布，且标签 $\pm 2\lambda$ 的符号是独立同分布的，我们便可以通过分枝简单随机游走的结构，利用迭代 CLE_4 来描述整个符号簇。

4. 游程分解的唯一性

在本节中，我们证明定理1的唯一性部分。在本节中，$\hat{}(\nu_k, C_k, \sigma_k)_{k\geq 1}$ 表示在第3节中构造的偏离分解，而$(\hat{}\mu_k, C_k, \hat{}\sigma_k)_{k\geq 1}$是满足定理1的性质、针对同一高斯自由场 Φ的另一种分解。根据共形不变性，我们可以假设在本节中始终处理单位圆盘 $\mathbb{D}$ 。

唯一性证明被分解为以下命题。我们首先证明，上一节构造中的游程簇在某种意义下是极小的：

$\hat{}$ $\hat{}$**命题18.** 几乎必然地，对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 存在 $k(k) \in \mathbb{N}$ 使得 $C_k \subseteq C_{\hat{k}(k)}$.

这已经意味着，几乎必然地，每个游程分解都有一个簇环绕区域中的任意给定点。

然后，我们证明，上文引入的两种分解中相交的符号簇，其符号必须一致。

$\hat{}$**命题 19**。 设 $k(k)$ 如命题 *18* 中所述。那么几乎必然有 $\sigma_k = \hat{}\sigma_{\hat{k}(k)}$。

接下来，我们论证簇之间存在一一对应关系 .

$\hat{}$**命题 20**。 命题 *18* 中的函数 $k \to k(k)$ 几乎必然是单射。

最后，我们通过论证这些簇几乎必然相等，完成命题列表；测度相等性将在定理的证明中得出。

$\hat{}$ $\hat{}$**命题 21**。 对所有 $k \geq 1$，若 $k \to k(k)$ 如上所述，则 $C_k = C_{\hat{k}(k)}$ 几乎必然成立。$\hat{}$此外，函数 $k \to k(k)$ 也几乎必然是满射。

我们现在描述一种利用局部集过程探索偏离簇的方法，随后逐一证明这些命题，并通过完成定理的证明来结束本节。

4.1. 游程簇的局部集探索。在整个证明过程中，我们将使用以下局部集：通过探索线段周围的簇，直至某个停时而得到。

引理 *22.* 设 $\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{D}$ 是一条简单曲线。我们将 $\hat{}\gamma^{exc}(t)$ 定义为所有与 $\gamma([0,t])$ 相交的 $\hat{}C_k$ 的并集，并令 τ 为滤过 $\mathcal{F}_t := \bigvee_{s\leq t} \sigma(\hat{}\gamma^{exc}(s))$ 的一个停时。我们有，$\hat{}\gamma^{exc}(\tau)$ 也是一个局部集，更准确地说，$\Phi = \Phi^{\hat{\gamma}^{exc}(\tau)} + \Phi_{\hat{\gamma}^{exc}(\tau)}$，其中，在给定 $\hat{}\gamma^{exc}(\tau)$ 的条件下，$\Phi^{\hat{\gamma}^{exc}(\tau)}$ 的分布是 $D\backslash\hat{}\gamma^{exc}(\tau)$ 中的零边界高斯自由场，而 $\Phi_{\hat{\gamma}^{exc}(\tau)} = \sum_k \sigma_k \nu_k \mathbf{1}_{C_k \cap \eta \neq \emptyset}$ （这里的和同样按簇直径从大到小排序）。

证明。 由于游程分解的马尔可夫性质，($\hat{\gamma}^{exc}(t)$)$_{t\in[0,1]}$ 是递增局部集族，因此这一强马尔可夫性质可由 [Aru15]中的引理 1.3.13 推出（该论文考虑的是局部集的连续过程，但对于像这里这样的右连续过程，证明同样适用）。□

为了规避一些技术细节，我们必须进一步调整这个局部集，使其也能够只探索与直线相交的游走的一个子集；这样做是为了确保，包含在局部集过程中的任何围绕原点的不可缩简单环，实际上都必须是单个已探索的不可缩簇的子集：

命题 23。 令 γ 为从 $-i$ 到 0的直线段，并将$\hat{\gamma}^{exc}$ 定义为与 γ 相交的所有 C_k 的$\hat{}$闭包的并。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个局部集 χ_ε，具有以下性质：

$\hat{}$*(1)* 它等于 $(C_k)_{k\geq 1}$ 的某些偏离的闭并。$\hat{}$*(2)* 它包含于 $\hat{}\gamma^{exc}$ 中，并包含任何包围 0 且直径大于或等于 ε的簇 C_k 。*(3)* 如果存在一个直径大于 ε 且包围0 的简单环 $\ell \subseteq \chi_\varepsilon$，那么$\hat{}$存在 k 使得 $\ell \subseteq C_k$。*(4)*任何直径至少为 ε 且包围原点的简单环 $\ell \subseteq \mathbb{D}$，要么包含于 χ_ε 中，要么至少接触 $\mathbb{D} \setminus \chi_\varepsilon$ 的两个不同素端。

命题 *23* 的证明。 我们递归地构造集合 χ_ε。首先定义停时

$$\hat{\tau}^0 := \inf\{t \in [0,1] : \exists \delta > 0, \exists \mathcal{O} \text{ c.c. of } B(0,1)\backslash(\hat{\gamma}^{exc}(t) \cup \gamma\,|_{[-i,-\delta i]}) \text{ with } 0 \in O \text{ and } \partial\mathbb{D} \cap \overline{\mathcal{O}} = \emptyset\}.$$

在事件 $\hat{\tau}^0 = 1$ 上，我们只需设定 $\chi_\varepsilon = \hat{\gamma}^{exc}$，根据 $\hat{\tau}^0$ 的定义，所有条件都成立，并且没有簇环绕原点。事实上，我们事后会看到这个事件的概率为零，而且以正概率会有某个簇环绕 0，但目前还不能排除这种情况。

现在我们在事件$\hat{\tau}^0 < 1$上进行工作。然后，$\hat{\gamma}^{exc}(\tau^1)\backslash\bigcup_{t<\tau^1}\hat{\gamma}^{exc}(t)$等于某个$\hat{}$偏离 C_k。如果这个偏离围住0且其直径小于或等于 ε我们就结束探索，并定义 $\chi_\varepsilon = \hat{\gamma}_0^{exc}(\tau^0) := \hat{}\gamma^{exc}(\tau^0)$；根据定义，它满足所需条件。

若上述并非情形，我们将按如下方式继续探索。注意，$\hat{\gamma}^{exc}(\tau^0)$ 是一个局部集，并且游走集合（$\hat{}C_k$：$C_k \cap \hat{}\gamma^{exc}(\tau^0) = \emptyset$）$_{k\geq 1}$ 生成了高斯自由场 $\Phi^{\hat{\gamma}^{exc}(\tau^0)}$的游程分解。设

$$\hat{x} := \sup\{\Im(x) : x \in \hat{\gamma}^{exc}(\tau^1) \cap \gamma\}$$

其中，$\Im(x)$表示 x 的虚部，并考虑直线 γ_1，它从 $-i\hat{}x$ 延伸至$-\varepsilon i$。现在我们如上定义$\hat{}\tau^1$，但让 γ_1 充当 γ ——也就是说，如果出现一个簇，使得$\hat{}\gamma^{exc}(\tau^0)\cup[-i,-\delta i]$ 将原点与区域的边界分隔开来，我们就停止探索，并从虚轴上 $\gamma^{exc}(\tau^0)$的最顶端点开始探索。如果出现一个围绕0 且直径小于或等于 ε 的偏离，或者$\hat{}\tau^1 = 1$，我们也会再次停止。将这段新的探索记为$\hat{}\gamma_1^{exc}(\tau^1)$，我们设 $\chi_\varepsilon = \hat{}\gamma^{exc}(\tau^0) \cup \hat{}\gamma_1^{exc}(\tau^1)$。否则我们继续进行。

若该过程在有限步 j 结束，我们令 $\chi_\varepsilon = \hat{}\gamma^{exc}(\tau^0) \bigcup_{i=1}^{j} \hat{}\gamma_i^{exc}(\tau^i)$，否则我们令 $\chi_\varepsilon = \hat{}\gamma^{exc}(\tau^0) \bigcup_{i\geq 1} \hat{}\gamma_i^{exc}(\tau^i)$。在后一种情形下，我们必有 $\tau_j \to 1$，因为簇的集合是局部有限的。

现在我们需要证明这些集合满足所声称的性质。由构造可知，(1) 和 (2) 显然成立，因为任何包围 0 的簇都必须出现在某个 τ_j with $\tau_j < 1$ 处。

为说明第 (3) 点，我们注意到，根据定义，不可能存在包含在 $\bigcup_{t<\tau_{j+1}} \hat{}\gamma_j^{exc}(t) \backslash \hat{}\gamma_{j-1}^{exc}(\tau_j)$ 中、包围 0 的简单环 ℓ surround- ing 0；此外，$\left(\bigcup_{t<\tau_j+1} \hat{}\gamma_j^{exc}(t)\right) \cap \hat{}\gamma_{j-1}^{exc}(\tau_j)$ 和 $\left(\bigcup_{t<\tau_{j+1}} \hat{}\gamma_j^{exc}(t)\right) \cap \hat{}\gamma_j^{exc}(\tau_{j+1})$ 都恰好只有一个点，因此不可能有简单环连接 $\bigcup_{t<\tau_j+1} \hat{}\gamma_j^{exc}(t)$ 与 $\hat{}\gamma_j^{exc}(\tau_{j+1})$ 或 $\hat{}\gamma_{j-1}^{exc}(\tau_j)$。这就证明了当该过程在有限步骤 j and $\tau_j < 1$ 处结束时，第 (3) 点成立；在另一种情形下，这样的环 ℓ 不存在。

最后一个性质源于这样一个事实：根据构造，χ_ε 要么使用直径小于 ε 的集合将原点与边界分隔开来，要么包含原点。□

4.2.命题的证明。 我们以证明命题 18 开始本小节。

命题 *18* 的证明。只需证明对于任何围绕 0 的簇 C_k，该命题成立。令 γ 为从 $-i$ 到 0 的直线段，并定义 $\hat{}\gamma^{exc}$ 为所有像之前那样与 γ 相交的 C_k 的 $\hat{}$并集的闭包，再考虑引理 23 中的局部集 χ_ε。

现在我们从围绕原点的最外层簇开始递归处理。为此，我们构造$\mathsf{A}_{-2\lambda,2\lambda}$，例如通过 $\mathrm{SLE}_4(-2)$，如 [ASW17], 中那样，并考虑 $k \in \mathbb{N}$，使得 C_k 的外边界位于$\mathsf{A}_{-2\lambda,2\lambda}$ 中并围绕 0（即，C_k 是围绕 0 的最外层偏离）；我们令 $L_k \subseteq \mathsf{A}_{-2\lambda,2\lambda}$ 表示该外边界。我们首先 $\hat{}$ 证明 L_k 包含于某个 $C_{\hat{k}(k)}$ 中。

[ASW17] 的断言17意味着，如果这条水平线环路 L_k 与 $\mathbb{D} \setminus \chi_\varepsilon$相交，它至多会在$\chi_\varepsilon$ 的两个素端处接触（分别位于环路的起点和终点）。此外，还可以进一步加强这一结论。事实上，使用与 [ASW17],的断言17相同的证明，可以看出水平线 L_k 只能在一个素端处接触：同一证明表明，从起点之后开始，环路足够短的初始线段始终只处于一个素端附近。因此，根据命题 23，我们得出结论：在$\hat{}L_k$ 的直径大于 ε这一事件发生时，它必定包含在一个 $C_{\hat{k}(k)}$中。取 $\varepsilon \to 0$后可知，这几乎必然成立。

现在我们证明，C_k 包含于 $C_{\hat{k}(k)}$。回顾第3节中的构造：给定外边界后，通过取包含于包含 0 的 $\mathbb{D}\backslash L_k$ 连通分支内的 $\mathsf{A}_{-2\lambda}$，即可构造簇 C_k。此外，由于 FPS 的唯一性，我们可以使用以下迭代步骤构造 $\mathsf{A}_{-2\lambda}$：要得到 A^k，我们在包含 0 的 $\mathbb{D}\backslash A^{k-1}$ 连通分支内采样 $\mathsf{A}_{-\lambda,\,\lambda}$，除非边界值已经等于 0。现在可以使用[ASW17] 第6节唯一性 中的论证，得出每个 A^k 都包含于 $\hat{}\gamma^{exc}$。事实上，用于构造 $\mathsf{A}_{-\lambda,\,\lambda}$ 的水平线不会自相交；并且，如果它们进入 $\hat{}\gamma^{exc}$ 的任何 $\mathbb{D}\backslash$ 连通分支，就无法触及其边界（见 [ASW17]的引理16）。这意味着它们根本无法进入 $\mathbb{D}\backslash\gamma^{exc}$ 的任何连通分支。由此便证明了围绕 0 的 $\hat{}$ 最外层簇 C_k 包含于 $C_{\hat{k}(k)}$。

ˆ 要证明围绕 0 的下一个簇 $C_{k'}$ 也包含于某个偏离 $C_{\hat{k}(k')}$，只需注意， $\mathbb{D}\backslash C_k$ 中包含 0 的连通分支 $\mathcal{O}$ 上的 Φ 限制，其分布是 $\mathbb{D}\backslash C_k$中的高斯自由场。这说明将 (C_k，ˆμ_k，ˆ σ_k)$_{k\geq 1}$ 限制到$\mathcal{O}$ 上，得到的也是该高斯自由场的游程分解，因此可以重复上述步骤。

□

接下来是命题 19。思路是选取合适的正测试函数，使其支撑集包含于该集合的一个小邻域内，从而恢复簇的符号。

命题 *19* 的证明。与上文类似，只需证明围绕 0 的最外层ˆ簇 C_k 满足该结论。令 γ: $[0,1] \mapsto B$(0,1) 为一条从 $-i$ 到 0 的直线，并令 C_k (或C_k)为围绕 0 的最外层簇。定义

$$\tau := \inf\{t \in [0,1] : C_k \in \gamma^{exc}(t)\}. \tag{4.1}$$

根据引理 22， γ^{exc}(τ) 是一个局部集。此外，根据命题 18，我们知道对于所有$t \in [0,1]$, 都有 γ^{exc}(t) $\subseteq$ˆγ^{exc}(t)。因此，ˆγ^{exc}(τ) 也是一个局部集，并且包含ˆ簇 $C_{\hat{k}(k))}$。注意，根据构造， $\bigcup_{t<\tau} \gamma^{exc}$($t$) 的闭包与 C_k 仅在ˆ ˆ$x = \gamma$(τ)处相交，且 C也如此。

ˆ**命题24。 </style}令** ˆ$x\}$ 为一个具有正直径、且关于ˆ$\gamma^{exc}(\tau)$可测的闭集。考虑(f_n: $\mathbb{D} \mapsto [0,1]$)$_{n\geq 1}$，这是一族光滑函数，它们在 Aˆ上都取值1 ，并且在所有距 C_k至少为 2^{-n} 的点上都等于0 。此外，假设在给定ˆ$\gamma^{exc}(\tau)$的条件下， f_n 与高斯自由场 $\Phi^{\hat{\gamma}^{exc}(\hat{\tau})}$相互独立。

那么，几乎必然地，若ˆ$\nu_k(A) > 0$，则liminf(Φ, f_n) $\geq$ ˆ$\nu_k(A)$ ；并且若ˆ$\nu_k(A) < 0$，则liminf(Φ, f_n) $\leq -$ˆ$\nu_k(A)$。

在证明该命题之前，我们先看看它如何推出这个命题。首先，由于该命题适用于满足定理 1 条件的任意游程分解中的簇，因此它也特别适用于上一节通过 CLE_4 和 FPS 构造的分解；也就是说，在陈述中去掉所有 C 上的帽号即可。

此外，由于 γ^{exc}(τ) 是包含于 ˆγ^{exc}(τ) 中的局部集，它与$_{\Phi^{\hat{\gamma}^{exc}(\tau)}}$条件独立。现在，我们可以将该断言应用于一个闭集 $A \subseteq C_k \setminus \{$ˆ$x\}$，以及仅依赖于 ˆ$\gamma^{exc}$($\tau$)的函数 f_nˆ，并将 $\Phi_{\hat{\gamma}(\tau)}$ 使用两次（一次用于 C_k，一次用于 $C_{\hat{k}(k)}$），从而得到该命题。

剩下要论证这一结论。

命题*24*的证明。我们可以利用 ˆγ^{exc}(τ) 的局部集性质来写出

$$(\Phi, f_n) = (\Phi_{\hat{\gamma}^{exc}(\tau)}, f_n) + (\Phi^{\hat{\gamma}^{exc}(\tau)}, f_n).$$

通过对 ˆγ^{exc}(τ) 进行条件化，我们可以看到($\Phi^{\hat{\gamma}^{exc}(\hat{\tau})}$ f_n) 的方差趋于 0。注意到存在一个 n , 使得 f_n 的支撑集与$\bigcup_{t<\hat{\tau}}$ˆγ^{exc}(t) 的闭包不相交，由此得出结论。□

□

现在我们转向命题 20，并从一个初步引理开始。

引理 25。 对于不包含 $\partial\mathbb{D}$ 的 $\mathbb{D}\backslash C_k$ 的任意连通分支 $\mathcal{O}$，我们有 $\mathcal{O}\cap\hat{}C_{\hat{k}(k)}=\emptyset$。特别地，如果 ℓ_k 是 C_k 的外边界，且 $\mathcal{O}'$ 是内部，$\hat{}$那么 $C_{\hat{k}(k)}\cap\mathcal{O}'=C_k$。

证明。 我们证明包含 0 的连通分支情形。按照命题 19 的证明定义 τ。注意， $\mathcal{O}$ 也是 $\mathbb{D}\backslash\gamma^{exc}(\tau)$ 中包含 0 的连通分支。由于 $C_k\subseteq C_{\hat{k}(k)}$，我们有 $\mathcal{O}\cap\hat{}\gamma^{exc}(\tau)$ 等于 $\mathcal{O}\cap C_{\hat{k}(k)}$。引理 6 (2) 随即推出， $\mathcal{O}\cap\hat{}C_{\hat{k}(k)}$ 是 $\Phi^{\gamma^{exc}(\tau)|_{\mathcal{O}}}$ 的局部集。在给定 γ^{exc} 以及簇 C_k 的符号的条件下（不失一般性，假设其为 $+1$），我们看到，限制在 $\mathcal{O}$ 上时，$(\Phi^{\gamma^{exc}(\tau)})_{\hat{C}_{\hat{k}(k)}}\geq 0$。现在， [ALS20a] 的命题 4.5 的第一部分表明， $\mathcal{O}\cap C_{\hat{k}(k)}$ 必为空。

第二个结论可直接推出。 □

现在我们可以证明命题 20，这或许是四个命题中最棘手的一个。

$\hat{}$命题 *20* 的证明。 根据命题 18，我们知道对每个 C_k，都存在某个 k 使得 $\hat{}C_k\subseteq C_{\hat{k}}$。我们首先证明，即使进一步 $\hat{}$ 条件于事件 $E_{k,k'}$ （即它们不属于 $(C_k)_{k\geq 1}$ 的同一个簇），符号 $\sigma_k,\sigma_{k'}$ 仍然相互独立，也就是说，条件于事件，

$$E_{k,k'}=\{\hat{k}(k)\neq\hat{k}(k')\}.$$

这由以下引理形式化。

引理 26. 我们有

$$\mathbb{E}\left[(\sigma_k\nu_k,1)(\sigma_{k'}\nu_{k'},1)1_{E_{kk'}}\right]=0.$$

$\hat{}$ 利用这一引理，我们可以论证函数 $k\to k(k)$ 是单射。事实上，对于任意点 $z_1,\ldots,z_n$ 以及任意嵌套层级 $j_1,\ldots,j_n$，都存在某个 N，使得围绕这些点、截至这些嵌套层级的所有簇，都包含在按直径大小递减排列的前 N 个簇中。现在我们可以写成

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{N}(\sigma_k\nu_k,1)\right)^2\right]=\sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}\left[(\nu_k,1)^2\right]. \tag{4.2}$$

利用该引理，我们也可以将左端写为：

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{N}(\sigma_k\nu_k,1)\right)^2\right]=\sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}\left[(\nu_k,1)^2\right]+\sum_{k\neq k'}\mathbb{E}\left[(\sigma_k\nu_k,1)(\sigma_{k'}\nu_{k'},1)1_{E^c_{k,k'}}\right].$$

但在事件 $E^c_{(z,j),\ (w,h)}$ 上，我们有 $\sigma_k=\sigma_{k'}$，因此第二个求和中的所有项均为非负数。由 (4.2) 可知，这些项实际上必须都等于零。由于这对任意一组 $z_1,\ldots,z_n$ 及任意嵌套高度都成立，且所有簇都可以如此列出，$\hat{}$ 因此我们得到 $k\to k(k)$ 是单射。

剩下的就是证明该引理。

引理 *26* 的证明。 在此证明中，我们将利用被簇环绕的点及其嵌套层级来表示簇：对于 $z\in\mathbb{D}$ 和 $j\in\mathbb{N}$，我们分别用 $C_{z,j}$ 表示环绕 z的第 $j-$ 个最外层簇。因此，现在我们固定 $z,z'\in\mathbb{D}$ 和

$j, j' \in \mathbb{N}$，并将 $k = k(z, j)$ 和 $k' = k(z', j')$ 分别表示满足 $C_k = C_{z,j}$ 和 $C_{k'} = C_{z',j'}$ 的第 k 个和第 k' 个簇。我们指出，所有簇 C_k 均可通过只考虑二进制 $z \in \mathbb{D}$ 来列出。

我们首先证明当两个簇都是最外层簇时的引理，即当 $j = j' = 1$时。考虑沿一条直线段 γ 从边界到 z、然后ˆ到 w的局部集ˆ$\gamma^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'})$，并在时间 $\tau_z \wedge \tau_w$停止，此时分解中的某个簇（C_k）$_{k\geq 1}$ 围绕 z 或ˆw 出现。不失一般性地，假设出现的是$C_{z,1}$。在该情形下，并且在事件$E_{k,k'}$发生时，我们有$C_{z',1} \cap \hat{C}_{z,1} = \emptyset$。记 $\mathcal{O}'$ 为ˆ $\mathbb{D}\backslash(\gamma^{exc})$中包含 z'的连通分支。进一步地，我们定义 $\mathcal{O}$ 如下。

(1)要么$C_{z,1} \subseteq \hat{C}_{z,1}$，在这种情形下我们定义 $\mathcal{O} = \emptyset$；ˆ (2) 要么 $C_{z,1} \cap C_{z,1} = \emptyset$，在这种情形下，我们将 $\mathcal{O}$ 定义为 $\mathbb{D}\backslash\hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'})$ 的包含 z 的连通分支。

注意，在这两种情形下，$\mathcal{O} \cap \mathcal{O}' = \emptyset$。我们进一步断言如下。

断言 27. 令 A 为最外层簇的最外边界之并集的闭包，其中这些最外层簇属于$(C_k)_{k\geq 1}$，且包含在 $\mathcal{O}$ 或 $\mathcal{O}'$中。则几乎必然，A 限制在 $\mathcal{O}$或 $\mathcal{O}'$ 上时，分别等于$\mathbb{A}_{-2\lambda,2\lambda}$ 在 $\Phi^{\hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'})}$ 上的限制，即限制在 $\mathcal{O}$ 或 $\mathcal{O}'$上。

断言的证明。集合 $A \cup \hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'})$ 是一个局部集，在限制于 $\mathcal{O} \cup \mathcal{O}'$ 时几乎处处等于 $\mathbf{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda} \cup \hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'})$。这是因为根据第3节中的构造，$C_k$ 的最外边界集合等于$\mathbf{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda}$ 的环集合。

进一步地，根据引理 6，我们可知，对于任意 $x \in \mathcal{O}' \cap D\backslash(\mathbf{A}_{-2\lambda,2\lambda} \cup \hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'})$，调和函数 $\Phi_{\hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'})}$ 等于 $\pm 2\lambda$。因此，根据引理 6 的 (2)，我们看到，A 是 $\Phi^{\hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'})}$ 的一个局部集，限制在 $\mathcal{O}'$ 上是薄的（因为作为 $\mathbf{A}_{-2\lambda,2\lambda}$ 中 Φ 的子集，其闵可夫斯基维数小于 2），且其调和函数等于 $\pm 2\lambda$。利用 TVS 的唯一性，即定理 7，我们得出它等于 $\mathbf{A}_{-2\lambda,2\lambda}$ 中 $\Phi^{\hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'})}$ 限制在 $\mathcal{O}'$ 上的集合。同样的论证也适用于 $\mathcal{O}$，以防其非空。□

现在注意到，A 关于 $\Phi^{\hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'})}$ 可测，并且在给定 ˆ$\gamma^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'})$ 的条件下，$\Phi^{\hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'})}$ 与 $\Phi_{\hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'})}$ 独立。因此，如果我们处于情形 (1)

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sigma_k \sigma_{k'}(\nu_k, 1)(\nu_{k'}, 1)\mathbf{1}_{E_{k,k'}}\mathbf{1}_{(1)}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sigma_k(\nu_k, 1)\mathbb{E}\left[\sigma_{k'}(\nu_{k'}, 1) \mid \hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'}), \Phi_{\hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'})}\right]\mathbf{1}_{E_{k,k'}}\mathbf{1}_{(1)}\right] = 0,\end{aligned}$$

其中我们使用了事件 (1)和 $E_{k,\ k'}$ 关于 $\gamma^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'})$ $\Phi_{\Phi^{\hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'})}}$ 是可测的（回顾 $\gamma^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'}) \subseteq \hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'})$），以及前述断言与第3节中分解的构造（$C_k$，$\sigma_k$，$\nu_k$）$_{k\geq 1}$。

对于情形（2），需要进行类似的计算：

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sigma_k \sigma_{k'}(\nu_k, 1)(\nu_{k'}, 1)\mathbf{1}_{E_{k,k'}}\mathbf{1}_{(2)}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sigma_{k'}(\nu_{k'}, 1) \mid \hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'}), \Phi_{\hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'})}\right]\mathbb{E}\left[\sigma_k(\nu_k, 1) \mid \hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'}), \Phi_{\hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'})}\right]\mathbf{1}_{E_{k,k'}}\mathbf{1}_{(2)}\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

这里我们结合使用了上述断言以及这一事实：$\Phi^{\hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \wedge \tau_{z'})}$ 限制在不相交分量 $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ 上时彼此独立。

对于更高层级的簇，我们发现 $\hat{\gamma}^{exc}(\tau_z \vee \tau_{z'})$，即等待两个最外层簇都出现，然后像上面一样，在包含 z 或 z' 的 $\hat{\gamma}^{exc}(\tau_2)$ 补集的连通分支内进行迭代。□

□

最后，通过对局部集作进一步考察，并利用已知的 $\mathsf{A}_{-2\lambda,2\lambda}$ 的闵可夫斯基维数，即可得到命题 21。

^命题 *21* 的证明。我们首先证明 $C_k = C_{\hat{k}(k)}$ 几乎处处成立。根据命题^18，我们有 $C_k \subseteq C_{\hat{k}(k)}$。此外，根据引理 25，我们知道 $C_{\hat{k}(k)} \setminus C_k$ 只能在其边界上与包含 $\partial\mathbb{D}$ 的 $D \setminus C_k$ 的连通分支 $\mathcal{O}$ 相交。

与断言 26的证明一样，所有簇都可以从最外层向内部^围绕二进点 z_k 列出。因此，只需证明 $C_k = C_{\hat{k}(k)}$ 对最外层簇成立，而这又可通过证明以下断言得到：对于沿二进点的任意曲线 γ，从^^ $\partial\mathbb{D}$ 出发到某个 z_k，与 $\mathbb{D}$ 共享边界的 $A = \gamma^{exc}(1)$ 和 $A = \hat{\gamma}^{exc}(1)$ 的补集 $\mathcal{O}, \mathcal{O}$ 几乎必然相同。为说明这一点，注意到二者 A, A都是局部集，并且根据引理 6(2)，^ $A \setminus A$ 也是 $\phi^{\gamma^{exc}(1)}$ 限制在 $\mathcal{O}$上的一个局部集。^此外，由于 $C_k \subseteq C_{\hat{k}(k)}$ 并且根据命题20，函数 $k \to k(k)$ 是单射，我们看到^^$A \setminus A \subseteq \mathsf{A}_{-2\lambda,2\lambda}(\mathbb{D})$。因此， $A \setminus A$ 的闵可夫斯基维数严格小于 2 [ASW17]，并且它是 $\phi^{\mathcal{O}}$的一个薄局部集，与边界相连且具有零边界值。因此，根据 [ASW17] 的引理 9，它几乎必然为空。

^仍需证明函数 $k \to k$ 是满射。这可以通过与上述非常相似的^论证得到。事实上，注意到，任何不等于某个 C_k 的簇 C_{k^*} 都包含于偏离分解构造的某个有限迭代步骤 $(C_k, \nu_k, s_k)_{k\geq 1}$中 C_k 的外边界的闭并中。但这些外边界由$\mathsf{A}_{-2\lambda,2\lambda}$的相互独立副本给出。因此，我们可以重复上述论证，从而得到不存在这类具有正直径的簇。为说明不存在支撑集仅为一点的簇，我们回顾一下：几乎必然地，二维高斯自由场不会在单点上赋予任何质量。

□

4.3. **游程分解唯一性的结论** .

^定理 *1* 的唯一性证明。取 (σ_k, ν_k, C_k) 和$(\hat{\sigma}_k, \hat{\nu}_k, C_k)$ 这两个分解，其中第一个是上一节中构造的分解。由命题 18我们知道，对于每个 k，存在 $k(k)$使得 $C_k = C_{\hat{k}(k)}$，并且根据命题 20、21，该对应是双射。我们还知道符号一致，因此只需证明测度 ν_k 和 $\hat{\nu}_k$ 一致即可。

注意到，对于从边界出发的任意简单曲线 γ 以及任意时刻 t，几乎必然有 $\gamma^{exc}(t) = \hat{\gamma}^{exc}(t)$。但现在注意，根据马尔可夫分解，我们可以得出，几乎必然地，对于沿二进有理点的任意曲线 γ 以及$H^{-1-\varepsilon}(\mathbb{D})$中的任意有理时刻

$$\phi_{\gamma^{exc}(t)} = \hat{\phi}_{\gamma^{exc}(t)}.$$

但是，局部集过程 $\gamma^{exc}(t)$ 是右连续的；对于任意满足 D_n with$\bigcap D_n = D$ 的递减集合， Φ^{D_n} 也是连续的。因此我们得出，事实上对所有时刻 $t \in [0,1]$，都有

that

$$\phi_{\gamma^{exc}(t)} = \hat{\phi}_{\gamma^{exc}(t)}$$

特别地，在任一直径至少为 ε 的簇出现时也成立。由此可知，事实上对所有 $k \geq 1$，都有 $\nu_k = \hat{\nu}_{\hat{k}(k)}$，定理得证。

□

5. 从度量图收敛

本节中，我们证明度量图高斯自由场的偏离分解收敛到连续高斯自由场的偏离分解。我们将采用与第4.1节 [ALS20b],相同的设定，只是区域 D 将始终是单连通的。

对于所有 $n \geq 1$，令 $\tilde{\phi}_n$ 为有界图 $D_n \subseteq (2^{-n}\mathbb{Z})^2$上的度量图高斯自由场。我们将 $(\widetilde{C}_k^{(n)}, \tilde{\sigma}_k^{(n)}, \tilde{\nu}_k^{(n)})_{k\geq 1}$ 定义为 $\tilde{\phi}_n$ 的符号簇序列，并记录各自的符号和符号游程，按簇直径的大小降序排列。在这里，符号游程是指高斯自由场在簇 $\widetilde{C}_k^{(n)}$ 上的限制的绝对值，即

$$\tilde{\nu}_k^{(n)}(dx) = \tilde{\sigma}_k^{(n)} \tilde{\phi}_n(x) \mathbf{1}_{x \in \widetilde{C}_k^{(n)}} dx.$$

现在，我们取一列（度量）图 $D_n \subseteq (2^{-n}\mathbb{Z})^2$，它们收敛到一个有界单连通区域 $D \subseteq \mathbb{C}$；这里的收敛是指它们在某个大盒子内的补集 $[-C, C]^2 \supseteq D$ 按豪斯多夫拓扑收敛（如 [ALS20b] 的第 4.1.1 节所述）。

本节的主要结果如下。

定理 28（偏离分解的收敛）。令 ϕ_n 为定义在 D_n 上的一列零边界度量图高斯自由场，并与高斯自由场 Φ 耦合，使得几乎必然有 $\phi_n \to \Phi$在，例如，$H^{-\varepsilon}$中。

那么，对于每个 $k > 0$、$\widetilde{C}_k^{(n)} \to C_k$、$\tilde{\nu}_k^{(n)} \to \nu_k$ 和 $\tilde{\sigma}_k^{(n)} \to \sigma$ 作为 $n \to \infty$，其中，对于第一个，收敛依概率且在豪斯多夫拓扑中；而对于第一个和第二个连通分支，收敛在测度弱拓扑中，分别如此。

概括而言，可以说，该定理是通过将针对每个元素的不同收敛结果拼接起来而得到的，而所有这些结果在文献中都已有现成论述。然而，这种拼接确实需要谨慎处理，主要是为了排除微观簇可能带来的不同伪贡献。请注意，我们不会利用该定理的唯一性断言来确定极限；相反，我们将逐一识别游程簇、符号和测度。

我们从一个确保测度序列 $(\tilde{\nu}_k^{(n)})_{n\geq 0}$紧性的引理开始，并借此看到，在无穷小游程簇的作用下，极限中不会产生虚假的额外质量。

引理 29. 设 $(\widetilde{C}_k^{(n)}, \tilde{\sigma}_k^{(n)}, \tilde{\nu}_k^{(n)})$ 为度量图高斯自由场 $\tilde{\phi}_n$ 的一种游程分解，并设 J 为任意（确定性）指标集。那么对于任意 $q \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}\left[(\tilde{\phi}_n, f)^{2q}\right] \geq \sum_{k\in J} \mathbb{E}\left[(\tilde{\nu}_k^{(n)}, f)^{2q}\right] + \mathbb{E}\left[(\mathbf{1}_{\widetilde{D}_n \setminus \cup_{k\in J} \widetilde{C}_k^{(n)}} \tilde{\phi}_n, f)^{2q}\right]. \tag{5.1}$$

and

$$\mathbb{E}\left[(\tilde{\phi}_n, f)^{2}\right] = \sum_{k\in J} \mathbb{E}\left[(\tilde{\nu}_k^{(n)}, f)^{2}\right] + \mathbb{E}\left[(\mathbf{1}_{\widetilde{D}_n \setminus \cup_{k\in J} \widetilde{C}_k^{(n)}} \tilde{\phi}_n, f)^{2}\right] \tag{5.2}$$

证明。 对于不等式 (5.1)，只需证明它对任意有限指标集和任意 $q \geq 1$ 都成立，然后无限指标集的情形由控制收敛得出。我们将其分解。

$$\tilde{\phi}_n = \sum_{k\in J} \tilde{\sigma}_k^{(n)} \tilde{\nu}_k^{(n)} + \mathbf{1}_{\widetilde{D}_n \setminus \cup_{k\in J} \widetilde{C}_k^{(n)}} \tilde{\phi}_n.$$

Th我们将 $\mathbb{E}[(\tilde{\phi}_n, f)^{2q}]$ 写成三类项之和，第一类是 g

$$\sum_{k\in J} \mathbb{E}[(\tilde{\nu}_k^{(n)}, f)^{2q}] + \mathbb{E}[(\mathbf{1}_{\widetilde{D}_n \setminus \cup_{k\in J} \widetilde{C}_k^{(n)}} \tilde{\phi}_n, f)^{2q}],$$

第二类项是二项式系数乘以

$$\mathbb{E}[(\tilde{\sigma}_k^{(n)} \tilde{\nu}_k^{(n)}, f)^p (\mathbf{1}_{\widetilde{D}_n \setminus \cup_{k\in J} \widetilde{C}_k^{(n)}} \tilde{\phi}_n, f)^{2q-p}]$$

最后一类项是常数乘以

$$\mathbb{E}[(\tilde{\sigma}_k^{(n)} \tilde{\nu}_k^{(n)}, f)^p (\tilde{\sigma}_j^{(n)} \tilde{\nu}_j^{(n)}, f)^{2q-p}],$$

其中 $k \neq j$。

现在，当 p 为偶数时，我们可以将第二类和第三类项的下界取为 0。然而，我们声称，当 p 为奇数时，由于符号对称性，它们实际上都等于 0。事实上，在给定 $(\widetilde{C}_k^{(n)}, \tilde{\sigma}_k^{(n)}, \tilde{\nu}_k^{(n)})_{k\in J}$ 的条件下，场 $\mathbf{1}_{\widetilde{D}_n \setminus \cup_{k\in J} \widetilde{C}_k^{(n)}} \tilde{\phi}_n$ 与其加法逆元具有相同的分布。因此，对于奇数 p

$$\sum_{k\in J} \mathbb{E}[(\tilde{\sigma}_k^{(n)} \tilde{\nu}_k^{(n)}, f)^p (\mathbf{1}_{\widetilde{D}_n \setminus \cup_{k\in J} \widetilde{C}_k^{(n)}} \tilde{\phi}_n, f)^{2q-p}] = 0.$$

但所有符号 $\tilde{\sigma}_k^{(n)}$ 也是独立同分布的拉德马赫随机变量，因此对于所有 $j \neq k \in J$ 也有

$$\mathbb{E}[(\tilde{\sigma}_k^{(n)} \tilde{\nu}_k^{(n)}, f)^p (\tilde{\sigma}_j^{(n)} \tilde{\nu}_j^{(n)}, f)^{2q-p}] = 0$$

由此我们得出第一部分结论。对于有限指标集，第二部分可由上述计算推出；与情形 $q = 1$ 一样，不存在指数为偶数的交叉项。对于无穷和，我们可以使用控制收敛，这由例如（5.1）中的情形 $q = 2$ 保证。□

定理 *28* 的证明。我们首先注意到，由于游程分解的唯一性以及 [ALS20b]，中的引理 4.10，我们只需证明 $(\tilde{\phi}_n, (\widetilde{C}_k^{(n)}, \tilde{\sigma}_k^{(n)}, \tilde{\nu}_k^{(n)})_k)$ 的分布收敛，当 $n \to \infty$ 时。

现在，根据假设，$\tilde{\phi}_n$ 是紧的；对于任意 k，$\widetilde{C}_k^{(n)}$ 作为紧致区域中的随机闭集是紧的，$\tilde{\sigma}_k^{(n)}$ 作为 ± 1 值随机变量是紧的，最后，根据引理 29 中的第一个等式，$\tilde{\nu}_k^{(n)}$ 是紧的。因此，利用 Tychonoff 定理，我们看到 $(\tilde{\phi}_n, (\widetilde{C}_k^{(n)}, \tilde{\sigma}_k^{(n)}, \tilde{\nu}_k^{(n)})_k)$ 是紧的，因此可以取其一个子序列（仍记作原记号），并利用 Skorokhod 表示定理得到几乎必然收敛

$$(\tilde{\phi}_n, (\widetilde{C}_k^{(n)}, \tilde{\sigma}_k^{(n)}, \tilde{\nu}_k^{(n)})_k) \to (\hat{\Phi}, (\hat{C}_k, \hat{\sigma}_k, \hat{\nu}_k)_k).$$

ˆ ˆ 我们只需将 $(\Phi, (C_k, \hat{\sigma}_k, \hat{\nu}_k)_k)$ 识别为游程分解的元素。ˆ 首先，显然 $(\hat{\sigma}_k)_k$ 是独立同分布的拉德马赫随机变量，而 Φ 是 D 中的高斯自由场。

首先注意，如果我们只研究最外层簇 $\mathring{C}^{(n)}$ k := $\hat{C}_k^{(n)}$ (k)（即不被其他任何簇包围的簇），那么这些最外层簇的外边界

会收敛到 CLE_4 的环，具体而言， m个最大的最外层离散簇的外边界会收敛到 m 个最大的连续簇的外边界；此外，所有最外层簇边界的闭并会收敛到 CLE_4 。这些结论可由 [Lup18] 的工作推出。更准确地说，该论文的主要结论不能直接推出这些说法——它并未排除细长丝状簇，而这些簇的极限可能位于 CLE 套中的内部；不过，进一步论证后，仍可用相同的方法推导出这些结论。相关背景可参见 [ALS20b] 中的引理 4.13，其中也需要类似的谨慎处理；或参见 [QW19] 中引理 6 的证明。

现在请注意，一旦我们设法确定了最外层簇、它们的符号和测度，就可以递归地继续。事实上，由于最外层簇的并集之闭包 $\mathring{C}^{(n)}{}_{\mathbf{k}}$ 对所有 n 都是一个局部集，我们得出，在极限情况下，给定所有最外层簇并集的闭包$\mathring{\wedge}\mathring{}\, C_{\mathbf{k}}$， Φ 限制在 $D\setminus(\cup_{\mathbf{k}}C_{\mathbf{k}})$上的条件分布是$\mathring{}\, D\setminus(\cup_{\mathbf{k}}C_{\mathbf{k}})$中的零边界高斯自由场。因此我们看到，一旦能够处理最外层偏离，收敛性也适用于被有限多个偏离包围的偏离。由于对于任意 $\varepsilon>0$ ，直径大于 ε 的偏离数量几乎必然有限，我们便将命题归结为证明最外层簇的收敛性。以下断言给出了这一收敛性。

断言 30. 取 $\mathbb{A}\ \ell_{-2\lambda,2\lambda}$ 的任意一个环路，并考虑簇序列 $\mathring{C}^{(n)}{}_{\mathbf{k}}$ ，其外边界收敛到 ℓ。则 $\mathring{C}^{(n)}{}_{\mathbf{k}}$ 收敛到 ℓ 与由高斯自由场 $\Phi^{\mathbb{A}_{-2\lambda,2\lambda}}$ 在 $\mathcal{O}$（ ℓ 的内部）上限制所得的 *FPS* $\mathbb{A}_{\pm2\lambda}$ 的并集。此外， $\mathring{\nu}^{(n)}{}_{\mathbf{k}}$ 收敛到与该 *FPS* 相关联的测度 $\nu_{\mathbb{A}_{\pm2\lambda}}$ 。

命题 *30* 的证明。 首先，我们注意到所有最外层簇 $\mathring{C}^{(n)}{}_{\mathbf{k}}$ 的并集是 $\tilde{}$ $\mathring{}$ $\hat{}$ 的一个局部集，因此其极限 $C_{\mathbf{k}}$ 根据引理6是 Φ 的一个局部集。进一步地，将其限制在$\mathring{}$最外层边界 ℓ 的内部 $\mathcal{O}$ 以及簇 $C_{\mathbf{k}}$上时，该极限是一个满足 $\pm2\lambda$ 水平 FPS 性质的局部集（对于 GFF $\Phi^{\mathbb{A}_{-2\lambda,2\lambda}}$ 限制在 $\mathcal{O}$ 上）。因此，根据FPS的唯一性，即定理 9，它等于该集合。特别地，这意味着$\mathring{C}_{\mathbf{k}}$， $\mathring{C}^{(n)}{}_{\mathbf{k}}$ 的极限，等于某个最外层簇 $C_{k(\mathbf{k})}$。

为了识别极限游程测度，我们将采用与第 4 节类似的策略，通过排除额外质量的论证，推导游程簇与游程测度相等。其他收敛问题由引理 29 处理。下面详细说明。

$\mathring{}$首先，由于最外层簇的其他子序列极限 $C_{\mathbf{k}}$ 无法与 $\mathcal{O}$相交，根据关于 FPS $\mathrm{A}_{\pm2\lambda}$ 在 $\mathcal{O}$ 中的马尔可夫分解，我们得出

$$\mathring{\nu}_{\mathbf{k}}:=\lim_{n\to+\infty}\nu_{\mathbf{k}}^{(n)}\geq\nu_{k(\mathbf{k})} \tag{5.3}$$

以正测度表示。

此外，还需要证明子序列极限簇上不存在额外的质量，也就是说，这些质量不可能在极限中被某些无穷小偏离所抵消。

要看出这一点，请回忆最外层簇的并集的闭包$\mathring{C}_{\mathbf{k}}$是一个局部集。此外，从这个并集的闭包看出，该局部集等于通过在每个簇内取 CLE_4 和高度为 $\pm2\lambda$ 的首次通过集而得到的局部集；也就是说，它等于最外层簇 $C_{\mathbf{k}}$ 的闭并$\mathring{}$。我们将此集合记为 A。

°根据引理 29，我们可以将对最外层游走簇 $C_{\mathbf{k}}$的求和写为 ，

$$\mathbb{E}\left[(\Phi,1)^2)\right]=\sum_{\mathbf{k}}\mathbb{E}\left[(\nu_{k(\mathbf{k})},1)^2\right]+\mathbb{E}\left[(\Phi^A,1)^2\right].$$

另一方面，根据上述断言以及引理 29 的第一点，支配收敛定理给出，对于任意 $\mathbf{k}$

$$\mathbb{E}\left[(\mathring{\nu}_{\mathbf{k}}^{(n)},1)^2\right]\to\mathbb{E}\left[(\mathring{\nu}_{\mathbf{k}},1)^2\right].$$

同样，根据 [ALS20b]中的推论 4.5以及引理 29 的第 1 部分，我们还有$\mathbb{E}\left[(\tilde{\phi}_n^{A^{(n)}},1)^2\right]\to\mathbb{E}\left[(\Phi^A,1)^2\right]$，其中 $A^{(n)}$ 表示由$\mathring{C}^{(n)}{}_{\mathbf{k}}$ 的闭并给出的局部集。因此我们也有

$$\mathbb{E}\left[(\Phi,1)^2)\right]=\sum_{\mathbf{k}}\mathbb{E}\left[(\mathring{\nu}_{\mathbf{k}},1)^2\right]+\mathbb{E}\left[(\Phi^A,1)^2\right].$$

但现在回想一下 $\mathring{\nu}_{\mathbf{k}}\geq\nu_{k(\mathbf{k})}$，由此可见，事实上正测度的簇必须与之构成一一对应关系，并且式 (5.3) 必须成立。

□

□

6.进一步评论与猜想：穿越概率、作为自旋模型极限的二维连续高斯自由场以及离散高斯自由场的游程分解

6.1. 符号游程穿越概率的一致连续性。首先，我们讨论度量图游程簇的环域穿越概率关于尺度的一致连续性。 [6] 这证实了 [DW20]中的注2所作的假设。对于首次通过集， [ALS20b]的推论5.1证明了一个类似结论。

˜设置如下。考虑 $D=(-1,1)^2,$ ，并令 D_n 为 D 在方格晶格 $\frac{1}{n}\mathbb{Z}^2$ 中的度量图近似。令 $\tilde{\phi}_n$ 为 $\widetilde{D}_n$ 上具有 0 边界条件的度量图高斯自由场。对于 $a\in(0,1)$，令 S_a 表示方形轮廓 $S_a=\partial((-a,a)^2)$。对于 $a\leq b\in(0,1)$，令 $p_n(a,b)$ 表示 ϕ_n 存在一个从 S_a 穿越到 S_b 的符号簇的概率，即穿越环域 $[-b,b]^2\setminus(-a,a)^2$ 的概率。

注意到 $p_n(a,\ a)=1$，并且对于固定的 n，函数 $p_n(a,\ b)$ 在 $\{a,b\in(0,\ 1)^2$ 上连续：$a\leq b\}$。事实上，这是因为对于固定的 $a\in(0,\ 1)$，几乎必然地，若某个簇与 S_a 相交，则它也与 $(-a,\ a)^2$ 相交，且 $D\setminus[-a,a]^2$。然而，我们关注的是 $(a,\ b)\ \mapsto\ p_n(a,\ b)$ 关于 $n\geq1$ 的一致连续性。我们将根据游程簇的收敛性以及连续情形下的连续性推导出这一点。

进一步地，记 $p(a,\ b)$ 为连续高斯自由场 Φ 在 D 上存在一个游程簇，该游程簇从 S_a 穿越到 S_b 的概率，并注意到同样有 $p(a,\ a)=1$。

命题 31 （穿越概率的一致连续性）。 以下结论成立。

(1) 函数 $p(a,b)$ 是连续的，其定义域为 $\{a,b\in(0,1)^2\colon\ a\leq b\}$.

[6]谨向提出这个问题的丁健致以问候。

(2) 序列 $(p_n(a,b))_{n\geq 1}$ 在$\{a,b\in(0,1)^2$ 的紧子集上一致收敛到 $(p(a,b))_{n\geq 1}$： $a\leq b\}$。*(3)* 特别地，函数 $(a,b)\ \mapsto p_n(a,b)$ 关于 $n\geq 1$ 在$(0,1)^2$的任意紧子集上一致连续。

注32。注意到 $p(a,b)$ 在 $\{a,b\in[0,1]^2$： $a\leq b\}$上并不连续，也就是说，如果允许 $a=0$ 或 $b=1$。例如，

$$\lim_{a\to 1} p(a,1)=0\neq\lim_{a\to 1} p(a,a)=1.$$

现在我们证明该命题。

命题 *31* 的证明。第 (3) 点直接由 (1) 和 (2) 得出；而第 (2) 点则由簇的收敛得出；参见定理 28。

最后，通过结合以下三个事实即可得到（1）。

- 首先，给定一个固定的 $a\in(0,1)$，几乎必然存在一个与S_a相交的 Φ 的游程簇。例如，这源于这样一个事实：几乎必然，布朗环汤中存在一个与 S_a相交的布朗环。
- 其次，给定一个固定的 $a\in(0,1)$，几乎必然地，若一个游程簇与 S_a 相交，那么它也与 $(-a,a)^2$ 以及 $D\setminus[-a,a]^2$相交，也就是说，没有游程簇与 S_a 相切。这就是下面的引理 33。
- 第三，对于每个 $\varepsilon>0$，几乎必然只有有限多个直径大于 ε 的游程集- 这就是定理 1 中的局部有限性条件。

□

还需陈述并证明上述引理 33。

引理 33 (游程簇的非相切性). 固定 $a\in(0,1)$. 则

$\mathbb{P}(\exists C\ \Phi, C\cap S_a\neq\emptyset$ 的偏离簇，但 $C\cap(-a,a)^2=\emptyset$ 或 $C\cap(D\setminus[-a,a]^2)=\emptyset)=0.$

证明。记

$$\begin{aligned} p_{\text{ext}}(a) &= \mathbb{P}(\exists C \text{ excursion cluster of } \Phi, C\cap S_a\neq\emptyset, C\cap(-a,a)^2=\emptyset),\\ p_{\text{int}}(a) &= \mathbb{P}(\exists C \text{ excursion cluster of } \Phi, C\cap S_a\neq\emptyset, C\cap(D\setminus[-a,a]^2)=\emptyset). \end{aligned}$$

我们声称，满足 $p_{\text{ext}}(a)>0$ or$p_{\text{int}}(a)>0$ 的 $a\in(0,1)$ 至多可数。事实上，令 $(C_k)_{k\geq 1}$ 为游程簇的一个枚举，例如按直径递减排列。记

$$\underline{a}_k=\sup\{a\in(0,1): C_k\cap S_a\neq\emptyset\},\qquad \overline{a}_k=\inf\{a\in(0,1): C_k\cap S_a\neq\emptyset\}.$$

若 $p_{\text{ext}}(a)>0$，分别地， $p_{\text{int}}(a)>0$，则 a 是 a_k（分别为 a_k）的分布的一个原子；对至少一个 $k\geq 1$ 而言成立。概率分布的原子数至多是可数的。

我们进一步声称，函数 $a\mapsto p_{\text{ext}}(a)$和 $a\mapsto p_{\text{int}}(a)$都是非递减的。因此，对于集合 $p_{\text{ext}}^{-1}((0,1])$ 和 $p^{-1}{}_{\text{int}}((0,1])$ 而言，至多可数的唯一可能情况是它们为空。

首先，我们来解释 $a\mapsto p_{\text{int}}(a)$ 的单调性。令 $a<b\in(0,1)$。令 Φ_2 为较小正方形 $(-a/b, a/b)^2$, 上的连续高斯自由场，满足 0 边界条件。通过在D中使用同一个布朗环汤，可以自然地耦合 Φ 和 Φ_2 的越界集。将该布朗环汤限制到 $(-a/b,a/b)^2$ ，所得仍是一个布朗环汤，位于

$(-a/b, a/b)^2$。在这种耦合中，Φ 的一个包含于 $(-a/b, a/b)^2$ 中的越界集也是 Φ_2 的越界集。因此，

$$p_{\text{int}}(a) \le \mathbb{P}(\exists C \text{ excursion cluster of } \Phi_2, C \cap S_a \neq \emptyset, C \cap ((-a/b, a/b)^2 \setminus [-a, a]^2) = \emptyset).$$

但是，根据尺度变换，上面的右端等于 $p_{\text{int}}(b)$。

$a \mapsto p_{\text{ext}}(a)$ 的单调性证明稍微复杂一些。令 $a < b \in (0,1)$。令Φ_3 为较大正方形 $(-b/a, b/a)^2$, 上的连续高斯自由场，并取零边界条件。我们使用 $(-b/a, b/a)^2$上的同一个布朗环汤，将 Φ 和 Φ_3 的偏离簇耦合起来。若 C是 Φ_3的一个越界集，满足 $C \cap S_b \neq \emptyset$ 和 $C \cap (-b, b)^2 = \emptyset$，那么移除与 $(-b/a, b/a)^2 \setminus D$相交的布朗环后，簇 C会分裂为可数多个簇 $(C'_j)_{j \ge 1}$，其中每个 C'_j 都是 Φ的一个偏离簇。由于没有布朗环与 S_b相切，且 Φ的偏离簇局部有限，因此至少有一个 C'_j 与 S_b相交，因而也与 S_b相切。因此，

$$p_{\text{ext}}(b) \ge \mathbb{P}(\exists C \text{ excursion cluster of } \Phi_3, C \cap S_b \neq \emptyset, C \cap [-b, b]^2 = \emptyset).$$

通过缩放，上面的右端等于 $p_{\text{ext}}(a)$。 □

6.2. **二维连续高斯自由场作为自旋模型的极限及相应的 FK 表示**。回顾伊辛模型及其 FK 表示之间的对应关系：

定理34 (FK 表示的伊辛模型)。 设 $(\sigma_v)_{v \in V}$ 是定义在图 $G = (V, E)$ 上的自由边界伊辛模型，其逆温度为 β，边权为 $(J_e)_{e \in E}$。

那么其 *FK* 表示是键渗流配置 $(\omega_e)_{e \in E}$，定义在 G 上，并与其定义在同一概率空间上，满足以下性质，其中 $p_e = 1 - e^{-2\beta J_e}$:

(1) 其边缘分布由如下分布的键渗流给出：

$$\mathbb{P}(\omega_e) \propto \Pi_{e \in E} p_e^{\omega_e} (1 - p_e)^{1 - \omega_e} 2^{\#clusters}$$

(2) 给定$(\sigma_v)_{v \in V}$时，其条件分布通过为每条边独立选取一个参数为 $Ber(p_e)$ 的随机变量，并且当且仅当 $\sigma_v = \sigma_w$ 且该随机变量等于1时令 $\omega_e = 1$ 来得到。

现在，考虑图 $G = (V, E)$上的零边界离散高斯自由场（离散高斯自由场） ϕ^G，并令 G_i 为由内部顶点诱导的子图。可以将其符号场 $\sigma^G(v) := \text{sign}(\phi^G(x))$ 解释为定义在图 G_i 上的温度为 1的随机场伊辛模型，其随机耦合常数由 $J_e = |\phi^G(v)\phi^G(w)|$ 给出，其中任意边 $e = (v, w)$均如此。 [LW16] 的一个精彩观察是，自然相关的度量图高斯自由场 $\tilde{\phi}^G$的符号簇构成了该随机场伊辛模型的 FK 表示：

命题 35 （通过度量图高斯自由场的 FK 表示）。 考虑图 $G =$ 上的零边界离散高斯自由场 ϕ^G（V, E），以及通过在每条边（v, w）上使用时间长度为 1 且端点为 ϕ^G（v）和 ϕ^G（w）的独立布朗桥，将 ϕ^G 外推到 G 的线图 $\tilde{G}$ 上所得到的零边界度量图高斯自由场 $\tilde{\phi}^G$ 。

现在考虑键渗流$(\omega_e)_{e \in E_i}$，在 G_i 上，其中我们规定 $\omega_e = 1$ 当且仅当 $\tilde{\phi}^G$在边 e上始终具有相同的符号。然后， ω_e 构成随机场伊辛模型的*FK* 表示符号$(\tilde{\phi}^G)$。

回顾定理3，定义在单连通域的格点逼近上的度量图高斯自由场 ϕ_n 的符号簇 D 并收敛到一个连续

高斯自由场 Φ^D，收敛到我们对 Φ^D 的游程分解。结合下面的命题，这解释了为什么称我们的游程分解为连续高斯自由场的FK表示是合理的。值得注意的是，有趣的是，这个 FK 表示在离散情形下并不是关于该场可测的，但在极限中却变得可测！

命题 36 (连续高斯自由场作为随机场伊辛模型的极限)。 考虑一列晶格图 $D_n \subseteq (2^{-n}\mathbb{Z})^2$，它们收敛到一个有界单连通区域 $D \subseteq \mathbb{C}$；这里的收敛是指，在某个大盒子 $[-C,C]^2 \supseteq D$内，它们的补集在 ***Hausdorff*** 拓扑意义下收敛。

令 ϕ_n 为定义在 D_n 上的零边界离散高斯自由场，设 $c_1 := \sqrt{\pi/2}$ 并定义 $s_n(v) := c_1\sqrt{\mathbb{E}[\phi_n(v)^2]}$符号 ϕ_n 为定义在 D_n 内部的离散高斯自由场的符号。于是，对于 D上任意连续、有界且具有紧支撑的 f，若将其到 D_n 内部的限制记为 f_n，则当 $n \to \infty$ 时，

$$\mathbb{E}\left[(\phi_n - s_n, f_n)^2\right] \to 0.$$

这里的 $(f_n, g_n) := n^{-2}\sum_{v\in D_n} f_n(v)g_n(v)$ 被选取为使其收敛于连续内积。

此外，如果 ϕ 是 D 上的零边界高斯自由场，并且在 $H^{-1-\varepsilon}$ 中以概率收敛到 $\phi_n \to \phi^D$ (D)（经过适当插值），那么 $s_n \to \phi^D$ 也在 $H^{-1-\varepsilon}(D)$ 中以概率收敛。

这遵循　这可由一个简单的计算得出，该计算基于以下初等引理:

引理 37. 令 X、Y 为方差为 1 且相关系数为 $\rho \ll 1$ 的联合高斯变量。则$\mathbb{E}$(符号(X) 符号(Y))$= \frac{2}{\pi}\rho + O(\rho^2)$ 以及 $\mathbb{E}(X$符号(Y)$) = \sqrt{\frac{2}{\pi}\rho + O(\rho^2)}$。

证明。 (X，Y)在 (x，y) 处的密度为

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-\rho xy)\right).$$

对于 $\rho \ll 1$，我们可以将其写成独立向量的一个扰动。

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2)\right)(1+\rho xy+O(\rho^2x^2y^2)).$$

现在我们可以直接计算

$$\mathbb{E}(\operatorname{sign}(X)\operatorname{sign}(Y)) = \rho\mathbb{E}(XY/|XY|) = \rho\mathbb{E}(|\tilde{X}|)^2 + O(\rho^2),$$

其中 $\tilde{X}$ 是方差为 $1-\rho^2$ 的高斯变量。这就得到了我们所需的结果。

$$\mathbb{E}(\operatorname{sign}(X)\operatorname{sign}(Y)) = \frac{2}{\pi}\rho + O(\rho^2).$$

另一个计算也可以类似地完成，或者将 $Y = \rho X + Z$ 写成 Z，其中方差为 $1-\rho^2$的高斯变量彼此独立。□

事实上，可以利用联合高斯变量符号相关性的显式公式来避免使用上述引理：$\mathbb{E}$(sign(X) sign(Y)) $= \frac{2}{\pi}\arcsin(\rho)$，其中记号与引理中的相同。不过，该引理也推广到了向量值高斯自由场的角度情形，见证明之后的注释。

*Pr*命题 *36* 的证明。我们首先注意到， $\mathbb{E}\left[(\phi_n - s_n,\ f_n)^2\right]$ 等于 t o

$$n^{-2}\sum_{v,w\in D_n} f_n(v)f_n(w)\mathbb{E}\left[\phi_n(v)\phi_n(w) + s_n(v)s_n(w) - \phi_n(v)s_n(w) - \phi_n(w)s_n(v)\right].$$

但现在，$(\phi_n(v)\ \phi_n(w))$ 是一个方差为 $\mathbb{E}\left[\phi_n(v)^2\right]$，$\mathbb{E}\left[\phi_n(w)^2\right]$ 且相关性 $\mathbb{E}\left[\phi_n(v)\phi_n(w)\right]$ 由零边界格林函数给出的高斯向量。特别地，由于前者按 $c\log\ N$ 增长，而后者对任意 $\|v-w\|_2 > \varepsilon$ 均保持有界，我们可以对近对角区域 $\|v-w\|_2 \le \varepsilon$ 之外的部分应用引理，从而得到 $\|v-w\|_2 \ge \varepsilon$ 上的求和有界于 $c_\varepsilon(\log\ n)^{-1}$，因此当 $n\to\infty$时收敛于零。对角部分通过直接计算可得其上界为 $O(\varepsilon^2\log|\varepsilon|)$。由于这对任意 $\varepsilon > 0$都成立，我们便得到了第一个结论。

为了证明命题的最后一部分，注意到我们也可以类似地对在正方形上足够平滑地插值的 s_n，给出其 H^{-1}-范数的上界（例如，沿边线性插值，并在正方形内部作调和插值）。确实，将此插值记为 $\tilde{s}_n$，其期望平方 H^{-1}-范数为

$$\int_D\int_D G(z,w)\mathbb{E}[\tilde{s}_n(z)\tilde{s}_n(w)]dzdw$$

并且我们可以使用上述引理对其进行关于 n 的一致界定。这给出了 $H^{-1-\varepsilon}$ 中的紧性，因此结论成立。□

注 38. 如上所述，如果考虑向量值离散高斯自由场，即由彼此独立的高斯自由场组成的向量$(\phi_n^1,\ldots,\phi_n^d)$，便可以推广上述引理；同样的证明表明，离散高斯自由场的角度也收敛到连续向量值高斯自由场，其中 c_1 被另一个常数 c_d 替代。这为自旋 $O(N)$模型与向量值高斯自由场之间的联系又增添了一层；关于这类联系的用途，参见例如 [AGS22] 。

6.3. **离散高斯自由场的偏离分解的猜想极限**。我们通过讨论离散高斯自由场的偏离分解的标度极限来结束本文。让我们先以稍微非正式的方式陈述这一猜想（一个精确的表述将类似于定理 3）。

设置如下。我们考虑一个晶格图序列 $D_n \subseteq (2^{-n}\mathbb{Z})^2$，其收敛于有界的单连通区域 $D\subseteq\mathbb{C}$，这里是指它们在某个大盒子 $[-C,C]^2 \supseteq D$ 内的补集在豪斯多夫拓扑下收敛。和之前一样，我们将由ϕ_n上的 D_n定义的零边界离散高斯自由场记为 $(E_k^n,\theta_k^n,\mu_k^n)_{k\ge1}$，表示 ϕ_n的游程分解，其中连通分支表示符号游程簇、它们的符号以及限制在其上的离散高斯自由场。

猜想 39。 考虑一列晶格图 $D_n\subseteq(2^{-n}\mathbb{Z})^2$，它们收敛到一个有界单连通区域 $D\subseteq\mathbb{C}$，这里的收敛是指它们在某个大盒子 $[-C,C]^2\supseteq D$ 内的补集按豪斯多夫拓扑收敛。

令 ϕ_n 为定义在 D_n上的零边界离散高斯自由场，使得 $\phi_n\to\Phi$ 几乎必然属于，比如说， $H^{-\varepsilon}$，并令 $(E_k^n,\theta_k^n,\mu_k^n)_{k\ge1}$为这些离散高斯自由场的游程分解。然后，它们收敛于如下所述的一个分解$(E_k,\theta_k,\mu_k)_{k\ge1}$：

- 最外层正簇的并集记为 $\mathbb{A}_{-\lambda}$，最外层负簇的并集记为 $\mathbb{A}_\lambda$。每个单独的簇，则是在 $\mathbb{A}_{-\lambda,\lambda}$ 的孔洞中，分别取符号为 λ 或 $-\lambda$ 的$\mathbb{A}_{-\lambda}$ 或 $\mathbb{A}_\lambda$ 得到的。

- 进一步递归定义其他簇：在每个负簇围出的孔洞中（即边界值为 λ 的孔洞），正簇由 $\mathbb{A}_{-\lambda}$ 给出；而在正簇围出的孔洞中，取 $\mathbb{A}_{\lambda}$即可得到负簇。

此外，给定簇后，符号在全局乘以 -1 的意义下确定，并且符号游程 $(\mu_k)_{k\geq 1}$ 由 $(E_k)_{k\geq 1}$ 的闵可夫斯基含量测度给出，所采用的规范与定理 *2* 中相同

注意，对于边界值为 λ 的高斯自由场，$\mathbf{A}_{-\lambda}$ 与零边界高斯自由场的 $\mathbf{A}_{-2\lambda}$ 具有相同的分布。符号簇的边界值为何等于 $\pm\lambda$，原因与 [SS09] 中出现高度间隙的原因相同。

该猜想的启发式论证如下。考虑某个区域中三角格上的零边界条件离散高斯自由场。于是，已有结果表明，从区域边界上的 x 到 y 的水平线收敛于 $\mathrm{SLE}_4(-1,-1)$。此外，人们注意到，任意一对可数边界点之间的水平线可以联合收敛。在 [AS18] 中，人们注意到，这组水平线将等于 $\mathbf{A}_{-\lambda,\lambda}$。因此，与边界相连的簇的“外部”边界应由 $\mathbf{A}_{-\lambda,\lambda}$ 给出。现在考虑正簇。其边界值在极限中为 λ。在离散情形下，为了得到离散簇，我们可以先取与该边界相连的度量图符号簇。探索完这一簇后，我们再次看到一个零边界高斯自由场，不过这次是在度量图上。为了得到离散符号簇，我们需要继续探索，但此时我们又处于与开始时相同的情形——需要探索零边界高斯自由场的符号簇边界。在连续统极限中，这应对应于 $\mathbf{A}_{-\lambda,\lambda}$ 的另一个副本，尽管这不能直接由 [SS09] 得出。如此迭代，我们得到以下连续统描述：最外层的正簇通过取 $\mathbf{A}_{-\lambda,\lambda}$ 得到，然后在环中取首次通过集 $\mathbf{A}_0$，接着再次在此时具有零边界条件的所有连通分支中取 $\mathbf{A}_{-\lambda,\lambda}$。不断重复这些步骤，直到不存在边界值为 0 或 λ 的边界。由首次穿越集的唯一性和定理 9 可知，该集合恰好等于 $\mathbf{A}_{-\lambda}$。类似的考虑支持猜想的后续步骤。

参考文献

[AGS22] Juhan Aru、Christophe Garban 和 Avelio Sepúlveda。二维经典海森堡模型的渗流与向量值高斯自由场的退出集。*arXiv* 预印本 *arXiv:2212.06767*，2022 年。[Aïd15] Elie Aïdékon。嵌套共形环中的极值过程。预印本见作者个人网页，2015 年。[ALS20a] Juhan Aru、Titus Lupu 和 Avelio Sepúlveda。二维高斯自由场的首次穿越集。《概率论及相关领域》，176：1303–1355，2020 年。[ALS20b] Juhan Aru、Titus Lupu 和 Avelio Sepúlveda。二维高斯自由场的首次穿越集：收敛与同构。《数学物理通讯》，375：1885–1929，2020 年。[ALS22] Juhan Aru、Titus Lupu 和 Avelio Sepúlveda。CLE_4环的极值距离与共形半径。《概率年刊》，50(2)：509–558，2022 年。[AP22] Juhan Aru 和 Ellen Powell。二维连续高斯自由场的一种刻画。《综合理工学院学报：数学》，9：1101–1120，2022 年。[APP23] Juhan Aru、Léonie Papon 和 Ellen Powell。对于所有 $\gamma \neq 0$，平面高斯自由场的厚点都是全不连通的。《电子概率学杂志》，28：1–24，2023 年。[APS20] Juhan Aru、Ellen Powell 和 Avelio Sepúlveda。通过高斯自由场的水平集，将刘维尔测度表示为乘法级联。《傅里叶研究所年刊》，2020 年。

[Aru15] Juhan Aru。高斯自由场的几何与 SLE 过程及 KPZ 关系。博士论文，里昂高等师范学院，2015 年。[AS18] Juhan Aru 和 Avelio Sepúlveda。二维连续高斯自由场的双值局部集：连通性、标签与诱导度量。《电子概率学杂志》，23：1–35，2018 年。[ASW17] Juhan Aru、Avelio Sepúlveda 和 Wendelin Werner。关于二维高斯自由场的有界型薄局部集。《Jussieu 数学研究所学报》，第 1–28 页，2017 年。[BLR20] Nathanaël Berestycki、Benoît Laslier 和 Gourab Ray。多米诺与虚几何。《概率年刊》，48(1)：1–52，2020 年。[BP23] Nathanaël Berestycki 和 Ellen Powell。高斯自由场、刘维尔量子引力与高斯乘法混沌。讲义，见作者个人网页，2023 年。[BPR20] Nathanaël Berestycki、Ellen Powell 和 Gourab Ray。高斯自由场的一种刻画。《概率论及相关领域》，176：1259–1301，2020 年。[BPR21] Nathanaël Berestycki、Ellen Powell 和 Gourab Ray。（$1+\varepsilon$）阶矩足以刻画高斯自由场。《电子概率学杂志》，26：1–25，2021 年。[CDCH+14] Dmitry Chelkak、Hugo Duminil-Copin、Clément Hongler、Antti Kemppainen 和 Stanislav Smirnov。伊辛界面收敛到 Schramm 的 SLE 曲线。《数学报告》，352(2)：157–161，2014 年。[CDCH16] Dmitry Chelkak、Hugo Duminil-Copin 和 Clément Hongler。临界平面 FK-伊辛模型拓扑矩形中的穿越概率。《电子概率学杂志》，21：1–28，2016 年。[CGN15] Federico Camia、Christophe Garban 和 Charles M. Newman。平面伊辛磁化场 I：临界标度极限的唯一性。《概率年刊》，43(2)：528–571，2015 年。[CHI15] Dmitry Chelkak、Clément Hongler 和 Konstantin Izyurov。平面伊辛模型自旋相关函数的共形不变性。《数学年刊》，181：1087–1138，2015 年。[CJN21] Federico Camia、Jianping Jiang 和 Charles M. Newman。共形测度系综与平面伊辛磁化：综述。《马尔可夫过程与相关领域》，27(4)：631–664，2021 年。[CN09] Federico Camia 和 Charles M. Newman。伊辛（共形）场与簇面积测度。《美国国家科学院院刊》，106(14)：5457–5463，2009 年。[CS12] Dmitry Chelkak 和 Stanislav Smirnov。二维伊辛模型的普适性与费米子可观测量的共形不变性。《数学发明》，189：515–580，2012 年。[DW20] 丁健和 Mateo Wirth。度量图上高斯自由场水平集的渗流。《概率年刊》，48(3)：1411–1435，2020 年。[GHS19] Ewain Gwynne、Nina Holden 和 Xin Sun。随机平面图与刘维尔量子引力的树木嫁接：综述。arXiv:1910.04713，2019 年。[Itô72] Kiyosi Itô。附属于马尔可夫过程的泊松点过程。载于《第六届伯克利数学统计与概率研讨会论文集》，第 3 卷《概率论》，第 225–240 页，1972 年。[JLQ23] Antoine Jego、Titus Lupu 和 Wei Qian。由布朗环汤构造的共形不变场。arXiv:2307.10740，2023 年。[Ken01] Richard Kenyon。多米诺与高斯自由场。《概率年刊》，29(3)：1128–1137，2001 年。[Lup18] Titus Lupu。二维随机游走环汤簇收敛到 CLE。《欧洲数学学会杂志》，21(4)：1201–1227，2018 年。[LW16] Titus Lupu 和 Wendelin Werner。关于伊辛随机电流、伊辛-FK、环汤与高斯自由场的札记。《电子概率通讯》，21：1–7，2016 年。[MS11] Jason Miller 和 Scott Sheffield。高斯自由场与 CLE(4)，2011 年。幻灯片、演讲及私人通信。[NS97] Ali Naddaf 和 Thomas Spencer。关于无质量自由场某些梯度扰动的均匀化与标度极限。《数学物理通讯》，183(1)：55–84，1997 年。

[QW18] Wei Qian 和 Wendelin Werner。区域内布朗游走点过程的分布由其轨迹的分布决定。《电子概率学杂志》，23:1–23，2018 年。[QW19] Wei Qian 和 Wendelin Werner。布朗环簇的分解。《欧洲数学学会杂志》，21(10):3225–3253，2019 年。[RV07] Brian Rider 和 Bálint Virág。圆周律中的噪声与高斯自由场。《国际数学研究通知》，2007，2007。[Sep19] Avelio Sepúlveda。关于高斯自由场的薄局部集。《亨利·庞加莱研究所年鉴：概率与统计》，55(3):1797–1813，2019 年。[Smi10] Stanislav Smirnov。随机簇模型中的共形不变性。一、伊辛模型中的全纯自旋结构。《数学年刊》，172:1435–1467，2010 年。[SS09] Oded Schramm 和 Scott Sheffield。二维离散高斯自由场的等值线。《数学学报》，202(1):21，2009 年。[SS13] Oded Schramm 和 Scott Sheffield。连续统高斯自由场的一条等值线。《概率论及其相关领域》，157(1-2):47–80，2013 年。[SSV22] Lukas Schoug、Avelio Sepúlveda 和 Fredrik Viklund。通过虚拟混沌研究二值集的维数。《国际数学研究通知》，2022(5):3219–3261，2022 年。[SW12] Scott Sheffield 和 Wendelin Werner。共形环系：马尔可夫特征化与环系汤构造。《数学年刊》，176(3):1827–1917，2012 年。[WP21] Wendelin Werner 和 Ellen Powell。高斯自由场讲义，第 28 卷，专题课程。法国数学学会，2021 年。[WW13] Wendelin Werner 和 Hao Wu。关于共形不变的 CLE 探索。《数学物理通讯》，320:637–661，2013 年。