arXiv:2304.03163v3 [math.AG] 8 Jan 2025

¨具有数值有效反典范丛的紧致凯勒三维流形

SHIN-ICHI MATSUMURA 和 XIAOJUN WU

Abstract. 在本文中，我们证明了具有数值有效反典范丛的非射影紧致凯勒三维流形，在有限 ´étale覆盖意义下，是以下几种情形之一：第一陈类为零的流形；K3 曲面与射影直线的乘积；或二维环面上的射影空间丛。这一结果将 Cao-H¨oring 关于射影流形的结构定理推广到了三维紧致凯勒流形。为证明这一结果，我们利用直像层的正性、 Q圆锥丛和轨形向量丛，研究了具有数值有效反典范丛的紧致凯勒三维流形的极小模型纲领。

Contents

1. 引言 2
1.1. 背景与主要结果 2
1.2. 定理 1.3 的证明策略 3
记号与约定 4
致谢 4
2. 预备结果 5
2.1. 正规解析簇上的 Bott-Chern上同调群 5
2.2. 正规解析簇上层的正性 6
2.3. 关于射影态射的直像层 6
2.4. orbifold 向量丛上的厄米度量 12
3. Q-圆锥丛与极小模型纲领 13
3.1. Q-圆锥丛 13
3.2. 圆锥丛 14
3.3. 极小模型纲领 18
4. 主要结果的证明 23
4.1. 关于 MRC纤维化的底空间 23

[{"id":0,"output":"日期：2025 年 1 月 9 日，版本 0.01。2020 年数学主题分类。主要分类 32J25，次要分类 53C25、14E30。关键词和短语。K¨ahler 空间、结构定理、数值有效反典范丛、极小模型纲领、 Q-圆锥丛、阿尔巴内塞映射、轨形结构。"}]

4.2. X 非单连通的情形244.3. X 单连通的情形26参考文献36

1. Introduction

1.1. 背景与主要结果。 本文研究具有数值有效反典范丛的紧致卡¨勒流形的一个结构定理，该研究受到下述猜想的启发。该猜想是对关于切丛数值有效的流形的开创性研究 [DPS94] 以及具有非负全纯双截面曲率的流形的开创性研究[HSW81、Mok88]的自然延伸。关于具有数值有效反典范丛的流形的研究，在与其他“非负曲率”簇的研究相互交融的过程中不断发展（例如，关于近期进展，参见 [Mat20、Mat22a、Mat22b、HIM22]）。

猜想 1.1. 设 X 是一个具有数值有效反典范丛 $-K_X$ 的紧致 K¨ahler 流形。那么，存在一个纤维化 $\varphi\colon X \to Y$，满足：

- $\varphi\colon X \to Y$ 是一个局部常值纤维化；
- Y 是一个紧致的 K¨ahler 流形，具有 $c_1(Y) = 0$；
- F，它是 φ 的纤维： $X \to Y$，是有理连通的。

局部常值纤维化的概念（例如，参见 [MW21，定义2。3]）比局部平凡纤维化的概念更强。然而，在本文中，不熟悉局部常值纤维化的读者可以将其视为局部平凡纤维化，但命题 4.17除外。

猜想1.1 已通过整体群理论得到研究 [CDP15，DPS96]但前提是满足更强的假设 $-K_X$ 为半正（即存在一个曲率半正的光滑 Hermitian 度量）。然而，数值有效情形比半正情形面临的挑战要大得多，正如将结构定理从具有非负全纯双截曲率的流形推广到切丛数值有效的流形，也曾是一项极具挑战性的工作。在 X 为射影流形的情形下，Cao-H¨oring 在 [Cao19、CH19]（参见 [CCM21、MW21、Wan20]，针对射影 klt 对）中证明了该猜想，但他们的证明要求 X上存在一个充足线丛；因此，我们至少无法直接将他们的证明应用于紧 K¨ahler 流形。

本文旨在解决猜想 1.1 在维数 $X = 3$ （见定理 1.2）。定理 1.2 直接由定理 1.3得出，详见命题 4.17。因此，本文重点证明定理 1.3。

定理 1.2. 猜想 *1.1* 在 维数 $X = 3$ 的情形下成立。

定理 1.3. 设 X 是一个具有数值有效反典范丛的非射影紧致 K¨ähler 三维流形。那么 X 存在一个有限 ´étale 覆盖，该覆盖属于以下情形之一：

- 第一陈类为零的紧致 K¨ähler 流形；
- K3 曲面与射影直线的乘积 $\mathbb{P}^1$；
- 在二维（紧致复）环面上秩 2 数值平坦向量丛 $\mathcal{F}$ 的射影空间丛 $\mathbb{P}(\mathcal{F})$。

1.2. 定理 **1.3** 的证明策略。 在本小节中，我们概述定理 1.3 的证明。设 X 是一个具有数值有效反典范丛的非射影紧致 K¨ähler 三维流形，并设 $\varphi\colon X \dashrightarrow R(X)$ 是 X 的 MRC（极大有理连通）纤维化（参见 [KoMM92、Cam92] 关于 MRC 纤维化的讨论）。定理 X 1.3 中的候选对象由 $\varphi\colon X \dashrightarrow R(X)$ 确定。

我们首先验证，只需考虑 $\dim R(X) = 2$ 的情形。在 $\dim R(X) = 0$ 的情形下，流形 X 有理连通，因此是射影的。在 $\dim R(X) = 1$ 的情形下，$\varphi\colon X \dashrightarrow R(X)$ 的有理连通纤维 F 没有非零全纯微分形式。因此，由 $\dim R(X) = 1$ 可得 $h^2(X, \mathcal{O}_X) = h^0(X, \Omega^2_X) = 0$，这意味着 X 是射影的。在 $\dim R(X) = 3$ 的情形下，流形 X 是非单有理覆盖的；因此 K_X 是伪有效的。这对于任意维数的射影流形由 [BDPP13] 得出，而对于维数为 ≤ 3 的紧致 K¨ahler 流形，则由 [Bru06, Corollary 1.2] 得出。因此，$-K_X$ 的 nef 性意味着 $c_1(X) = c_1(K_X) = 0$。

我们现在重新审视 Cao-H¨oring 的证明 [CH19]，，该证明表明，射影流形 X 具有一个局部常值 MRC 纤维化。为简单起见，我们假设$\varphi\colon X \dashrightarrow R(X)$ 是一个处处有定义的、映到光滑射影簇 $R(X)$ 上的全纯映射。该证明的实质在于构造一个 φ-充分的线丛 B，其定义在 X 上，使得直接像层 $\varphi_*(pB) := \varphi_*\mathcal{O}_X(pB)$ 具有弱正曲率，并满足 $c_1(\varphi_*(pB)) = 0$，其中 $1 \ll p \in \mathbb{Z}$（详见第 2.2 和 2.3 小节）。随后，Simpson 的结果 [Sim92] 证实，$\varphi_*(pB)$ 具有平坦联络，这意味着 $X \to R(X)$ 是一个局部常值纤维化。

现在，让我们回到 X 是非射影的情形。在这种情况下会遇到一个重大挑战：即使 $\varphi\colon X \dashrightarrow R(X)$ 是全纯映射，X 也可能没有 φ-丰沛线丛。我们克服这一挑战的思路是，运用 [HP15a、HP15b、HP16] 中所发展的紧致 K¨ahler 三维流形的极小模型纲领（MMP）。值得注意的是，[BP04、PS98] 中也曾讨论过 MMP 方法。通过运行 MMP，我们可以找到 $X \dashrightarrow X' \to Z$，其中 $X \dashrightarrow X'$ 是除子收缩与翻转的复合，而 $\varphi\colon X' \to S$ 是一个极大有理连通纤维化（Mori 纤维空间）（详情见定理 3.6）。运行 MMP 的一个优点是，按照构造，$-K_{X'}$ 是 φ-丰沛的；因此，我们可以期待 Cao-H¨oring 的证明适用于 $\varphi\colon X' \to S$。

考虑 $\varphi\colon X' \to S$ 而非 $\varphi\colon X \dashrightarrow R(X)$ 时，我们面临着 Cao-H¨oring 论证中没有的新困难：第一个困难是，$-K_{X'}$ 不一定是数值有效的。为克服这一困难，基于 [EIM23]，中的一项观察，我们着眼于 $-K_{X'}$ 的非 nef 轨迹并不在 S 上占优这一事实（见第 3.3 小节），从而能够将我们的情形按 $-K_{X'}$ 数值有效的情况处理。因此，我们可以在 X' 上构造一个 φ-丰沛线丛 B，使得 $\varphi_*(pB)$ 弱正曲率，并满足 $c_1(\varphi_*(pB)) = 0$。第二个困难是，S 可能有奇点，这使我们无法在 $\varphi_*(pB)$ 上得到平坦联络。为克服这一困难，我们注意到 $\varphi\colon X' \to S$ 是一个环面型 $\mathbb{Q}$-圆锥丛，而 $\varphi_*(pB)$ 是 S 上的 orbifold 向量丛，因此能够得到平坦联络。

为了实现上述思想，我们实际上需要将情形分为两种情况。在第 4.2 小节中，我们考虑 X 不单连通的情形。在这种情况下，在取 X的有限 ´平展覆盖后，我们考察阿尔巴内塞映射 $\alpha\colon X \to A(X)$（参见 [NW]）。MMP 中的每一步都会压缩有理曲线，而 $A(X)$ 不含有理曲线；因此我们可以找到一个态射 $\beta\colon S \to A(X)$。通过将 S 与 $A(X)$ 进行比较，我们证明 MFS $\varphi\colon X' \to S$ 实际上是一个圆锥丛。然后，通过研究非射影情形下的圆锥丛，我们推出 $\varphi\colon X' \to S$ 是一个射影空间丛，且 $X \dashrightarrow X'$ 同构。在第 4.3 小节中，我们处理剩余的 X 单连通的情形。在这种情况下，通过应用轨形向量丛理论，我们证明，在取适当的有限拟 ´平展覆盖所诱导的基变换后，MFS $\varphi\colon X' \to S$ 是一个局部常值纤维化，这意味着 $X \dashrightarrow X'$同构。

记号与约定。我们交替使用“Cartier 除子”“可逆层”和“线丛”这些术语，并采用张量积的加法记号（例如，对于线丛 L 和 M，$L + M := L \otimes M$）。此外，我们交替使用“局部自由层”和“向量丛”这些术语，并常将奇异厄米度量简称为“度量”。“纤维化”指具有连通纤维的真满态射；“解析簇”指不可约且约化的复解析空间；“K¨ahler 空间”指容许 K¨ahler 形式的正规解析簇（即 X 上具有局部势的光滑正 (1, 1)-形式）。

致谢。 作者谨向Patrick Graf 教授表示感谢，感谢他在本文草稿中为引理 4.15 提供了比原证明更为简洁的证明。他们还感谢一位匿名审稿人，后者仔细审阅了草稿，提出了许多建设性意见，并指出了草稿第 4.3小节中的一个错误。第一作者获得了日本学术振兴会科学研究补助金（B类） ♯21H00976以及国际联合研究促进项目（A类） ♯19KK0342的部分资助。第二作者获得了

德国研究联合会项目“奇异¨厄米度量、向量丛及典范截面的扩展”，由 Mihai P˘aun 教授负责。

2. Preliminary Results

2.1. 正规解析簇上的 Bott-Chern 上同调群。 在本小节中，我们遵循 [BEG13], 回顾正规解析簇上的 Bott-Chern 上同调群和正流。

设 X 是一个正规解析簇。在 X 上，多重调和函数在局部可写为全纯函数的实部。换言之，作用于双次数为 (0，0) 的分布层上的 $\partial\overline{\partial}$-算子的核与全纯函数实部的层 $\mathbb{R}\mathcal{O}_X$ 相同（例如，参见 [BEG13，引理 4.6。1]）。于是， Bott-Chern 上同调群 X 定义如下:

$$H^{1,1}_{BC}(X,\mathbb{C}) := H^1(X,\mathbb{R}\mathcal{O}_X).$$

线丛 L 在 X 上的第一陈类 $c_1(L) \in H^{1,1}_{BC}(X,\mathbb{C})$ 定义为 $(\sqrt{-1}/2\pi)\Theta_h(L)$ 的 Bott-Chern 上同调类，其中 $\Theta_h(L)$ 表示 h 在 L 上的光滑厄米度量的陈曲率。注意，$c_1(L)$ 不依赖于光滑厄米度量的选取，且 $\mathbb{Q}$-Cartier 除子的第一陈类也可通过线性性定义。存在自然态射 $H^{1,1}_{BC}(X,\mathbb{C}) \to H^2(X,\mathbb{R})$，使得线丛的第一陈类与拓扑定义一致，其中 $H^2(X,\mathbb{R})$ 表示 X 的奇异上同调（例如，参见 [BEG13，第 230] 页）。

下面的命题常被用作表示 Bott-Chern上同调类的正流的延拓定理（参见 [Dem 85] 关于解析簇上的流）。下面的引理是支撑定理在解析簇上的推广。

命题 2.1([BEG13，命题 4.6.3])。令 $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X,\mathbb{C})$为正规解析代数簇 X上的 Bott-Chern 上同调类，并令 T 为 X_{reg} 上表示受限类 $\alpha|_{X_{\mathrm{reg}}} \in H^{1,1}_{BC}(X_{\mathrm{reg}},\mathbb{C})$的正流。则，流 T 唯一延拓为 X 上表示 $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X,\mathbb{C})$ 的具有局部势的正流。

引理2.2。设 X 是一个解析代数簇，且设 T_1、 T_2 是 d-闭正流，其双维数为$(p,\ p)$（不假设它们具有局部势）。如果差 $T := T_1 - T_2$ 的支集包含在扎里斯基闭子集 $A \subset X$ 中，且其维数为 $< p$，则有 $T = 0$。

引理的证明 *2.2*。 该陈述在 X中是局部的；因此，我们可以假设存在一个嵌入 i: $X \to B \subset \mathbb{C}^N$，将 X嵌入到一个开集 $B \subset \mathbb{C}^N$ 中。由于推前 i_*T 是一个正规流（例如，参见 [Dem，第三章，截面2.C] 中关于正规流的定义），光滑簇的支撑定理表明$i_*T = 0$，这意味着 $T = 0$。 □

2.2. 正规解析簇上的层的正性。 在本小节中，遵循 [HPS18，PT18，Mat22a], 我们简要回顾正规解析簇上无挠层的奇异厄米度量。

设 $\mathcal{E}$ 是正规解析代数簇 X 上的无挠相干层。 h 上的奇异厄米度量 $\mathcal{E}$ 是向量丛 $\mathcal{E}|_{X_0}$ 上一个可能奇异的厄米度量（关于向量丛上的度量，见 [HPS18，定义 17.1] 和 [PT18，定义 2.2.1]）。这里， $\mathcal{E}|_{X_0}$ 是 $\mathcal{E}$ 在 $X_0 := X_{\mathrm{reg}} \cap X_{\mathcal{E}}$ 上的限制，其中 X_{reg} 是 X 的非奇异轨迹， $X_{\mathcal{E}}$ 是 $\mathcal{E}$ 的最大局部自由轨迹。注意， $X_0 \subset X$ 是一个 Zariski 开集，且 $\mathrm{codim}(X \setminus X_0) \geq 2$。对于 X 上具有局部势的光滑 (1, 1)-形式 θ，记作

$$\sqrt{-1}\Theta_h \geq \theta \otimes \mathrm{id} \text{ on } X$$

若对于 $\mathcal{E}^*$ 的任意局部截面 e，函数 $\log |e|_{h^*} - f$ 都是 psh，其中 f 是 θ 的局部势（即 $\theta = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial} f$），而 h^* 是对偶层 $\mathcal{E}^* := \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ 上的诱导度量。由于可将多重次调和性延拓通过余维为 ≥ 2 的 Zariski 闭集，因此只需在 X_0 的一个开集上检验多重次调和性。

定义 2.3.设 X 为一个 K¨ahler空间，具有一个 K¨ahler 形式 ω_X，且 θ 为 X 上的一个具有局部势的 (1, 1)-形式。设 $\mathcal{E}$ 为 X上的一个无挠层

(1) $\mathcal{E}$ 称为 θ-正曲率的，如果 $\mathcal{E}$ 具有奇异厄米度量 h，使得 $\sqrt{-1}\Theta_h \geq \theta \otimes$ido n X.(2) $\mathcal{E}$ 称为 θ-弱正曲率的，如果 $\mathcal{E}$ 具有奇异厄米度量$\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$，使得 $\sqrt{-1}\Theta_h \geq (\theta - \varepsilon\omega_X) \otimes$ idon X。(3) 在$\theta = 0$的情况下， $\mathcal{E}$ 简称为正曲率或弱正曲率。

当 X 紧致时，弱正曲率层的概念不依赖于 ω_X 的选取，并且在 [Mat23，定义 21]的意义下强于伪有效层的概念。

2.3. 关于射影态射的直像层。 本小节旨在证明定理 2.6。为此，我们准备如下命题：

命题 2.4（参见 [CH19, 2.8 Proposition], [CCM21, Theorem 2.2 (1)]）。设 φ: $X \to Y$ 是（不一定紧致的）K¨ahler 流形 X 与 Y 之间的纤维化，其 K¨ahler 形式分别为 ω_X 和 ω_Y。设 L 是 X 上的线丛，且 θ 是 Y 上具有局部势的 (1, 1)-形式。假设满足以下条件：

(a) $-K_{X/Y}$ 的非 nef 轨迹在以下意义下不是支配的：$-K_{X/Y}$ 具有奇异厄米度量 $\{g_\delta\}_{\delta>0}$，使得 $\sqrt{-1}\Theta_{g_\delta} \geq -\delta\omega_X$在 X上成立，并且 $\{x \in X \,|\, \nu(g_\delta, x) > 0\}$ 不支配 Y，其中 $\nu(g_\delta, x)$是 g_δ 在 x处的局部势的勒隆数；

(b) L 是一个 φ-大线丛，具体意义如下： L 具有奇异厄米度量 g，使得 $\sqrt{-1}\Theta_g + \varphi^*\omega_Y \geq \omega_X$ 在 X上成立；(c) L 是 $\varphi^*\theta$-弱正曲率的，具体意义如下：L 具有奇异厄米度量 $\{h_{\delta'}\}_{\delta'>0}$，使得$\sqrt{-1}\Theta_{h_{\delta'}} \geq \varphi^*\theta - \delta'\omega_X$ 在 X上成立。

于是，我们有：

(1) 对任意 $m \in \mathbb{Z}_+$ 和 $\varepsilon > 0$，直接像层 $\varphi_*(-mK_{X/Y} + L)$ 都是 $((1-\varepsilon)\theta - \varepsilon\omega_Y)$-正曲率的。(2) 若进一步假设 $\omega_Y \geq \theta$ 成立，则 $\varphi_*(-mK_{X/Y} + L)$ 是 θ-弱正曲率的。特别地，若 L 是伪有效线丛（即正曲率的），则 $\varphi_*(-mK_{X/Y} + L)$ 弱正曲率。

注记 2.5. 在本文中，对于 X 上的线丛 M，记号 $\varphi_*(M)$ 表示可逆层 $\mathcal{O}_X(M)$ 的直接像层 $\varphi_*(\mathcal{O}_X(M))$。

证明。 我们运用直像层的正性 [PT18，定理 5.1。2](另见[HPS18])，构造所需的奇异厄米度量，定义在 $\mathcal{W}_m := \varphi_*(-mK_{X/Y} + L)$。注意，[PT18，定理 5.1。2]的表述针对射影纤维化，但实际上它对 K¨ahler 纤维化也成立（见 [Wan21，命题 2.5，定理 2。6]）。为此，我们考虑 $-mK_{X/Y} + L$的如下分解：

$$-mK_{X/Y} + L = kK_{X/Y} \overbrace{-(m+k)K_{X/Y}}^{\text{with } g_\delta^{m+k}} + \overbrace{L.}^{\text{with } g^\varepsilon \cdot h_{\delta'}^{1-\varepsilon}}$$

此外，我们将度量 G 定义在 $-(m+k)K_{X/Y} + L$ 上，方式如下

$$G := g_\delta^{m+k} \cdot g^\varepsilon \cdot h_{\delta'}^{1-\varepsilon}.$$

我们很容易验证，乘子理想层 $\mathcal{I}(G^{1/k})$ 满足

$$\mathcal{I}(G^{1/k})|_{X_y} = \mathcal{I}\big(g_\delta^{1+(m/k)} \cdot g^{\varepsilon/k} \cdot h_{\delta'}^{(1-\varepsilon)/k}\big)|_{X_y} = \mathcal{O}_{X_y} \tag{2.1}$$

对于非常一般纤维 X_y 和充分大的 $k \gg 1$。事实上，由于条件 (a) 蕴含

$$\nu(g_\delta^{1+(m/k)} \cdot g^{\varepsilon/k} \cdot h_{\delta'}^{(1-\varepsilon)/k}, x) \leq \nu(g^{1/k} \cdot h_{\delta'}^{1/k}, x) < 1 \text{ for any } x \in X_y,$$

我们可知

$$\mathcal{O}_{X_y} = \mathcal{I}(G^{1/k}|_{X_y}) \subset \mathcal{I}(G^{1/k})|_{X_y} \subset \mathcal{O}_{X_y}$$

由斯科达引理和限制公式可知。这表明，$\mathcal{O}_X/\mathcal{I}(G^{1/k})$ 的支集在 Y 上不是主导的。因此，自然包含

$$\varphi_*((-mK_{X/Y} + L) \otimes \mathcal{I}(G^{1/k})) \to \varphi_*(-mK_{X/Y} + L) \tag{2.2}$$

是泛点处满射的。同时，通过度量的构造，我们可以很容易地看出

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\Theta_G &\geq -\delta(m+k)\omega_X + \varepsilon\omega_X - \varepsilon\varphi^*\omega_Y + (1-\varepsilon)\varphi^*\theta - (1-\varepsilon)\delta'\omega_X \\ &\geq \big(\varepsilon - \delta(m+k) - \delta'\big)\omega_X - \varepsilon\varphi^*\omega_Y + (1-\varepsilon)\varphi^*\theta.\end{aligned}$$

给定 $\varepsilon > 0$，取 $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$ with $\delta' < (1/2)\varepsilon$ 后，我们固定一个充分大的 $k = k(\delta') = k(\varepsilon)$，使其满足 (2.1)。此外，我们取 $1 \gg \delta = \delta(m,k,\varepsilon) > 0$，使得 $\delta(m+k) < (1/2)\varepsilon$。于是，右端有下界$\varphi^*(-\varepsilon\omega_Y + (1-\varepsilon)\theta)$。由此曲率估计和 (2.2)，通过将直像层的正性（参见 [PT18, Theorem 5.1.2]or [Wan21, Proposition 2.5, Theorem 2.6]）应用于 $Ge^{-\varphi^* f}$，可推出层 $\varphi_*(-mK_{X/Y} + L)$ 具有结论（1）中所需的奇异厄米度量，其中 f 是 $-\varepsilon\omega_Y + (1-\varepsilon)\theta$的局部势。结论（2）直接由 $-\varepsilon\omega_Y + (1-\varepsilon)\theta \geq -2\varepsilon\omega_Y + \theta$ 得出。□

定理 2.6. 设 $\varphi\colon\ X \to Y$ 是紧致 K¨ahler 空间 X 和 Y 之间的等维纤维化。设 $Y_0 \subset Y$ 是一个 Zariski 开集，满足 $\operatorname{codim}(Y \setminus Y_0) \geq 2$，使得 $X_0 := \varphi^{-1}(Y_0)$ 和 Y_0 光滑，并且 $\varphi_0 := \varphi|_{X_0}\colon\ X_0 \to Y_0$ 是光滑纤维化。设 L 是 X 上的线丛。假设以下条件:

(a) $-K_X$ 是 $\mathbb{Q}$-Cartier，且 $-K_X$ 的非nef轨迹在命题2.4 (a) 的意义下不支配 Y；(b) $-K_Y$ 是 $\mathbb{Q}$-Cartier且数值平凡；(c) L 是 X上的伪有效（即正曲率）且 φ-ample线丛；(d)对于任意满足 $\varphi_*(pL) \neq 0$的 $p \in \mathbb{Z}_+$，线丛$\det(\varphi_*(pL))|_{Y_0}$ 具有一个光滑厄米度量 g_p，使得在 Y_0 上对某个凯¨勒形式 ω_Y有 $\eta_p :=\sqrt{-1}\Theta_{g_p} \geq -\omega_Y$ 成立。

令 r 为 $\varphi_*(L)$的秩，且令 p 为满足 $p/r \in \mathbb{Z}_+$的充分大整数。在 Y 上定义层 $\mathcal{V}_p$ 为

$$\mathcal{V}_p := \varphi_*(pL) \otimes \Big(\frac{p}{r}\det\varphi_*(L)\Big)^*.$$

然后， $\mathcal{V}_p$ 和 $(\det\mathcal{V}_p)^*$ 都是弱正曲率。

注记 2.7。行列式层 $\det\varphi_*(L) := (\Lambda^r\varphi_*(L))^{**}$ 是一个秩 1 的反身层，但当 Y有奇点时，它未必可逆；因此，严格来说，记号 $(p/r)\det\varphi_*(L)$ 应替换为 $((\det\varphi_*(L))^{\otimes(p/r)})^{**}$。不过，我们主要只处理 $\det\varphi_*(L)|_{Y_0}$，它是 Y_0上的一个线丛；因此，这种记号不会引起混淆。

我们将此定理应用于层 $\varphi_*(pL)$ 为 orbifold 向量丛的情形。在这种情况下，看似技术性要求的条件 (d) 自动满足。

证明。 证明中，我们采用 L 替代充足线丛，并沿用 [Cao19、CH19]中的论证。然而，[Cao19、CH19] 中的原始论证并不容易理解，而且我们的证明需要解决若干技术问题。因此，为方便读者，我们给出详细证明。

我们可以假设 $\varphi_*(pL)$在 Y_0 上是局部自由的，方法是从 $\varphi_*(pL)$中移除 Y_0的非局部自由轨迹。我们首先证明断言2.8 和断言2.9。

断言2.8。 $\varphi_*(pL)$ 在 Y 上是弱正曲率，对于任意 $p \in \mathbb{Z}_+$。

证明。命题2.4对 $\theta = 0$ 的假设由定理2.6 的条件 (a)、(b)、(c) 得到满足。因此，将命题2.4 应用于 $\varphi_0 = \varphi|_{X_0}$: $X_0 \to Y_0$，我们可以得到定义在 $\varphi_*(pL)$上的奇异厄米度量 $\{H_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$，使得 $\sqrt{-1}\Theta_{H_\varepsilon} \geq -\varepsilon\omega_Y \otimes \mathrm{id}$ 在 Y_0 上对某个 K¨ahler 形式 ω_Y 成立。然后，由于 $\mathrm{codim}(Y \setminus Y_0) \geq 2$，度量 H_ε 可以自动延拓到 Y，其中我们隐含地使用了 ω_Y 是定义在 Y 上的 K¨ahler 形式（而不仅仅是在 Y_0上）。这意味着， $\varphi_*(pL)$ 在 Y 上是弱正曲率的。□

断言 2.9。设 r_p 为 $\varphi_*(pL)$ 的秩。那么，层

$$r_p pL \otimes \left(\varphi^* \det \varphi_*(pL)\right)^*$$

在 X 上具有弱正曲率。

证明。 基本策略与 [Cao19中的命题 3 相同。15], 但由于缺少充足线丛，需要采用一些不同的论证。为简化记号，我们假设 $p = 1$ 通过将 L 替换为 pL。固定一个 K¨ähler 形式 ω_Y 于 Y，并满足定理 2.6的条件 (d)。我们可以假设

$$\eta_1 + (1/r)\omega_Y = \sqrt{-1}\Theta_{g_1} + (1/r)\omega_Y$$

是一个 K¨ahler 形式，通过将 ω_Y 替换为 $k\omega_Y$，其中 $r := r_1$ 且 $k \gg 1$。此外，我们取一个 K¨ahler 形式 ω_X，在 X 上使得 $\omega_X \geq \varphi^*\omega_Y$。注意，通过将 ω_X 和 ω_Y 替换为 $k\omega_X$ 和 $k\omega_Y$，该条件保持不变。由于 L 是 X 上的 φ-ample 线丛，我们可以在 L 上取一个光滑厄米度量 g，使得对于某个常数 $1 \gg c > 0$， $\sqrt{-1}\Theta_g + \varphi^*\omega_Y \geq c\omega_X$ 成立，这通过将 ω_X 和 ω_Y 替换为 $k\omega_X$ 和 $k\omega_Y$ 来实现。

令 Z 为 φ 的 r 次纤维积： $X \to Y$，其 i 次投影 pr_i： $Z \to X$ 以及自然态射 ψ: $Z \to Y$:

$$\begin{array}{ccc} Z := X \times_Y \cdots \times_Y X & \xrightarrow{\mathrm{pr}_j} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_i} & \overset{\psi}{\searrow} & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ X & \xrightarrow[\varphi]{} & Y. \end{array}$$

Set

$$L_r := \sum_{i=1}^{r} \mathrm{pr}_i^* L \text{ and } L' := L_r \otimes (\psi^* \det \varphi_*(L))^*.$$

应用命题2.4 于

$$\psi_0 = \psi|_{Z_0} \colon Z_0 := \psi^{-1}(Y_0) \to Y_0 \text{ equipped with } L'|_{Z_0} \text{ and } \theta := \eta_1$$

我们考察 $-K_{Z/Y}$ 的非 nef 轨迹以及 L'上的度量。

根据命题 2.4的条件 (a)、(b)，我们得到奇异厄米度量$\{g_\delta\}_{\delta>0}$ 在 $-K_{X/Y}|_{X_0} = -K_{X_0/Y_0}$ 上，使得 $\sqrt{-1}\Theta_{g_\delta} \geq -\delta\omega_X$ 在 X_0 上成立，并且勒隆数的上水平集 $\{x \in X_0 \,|\, \nu(g_\delta, x) > 0\}$ 在 Y_0上不是支配的。由于 $\psi\colon \ Z \to Y$是 Y_0上的光滑纤维化，我们有

$$K_{Z_0} = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{pr}_i^* K_{X_0} \text{ on } Z_0.$$

因此，我们得到 $G_\delta := \sum_{i=1}^{r} \mathrm{pr}_i^* g_\delta$ 上的度量 $-K_{Z_0/Y_0}$。根据构造，勒隆数的上水平集 $\{x \in Z_0 \,|\, \nu(G_\delta, x) > 0\}$ 不占优势于 Y_0，且曲率流 $\sqrt{-1}\Theta_{g_\delta}$ 满足:

$$\sqrt{-1}\Theta_{g_\delta} \geq -\delta \sum_{i=1}^{r} \mathrm{pr}_i^* \omega_X \text{ on } Z_0.$$

这表明 $-K_{Z_0/Y_0}$ 满足命题的条件 (a) 2.4 对于凯勒¨形式 $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{pr}_i^* \omega_X$ on Z_0。考虑光滑厄米度量

$$G := (\sum_{i=1}^{r} \mathrm{pr}_i^* g) \cdot (\psi^* g_1)^{-1} \text{ on } L' = (\sum_{i=1}^{r} \mathrm{pr}_i^* L) \otimes (\psi^* \det \varphi_*(L))^*.$$

回忆一下， g_1 是条件 (d) 中 $\det \varphi_* L|_{Y_0}$ 上的光滑厄米度量。于是，我们得到

$$\sqrt{-1}\Theta_G(L') + \sum_{i=1}^{r} \mathrm{pr}_i^* \varphi^* \big(\omega_Y + \frac{1}{r}\eta_1\big) \geq \sum_{i=1}^{r} \mathrm{pr}_i^* c\,\omega_X \text{ on } Z_0.$$

这里我们使用了 $\psi^* = \mathrm{pr}_i^* \circ \varphi^*$ 对任意 $1 \leq i \leq r$。由于 $\omega_Y + (1/r)\eta_1$ 是一个 K¨ahler 形式，定义在Y_0上，因此线丛 $L'|_{Z_0}$ 满足命题 2.4中的条件 (b)。另一方面，存在非零自然态射

$$\det \varphi_*(L) \to (\varphi_*(L))^{\otimes r} \cong \psi_*(L_r) \text{ on } Y_0,$$

这表明 $h^0(Z_0, L') \neq 0$ 根据 L' 的定义。特别地，线丛$L'|_{Z_0}$ 满足命题2.4 中关于 $\theta = 0$ (以及 $\delta' = 0$) 的条件 (c)。上述论证使我们能够应用命题 2.4，从而得到奇异厄米度量 $\{H_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 定义在 $\psi_*(L')|_{Y_0}$ 上，使得 $\sqrt{-1}\Theta_{H_\varepsilon} \geq -\varepsilon\omega_Y \otimes$在 Y_0 上为恒等映射。

最后，我们利用由 H_ε 诱导的 L' 上的度量证明所需的结论。考虑自然态射

$$\psi^*\psi_*(L') \to L' \text{ on } Z_0, \tag{2.3}$$

由 $h^0(Z_0, L') \neq 0$可知其为泛点处满射。令 G_ε 为由 ψ^*H_ε 及上述态射在 $L'|_{Z_0}$ 上诱导的度量。纤维积 Z_0 的对角子集 Δ 与 X_0同一。注意，在此同一关系下，$L'|_\Delta \cong rL \otimes \left(\varphi^* \det \varphi_* L\right)^*$成立，且 (2.3) 在 Δ上不恒为零。根据构造，$L'|_\Delta \cong rL \otimes (\varphi^* \det \varphi_* L)^*$ 上的度量 $G_\varepsilon|_\Delta$ 是良定义的（即，$G_\varepsilon|_\Delta \not\equiv \infty$），并且

$$\sqrt{-1}\Theta_{G_\varepsilon}|_\Delta \geq -\varepsilon\psi^*\omega_Y|_\Delta \geq -\varepsilon\omega_X \text{ holds on } \Delta \cong X_0.$$

注意，良定义性成立是因为 G_ε 是通过拉回 ψ^*H_ε构造的。由 $\operatorname{codim}(X \setminus X_0) \geq 2$, 此曲率条件可延拓到 X。这里，我们用到了 $\varphi\colon X \to Y$的纤维维数相同。□

我们完成定理2.6的证明。设 p 是一个满足 $p/r \in \mathbb{Z}_+$的整数。根据断言2.9和条件 (d)，存在奇异厄米度量 $\{g_{\delta'}\}_{\delta'>0}$ 定义在 $L|_{X_0}$ 上，使得

$$\sqrt{-1}\Theta_{g_{\delta'}}(L) \geq \varphi^*\Big(\frac{1}{pr_p}\eta_p\Big) - \delta'\omega_X \text{ on } X_0.$$

将命题2.4 应用于 $\theta := (1/pr_p)\eta_p$。于是，由于 η_p 是 $\det \varphi_*(pL)$ 的曲率，我们得到

$$\varphi_*L \otimes \Big(\frac{1}{pr_p}\det \varphi_*(pL)\Big)^* \text{ is weakly positively curved} \tag{2.4}$$

在 Y_0 上（相对于 ω_Y）；因此，它在 Y 上弱正曲率，因为 ω_Y 定义在 Y 上。行列式层

$$\det \varphi_*L \otimes \Big(\frac{r}{pr_p}\det \varphi_*(pL)\Big)^* = \det \varphi_*L - \frac{r}{pr_p}\det \varphi_*(pL)$$

在 Y上也弱正曲率。这里，我们在左侧使用加法记号，这在 Y_0 上是合理的（参见注2.7）。这意味着

$$\begin{aligned}(\det \mathcal{V}_p)^* &= -\det \varphi_*(pL) + \frac{r_p p}{r}\det \varphi_*L \\ &\geq_{\mathrm{w}} -\det \varphi_*(pL) + \frac{r_p p}{r}\cdot\frac{r}{pr_p}\det \varphi_*(pL) = 0 \text{ on } Y_0\end{aligned}$$

具有弱正曲率，其中记号 $\geq_{\mathrm{w}}$ 表示差具有弱正曲率。另一方面，由于 $(p/r)L$ 足够 φ-充足，自然态射

$$\mathcal{W}_p := \operatorname{Sym}^p(\varphi_*L) \otimes \Big(\frac{p}{r}\det \varphi_*L\Big)^* \to \varphi_*(pL) \otimes \Big(\frac{p}{r}\det \varphi_*L\Big)^* = \mathcal{V}_p$$

在 $p \gg 1$ 上是泛点处满射的。层 $\mathcal{W}_p$ 可以写成 p 阶对称张量（2.4） $p = 1$；因此 $\mathcal{W}_p$ 具有弱正曲率。由上述态射可知， $\mathcal{V}_p$ 也具有弱正曲率。□

2.4. orbifold 向量丛上的厄米度量。 本小节中，我们依循 [MM07， Wu], 回顾一些关于轨形结构的基本事实。

令 (X, ω)为一个具有商奇点的紧致K¨ahler空间。空间 X 可被视为一个K¨ahler 轨形（参见 [MM07，第 5.4], [Wu节，定义 1] 以获取精确定义）；特别地，存在一个开覆盖 $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 以及一个伽罗瓦准-´étale覆盖 $\pi_\alpha \colon U_\alpha \to U_\alpha/G_\alpha \cong U_\alpha$，其中 U_α 是一个光滑簇， G_α 是一个有限群。回顾一下，准-´étale 覆盖被定义为有限满射态射˜，且其在余维1处是 ´étale 的。光滑簇 U_α 被称为局部光滑分歧覆盖。

如果对于任意 $\alpha \in A$， X 上的反身层 $\mathcal{F}$ 的$\pi_\alpha^* \mathcal{F}(\ \{)^{**}\}_\alpha$ 都是局部自由的，则称其为轨形向量丛。复轨形记为 F，它由$(\pi_\alpha^* \mathcal{F})^{**}$的全空间（作为向量丛）的商$\{(\pi_\alpha^* \mathcal{F})^{**}/G_\alpha\}_\alpha$ 确定，其中带有轨形态射 $F \to X$。此外，射影空间轨形丛 $p \colon \mathbb{P}(F) \to X$以及典范轨形线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1)$也可以定义。按照第 2.2小节中的定义， $\mathcal{F}$ 上的奇异厄米度量 h 确定了轨形度量，即，在$(\pi_\alpha^* \mathcal{F})^{**}$ 上由h的拉回所定义的（可能是奇异的）度量 h_α 的族 $\{h_\alpha\}_\alpha$ ，并且该族与轨形结构相容。如果对于任意 α， h_α 都是光滑的，则称该轨形度量是光滑的。于是，我们可以像对局部自由层的情形那样，为 $\mathcal{F}$定义正性的记号，并将 [DPS94,定理 1.18] 推广到轨形向量丛。我们强调，轨形向量丛本身是层，但所有度量和正性都是在局部光滑分歧覆盖上计算的。

定义 2.10. 设 ω 是 K¨ahler 轨形 X 上的 K¨ahler 形式。如果存在 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1)$ 上的一族 orbifold 度量 $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$，则称 orbifold 向量丛 $\mathcal{F}$ 在强意义下是伪有效的。

$$\sqrt{-1}\Theta_{h_\varepsilon}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1)) + \varepsilon p^* \omega \geq 0 \text{ holds in the sense of currents}$$

并且极集 $\{h_\varepsilon = +\infty\}$ 在 X上不占主导，其中上述不等式意味着它在 $\mathbb{P}(F)$的每个局部光滑分歧覆盖上都成立。若上述条件中的 h_ε 可以选为光滑轨形度量，则称 orbifold 向量丛 $\mathcal{F}$ 是数值有效的。

orbifold向量丛 $\mathcal{F}$ 被称为数值平坦（分别地，厄米平坦），如果 $\mathcal{F}$、 $\mathcal{F}^*$ 都是数值有效（分别地， $\mathcal{F}$ 具有一个轨形度量，其曲率在每个局部光滑分歧覆盖上均为零）。

定理 2.11 ([吴，推论2，定理 D])。 设 $\mathcal{F}$ 是紧致 K ¨ahler orbifold X。

(1) 如果 $\mathcal{F}$ 作为 X 上的层是弱正曲率的（见定义 2.3），并满足 $c_1(\mathcal{F}) = 0$，那么 $\mathcal{F}$ 是数值平坦的 orbifold 向量丛。

(2) 轨形向量丛 $\mathcal{F}$ 数值平坦，当且仅当存在一个轨形向量丛的滤过

$$0 =: \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{m-1} \subset \mathcal{F}_m := \mathcal{F} \tag{2.5}$$

使得每个商丛 $\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1}$ 都是厄米平坦轨形向量丛。

证明. 设 $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 是 $\mathcal{F}$ 上满足弱正曲率层定义（见定义 2.3）的奇异厄米度量。容易看出，由 $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 诱导的 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1)$ 上的度量满足强意义下伪有效轨形向量丛的定义。根据 [Wu 引理 1], , X 上的一个 K¨ahler 形式定义了一个模去 dd^c-恰当形式的轨形 K¨ahler 形式，且势函数连续。特别地，我们可以假设定义 2.10 中的 ω 是一个轨形 K¨ahler 形式。因此，结论（1）由 [Wu 推论 2] 得出。结论（2）是 [Wu 定理 D] 的直接推论。□

推论 2.12. 设 $\mathcal{F}$ 是紧致 K ¨ahler orbifold X 上的数值平坦 orbifold 向量丛。假设 $\pi_1(X_{\mathrm{reg}}) = \{\mathrm{id}\}$ 且 $H^1(X_{\mathrm{reg}}, \mathcal{O}_X) = 0$。那么，层 $\mathcal{F}$ 是 X 上的平凡向量丛。

证明。 取定理 2.11中的滤过。商层 $\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1}$ 是 X_{reg} 上的 Hermitian 平坦向量丛（但不一定在 X上也是如此）；因此，它由（拓扑）基本群 $\pi_1(X_{\mathrm{reg}}$的一个 GL-表示诱导，这表明$\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1}$ 是平凡向量丛。 $0 \to \mathcal{F}_k \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1} \to 0$的扩张类（它是 X_{reg} 上的向量丛正合列）由 $H^1(X_{\mathrm{reg}}, \mathcal{O}_X) = 0$ 可知是平凡的。这表明 $\mathcal{F}$ 在 X_{reg} 上是平凡的，因此由反身性可知它在 X 上也是平凡的。□

3. $\mathbb{Q}$-Conic Bundles and the Minimal Model Program

$\mathbb{Q}$-圆锥丛在我们的情形中自然地作为极小模型纲领的结果出现（详情见第3.3 小节）。因此，我们分别在第 $\mathbb{Q}$小节和3.1与3.2小节研究圆锥丛。此外，我们阐明反典范丛的 nef 性对 $\mathbb{Q}$-圆锥丛的几何性质有何影响。

3.1. $\mathbb{Q}$-圆锥丛。本小节中，我们遵循 [MP08a、、07], , 总结 $\mathbb{Q}$-圆锥丛的基本性质。我们首先回顾 $\mathbb{Q}$-圆锥丛的定义。

定义3.1。(1) 设 X 和 S 为正规解析簇。若纤维化 $\varphi\colon X \to S$满足以下条件，则称其为 $\mathbb{Q}$-圆锥丛：

- X 具有终端奇点；
- $\varphi\colon X \to S$ 是等维的，且相对维数为 1；

- $-K_X$ 是 φ-丰的。

本文中，除第 3.2 小节外，我们只考虑 $\mathbb{Q}$-圆锥丛φ: $X \to S$，其中 dim $X = 3$。

(2) $\mathbb{Q}$-圆锥丛 φ: $X \to S$ 的判别除子 Δ 定义为非光滑轨迹 $\{s \in S \mid \varphi$ 的除子分支之并；在 s$\}$. 处不是光滑纤维化

(3) 若 $\mathbb{Q}$-圆锥丛 φ: $X \to S$ 关于$\mu_m := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 在 $s \in S$ 处是环面型的，则称之为在 $s \in S$ 处环面型；若在 s 的某个邻域上， X 与商空间 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2/\mu_m$ 同构。这里， μ_m 作用定义为

$$(t; z_1, z_2) \to (\varepsilon^b t; \varepsilon z_1, \varepsilon^{-1} z_2),$$

其中 b 是一个满足 gcd$(m, b) = 1$ 的整数， ε 是本原的 m 次单位根。在这种情况下， X 的奇点是类型为 $(1/m)(b, 1, -1)$ 和 $(1/m)(-b, 1, -1)$ 的循环商奇点；此外，底空间 $S \cong \mathbb{C}^2/\mu_m$ 的奇点是类型为 A_{m-1} 的循环商奇点。

一个 $\mathbb{Q}$-圆锥丛 φ: $X \to S$ 满足维数 $X = 3$ 可在其上局部明确描述S。以下推论是分类 [Pro18、推论 10 的直接结果。85]。

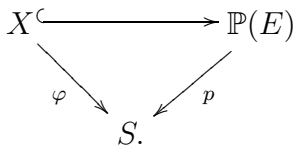
引理3.2 ([Pro18，推论10。85])。 设 φ: $X \to S$ 是一个 $\mathbb{Q}$圆锥丛，且维数 $X = 3$，并且 $\Delta \subset S$ 是判别除子。那么 $s \notin \Delta$ 当且仅当 φ: $X \to S$在 s处是环面型。

3.2.圆锥丛。 在本小节中，我们回顾[Sar82]中介绍的圆锥丛，并将某些性质推广到非射影情形（见命题 3.4和 3.5）。我们由命题 3.5 推出命题 3.4。命题 3.4 的证明与 [Sar82] 中的论证相同，即使在非射影情形下也是如此；因此我们省略详细证明。

定义3.3. 若 $\mathbb{Q}$-圆锥丛 φ: $X \to S$ 满足 X 和 S 均光滑，则称其为圆锥丛。

命题 3.4. 设 φ: $X \to S$ 是一个圆锥丛。则有：

(1) $-K_X$ 是 φ-非常丰的； $E := \varphi_*(-K_X)$ 是秩为 3 的局部自由层； $E = \varphi_*(-K_X)$ 定义了从 φ: $X \to S$ 到 p: $\mathbb{P}(E) \to S$ 的嵌入：



此外，点 $s \in S$ 处的概形意义下的纤维 X_s 是射影平面 $\mathbb{P}(E_s)(\cong \mathbb{P}^2)$上的一个圆锥曲线（可能是可约的或非约化的）。

(2) $X \subset \mathbb{P}(E)$ 可以写成一个截面的零点集

$$\sigma \in H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(2) \otimes p^*(-\det E - K_S)).$$

(3) 我们将 $\mathbb{P}(E)$ 与 $\mathbb{P}^2 \times U$ 在一个带有坐标 z 的小开子集 $U \subset S$ 上作如下对应。于是，$X \subset \mathbb{P}(E)$ 到 U 上的嵌入 $= \mathbb{P}^2 \times U$ 可写为

$$X = \{([x_0 : x_1 : x_2], z) \in \mathbb{P}^2 \times U \mid \sum_{0 \le i,j \le 2} a_{i,j}(z) x_i x_j = 0\},$$

其中 $a_{i,j} \in \mathcal{O}_S(U)$。此外，判别除子 Δ 与非光滑轨迹 $\{s \in S \mid \varphi$ 重合，在 s$\}$ 处不光滑，并可描述为

$$\Delta = \{z \in S \mid \det[a_{i,j}(z)]_{i,j=0}^2 = 0\}.$$

(4) 对于给定点 $s \in U$，通过改变 U 的坐标 z 和 E 的基，我们可以假设 $a_{i,j} = 0$ 对于 $i \neq j$。此外，我们可以假设 that

- $a_{i,\ i} \in \mathcal{O}_Y^*(U)$ 对任意 $0 \le i \le 2$，当 X_s 光滑时；
- $a_{i,i} \in \mathcal{O}_Y^*(U)$对任意 $1 \le i \le 2$ 且 $\mathrm{mult}_s(a_{0,0}) = 1$ 当 X_s 是既约且可约的。

(5) 判别除子 Δ 在 S中余维二处为正规交叉。此外，一般点 $s \in \Delta$ 的纤维 X_s 既约且可约。(6) $c_1(\Delta) = -c_1(\det E) - 3c_1(K_S)$成立。

证明。第 (1) 点和第 (2) 点归功于 [Sar82, 1.5]。第 (3) 点归功于 [Sar82, 命题 1.7]。第 (4) 点归功于 [Sar82, 命题 1.8，第 5] 点。第 (6) 点归功于 [Sar82, 定义 1.6]。除子 Δ 由 [Sar82, 推论 1.9]约化。第 (5) 点的第一项陈述由 [Sar82, 命题 1.8，第 5] 点的证明推出（另见 [Pro18, 3.3.3]）。第 (5) 点的第二项陈述由 [Sar82, 命题 1.8，第 4] 点推出。□

命题 3.5. 设 $\varphi\colon\ X \to S$ 是一个圆锥丛。那么，我们有

$$\varphi_*(c_1(K_X)^2) = -4c_1(K_S) - c_1(\Delta).$$

证明。该命题在射影情形下已得到证明（见 [Mi83，4。11]）。我们将 [Mi83，4。11] 中的讨论推广到非射影情形。根据命题 3.4 (6)，结论等价于

$$\varphi_*(c_1(K_X)^2) = \frac{4}{3}c_1(\det E) + \frac{1}{3}c_1(\Delta).$$

我们固定一个光滑厄米度量 h 在 $E = \varphi_*(-K_X)$上，并使用相同的记号h表示诱导在 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$上的度量。然后，根据伴随公式和命题 3.4 (2)，结论等价于以下公式：

$$p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1), h)^2 \wedge [X]) = \frac{4}{3}c_1(\det E, \det h) + \frac{1}{3}[\Delta], \tag{3.1}$$

其中 $[X], [\Delta]$ 是积分流，而 $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)\ h)\ c_1(\det\ E, \det\ h)$ 是除以 2π 的陈曲率。

我们首先证明所需公式在 $S \setminus \Delta$上成立。为此，我们总结一些关于向量丛曲率的公式（例如，参见[Dem，第五章第 15.C 节]）。设 n =维数 S 以及 r : =秩 $E(=3)$。给定 $s \in S \setminus \Delta$，我们取一个e_λ局部标架$_{\lambda=1}^r$ 属于 E ，它在 E_s 处给出一个 $s \in S$正交归一基，然后将 E 的陈曲率写为

$$\Theta_h(E) = \sum_{1\le j,k\le n, 1\le\lambda,\mu\le r} c_{jk\lambda\mu} dz^j \wedge d\overline{z}^k \otimes e_\lambda^* \otimes e_\mu, \tag{3.2}$$

其中 $(z_j)_{j=1}^n$ 是 S的局部坐标。令 $[x] \in \mathbb{P}(E_s)$ 表示由满足 $\sum_{\lambda=1}^r |x_\lambda|^2 = 1$ 的向量 $\sum_{\lambda=1}^r x_\lambda e_\lambda^* \in E_s^*$所代表的点。于是， $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ 在 $[x]$处的曲率可写为

$$\Theta_h(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))_{[x]} = \sum_{1\le j,k\le n, 1\le\lambda,\mu\le r} c_{jk\lambda\mu} x_\lambda \overline{x}_\mu dz^j \wedge d\overline{z}^k + \sum_{1\le\lambda\le r-1} d\xi_\lambda \wedge d\overline{\xi}_\lambda, \tag{3.3}$$

其中，$(\xi_\lambda)_{\lambda=1}^{r-1}$ 是由超平面$(\mathbb{C}x)^\perp \subset E_s^*$上的酉坐标诱导的 $\mathbb{P}(E)$的坐标。我们将 $\mathbb{P}(E)$ 与 $\mathbb{P}^{r-1} \times U$ 识别为 s的一个开邻域 $U \subset S$，并将 $\mathbb{P}^{r-1}$ 上的 Fubini-Study形式 Ω 视为 $\mathbb{P}(E)$ 上的 (1, 1)-形式。然后，我们可以很容易地验证

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta_h(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))_{[x]} = \Omega - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\frac{\langle p^*\Theta_{h^*}(E^*)x, x\rangle}{|x|^2} \quad \text{for any } [x] \in p^{-1}(s).$$

光滑形式的推前可以描述为在 $s \in S \setminus \Delta$附近的纤维积分（例如，参见 [GPR94，定理 1.14，命题 2.15，第二章]）。因此，我们得到

$$\begin{aligned} p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1), h)^2 \wedge [X])_s &= \int_{X_s} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1), h)^2 \\ &= -2 \cdot \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{X_s} \Omega \wedge \frac{\langle p^*\Theta_{h^*}(E^*)x, x\rangle}{|x|^2}, \end{aligned}$$

其中， X_s 是 φ的纤维： $X \to S$ 位于 $s \in S$。

我们考虑 $X_s = \{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\}$. 的特殊情形。容易看出

$$\int_{X_s} \frac{x_\lambda \overline{x}_\mu}{|x|^2} \Omega = \frac{2}{3} \cdot \delta_{\lambda\mu},$$

其中 $\delta_{\lambda\mu}$ 是克罗内克δ。因此，由公式（3.2），我们得到

$$\begin{aligned}\int_{X_s} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1),h)^2 &= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{\lambda} c_{jk\lambda\lambda}dz^j\wedge d\overline{z}^k\\ &= \frac{4}{3}c_1(\det E,\det h).\end{aligned}$$

一般情形可以归约为特殊情形。事实上，根据命题 3.4 (4)，我们可以假设 $X_s=\{C_0x_0^2+C_1x_1^2+C_2x_2^2=0\}$，其中 C_i 是一个非零常数。因此，我们看到 X_s 在上同调意义下等价于 $\{x_0^2+x_1^2+x_2^2=0\}$ 在 $\mathbb{P}(E_s)$ 中。由斯托克斯公式可得

$$\begin{aligned}\int_{X_s} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1),h)^2 &= \int_{\{x_0^2+x_1^2+x_2^2=0\}} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1),h)^2\\ &= \frac{4}{3}c_1(\det E,\det h).\end{aligned}$$

富比尼定理表明

$$\int_S \varphi_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1),h)^2)\wedge\alpha = \int_{S\setminus\Delta}\alpha\wedge\int_{X_s} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1),h)^2$$

对于任意光滑形式 α，满足 $\operatorname{Supp}\alpha\Subset S\setminus\Delta$，这意味着

$$p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1),h)^2\wedge[X]) = \frac{4}{3}c_1(\det E,\det h)\text{ on }S\setminus\Delta.$$

最后，我们在 S上证明所需的公式（3.1）。推前 $p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)\ h)^2\wedge[X])$ 是一个正规流；因此，应用支撑定理（见引理 2.2），我们可以找到 $c_i\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathbb{I}^{\Delta}\,p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1),h)^2\wedge[X]) = \sum_i c_i[\Delta_i],$$

其中 $\{\Delta_i\}_{i\in I}$ 是 Δ 的不可约分支。我们通过将 c_i 视为沿 Δ_i 的一般勒隆数，证明了对于任意 i，$c_i=1/3$。请注意，c_i 与 E 上度量 h 的选择无关。事实上，设 $h'=he^{-\psi}$ 是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}$ 上的另一个光滑厄米度量 (1)，并具有某个 $\psi\in C^\infty$（$\mathbb{P}$（E））。那么我们有

$$p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1),h')^2\wedge[X]) - p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1),h)^2\wedge[X]) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}F,$$

其中 F 是一个由下式定义的函数

$$F(s) = \int_{X_s}\psi\cdot(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1),h')+c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1),h))\text{ for }s\in S.$$

要验证勒隆数与所选 h无关，只需证明 F 在穿过 Δ一般点的任意小一维圆盘上连续，而这可由循环空间理论推出（例如，参见[Bar78，推论 1]）。

为了完成证明，对于一般点 $s \in \Delta_i$，我们构造一个光滑厄米度量 h 在 E 上（例如，通过单位分解），使得 h 在 s的邻域内是平坦的。然后，根据 $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)\ h) = \Omega$，只需证明

$$p_*(\Omega^2 \wedge [X]) = \frac{1}{3}[\Delta_i]$$

在 s的一个邻域 U 上。下文中，我们局部地用射影圆锥丛 $\{X_N \to S\}_{N=1}^{\infty}$逼近 $X \to S$，并利用 [Mi83,4.11]证明所需的等式。（即使考虑下面的逼近论证，该命题本身似乎也不能直接由 [Mi83, 4.11],推出。）设 $z_0x_0^2 + f_1x_1^2 + f_2x_2^2$ 是 $X \subset \mathbb{P}(E)$的一个局部定义函数，其中 $f_1, f_2 \in \mathcal{O}^*(U)$。我们将 $U \subset S$ 视为 $\mathbb{P}^n$中的一个开子集。于是，我们可以找到 $g_N \in H^0(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^2, \mathcal{O}(N) \boxtimes \mathcal{O}(2))$，使得

$$[X \cap \mathbb{P}(E)] = \lim_{N\to\infty} [X_N \cap \mathbb{P}(E)] \text{ over } U, \text{ where } X_N := \{g_N = 0\}$$

通过对 f_1, f_2 进行多项式逼近（例如，可以使用泰勒展开）。根据贝尔蒂尼定理，$H^0(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^2, \mathcal{O}(N) \boxtimes \mathcal{O}(2))$中的一般成员确定了一个以 $\mathbb{P}^n$为底空间的圆锥丛。因此，用一般成员替换 g_N 后，我们可以假设 $X_N = \{g_N = 0\} \to \mathbb{P}^n$ 是一个判别除子为 Δ_N 的圆锥丛。由于$X_N \to \mathbb{P}^n$ 是一个射影圆锥丛，我们有

$$p_*(\Omega^2 \wedge [X_N \cap \mathbb{P}(E)]) = \frac{1}{3}[\Delta_N] \text{ over } U$$

根据 [Mi83, 4.11]。因此，令 $N \to \infty$ 在流空间中取极限，我们便得到所需的结论。事实上，推前 $p_*(\Omega^2 \wedge \bullet)$定义了从 $U \times \mathbb{P}^2$ 上的流空间到 U上的流空间的连续映射，这意味着左端收敛到 $p_*(\Omega^2 \wedge [X \cap \mathbb{P}(E)])$。另一方面，根据构造，右端收敛到 $[\Delta_i]$。□

3.3. 极小模型纲领。 在本小节中，我们回顾 ¨ 中发展的关于 K[HP15a、HP15b、HP16],的三维凯勒流形的极小模型纲领，并观察极小模型纲领对猜想 1.1（见推论 3.11）带来的结果。

定理 3.6 ([HP15b])。 设 X 是一个 $\mathbb{Q}$-阶乘紧致 K ¨ahler 空间，维数为3 且具有终端奇点。假设 维数 $R(X) = 2$，其中 $R(X)$ 是一个 MRC纤维化 $X \dashrightarrow R(X)$ 的底空间，且 X。那么，我们有：

(1) X 与一个极大有理连通纤维化（Mori 纤维空间）双有理等价；更准确地说，存在 *a bimeromorphic map* $\pi\colon X \dashrightarrow X'$ *and an MFS* $\varphi\colon X' \to S$ *such that*

(a) $X \dashrightarrow X'$ 由除子收缩和翻转的复合得到；

(b) X' 是具有终端奇点的 $\mathbb{Q}$阶乘紧致 K¨ahler 空间；(c) S 是维数为 2、具有 klt 奇点的 $\mathbb{Q}$阶乘紧致 K¨ahler 空间；(d) S 是非单有理覆盖的，且 K_S 是伪有效的；(e) $-K_{X'}$ 是 φ-丰沛的，且相对 Picard 数 $\rho(X'/S)$为 1；(f) φ: $X' \to S$ 是等维的，且相对维数为 1。

(2) 极小模型纲领的结果 $X \dashrightarrow X' \to S$ 经由阿尔巴内塞映射α分解： $X \to A(X)$, 也就是说，存在态射 β： $S \to A(X)$，使得以下图表成立：

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{\pi}{\dashrightarrow} & X' \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ A(X) & \xleftarrow{\beta} & S. \end{array}$$

证明。 在 [HP15b] 中对初始代数簇 X运行极小模型纲领，我们可以找到一个双有理映射 π: $X \dashrightarrow X'$使得要么 $K_{X'}$是数值有效的，要么存在一个极大有理连通纤维化 φ: $X' \to S$。

我们可以轻易排除 $K_{X'}$ 为数值有效的情形。事实上，根据 [Bru06，推论 1。2],我们看到 Y 是非单有理覆盖的，当且仅当 K_Y 是伪有效的，其中 Y 是一个具有 ¨维的紧 Kähler空间， ≤ 3 且具有终端奇点。因此，注意到 X' 具有终端奇点，如果 $K_{X'}$ 为数值有效的，则代数簇 X' 是非单有理覆盖的，这与 dim $R(X) = 2$相矛盾。因此，除 (c) 和 (d) 外，其他性质均由 [HP15b]得到。

该结论 $X \dashrightarrow X' \to S$ 给出了 X的一个MRC纤维化，这意味着 S 是一个非单有理覆盖曲面，因为dim $R(X) = 2$。非单有理覆盖性表明K_S 是伪有效的。事实上，对于 S的极小消解 π: $S \to S$ ，我们有$\pi^* K_S = K_{\bar{S}} + E$ ，其中 E是某个有效的例外 $\mathbb{Q}$-除子。由于 S 是非单有理覆盖的，我们看到 $K_{\bar{S}}$ 是伪有效的；因此 K_S也是伪有效的。

与射影情形一样，MMP 的所有步骤（即除子收缩、翻转、MFS）都由有理曲线的收缩得到。因此，由于环面 A（X）不含有理曲线，结果 $X \dashrightarrow X' \to S$ 可经由阿尔巴内塞映射 $X \to A$（X）分解。□

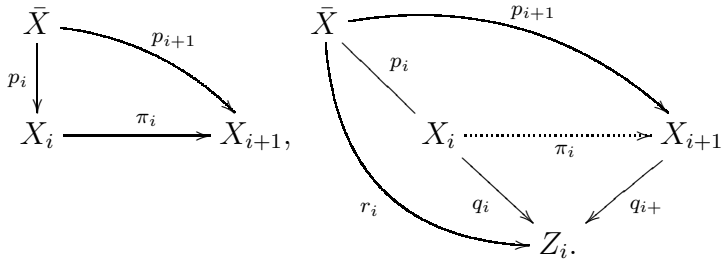
让我们简要考察 $-K_{X'}$ 的正性。假设我们从具有数值有效反典范丛 $-K_X$ 的 X 出发，并在定理 3.6 中得到一个双亚纯映射 π: $X \dashrightarrow X'$。我们可能会期待 $-K_{X'}$ 在 π 的“例外轨迹之外”仍然是数值有效的： $X \dashrightarrow X'$，但证明这一点并不直接。事实上，在取一个光滑形式 $T_\varepsilon \in c_1(-K_X)$ 使得 $T_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega$ 后，我们可以在 X' 上得到 $\pi_* T_\varepsilon \geq -\varepsilon \pi_* \omega$ ，其中 ω 是 X 上的 K¨ähler 形式。然而，目前的 $\pi_*\omega$ 与 X' 上的 K¨ähler 形式之间的关系尚不清楚。因此，我们准备引理 3.8，以比较 X 上的 K¨ähler 形式与 X' 上的形式。

设定 3.7。 在陈述引理 3.8之前，我们先固定记号。假设定理 X 中的 3.6 是光滑的，且 $-K_X$ 是数值有效的。双亚纯映射 $X \dashrightarrow X'$ 分解如下：

$$X =: X_0 \dashrightarrow X_1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_N := X', \tag{3.4}$$

其中每个双亚纯映射 $\pi_i\colon X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ 都是除子收缩或翻转。令

$\bar{}$ $\bar{X}$ 为一个紧致K¨ahler 流形，带有一个双亚纯态射 $p_i\colon X \to X_i$ ，该态射消解了 π_i 的不定点集（当 π_i 为翻转时）。根据 π_i 是除子收缩还是翻转，我们得到以下图表：



注意 Z_i 且 X_i 是 K¨ahler 空间，根据 [HP15b，定理 315]。簇 X_i 在一个非空 Zariski 开集上彼此双全纯。将该开集视为所有 X_i的开子集，称为 双全纯轨迹。注意， 中双全纯轨迹的补集 $X_N = X'$ 的余维为 ≥ 2。

引理 3.8。 我们考虑设定 3.7。那么，对于任意 $0 \leq i \leq N$，存在一个 K¨ahler 形式 ω_i 于 X_i ，使得 Bott-Chern 类

$$\{p_{0*}(p_{i+1}^*\omega_{i+1} - p_i^*\omega_i)\} + O(E, K_X)$$

由一个在 $X \dashrightarrow X'$ 的双全纯轨迹上光滑的正流表示，其中 $O(E, K_X)$ 是 K_X 和例外除子 $p_{0*}p_i^*E_i$ 的第一陈类的线性组合。这里， E_i 表示 π_i 的例外除子： $X_i \to X_{i+1}$（当它是除子收缩时）。特别地，Bott-Chern 上同调类 $\{p_{0*}p_i^*\omega_i - \omega_0\} + O(E, K_X)$ 由一个在 $X \dashrightarrow X'$ 的双全纯轨迹上光滑的正流表示。

备注 3.9。 引理 3.8 的证明适用于任意维数的 K¨ahler 空间，前提是存在除子收缩或翻转 π_i： $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ 存在。在射影情形中，Mori 锥定理和 Kawamata 无基点定理会收缩与典范除子交数严格为负的极端射线。这种收缩由适当选取的线丛的 Iitaka 纤维化的 Stein 分解给出。因此，极小模型纲领的结果总是射影簇。有人猜想，Mori 锥定理的 K¨ahler 版本也会以类似方式将 K¨ahler 空间收缩为 K¨ahler 空间，这一结论在维数不超过 3 时已得到验证（参见 [HP16]）。

证明。固定一个 K¨ahler 形式 ω_N 于 X_N 上。假设 ω_{i+1} 已经构造完成，我们接着归纳地构造 ω_i。

我们首先考虑这样的情形： π_i： $X_i \to X_{i+1}$ 是一个以 E_i为例外除子的除子收缩。由于 $-E_i$ 是 π_i-丰沛的，我们可以取一个光滑形式 $\theta_i \in c_1(E_i)$，使得 $\omega_i := \pi_i^*\omega_{i+1} - \varepsilon\theta_i$ 在 X_i 上对 $1 \gg \varepsilon > 0$而言是一个 K¨ahler 形式。于是，我们得到

$$p_{0*}(p_{i+1}^*\omega_{i+1} - p_i^*\omega_i) = p_{0*}p_i^*(\pi_i^*\omega_{i+1} - \omega_i) = \varepsilon p_{0*}p_i^*\theta_i.$$

The 流 $p_{0*}p_i^*\theta_i$ 代表 $c_1(p_{0*}p_i^*E_i) = O(E)$，从而完成证明。

现在考虑这样的情形： π_i： $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ 是一个翻转。固定 Z_i 上的一个 K¨ahler 形式 ω_{Z_i}（允许缩放），使得$\omega_{i+1} \geq q_{i+}^*\omega_{Z_i}$。此外，由于 $-K_{X_i}$ 是 q_i-丰沛的，我们可以取一个光滑形式 $\eta_i \in c_1(K_{X_i})$，使得 $\omega_i := q_i^*\omega_{Z_i} - \varepsilon\eta_i$ 在X_i 上对 $1 \gg \varepsilon > 0$而言是一个 K¨ahler 形式。于是，我们很容易看出

$$\begin{aligned} p_{0*}(p_{i+1}^*\omega_{i+1} - p_i^*\omega_i) &= p_{0*}(p_{i+1}^*\omega_{i+1} - p_i^*(q_i^*\omega_{Z_i} - \varepsilon\eta_i)) \\ &= p_{0*}(p_{i+1}^*(\omega_{i+1} - q_{i+}^*\omega_{Z_i}) + \varepsilon p_i^*\eta_i). \end{aligned}$$

当前的 $\varepsilon p_{0*}p_i^*\eta_i$表示 $\varepsilon c_1(p_{0*}p_i^*K_{X_i}) = O(K_X, E)$，并且 $p_{0*}(p_{i+1}^*(\omega_{i+1} - q_{i+}^*\omega_{Z_i}))$ 在双全纯轨迹上是光滑的，这就完成了证明。□

稍后，我们将证明 $X \dashrightarrow X'$ 在定理 3.6 中描述的映射实际上是同构，当 $-K_X$ 具有数值有效性时。为此，我们需要以下关于交数的推论。注意，当 X_i 光滑时，以下命题中的某些内容可以通过称 $-K_{X_i}$ 具有修正的数值有效性来简化。然而，由于在奇异空间上修正的 nef 性的定义存在歧义，本文不使用这一术语。

命题 3.10。 我们考虑设定 3.7。令 ω_i 为凯¨勒形式定义在 X_i上。则有：

(1) 存在一个正流 $T_\varepsilon \in c_1(-K_{X_i}) + \varepsilon\{\omega_i\}$，使得 T_ε 在 $X \dashrightarrow X'$ 的双全纯轨迹上光滑。

(2) 对于曲面 $V \subset X_i$，我们有

$$(c_1(K_{X_i})^2 \cdot \{\omega_i\}) \geq 0 \ and \ (c_1(-K_{X_i}) \cdot c_1(V) \cdot \{\omega_i\}) \geq 0.$$

证明。 由 $-K_X$ 的 nef 性，存在一个光滑的（半）正形式 $S_\varepsilon \in c_1(-K_X)+\varepsilon\{\omega_0\}$。根据引理 3.8，我们可以找到一个正流 $P \in \{p_{0*}p_i^*\omega_i - \omega_0\} + O(E, K_X)$，使得 P在 $X \dashrightarrow X'$ 的双全纯轨迹上光滑。正流 $p_{i*}p_0^*(S_\varepsilon + \varepsilon P)$（定义在 X_i 上）是正的，并且代表

$$p_{i*}p_0^*(c_1(-K_X) + \varepsilon p_{0*}p_i^*\{\omega_i\} + \varepsilon O(E, K_X)).$$

上述类与 $c_1(-K_{X_i}) + \varepsilon\{\omega_i\} + \varepsilon O(K_{X_i})$ 在双全纯轨迹上重合，后者是 X_i 上的 Bott-Chern 上同调类。因此，根据命题 2.1 正流 $p_{i*}p_0^*(S_\varepsilon + \varepsilon P)$ 实际上表示 $c_1(-K_{X_i}) + \varepsilon\{\omega_i\} + \varepsilon O(K_{X_i})$。然后，

结论 (1)很容易得出，因为 $O(K_{X_i})$-部分可以吸收到K¨ahler 类中，而 $p_{i*}p_0^*(S_\varepsilon+\varepsilon P)$ 在双全纯轨迹上是光滑的。

为证明结论（2），我们首先指出， $c_1(V)$ 是良定义的，因为 X_i 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的。设 Q 是由 $c_1(V)\cdot\{\omega_i\}$ 或 $c_1(-K_{X_i})\cdot\{\omega_i\}$ 定义的一个 (2, 2)-类。无论哪种情况，注意到 $p_i^*(-K_{X_i})$ 和 $p_i^*c_1(V)$ 都是伪有效的，拉回 p_i^*Q 都可以表示为一个正的 (2, 2)-流。因此，由于 S_ε 是一个光滑的（半）正 (1, 1)-形式，交数 $(\{p_0^*S_\varepsilon\}\cdot p_i^*Q)$ 非负。于是，结论（2）由

$$\begin{aligned}(c_1(-K_{X_i})\cdot Q) &= \lim_{\varepsilon\to 0}((c_1(-K_{X_i})+\varepsilon\{\omega_i\}+\varepsilon O(K_{X_i}))\cdot Q)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}(\{p_{i*}p_0^*(S_\varepsilon+\varepsilon P)\}\cdot Q)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}(\{p_0^*(S_\varepsilon+\varepsilon P)\}\cdot p_i^*Q)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}(\{p_0^*S_\varepsilon\}\cdot p_i^*Q)\geq 0.\end{aligned}$$

□

推论 3.11. 我们考虑设定 3.7 以及极大有理连通纤维化 $\varphi\colon X_N=X'\to S$ 在定理3.6中。于是，我们有:

(1) $-4c_1(K_S)-c_1(\Delta)$是伪有效的，其中 Δ 是极大有理连通纤维化 φ 的判别除子: $X\to S$（这是一个 $\mathbb{Q}$-圆锥丛）。

(2) $\Delta=0$、 $c_1(K_S)=0$及 $\kappa(S)=0$ 成立；尤其是， $\varphi\colon X'\to S$ 在S 上是环面型的，并且 S 仅有有理双点。此外，当 S 光滑时，代数簇X' 自动光滑，且 $\varphi\colon X'\to S$ 是一个（局部平凡的） $\mathbb{P}^1$-丛。

证明。 在证明中，我们取 Zariski开子集 $S_0\subset S$ ，其余维数为 $S\setminus S_0)\geq 2$。为保持记号清晰，我们始终将这些子集称为 S_0，尽管它们可能会发生变化。由于 $-K_{X'}$ 是 φ-丰的，根据定理 3.6 (d)，我们可以取一个凯勒¨形式$\omega'\in c_1(-K_{X'})+\{\varphi^*\omega_S\}$，其中 ω_S 是 ¨上的一个固定凯勒形式 S。根据命题 3.10(1)，存在一个正流

$$T_\varepsilon\in -c_1(K_{X'})+\varepsilon\{\omega'\}=-(1+\varepsilon)c_1(K_{X'})+\varepsilon\{\varphi^*\omega_S\}$$

使得 T_ε 在 $\varphi^{-1}(S_0)$ 上光滑。由于 X' 在余维二处光滑，存在 S_0使得 $\varphi|_{X_0}\colon X_0:=\varphi^{-1}(S_0)\to S_0$ 是一个圆锥丛。注意，Bedford-Taylor 乘积 T_ε^2定义在 X'_{reg}上。根据命题 3.5，定义在S_0 上的推前 $\varphi_*(T_\varepsilon^2)$ 是表示 S_0上以下类的正流:

$$\begin{aligned}&\varphi_*\big((-(1+\varepsilon)c_1(K_{X'})+\varepsilon\{\varphi^*\omega_S\})^2\big)\\ &=-(1+\varepsilon)^2(4c_1(K_S)+c_1(\Delta))-2\varepsilon(1+\varepsilon)\varphi_*c_1(K_{X'})\cdot\{\omega_S\}+\varepsilon^2\varphi_*\{\varphi^*\omega_S^2\}\\ &=-(1+\varepsilon)^2(4c_1(K_S)+c_1(\Delta))+4\varepsilon(1+\varepsilon)\cdot\{\omega_S\}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

这里，我们使用了 $\varphi_*c_1(K_{X'}) = -2$ 以及 $\varphi_*\{\varphi^*\omega_S^2\} = 0$ 在 S_0. 上成立这一事实。命题 2.1 表明， $\varphi_*(T_\varepsilon^2)$实际上是 S 上的正流，表示右端的 Bott-Chern上同调类。由于 $\varphi_*(T_\varepsilon^2)$的质量测度一致有界，根据弱紧性，我们可以假设 $\varphi_*(T_\varepsilon^2)$具有弱极限（见[Dem，（1.14）、（1.23）命题，第三章]）。事实上，关于 ω_S 的 $\varphi_*(T_\varepsilon^2)$的总质量等于（3.5）与 $\{\omega_S\}$的交数，该交数在 $\varepsilon \in [0,1$中一致有界）。注意到 S 具有奇点，但我们可以在对 S取奇点消解后应用弱紧性。于是， $\varphi_*(T_\varepsilon^2)$的弱极限是一个表示该类的正流

$$\lim_{\varepsilon\to 0} -(1+\varepsilon)^2(4c_1(K_S)+c_1(\Delta)) + 4\varepsilon(1+\varepsilon)\cdot\{\omega_S\} = -4c_1(K_S) - c_1(\Delta).$$

这表明 $-4c_1(K_S) - c_1(\Delta)$ 是伪有效的。

定理 3.6 (d) 表明 $\Delta = 0$ 和 $c_1(K_S) = 0$ 成立。根据引理3.2， $\mathbb{Q}$-圆锥丛φ: $X' \to S$ 是环面型的，而 S 的奇点是有理双¯点。因此，对于极小消解 h: $S \to S$, 我们有 $K_{\bar{S}} = h^*K_S$，这¯意味着 $\kappa(S) = \kappa(S) = 0$。结论（2）的后一陈述是 [AR14, 定理 5] 的特殊情形。□

备注 3.12: 在证明中，如果 X' 是光滑的，则 Bedford-Taylor 积 T_ε^2 可以在 X' 上定义为表示（c_1（$-K_i$）$+\varepsilon\{\omega_i\}$）²的正流。即使 X' 具有奇点，这一点也应当成立；这将为命题3.10提供一种更直接的证明，但我们无法证明这一预期。我们通过考虑（1， 1）-流 φ_*（T_ε^2）（而不是 T_ε^2）来避免这一困难。

4. Proof of the Main Results

本节旨在证明定理 1.3。在本节中，设X 为具有数值有效反典范丛的非射影紧致 K¨ahler 三维簇。如第 1.2 节所述，对于定理 1.3，我们可以假设 dim $R(X) = 2$ 。此外，通过用有限 ´étale 覆盖替换 X ，我们可以假设 $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}^{\oplus 2q}$，其中 q 是 X 的不规则度。这里我们使用了 $\pi_1(X)$是几乎阿贝尔的事实（关于基于 Monge-Amp`ère 方程的证明，参见 [P˘au97，定理 ´eor`eme 2] ；关于基于 K¨ähler–Einstein 度量变分的证明，参见 [P˘au17，定理 1.4], [Cam95，定理 2.2] ）。我们在第 4.2 小节讨论 $q \neq 0$ 的情形，并在第 4.3 小节讨论 $q = 0$ 的情形。

4.1. 关于MRC纤维化的基底。 在开始定理 1.3 的证明之前，我们确定MRC纤维化的光滑极小基底 X。

命题 4.1. 设 X 是一个具有数值有效反典范丛的非射影紧致 K ¨ähler 三维流形，满足 dim $R(X) = 2$，其中 $R(X)$ 表示光滑极小

X 的 MRC纤维化的基底。因此，经过 X 的有限 étale 覆盖 $'$后，基底 $R(X)$ 要么是环面，要么是 K3 曲面。特别地， X 的增广不规则度为 2 或 0。

证明。通过将 X 替换为有限 $'$平展覆盖，我们假设 $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}^{\oplus 2q}$。特别地，我们有 $q = \dim A(X)$，其中 q 是 X的不规则度。

考虑与定理3.6相同的情形。由于 $X \dashrightarrow X' \to S$ 在定理3.6 中是 X的 MRC纤维化，我们通过注意到 $\gamma\colon\ R(X) \to S$ 以及 $R(X)$ 是 MRC纤维化的光滑极小基底，且 MRC纤维化的基底在双亚纯模型意义下唯一确定，从而得到极小消解。根据推论3.11，代数簇 S 具有 A_{m-1} 型循环商奇点（见定义3.1），因此我们有

$$c_1(K_{R(X)}) = c_1(\gamma^* K_S) = 0.$$

曲面分类（例如，见 [BHPV04]）表明 R（X）是一个（2 维）环面或 K3 曲面。请注意，恩里克斯曲面和双曲面的可能性因 R（X）的非射影性而被排除。

我们考虑 $q =$ 维 $A(X) > 0$的情形。根据[P$\check{}$au17，定理 1.4]，，阿尔巴内塞映射 $\alpha\colon X \to A(X)$是满射，因此，在定理 3.6 中， $\beta\colon S \to A(X)$也是满射。通过利用 $\gamma\colon R(X) \to S$和 $\beta\colon S \to A(X)$将 $A(X)$ 上的1-形式拉回，我们可以看出，$R(X)$是一个环面，这表明 $q \geq 2$。在 $q =$ 维 $A(X) = 3$的情形下，流形 X 是非单有理覆盖的，这与 dim $R(X) = 2$ 矛盾。因此，我们可以得出结论， $q = 2$ ，且 $R(X)$ 是一个环面。

我们考虑 $q =$ 维数 $A(X) = 0$的剩余情形。在这种情况下，流形 X是单连通的，因此 $R(X)$ 也如此，依据 $\pi_1(X) \cong \pi_1(R(X))$（见 [Kol93，定理 5。2] 以及 [BC15，定理 4。1]），这表明 $R(X)$ 是一张 K3 曲面。□

4.2. 非 X 单连通的情形。 本小节中，我们在假设 $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}^{\oplus 2q}$, $q \neq 0$且 dim $R(X) = 2$ 的条件下证明定理 1.3 。

定理 4.2. 考虑与小节 *4.2*开头相同的情形。则，除去 $'$的有限 Xétale 覆盖，存在一个数值平坦向量丛 $\mathcal{F}$ 定义在 $A(X)$上，使得 X 同构于射影空间丛 $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ ，其基底为 $A(X)$。

证明。我们首先证明定理 3.6 中的 $\beta\colon S \to A(X)$ 实际上是同构的。注意，由命题 4.1， $A(X)$ 是一个二维环面；由 [P$\check{}$au17，定理 1.4]， $\beta\colon S \to A(X)$ 是满射。于是，对某个支撑在 $\beta\colon S \to A(X)$ 的分歧轨迹中的有效除子 E ，有 $K_S = \beta^* K_{A(X)} + E$ 。由 $c_1(K_{A(X)}) = 0$ 和 $c_1(K_S) = 0$（见推论 3.11），我们推得 $E = 0$，这表明 $\beta\colon S \to A(X)$ 是 étale 的，且 S 是一个环面。根据阿尔巴内塞映射的泛性质，可知 $\beta\colon S \to A(X)$ 同构。

根据推论 3.11 (2)，极大有理连通纤维化 $\varphi\colon\ X' \to S \cong A(X)$ 在定理 3.6 中是一个 $\mathbb{P}^1$-丛；因此，除去一个有限 $'$étale覆盖 X'后，存在一个向量丛 $\mathcal{F}$ 在 $A(X)$ 上，使得

$X' \cong \mathbb{P}(\mathcal{F})$ 和 $\det(\mathcal{F}) = \mathcal{O}_{A(X)}$ 由 [CP91，引理7。4]（参见 [Ele82]，以获取有关 Brauer 群的更多信息）。我们证明，$\mathcal{F}$ 可以选为数值平坦。我们强调，以下讨论仅在 X' 和 S 光滑时成立。根据公式

$$-K_{X'} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(2) - \varphi^* \det \mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(2),$$

只需证明 $-K_{X'}$ 是数值有效的。将正则化定理 [Dem92, 命题 3.7] 应用于命题 3.10 (1) 中的正流，我们得到具有解析奇点的正流$T_\varepsilon \in c_1(-K_{X'}) + \varepsilon\{\omega_{X'}\}$，使得 T_ε 的奇异轨迹在 S 上的像不稠密。由推论 3.11 的证明可知，$\varphi_*(c_1(-K_{X'})^2) = 0$，且 $\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi_*(T_\varepsilon^2) = 0$；因此，根据 [Wu22b，引理 15]，$T_\varepsilon$ 的勒隆数在 X' 上一致收敛于 0。因此，通过光滑形式的正则化（参见 [Dem92，定理 1.1]，，以及 [Wu22b，定理4] 的证明末尾和 [Wu22b，推论 6]），可得 $-K_{X'}$ 是数值有效的。

最后，我们证明 $X \dashrightarrow X'$ 确实是同构。为此，我们聚焦于 MMP 的最后一步 $X_{N-1} \dashrightarrow X_N = X'$（见（3.4）），并将证明分为以下三个连续的论断。

断言 4.3。 $X_{N-1} \dashrightarrow X_N = X'$ 不可能是翻转。

证明。每条有理曲线 $R \subset X'$ 都包含在 φ 的一个纤维中：$X' \cong \mathbb{P}(\mathcal{F}) \to S \cong A(X)$。因此，交数$(R \cdot c_1(-K_{X'})) = \deg(-K_{\mathbb{P}^1})$ 是正的。这意味着 X' 没有 $K_{X'}$-正的有理曲线；因此 $X_{N-1} \dashrightarrow X_N = X'$不可能是一次翻转，因为一次翻转会生成一条 $K_{X'}$-正的有理曲线。□

我们考察可能的除子收缩 $\pi := \pi_{N-1}$: $X_{N-1} \to X_N = X'$，其例外除子为 E。

断言 4.4. $X_{N-1} \dashrightarrow X_N = X'$ 不可能是将 E 收缩到一个点的除子收缩。

证明。由于 X_{N-1} 具有终端奇点，我们有

$$-K_{X_{N-1}} = \pi^*(-K_{X_N}) - aE \quad \text{for some } a > 0. \tag{4.1}$$

我们可以确认等式 $c_1(K_{X_N})^2 = 0$ 成立。事实上，条件$c_1(K_{X_N})^2 = 0$ 在有限 étale 覆盖下保持不变，这使我们可以假设 $X' = X_N = \mathbb{P}(\mathcal{F})$ 且带有一个数值平坦向量丛 $\mathcal{F}$。于是，所需的等式 $c_1(K_{X_N})^2 = 0$ 可以由 $K_{X_N} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(-2)$ 得到，并且

$$c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1))^2 = \varphi^*(c_1(\mathcal{F}))c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1)) - \varphi^*(c_2(\mathcal{F})) = 0.$$

注意到 E 被收缩到一个点，我们可知 $c_1(-K_{X_{N-1}})^2 = a^2 c_1(E)^2$ 由 $c_1(K_{X_N})^2 = 0$。又由于 $\mathcal{O}_E(-E)$ 是充足的，我们得到

$$(c_1(K_{X_{N-1}})^2 \cdot \{\omega_{X_{N-1}}\}) = a^2(c_1(E)|_E \cdot \{\omega_{N-1}\}|_E) < 0.$$

这与命题3.10(2) 相矛盾。 □

断言 4.5。 $X_{N-1} \dashrightarrow X_N = X'$ 不能是将 E 收缩到曲线 C 的除子收缩：$= \pi(E)$。

证明。 假设存在一个曲面 $V \subset X_N$ 使得 $K_{X_N}|_V$ 在数值意义下平凡，且 $V \cap E$ 是一条有效曲线，其中 $V \subset X_{N-1}$ 是 V的严格变换。于是，由（4.1），可见

$$(c_1(-K_{X_{N-1}}) \cdot c_1(\bar{V}) \cdot \omega_{N-1}) = a(c_1(-E) \cdot c_1(\bar{V}) \cdot \omega_{N-1}) < 0.$$

这与命题 3.10（2）相矛盾。

为了找到这样的曲面 V，我们证明 C 是 φ: $X_N = X' \to A(X)$ 的一个纤维。这是因为根据 Cao13，命题 1.6]， $X \to A(X)$ 在 $A(X)$ 的余维 ≥ 2 Zariski 闭集之外是光滑纤维化。事实上，否则，像 $\varphi(C)$ 是 $A(X)$ 中的一条曲线。那么，在一般点 $p \in \varphi(C)$ 处， $X_{N-1} \to X' \to A(X)$ 的纤维至少有两个不可约分支： φ: $X' \to A(X)$ 在 p 处的纤维 F 的严格变换，以及 $F \cap C$ 的逆像。这与 $X \to A(X)$ 在余维一处光滑矛盾。同时，根据 DPS94，定理 1.18], ，数值平坦向量丛 $\mathcal{F}$ 是由 $\pi_1(S)$ 的 GL-表示构造而成的。此外，由于 $\pi_1(S)$ 是阿贝尔的，这个表示是 1 维表示的直和。因此，存在 Hermitian 平坦线丛 L_1、 L_2 于 S 上，使得

$$0 \to L_1 \to \mathcal{F} \to L_2 \to 0.$$

将曲面 $V \subset X' = X_N$ 定义为 $\mathbb{P}(L_2) \subset \mathbb{P}(\mathcal{F})$ 经由 $\mathbb{P}(\mathcal{F}) \to X' = X_N$的像。然后，我们可以很容易地看到，$K_{X_N}|_V$是数值平凡的，并且交 $V \cap E$是纤维 π: $X_{N-1} \to X' = X_N$在非空的 0 维簇 $V \cap C$ 处。□

这就完成了定理1.3 在假设 $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}^{\oplus 2q}$、 $q \neq 0$且 $\dim R(X) = 2$的情况下的证明。 □

注记 4.6。 最后一种情形（其中 E 被压缩到曲线 C）实际上可以通过另一种方法排除，而无需使用 [Cao13，命题 1。6] （见定理 4.8证明的最后一步）。然而，定理4.8 中解释的方法相当复杂，因此我们在此使用[Cao13，命题 1，给出一个更直接的证明。6]。

4.3. 关于 X 单连通的情形。 在本小节中，我们假设 $\pi_1(X) = \{\mathrm{id}\}$ 且 $\dim R(X) = 2$, 证明定理 1.3 。与小节 4.2相比，一个显著的难点在于 S 可能存在奇点，因此我们无法采用与定理 4.2中相同的论证。下面的例子有助于我们理解这一困难。

例 4.7. 对于二维环面 A，我们考虑

$$X' := (\mathbb{P}^1 \times A)/\mu_2 \to S = A/\mu_2,$$

其中 $\mu_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 通过 $(-1)\cdot(t, z_1, z_2) = (-t, -z_1, -z_2)$ 作用于 $\mathbb{P}^1 \times A$。S 和 X' 都是单连通的，并且 $\varphi\colon X' \to S$ 是一个 $\mathbb{Q}$-圆锥丛，使得 $-K_{X'}$ 是数值有效的。然而，纤维化 $\varphi\colon X' \to S$ 甚至不是局部平凡的。

事实上，上述例子从未作为具有数值有效反典范丛的 X 的极小模型纲领的结果出现。更准确地说，可以证明以下定理:

定理4.8。考虑与小节 4.3 开头相同的情形。那么，流形 X 同构于 K3 曲面与射影直线的乘积 $\mathbb{P}^1$。

证明。根据 [Cam04，推论 6.7]，，存在一个准-´étale 覆盖 $\tau\colon S^\dagger \to S$，使得 $S^\dagger$ 要么是环面，要么是正规 K3 曲面（即极小消解为 K3 曲面的正规曲面），且 $\tau\colon S^\dagger \to S$ 是一个轨形态射（即它可以在局部描述为由态射 $\hat{}\tau\colon U^\dagger \to U$和群同态 $\rho\colon G^\dagger \to G$诱导的 $\tau\colon U^\dagger/G^\dagger \to U/G$，其中 $\hat{}\tau(gz) = \rho(g)\hat{}\tau(z)$ 对任意 $g \in G^\dagger$和 $z \in U^\dagger$均成立；这里 $U^\dagger$（分别为 U）是带有有限群 $G^\dagger$（分别为G）线性作用的局部光滑分歧覆盖。）注意，任意正规 K3 曲面都是单连通的。我们考虑基变换:

$$\begin{array}{ccc} X^\dagger & \xrightarrow{\nu} & X' \\ {\scriptstyle\varphi^\dagger}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ S^\dagger & \xrightarrow[\tau]{} & S \end{array}$$

纤维化 $\varphi\colon X' \to S$ 在设定$Y_0 := S_{\mathrm{reg}}$ 以及 $L := -K_{X'}$时满足定理2.6 的假设。事实上，条件 (a)、(b)、(c) 分别由命题 3.10、推论 3.11 和定理 3.6 得到确认。此外，条件(d) 可通过如下轨形结构得到确认：事实上，如定理2.6 中所述，由 $L = -K_{X'}$ 定义的反身层 $\mathcal{V}_p$ 是轨形 S上的orbifold 向量丛。根据 [Wu，引理 1]，，在 S 上存在一个连续函数 ψ，其在每个局部光滑分歧覆盖上的拉回是光滑的，使得 $\omega_S + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\psi$ 在 S上定义一个轨形K¨ahler形式。对于det $\mathcal{V}_p$上的光滑轨形度量 g，我们取 $C \gg 1$，使得 $\sqrt{-1}\Theta_g + C(\omega_S + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\psi)$在每个局部光滑分歧覆盖上均为正。于是 $ge^{-C\psi}$ 是满足条件(d)的度量。因此，定理2.6和定理2.11 表明，$\mathcal{V}_p$ 是 S 上的数值平坦轨形向量丛。以同样的方式，我们注意到 $\nu\colon X^\dagger \to X'$是一个拟-´étale覆盖，并且根据 $\varphi^\dagger\colon X^\dagger \to S^\dagger$的构造，$-K_{X^\dagger}$是 $\varphi^\dagger$-ample，从而推出当设定 $Y_0 := S^\dagger \setminus \tau^{-1}(S_{\mathrm{sing}})$ 和 $L = -K_{X^\dagger}$ 时，纤维化 $\varphi^\dagger\colon X^\dagger \to S^\dagger$ 也满足定理 2.6 的假设。因此，由 $L = -K_{X^\dagger}$定义的层 $\mathcal{V}_p^\dagger$ 同样是 $S^\dagger$上的数值平坦轨形丛。

我们将情形分为情形 1 和情形 2，并分别证明断言 4.9和断言 4.10。

情形 1： $S^\dagger$ 为（二维）环面的情形。情形 2： $S^\dagger$ 为正规 K3 曲面的情形。

断言 4.9。在情形 1 中，除去对 $S^\dagger$ 作有限 ´étale 覆盖，代数簇 $X^\dagger$ 同构于环面$S^\dagger$上数值平坦向量丛 $\mathcal{F}$ 的射影空间丛 $\mathbb{P}(\mathcal{F})$。此外，向量丛 $\mathcal{F}$ 存在一个由 Hermitian 平坦线丛构成的滤过：

$$0 \to L_1 \to \mathcal{F} \to L_2 \to 0.$$

证明。由于 $S^\dagger$ 是光滑的，按照上述方式定义的层 $\mathcal{V}_p^\dagger$ 是环面 $S^\dagger$ 上的数值平坦向量丛，依据 [Wu22b，主定理]。于是， [MW21，命题 2.5，注 2.6 (b)] 表明 $\varphi^\dagger$: $X^\dagger \to S^\dagger$ 是局部常值的。特别地，代数簇$X^\dagger$ 是光滑的，且 $\varphi^\dagger$: $X^\dagger \to S^\dagger$ 是一个 $\mathbb{P}^1$-丛。于是，第一个结论可由与定理 4.2相同的论证得出。

平坦向量丛 $\mathcal{F}$ 由基本群 $\pi_1(S^\dagger)$的一个 GL-表示构造而成。因此，由于 $\pi_1(S^\dagger)$是阿贝尔群，向量丛 $\mathcal{F}$ 具有所需的滤过。□

断言 4.10. 在情形 2 中，代数簇 $X^\dagger$ 同构于乘积 $S^\dagger \times \mathbb{P}^1$。

证明。我们首先通过应用范坎彭定理证明 $\pi_1(X^\dagger_{\mathrm{reg}}) = \{\mathrm{id}\}$ 。注意，任意正规 K3 曲面都是单连通的。代数簇 $S^\dagger$ 是轨形意义下的万有覆盖（见 [Cam04，定义 5.3]）；因此，我们得到 $\pi_1(S^\dagger_{\mathrm{reg}}) \cong \pi_1(S^\dagger) = \{\mathrm{id}\}$。由于 φ: $X' \to S$ 是 S_{reg} 上的光滑 $\mathbb{P}^1$-丛（这在基变换下保持不变），我们推得 $\pi_1((\varphi^\dagger)^{-1}(S^\dagger_{\mathrm{reg}})) = \{\mathrm{id}\}$。在 S_{sing}中的一个奇点附近，若 τ: $S^\dagger \to S$不是 étale 映射，则 φ: $X' \to S$和 $\varphi^\dagger$: $X^\dagger \to S^\dagger$都可局部描述如下：

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2)/\mu_{m^\dagger} & \xrightarrow{\nu} & (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2)/\mu_m \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi^\dagger} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ \mathbb{C}^2/\mu_{m^\dagger} & \xrightarrow[\tau]{} & \mathbb{C}^2/\mu_m \end{array}$$

这里， $\varepsilon \in \mu_{m^\dagger}$ 的作用由 $\varepsilon \cdot (t, z_1, z_2) = (\varepsilon^b t, \varepsilon z_1, \varepsilon^{-1} z_2)$给出，而 τ 由包含映射 $\mu_{m^\dagger} \to \mu_m$诱导的 $\mathbb{C}^2/\mu_{m^\dagger} \to \mathbb{C}^2/\mu_m$ 给出。为了应用范坎彭定理，我们将 $X^\dagger_{\mathrm{reg}}$ 视为$(\varphi^\dagger)^{-1}(S^\dagger_{\mathrm{reg}})$与 $X^\dagger_{\mathrm{reg}}$中$(\varphi^\dagger)^{-1}(S^\dagger$ 单$)$的开邻域 V_i 的并。然后，我们可以看到

- V_i is homeomorphic to $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, \mathbf{0}), (\infty, \mathbf{0})\})/\mu_{m^\dagger}$,
- $(\varphi^\dagger)^{-1}(S^\dagger_{\mathrm{reg}}) \cap V_i$ is homeomorphic to $(\mathbb{P}^1 \times (\mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}) \setminus \{(0, \mathbf{0}), (\infty, \mathbf{0})\})/\mu_{m^\dagger}$,

其中 $0:=(0,0)\in\mathbb{C}^2$。考虑由自然包含诱导的同态：

$$\pi_1(\mathbb{P}^1\times(\mathbb{C}^2\setminus\{\mathbf{0}\})\setminus\{(0,\mathbf{0}),(\infty,\mathbf{0})\}/\mu_{m\dagger})\to\pi_1(\mathbb{P}^1\times\mathbb{C}^2\setminus\{(0,\mathbf{0}),(\infty,\mathbf{0})\}/\mu_{m\dagger}).$$

由于 $\mathbb{P}^1\times(\mathbb{C}^2\setminus\{\mathbf{0}\})\setminus\{(0,0),(\infty,0)\}$ 和 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0),(\infty,0)\}$ 分别是万有覆盖，因此上述同态可视为$\mu_{m\dagger}$上的恒等映射。因此，范坎彭定理表明 $\pi_1(X^\dagger_{\mathrm{reg}})=\{\mathrm{id}\}$。

由 $\mathcal{V}^\dagger_p$ 定义的层 $L:=-K_{X^\dagger}$ 是 $S^\dagger$上的数值平坦 orbifold 向量丛。由于 $\varphi^\dagger$: $X^\dagger\to S^\dagger$ 是一个轨形态射，层 $(\varphi^{\dagger*}\mathcal{V}^\dagger_p)^{**}$ 也是数值平坦 orbifold 向量丛。根据引理 4.15（其证明将在后文给出），我们有

$$H^1(X^\dagger_{\mathrm{reg}},\mathcal{O}_{X^\dagger_{\mathrm{reg}}})\cong H^1(X^\dagger,\mathcal{O}_{X^\dagger})=0.$$

于是，推论 2.12 表明 $(\varphi^{\dagger*}\mathcal{V}^\dagger_p)^{**}$ 是 $X^\dagger$上的平凡向量丛。注意，二维情形下引理 4.15 的类似结论并不成立，这正是考虑将 $\mathcal{V}^\dagger_p$ 拉回到 $X^\dagger$上的原因。由于 $\mathcal{V}^\dagger_p$ 在 $S^\dagger_{\mathrm{reg}}$上局部自由，投影公式表明 $\mathcal{V}^\dagger_p\cong\varphi^\dagger_*((\varphi^{\dagger*}\mathcal{V}^\dagger_p)^{**})$ 在 $S^\dagger_{\mathrm{reg}}$上成立；因此 $\mathcal{V}^\dagger_p$ 是$S^\dagger_{\mathrm{reg}}$上的平凡向量丛。根据 [MW21，命题 2.5] 以及 $\pi_1(S^\dagger_{\mathrm{reg}})=\{\mathrm{id}\}$，我们得出 $\varphi^\dagger$: $X^\dagger\to S^\dagger$在 $S^\dagger_{\mathrm{reg}}$上给出了乘积结构 $S^\dagger_{\mathrm{reg}}\times\mathbb{P}^1$。更准确地说，我们需要验证 MW21，命题 2.5], 中的条件 (2)，即自然态射 $\mathrm{Sym}^m\mathcal{V}^\dagger_p\to\mathcal{V}^\dagger_{pm}$ 在 $S^\dagger_{\mathrm{reg}}$ 上是局部系统的态射。在我们的情形下，这自动成立，因为 $\mathrm{Sym}^m\mathcal{V}^\dagger_p$ 和 $\mathcal{V}^\dagger_{pm}$ 的反身包是 $S^\dagger$ 上的平凡向量丛（参见[MW21，注 2.6 (b)]）。

如果亚纯映射 $S^\dagger\times\mathbb{P}^1\dashrightarrow X^\dagger$（由上述在 $S^\dagger$上的乘积结构得到）不是同构，纤维 $\mathbb{P}^1$ 在 $S^\dagger$ 的一个奇点处将根据[Kol91，命题 2.113]而成为可缩的。然而，这样的收缩并不存在。因此，我们可以得出结论： $X^\dagger=S^\dagger\times\mathbb{P}^1$。□

最后我们证明， π: $X\dashrightarrow X'$ 实际上是同构的。这就完成了定理 4.8 的证明。事实上，通过注意到 φ: $X'\to S$在任意点处都是环面型，可以得到 MFS φ: $X'\to S$是一个圆锥丛。根据与定理 4.2 中相同的论证，纤维化 φ: $X\cong X'\to S$ 是一个局部常值 $\mathbb{P}^1$-丛。同时，由于 $\pi_1(X)\cong\pi_1(S)$ 根据[Kol93，定理 5.2] 和 [BC15，定理 4.1], 成立，基底 S 是单连通的，这意味着 $X\cong X'$ 是 S 与 $\mathbb{P}^1$的乘积。

为验证 π: $X\dashrightarrow X'$ 是同构的，我们将我们的情形划分为以下四个断言，正如定理4.2的证明中一样。

断言 4.11. 在情形 1 和情形 2 中，极小模型纲领的最后一步 $X_{N-1}\dashrightarrow X_N=X'$ 不可能是翻转。

证明。 定理 4.2 中的相同策略适用。令 R 为 X'上的一条有理曲线。令 d 为限制映射 $\nu^{-1}(R) \to R$ 的次数，其中 $\nu\colon X^\dagger \to X'$。于是我们看到

$$(c_1(K_{X'}) \cdot R) = \frac{1}{d}(c_1(K_{X^\dagger}) \cdot \nu^{-1}(R)) \leq 0.$$

这意味着 $\pi\colon X_{N-1} \dashrightarrow X_N = X'$ 不可能是翻转。 □

断言4.12。在情形1和情形2 中，最后一步 $\pi\colon X_{N-1} \dashrightarrow X_N = X'$ 不能将一个曲面压缩到一个点

证明。 设 d 为 ν的次数：$X^\dagger \to X'$。在情形 1 和情形 2 中，我们都有$K^2_{X'} = (1/d)\nu_* K^2_{X^\dagger} = 0$ 因为 $K^2_{X^\dagger} = 0$ 成立，且 $\nu\colon X^\dagger \to X'$ 是一个轨形态射。然后，按照命题 4.4中的相同论证，我们得到矛盾。 □

断言 4.13。在情形2中，最后一步 $\pi\colon X_{N-1} \dashrightarrow X_N = X'$ 不能将一个曲面E 压到一条曲线 C。

证明。 在情形 2 中，对于一般的 $t \in \mathbb{P}^1$，曲面 $V := \nu(S^\dagger \times \{t\}) \subset X'$ 使得 $-K_{X_N}|_V$是数值平凡的，并且 $V \cap E$ 是有效曲线，其中 V是 V的严格变换。然后，通过与断言 4.5 第一段中相同的论证，我们得到矛盾。 □

断言 4.14. 在情形 1 中，最后一步 $\pi\colon X_{N-1} \dashrightarrow X_N = X'$ 不能将一个曲面E 收缩为一条曲线 C.

证明。我们首先考虑 C 与 V 的像相交的情形：$= \nu\mathbb{P}(L_2())$。在这种情况下，我们可以看到$K_{X_N}|_V$是数值平凡的，并且 $V \cap E$ 是一条有效的曲线，其中 $V \subset X_{N-1}$ 是 V 的严格变换。因此，按照断言4.5第一段中的相同论证可得矛盾。于是，我们可以假设 C不与 ν相交（$\mathbb{P}(L_2())$）。

我们将证明，经过由 $\nu\colon X^\dagger \to X$ 给出的基变换后，收缩映射 $\pi_{N-1}\colon X_{N-1} \to X_N = X'$ 与沿 C 对 $X_N = X'$ 的膨胀重合，这将导致矛盾。为确认这一点，我们考虑以下图：

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{P}(\mathcal{F}|_{T^\dagger}) & \xrightarrow{\text{hook}} & \mathbb{P}(\mathcal{F}) = X^\dagger & \xrightarrow{\nu} & X' = X_N & \xleftarrow{\pi := \pi_{N-1}} & X_{N-1} \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi^\dagger} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^\dagger} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \\
T^\dagger := \varphi^\dagger(C^\dagger) & \xrightarrow{\text{hook}} & S^\dagger & \xrightarrow{\tau} & S = S^\dagger/G & &
\end{array}$$

其中 $C^\dagger := \nu^{-1}(C)$。

我们现在证明 $T^\dagger$ 是不交并的椭圆曲线。考虑不可约分解 $T^\dagger = \cup_i T_i$。根据 [Uen75，引理 10。8], 存在一个阿贝尔代数簇，包含于$S^\dagger$ 并包含 T_i。由于 $S^\dagger$ 是一个二维非射影环面，曲线 T_i 必定是椭圆曲线。若 $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ 对某个 $i \neq j$成立，则存在 $g \in G$ 使得 $T_j = gT_i$

由 $\tau(T_i) = \varphi \circ \nu(C^\dagger) = \tau(T_j)$ 成立。然后，除去对 T_i和平移以及对 gT_i的平移外，我们可以看出 $gT_i \to S^\dagger \to S^\dagger/T_i$ 是一个等源。根据 [BL99，第一章命题6.1], 在 $S^\dagger$的等源意义下，环面 $S^\dagger$ 是椭圆曲线的乘积。特别地， $S^\dagger$ 是射影的，这与 $S^\dagger$ 是非射影环面的假设相矛盾。

随后，我们证明 $C^\dagger$ 也是椭圆曲线的不交并。为简单起见，我们假设 $T^\dagger$ 是连通的（等价地， $T^\dagger$ 是不可约的）。注意，在一般情形下，对 $T^\dagger$ 的每个连通分支应用同样的论证，即可得到所需结论。为此，我们将 $C^\dagger$ 上的除子 $\mathbb{P}(\mathcal{F}|_{T^\dagger})$ 写作

$$C^\dagger = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F}|_{T^\dagger})}(a) + \varphi^{\dagger *} D \tag{4.2}$$

对某个 $a \in \mathbb{Z}$ 以及 $T^\dagger$上的某个线丛 D，并证明 $a > 0$ 和 D 数值平凡。通过考虑 $\mathbb{P}(\mathcal{F}|_{T^\dagger}) \to T^\dagger$的一般纤维的交数，我们可以看出 $a \geq 0$，因为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F}|_{T^\dagger})}(1)$ 数值有效。同时，由断言 4.9 中的正合列，我们可以看出 $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1)) = c_1(\mathbb{P}(L_2))$，其中 $\mathbb{P}(L_2)$ 被视为 $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ 上的一个除子。因此，根据假设 $C \cap \nu(\mathbb{P}(L_2)) = \emptyset$，我们有

$$(C^\dagger \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F}|_{T^\dagger})}(1)) = (C^\dagger \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1)) = 0. \tag{4.3}$$

利用（4.3）和 $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F}|_{T^\dagger})}(1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F}|_{T^\dagger})}(1)) = 0$，我们推得 $c_1(D) = 0$。

根据由限制主张 4.9中的正合列所得到的下列正合列是否分裂，我们分两种情况讨论：

$$0 \to L_1|_{T^\dagger} \to \mathcal{F}|_{T^\dagger} \to L_2|_{T^\dagger} \to 0.$$

我们先考虑该正合列在椭圆曲线 $T^\dagger$ 上分裂的情形。取 $\mathbb{C}$ 的一个格 Λ，使得 $T^\dagger \cong \mathbb{C}/\Lambda$。由于 $L_1|_{T^\dagger}$、 $L_2|_{T^\dagger}$和 D 是数值平凡的线丛，我们可以取相应的酉表示

$$\rho_1, \rho_2, \rho_D \colon \Lambda \to \mathrm{U}(1).$$

取一个截面

$$s \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{F}|_{T^\dagger}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F}|_{T^\dagger})}(a) + \varphi^{\dagger *} D) \cong H^0(T^\dagger, \mathrm{Sym}^a(L_1|_{T^\dagger} \oplus L_2|_{T^\dagger}) \otimes D)$$

其除子 div(s) 与 $C^\dagger$ 重合。将 s 拉回到万有覆盖 $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$ 后，截面 s 可识别为一个元素

$$\sum_{i,j \geq 0, i+j=a} f_{ij}(z) u^i v^j \in \mathcal{O}(\mathbb{C})[u, v]$$

满足该条件的

$$f_{ij}(z + \lambda) = f_{ij}(z) \rho_1(\lambda)^i \rho_2(\lambda)^j \rho_D(\lambda) \text{ for any } \lambda \in \Lambda,$$

其中 $(z,\ [u:\ v])$ 是 $\mathbb{C}\times\mathbb{P}^1$ 的一个坐标。刘维尔定理表明，f_{ij} 是 $\mathbb{C}$ 上的常值函数。这说明 $C^\dagger$ 是光滑的，且为椭圆曲线的不交并。事实上，$C^\dagger$ 在 $\mathbb{C}\times\mathbb{P}^1$ 中的逆像可写为

$$\{(z,[u:v])\in\mathbb{C}\times\mathbb{P}^1\mid \sum_{i,j\geq 0,i+j=a} f_{ij}u^iv^j=0\},$$

并且 $C^\dagger$ 是该逆像的商。

我们考虑上述正合列不分裂的剩余情形。在这种情况下，通过考察扩张类，我们可以看出 $L_1|_{T^\dagger}=L_2|_{T^\dagger}$ 并且$\mathbb{P}(\mathcal{F}|_{T^\dagger})$ 与 [DPS94，例 1.7]中的相同。根据 [DPS94，例 1.7]，我们可以看到，$c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F}|_{T^\dagger})}(a))$ 包含与一个有效曲线相关联的唯一正流，其支集为 $\mathbb{P}(L_2|_{T^\dagger})$。这表明 $C^\dagger=\mathbb{P}(L_2|_{T^\dagger})$ 根据 $c_1(C^\dagger)=c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F}|_{T^\dagger})}(a))$，因此 $C^\dagger$ 是一个椭圆曲线。

考虑纤维积 $X^\dagger\times_{X'}X_{N-1}$ 的规范化 $X^\dagger_{N-1}$：

$$\begin{array}{ccc} X^\dagger_{N-1} & \xrightarrow{\nu^\dagger} & X_{N-1} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi^\dagger} & & \downarrow{\scriptstyle \pi:=\pi_{N-1}} \\ X^\dagger & \xrightarrow{\nu} & X' \end{array}$$

我们证明：

$$\pi^\dagger\colon (X^\dagger_{N-1},E^\dagger:=\nu^{\dagger *}E)\to(X^\dagger,C^\dagger)$$

满足引理 4.16（稍后将予以证明）的所有条件，因此可得它与沿着 $C^\dagger$ 对 $X^\dagger$ 进行膨胀所得的结果重合。由于 $C^\dagger$ 和 $X^\dagger$ 光滑，引理 4.16 的条件 (0) 得到满足。此外，由于 X_{N-1} 具有孤立奇点，且 $\nu\colon X^\dagger\to X'$ 仅沿着 X'_{sing}（即有限多个点）分歧，条件 (3) 也得到满足。与射影情形一样，收缩映射 $\pi\colon X_{N-1}\to X'$ 满足条件 (1)、(2)，并且 $-E$ 和 $-K_{X_{N-1}}$ 都是 π-丰沛的（关于 (2)，见 [HP15a, 引理 7.8]；另见 [HP15a, HP15b, HP16]）。注意到 $\nu\colon X^\dagger\to X'$ 仅沿着 X'_{sing} 分歧，可知 $\pi^\dagger\colon (X^\dagger_{N-1},E^\dagger)\to(X^\dagger,C^\dagger)$ 也满足条件 (1)、(2)，并且 $X^\dagger_{N-1}$ 上的 $-E^\dagger=-\nu^{\dagger *}E$ 和 $-K_{X^\dagger_{N-1}}=-\nu^{\dagger *}K_{X_{N-1}}$ 在 $\nu^{-1}(X'_{\mathrm{sing}})$ 之外是 $\pi^\dagger$-丰沛的。为检验 $-E^\dagger=-\nu^{\dagger *}E$ 是 $\pi^\dagger$-数值有效的，取 $X^\dagger_{N-1}\to X^\dagger$ 的一个纤维 F。由于 $\nu^\dagger(F)$ 是被 $\pi\colon X_{N-1}\to X'=X_N$ 收缩的曲线，因此有

$$(-E^\dagger\cdot F)=(-\nu^{\dagger *}E\cdot F)=(-E\cdot\nu^\dagger(F))>0$$

这意味着 $-E^\dagger$ 是 $\pi^\dagger$-数值有效的。因此，条件 (4)、(5) 均满足。引理 4.16表明 $\pi^\dagger\colon (X^\dagger_{N-1},E^\dagger)\to(X^\dagger,C^\dagger)$ 实际上是沿着 $X^\dagger$ 对 $C^\dagger$进行的膨胀。

现在，让我们计算交数并导出矛盾。根据公式$K_{X^\dagger_{N-1}} = \pi^{\dagger *}K_{X^\dagger} + E^\dagger$，我们有

$$(K^2_{X^\dagger_{N-1}} \cdot \omega) = (\pi^{\dagger *}K^2_{X^\dagger} \cdot \omega) + 2(\pi^{\dagger *}K_{X^\dagger} \cdot E^\dagger \cdot \omega) + ((E^\dagger)^2 \cdot \omega),$$

其中， ω 是$X^\dagger_{N-1}$上的K¨ahler形式。左侧是非负的。事实上，对于命题3.10(1) 中的 $T_\varepsilon \in c_1(-K_{X_{N-1}}) + \varepsilon\{\omega_{N-1}\}$，拉回 $\nu^{\dagger *}(T_\varepsilon)$ 表示$c_1(-K_{X^\dagger_{N-1}}) + \nu^{\dagger *}\varepsilon\{\omega_{N-1}\}$，并且由于 $\nu^\dagger$:$X^\dagger_{N-1} \to X_{N-1}$ 是准-´etale，它在一个余维为≥ 2 的Zariski 闭集之外是光滑的。因此，注意到 $X^\dagger_{N-1}$ 是光滑的，我们看到 Monge-Amp`ere 算子 $\nu^{\dagger *}(T_\varepsilon)^2$ 是良定义的。这意味着$(K^2_{X^\dagger_{N-1}} \cdot \omega) \geq 0$. 与此同时，右侧是负的。事实上，根据 $K^2_{X^\dagger} = 0$, 第一项为零。此外，第二项也为零，因为根据 $K_{X^\dagger}|_{C^\dagger}$，它是数值平凡的

$$K_{X^\dagger}|_{C^\dagger} = (K_{X^\dagger}|_{\mathbb{P}(\mathcal{F}|_{T^\dagger})})|_{C^\dagger} = K_{\mathbb{P}(\mathcal{F}|_{T^\dagger})}|_{C^\dagger} = 0.$$

由于 $\mathcal{O}(-E^\dagger)|_{E^\dagger} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(N_{C^\dagger/X^\dagger})}$(1)成立，并且 $N_{C^\dagger/X^\dagger}$ 是数值平坦的，我们可以看到，对于 $\pi^\dagger|_{E^\dagger}$: $E^\dagger \to C^\dagger$,

$$\begin{aligned}((E^\dagger)^2 \cdot \omega) &= (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N_{C^\dagger/X^\dagger})}(-1) \cdot \omega|_{E^\dagger}) \\ &= -\int_{C^\dagger} (\pi^\dagger|_{E^\dagger})_*(\omega|_{E^\dagger}) < 0.\end{aligned}$$

这就产生了矛盾。 □

这就完成了定理 4.8 的证明，从而在假设 $\pi_1(X) = \{\mathrm{id}\}$ 且 dim $R(X) = 2$的条件下，完成了定理 □

下文给出证明中所用两个引理的证明。引理 4.15是 [Wu22a 中引理 4] 的一个简单变体，而引理 4.16 是 K¨ähler 对应的[Tzi03 命题 1。2]。

引理 4.15.设 X 是一个维数为 3 的（不一定紧的）解析代数簇，并设 E 是 X上的一个向量丛。假设 X 具有孤立的循环商奇点：更确切地说，在某个奇点附近，存在 $m \in \mathbb{Z}+$ 使得$X \cong \mathbb{D}/\mu_m$，其中 $\mathbb{D}$ 是以原点为中心的多圆盘，并且 μ_m 的作用由以下方式给出

$$\varepsilon \cdot (z_0, z_1, z_2) = (\varepsilon^{p_0} z_0, \varepsilon^{p_1} z_1, \varepsilon^{p_2} z_2) \ for\ \varepsilon \in \mu_m$$

对某个具有孤立奇点的 $p_i \in \mathbb{Z}$ 。于是，由限制态射诱导的态射 $H^1(X, E) \to H^1(X_{\mathrm{reg}}, E)$ 是同构。

证明。 X 在任意点 x 处的芽都是 Cohen-Macaulay 的。特别地，$\mathcal{O}_{X,x}$ 的深度（即包含在极大理想中的极大正则序列的长度）为

等于.....的Krull 维数$\mathcal{O}_{X,\ x}$。由于 E 是局部自由的， E_x 在任意点 x 处的深度为 3。根据 [ST06，定理1。14], 态射 $H^1（X，\ E）\ \to\ H^1（X_{\mathrm{reg}}，\ E）$是同构的。□

引理 4.16. 设 $f\colon (Y, E)\ \to (X, C)$ 是维数为 3 的正规 K ¨ahler 空间 X 和 Y之间的除子收缩，其中 E 是不可约曲面，且 $f(E)\ =C$ 是一条曲线。假设满足以下条件：

(0) $f(E)\ = C$ 是一条光滑曲线，且 X 在 C附近光滑。(1) $f\colon\ Y \to X$ 是一个射影态射。(2) $f|_E\colon\ E \to C$的一般纤维是光滑、连通的，且包含于 E的正则轨迹中。(3) Y 的奇异轨迹在 C上不占主导。(4) $-E$是 Y上的一个 f-数值有效 $\mathbb{Q}$-Cartier 除子，且在 X的有限多个点之外是 f-ample。(5) $-K_Y$ 是 Y 上的一个 $\mathbb{Q}$-Cartier 除子，且在X的有限多个点之外是 f-ample。

于是，收缩 $f\colon\ Y \to X$ 与沿着 C 对 X 作的膨胀 $p\colon \mathrm{Bl}_C X \to X$ 相同。

证明。该问题在 X 中是局部的。因此，我们可以假设 X 光滑。首先，我们将问题归结为证明 $f\colon\ Y \to X$ 与 $p\colon \mathrm{Bl}_C X \to X$ 在 X 上有限多个点之外重合。如果 $f\colon\ Y \to X$ 与膨胀在 X 上有限多个点之外重合，那么我们可以找到一个双亚纯映射

$$\pi\colon Y \dashrightarrow \mathrm{Bl}_C X \text{ over } C \text{ that is isomorphic in codimension } 1$$

通过注意到 $f\colon\ E \to C$ 是一个等维纤维化。我们通过验证 [KM98, 注记 6.37、引理 6.39] 的假设均满足，得出 $\pi\colon\ Y \dashrightarrow \mathrm{Bl}_C X$ 实际上是一个同构。对于任意 f-丰沛 Cartier 除子 A（位于 Y 上），经由 $\pi\colon\ Y \dashrightarrow \mathrm{Bl}_C X$ 对应于 A 的 Weil 除子$\pi_* A$是 $\mathrm{Bl}_C X$ 上的 Cartier 除子（因为 $\mathrm{Bl}_C X$ 光滑）。对于 $\mathrm{Bl}_C X$ 上的 p-丰沛例外除子 $-B$，Weil 除子 $\pi_*^{-1} B$ 是 $-E$，根据假设，它是 f-数值有效且 $\mathbb{Q}$-Cartier 的。因此，[KM98, 引理 6.39] 表明 $\pi\colon\ Y \dashrightarrow \mathrm{Bl}_C X$ 是一个同构。

我们最终证明 $f\colon\ \ Y \to X$ 与 C 的膨胀在 X的有限个点之外重合。根据条件 (4)，只需证明对于任意 $d \geq 0$,

$$f_* \mathcal{O}(-dE) = \mathcal{I}_C^d$$

在 $-E$ 是 f-充分的Zariski 开集上。根据条件 (3)，我们可以假设 Y 是光滑的。此外，我们可以假设限制 $f|_E\colon E \to C$（在 E 的一个非空Zariski 开集上）是光滑空间之间的光滑态射。由于 $\mathcal{O}_E(-dE)\ = K_E - K_Y|_E - (d+1)E|_E$成立，且 $-K_Y$ 是 f-充分的，相对 Kodaira

消失定理表明

$$R^i f_*(\mathcal{O}_E(-dE)) = 0 \text{ for any } i > 0, d \geq 0,$$

从而完成证明，依据 [Mor82，引理 (3.32)]。 □

最后，我们通过使用几乎与[CH19定理 1 中相同的论证，验证定理 1.2 可由定理 1.3 推出4]。

命题 4.17。 定理 *1.2* 由定理 *1.3*。

证明。设 X 是一个具有数值有效反典范丛的非射影紧 K¨ahler 三维流形。我们首先证明， X 存在一个局部平凡 MRC 纤维化 $X \to Y$，映到一个满足 $c_1(Y) = 0$ 的光滑曲面上。流形 X 存在一个有限 ´étale 覆盖 X'，属于定理 1.3 中的某个列表。若 $c_1(X') = 0$, 则 $c_1(X) = 0$；因此我们可以假设 X' 存在一个非平凡局部常值 MRC 纤维化。设 $\mathcal{F} \subset T_X$ 是唯一的饱和可积子层，使得经过一个非常一般点 $x \in X$的 $\mathcal{F}$-叶是 MRC 纤维化的一条纤维。由定理 1.3，层 $\mathcal{F}$ 是一个正则叶状结构，并且在取有限 ´étale 覆盖时保持不变。因此，由 [Hor07，推论 2.11]，存在一个光滑态射 $\varphi\colon X \to Y$，使得 $T_{X/Y} = \mathcal{F}$。由于一般纤维是 $\mathbb{P}^1$，纤维化 $\varphi\colon X \to Y$ 由 Firscher-Grauert 定理可知是局部平凡的。由命题 3.5，线丛 $-K_Y$ 是伪有效的。由于 Y 不是单有理覆盖的，我们有 $c_1(Y) = 0$。

纤维化 $\varphi\colon X \to Y$ 是 X 的极大有理连通纤维化；因此 $-K_X$ 是 φ-丰沛线丛。根据定理 2.6，由于 Y 光滑，我们可以找到一个 φ-丰沛线丛 B，使得 $\varphi_*(pB)$ 对于 $1 \ll p \in \mathbb{Z}_+$ 数值平坦。注意，数值平坦性由 [Wu22b, 主定理] 得出。于是，由 [MW21, 命题 2.5]，我们看到 $\varphi\colon X \to Y$ 是局部常值的。由于 Y 是一个紧致 K¨ahler，[MW21, 命题 2.5] 中的条件 (2) 自动满足（见 [MW21, 注 2.6 (b)]）。□

References

[AR14] C. Araujo, J.J. Ram´on-Mar´ı, $\mathbb{P}^n$的平坦变形，巴西数学会通报（新系列）45（2014），第 3 期，371–383。页码 23[Bar78] D. Barlet，循环空间的凸性，法国数学会通报 106（1978），373–397。页码 18[BC15] Y. Brunebarbe，F. Campana，紧致 K ¨ahler 流形上的基本群与多微分形式，莫斯科数学杂志 16（2016），第 4 期，651–658。页码 24，29[BDPP13] S. Boucksom，J.-P. Demailly，M. P˘aun，T. Peternell，紧致 K ¨ahler 流形的伪有效锥与 Kodaira 维数为负的簇，代数几何杂志 22（2013），第 2 期，201–248。页码 3[BEG13] S. Boucksom，P. Eyssidieux，V. Guedj，K ¨ahler-Ricci 流导论，数学讲义，2086。Springer，Cham，2013。viii+333页。页码 5[BHPV04] W. Barth，K. Hulek，C. Peters，A. Van de Ven，紧致复曲面，现代数学综述系列，4。Springer-Verlag，柏林，2004。xii+436 页。页码 24[BL99] C. Birkenhake，H. Lange，复环面，数学进展，177，Birkh ¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1999。xvi+251 页。页码 31[Bru06] M. Brunella，紧致 K ¨ahler 流形上叶状结构的一种正性性质，国际数学杂志 17（2006），第 1 期，35–43。页码 3，19[BP04] T. Bauer，T. Peternell。数值有效约化与反典范丛，亚洲数学杂志 8，第 2 期，315–352（2004）。页码 3[Cam92] F. Campana，Fano 簇的有理连通性，法国高等师范学校科学年刊（第 4 系列）25（1992），第 5 期，539–545。页码 3[Cam95] F. Campana，关于幂零 K ¨ahler 群的注记，法国高等师范学校科学年刊（第 4 系列）28（1995），第 3 期，307–316。页码 23[Cam04] F. Campana，第一陈类为零的轨形，Fano 会议，339–351。都灵大学，意大利都灵，2004。页码 27，28[Cao13] J. Cao，关于反典范丛数值有效的紧致 K ¨ahler 流形及其应用的注记，参见 arXiv:1305.4397v2。页码 26[Cao19] J. Cao，反典范丛数值有效的射影流形的阿尔巴内塞映射，法国高等师范学校科学年刊（第 4 系列），52（2019），第 5 期，1137–1154。页码 2，9[CCM21] F. Campana，J. Cao，S. Matsumura，反典范除子数值有效的射影 klt 对，代数几何 8（2021），第 4 期，430–464。页码 2，6[CDP15] F. Campana，J.-P. Demailly，T. Peternell，有理连通流形与 Ricci 曲率的半正性，代数几何最新进展，71–91，伦敦数学会讲义系列，417，剑桥大学出版社，剑桥，2015。页码 2[CH19] J. Cao，A. H¨oring，反典范丛数值有效的射影流形的分解定理，代数几何杂志 28（2019），567–597。页码 2，3，6，9，35[CP91] F. Campana，T. Peternell，切丛数值有效的射影流形，数学年刊 289（1991），第 1 期，169–187。页码 25[Dem85] J.-P. Demailly，Monge-Amp `ère 测度与仿射代数簇的几何刻画，法国数学会回忆录（新系列）第 19 号（1985），124 页。页码 5[Dem92] J.-P. Demailly，闭正流的正则化与交理论，代数几何杂志 1（1992），第 3 期，361–409。页码 25[Dem]Jean-Pierre Demailly，复解析与微分几何，参见 https:// www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf。页码 5，16，23

[DPS94] J.-P. Demailly、T. Peternell、M. Schneider，《具有数值有效切丛的紧致复流形》，《代数几何学杂志》3（1994），第2期，295–345。页码 2、12、26、32[DPS96] J.-P. Demailly、T. Peternell、M. Schneider，《具有厄米半正反典范丛的紧致 K¨ahler 流形》，《组合数学》101（1996），第2期，217–224。页码 2[EIM23] S. Ejiri、M. Iwai、S. Matsumura，《关于代数纤维空间相对反典范除子的渐近基底轨迹》，《代数几何学杂志》32（2023），第3期，477–517。页码 4[Ele82] G. Elencwajg，《复几何中的布劳尔群》，《环论与代数几何中的布劳尔群》（Wilrijk, 1981），第222–230页，《数学讲义》917，Springer，柏林—纽约，1982。页码 25[Fuj88] A. Fujiki，《二维复环面有限自同构群》，《数学科学研究所刊物》24（1988），第1期，1–97。页码[GPR94] H. Grauert、Th. Peternell、R. Remmert，《多个复变量 VII：复分析中的层论方法》，1994，《数学科学百科全书》（EMS，第74卷）。页码 16[HIM22] G. Hosono、M. Iwai、S. Matsumura，《关于具有伪有效切丛的射影流形》，《朱西厄数学研究所杂志》21（2022），第5期，1801–1830。页码 2[Hor07] A. H¨oring，《具有分裂切丛的单有理覆盖簇》，《数学杂志》256（2007），第3期，465–479。页码 35[HP15a] A. H¨oring、T. Peternell，《K¨ahler 三维簇的双有理几何》，《代数几何：盐湖城 2015》，381–402，《纯数学研讨会论文集》97.1，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2018。页码 3、18、32[HP15b] A. H¨oring、T. Peternell，《K¨ahler 三维簇的 Mori 纤维空间》，《东京大学数学科学杂志》22（2015），第1期，219–246。页码 3、18、19、20、32[HP16] A. H¨oring、T. Peternell，《K¨ahler 三维簇的极小模型》，《数学发明》203（2016），第1期，217–264。页码 3、18、20、32[HPS18] C. Hacon、M. Popa、C. Schnell，《阿贝尔簇上的代数纤维空间：围绕 Cao 和 Pˇaun 的一项近期定理》，《代数几何中的局部与整体方法》，143–195，《当代数学》712，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2018。页码 6、7[HSW81] A. Howard、B. Smyth、H. Wu，《非负双截面曲率的紧致 K¨ahler 流形 I 和 II》，《数学学报》147（1981），第1–2期，51–70。页码 2[Kol91] J. Koll´ar，《翻转、翻塌、极小模型等》，《微分几何综述》（马萨诸塞州剑桥，1990），113–199，Lehigh 大学，伯利恒，宾夕法尼亚州，1991。页码 29[Kol93] J. Koll´ar，《代数簇的沙法列维奇映射与多属》，《数学发明》113（1993），第1期，177–215。页码 24、29[KM98] J. Koll´ar、S. Mori，《代数簇的双有理几何》。C. H. Clemens 和 A. Corti 合作。由 1998 年日文原版译出。《剑桥数学论著》134。剑桥大学出版社，剑桥，1998。viii+254 页。页码 34[KoMM92] J. Koll´ar、Y. Miyaoka、S. Mori，《有理连通簇》，《代数几何学杂志》1（1992），第3期，429–448。页码 3[Mat20] S. Matsumura，《关于具有半正全纯截面曲率的射影流形的 MRC纤维化像》，《纯粹与应用数学季刊》16，第5期（2020），第1443–1463页。页码 2[Mat22a] S. Matsumura，《关于具有半正全纯截面曲率的射影流形》，《美国数学杂志》144（2022），第3期，747–777。页码 2、6[Mat22b] S. Matsumura，《正曲率射影簇结构的未决问题》，图卢兹数学科学学院学报（第6辑）31（2022），第3期，1011–1029。页码 2

[Mat23] S.Matsumura，《具有伪有效切丛的射影簇的极小模型纲领》，´Epijournal G´eom. Alg´ebrique7（2023），文章 22，13页。第6 页[Mi83] M. Miyanishi，《代数三维簇理论中的代数方法——围绕 Iskovskikh、Mori 和 Sarkisov 的工作》，《代数簇与解析簇》（东京，1981），69–99，纯数学高级研究，1，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1983。第 15、18页[MM07] X. Ma，G. Marinescu，《全纯Morse不等式与 Bergman 核》，数学进展，254。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2007。xiv+422页。第12页[Mok88] N. Mok，《具有非负全纯双截面曲率的紧 K¨ahler流形的统一化定理》，《微分几何杂志》27（1988），第2 期，179–214。第 2页[Mor82] S.Mori，《典范丛非数值有效的三维簇》，《代数三维簇》（瓦伦纳，1981），第 155–189 页，数学讲义，947，Springer-Verlag，柏林—纽约，1982。第 35 页[MP08a] S. Mori，Y.Prokhorov，《关于 ℚ圆锥丛》，《数学科学研究所刊》44（2008），第 2期，315–369。第 13 页[MP08b] S. Mori，Y. Prokhorov，《关于 ℚ圆锥丛，II》，《数学科学研究所刊》44（2008），第3 期，955–971。第 13 页[MW21] S.Matsumura，J. Wang，《具有数值有效反典范除子的射影klt对的结构定理》，载于 arXiv:2105.14308v2。第 2、28、29、35 页[NW] P. Naumann，X.Wu，《具有数值有效反典范丛的 K¨ahler流形的阿尔巴内塞映射》，载于 arXiv:2310.06695。第 4 页[Pˇau97] M.Pˇaun，《关于具有数值有效 Ricci 类的紧K´ahler流形的基本群》，《巴黎科学院报告》S´ér.I数学 324（1997），第11期，1249–1254。第23 页¨P´au ¨M. P´aun，《相对伴随超越类与具有数值有效Ricci曲率的紧K´ahler流形的阿尔巴内塞映射》，《高维代数几何——献给川又雄二郎教授六十寿辰》，335–356。纯数学高级研究，74，日本数学会，东京，2017。第 23、24 页[ProˇY. Prokhorov，《17] -Fano 三维簇的次数》，《数学文集》198（2007），第 11 期，153–174；《数学文摘》译本198（2007），第 11–12期，1683–1702。第13页ˇPro¨Y. Prokhorov，《圆锥丛的有理性问题》，《数学科学进展》73（2018），第 3 期（441），3–88；《俄罗斯数学调查》译本 73（2018），第 3期，375–456。第14、15 页[PS07] T.Peternell，F. Serrano，《具有数值有效反典范丛的三维簇》，《汇集数学》49，第 2–3 期，465–517（1998）。第 3 页 ℚPT[M.P18] aun，S.Takayama，《扭曲相对多重典范丛及其直像的正性》，《代数几何杂志》27（2018），211–272。第 6、7、8 页[Sar98] V. G.Sarkisov，《关于圆锥丛结构》，《苏联科学院消息·数学辑》46（1982），第 2期，371–408，432。第 14、15 页[Sim18] C.-T. Simpson，《Higgs丛与局部系统》，《高等科学研究院数学出版物》75（1992），5–95。第 3 页ˇST[Y.-T. Siu，G. Trautmann，《间隙层与相干解析子层的延拓》，数学讲义，第172卷，Springer-Verlag，柏林—纽约，1971。v82] 页。第34页[Tzi92] N. Tziolas，《从曲面到曲线的终端三维除子收缩 I》，《组合数学》139（2003），第3 期，239–261。第33页´Uen[K. Ueno，《代数簇与紧复空间的分类理论》，数学讲义，第 439 卷，Springer-Verlag（1975）。第 30 页

[Wan21] J. Wang, 《饭高猜想》$C_{n,\ m}$ 关于 K¨ähler 纤维空间，图卢兹数学科学学院学报（6）30（2021），第 4 期，813–897。第 7、8 页[Wu22a] X. Wu, 《高余维中 nef 性的研究》，法国数学会通报 150（2022），第 1 期，209–249。第 33 页[Wu22b] X. Wu, 《强伪有效与数值平坦反身层》，几何分析杂志 32（2022），第 4 期，第 124 号论文，共 61 页。第 25、28、35 页[Wu] X. Wu, 《关于紧致 K¨ähler 轨形》，可见于 arXiv:2302.11914v1。第 12、13、27 页[Wan20] J. Wang, 《具有 nef 反典范除子的射影簇的结构：对数终端奇点情形》，数学年刊 384（2022），第 1–2 期，47–100。第 2 页Mathematical Institute, Tohoku University, 6-3, Aramaki Aza-Aoba, Aoba-ku, Sendai980-8578, Japan.电子邮箱：mshinichi-math@tohoku.ac.jp 电子邮箱：mshinichi0@gmail.comLaboratoire Mathématiques et Interactions J.A. Dieudonné, Université C˘ote d'Azur, Nice, 06108, France电子邮箱：xiaojun.wu@uni-bayreuth.de 电子邮箱：xiaojun.wu@univ-cotedazur.fr