arXiv:2304.03166v1 [math.NT] 6 Apr 2023

正特征局部域上的 Drinfeld 上半空间上的等变向量丛

GEORG LINDEN

Abstract. 我们描述局部解析 $\mathrm{GL}_d(K)$-表示，它们是非阿基米德局部域 K 上 Drinfeld 上半空间所限制的射影空间上的齐性向量丛的整体截面。由此，我们推广了 Orlik [56] 关于 p-进域的工作，使其适用于正特征局部域。我们通过由子表示构成的滤过来描述这一整体截面空间，并通过对 Orlik–Strauch [58]和 Agrawal–Strauch[1]所考察的函子的改造，刻画由此得到的子商。

对于一个 K 正特征局部域，我们还在附录中确定了取值于 K-Banach代数（这些代数为整环；相应地，取值于 K的有限扩张）的 $K^\times$ 的局部解析（分别为连续）特征。

Contents

引言2 致谢6符号与约定61.局部解析表示论71.1.非阿基米德流形71.2.局部解析函数101.3.局部解析表示 151.4.局部解析分布代数上的模17 1.5. 局部解析诱导231.6.超代数281.7. 源自刚性解析空间的非阿基米德流形 372.$H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})'_b$ 与作为局部解析表示的局部上调群42 2.1.刚性解析空间的凝聚上调同调与局部上调同调上的拓扑 42 2.2. 等变向量丛的相干（局部）上同调 432.3.Drinfeld 上半空间的凝聚上同调44˘2.4. 舒伯特簇补集的某些Čech复形的严格性48 2.5.关于舒伯特簇周围管状邻域的局部上同调 562.6.关于舒伯特簇的局部上同调群作为局部解析表示 623.$\mathrm{GL}_{d+1}(K)$-表示 $H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})$653.1. Orlik 基本复形及相关谱序列 653.2. $H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})'_b$ 作为局部解析 $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)$-表示的子商 743.3. $H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})'_b$ 作为局部解析 $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$-表示的子商79 3.4. Orlik–Strauch 的函子 $\mathcal{F}_P^G$ 82附录 A 非阿基米德泛函分析 94 附录 B 连续与局部解析特征 101

Date: 2023年4月7日。

B.1. 连续特征 B.2. 局部解析特征 参考文献 102 104 107

Introduction

设 K 是剩余特征为 p 的非阿基米德局部域。维数为 $d \in \mathbb{N}$ 的 Drinfeld 上半空间在 K 上定义为其补集

$$\mathcal{X} := \mathbb{P}^d_K \Big\backslash \bigcup_{H \subsetneq K^{d+1}} \mathbb{P}(H)$$

所有 K-有理超平面在 d维射影空间中的补集，并自然地带有刚性解析结构。出于诸多原因，它在算术几何中颇受关注，其中之一便是对其上同调的研究。这一方面源于 Drinfeld猜想 [24]（由 Carayol [15]明确提出）： $\mathcal{X}$ 的 ´etale覆盖的（具有紧支集的） ℓ-进上同调实现了局部朗兰兹对应和 Jacquet–Langlands 对应的超尖部分，而这一猜想如今已经得到证明 [28, 35, 36]。这方面的成果包括计算系数的 ´etale上同调，其中系数的特征不整除 p；以及对于 p-进K，由Schneider 和 Stuhler [69]计算出的 $\mathcal{X}$ 的 deRham上同调。Dat [21]已经确定了具有 $\ell \neq p$的紧支集ℓ-进上同调。最近，Colmez、Dospinescu 和 Nizio l 计算了 $\mathcal{X}$ 的 p-进 ´etale和 pro-´etale上同调，其中 p-进K [20]。他们还表明，对于 $d = 1$ 和 $K = \mathbb{Q}_p$， $\mathcal{X}$ 的´etale覆盖的 p-进 ´etale上同调编码了二维de Rham 表示（权为 0 和 1）的 p-进局部朗兰兹对应 [19]。

换个稍有不同的话题，在 [68], for p-adic K中，Schneider 在研究由 $\mathcal{X}$一致化的某些射影簇上的局部系统上同调时，引入了 $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$ 的（p-adic）全纯离散级数表示的概念。这些表示出现在 $\mathrm{GL}_{d+1,K}$-等变向量丛 $\mathcal{E}$ 在 $\mathbb{P}^d_K$ 上限制到 $\mathcal{X}$后的整体刚性解析截面空间 $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E})$ 中。其强对偶空间是 F´eaux de Lacroix 和 Schneider–Teitelbaum 所引入的局部解析表示。在此基础上扩展 Y. Morita 关于 SL_2情形的先前工作，Schneider 和 Teitelbau m [70] 给出了典范丛 $\Omega^d_{\mathbb{P}^d_K}$对应的这类局部解析 $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$-表示的描述，Pohlkamp [60] 给出了结构层 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_K}$对应的描述，而 Orlik [56] 则给出了任意 $\mathcal{E}$对应的描述。

本文旨在描述齐性向量丛在 $\mathbb{P}^d_K$ 上限制到 Drinfeld 上半空间 $\mathcal{X}$ 后的整体刚性解析截面，其中 $\mathcal{X}$ 定义在一般的非阿基米德局部域 K上。为此，我们对 Orlik 在 [56] 中的方法作了调整，使其也适用于 K 具有正特征的情形。我们注意到，这类向量丛的凝聚上同调仅集中于整体截面，这是因为 $\mathcal{X}$ 是 Stein 空间。

基本定义和结果可从 p-adic 情形转移到正特征非阿基米德域上的情形。Gr¨af 已在 [32] 中对此作出说明。即使是通过取强对偶空间而实现的局部解析李群 G 的局部解析表示与代数 $D(G)$ 上的模之间的反等价仍然成立，我们也经常利用这一点。

因此，对于 $\mathbb{P}^d_K$ 上的齐性向量丛 $\mathcal{E}$， $\mathcal{X}$ 上整体截面的强对偶 $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E})'_b$ 仍然是一个局部解析 $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$-表示。此外，Orlik 在 [56] 中提出的技巧仍然适用：该技巧通过某个谱序列，利用无穷远除子 $\mathbb{P}^d_K \setminus \mathcal{X}$ 的几何结构。所得结果是 $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E})$ 的一个滤过，其各项均为闭的 $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$-不变子空间。此外，该滤过各个子商的强对偶可以描述为某些局部解析 $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$-表示的扩张。然而，在分析由此产生的局部解析表示时，

我们必须采用不同于 [56] 中针对 p-进域的方法。我们的主要结果如下所述。

定理 A（定理 3.1.5，定理 3.3.2）。设 K 是一个非阿基米德局部域， $\mathcal{E}$ 是一个 $\mathrm{GL}_{d+1,\ K}$-等变向量丛，定义在 $\mathbb{P}^d_K$ 上。那么存在一个由闭的 $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$-不变子空间构成的滤过

$$H^0(\mathcal{X},\mathcal{E}) = V^d \supset V^{d-1} \supset \ldots \supset V^1 \supset V^0 = H^0(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}),$$

并且，对于 $j = 1$、.....、 d，存在局部解析 $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$-表示的扩张

$$0 \longrightarrow H^j(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})' \otimes_K v_{P_{(d-j+1,1,\ldots,1)}}^{\mathrm{GL}_{d+1}(K)} \longrightarrow \left(V^j/V^{j-1}\right)'_b$$
$$\longrightarrow \left(D\big(\mathrm{GL}_{d+1}(K)\big) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{D(\mathfrak{gl}_{d+1},P_{(d-j+1,j)}),\iota} \left(\widetilde{H}^j_{(\mathbb{P}^{d-j}_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_K \left(v_{B_j}^{\mathrm{GL}_j(K)}\right)'_b \right) \right)'_b \longrightarrow 0.$$

下面解释该定理中出现的对象。令 $P_{(d-j+1,j)}$ 和 $P_{(d-j+1,1,\ldots,1)}$ 表示 $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$ 的标准抛物子群，分别对应于其各自指标中的分解。此外，将 $\mathrm{GL}_j(K)$ 视为 $P_{(d-j+1,j)}$ 的标准 Levi 因子 $\mathrm{GL}_{d-j+1}(K) \times \mathrm{GL}_j(K)$ 的子群，而 B_j 表示 $\mathrm{GL}_j(K)$ 的标准Borel子群。表示 $v^{\mathrm{GL}_{d+1}(K)\ P_{(d-j+1,1,\ldots,1)}}$ 和 $v^{\mathrm{GL}_j(K)\ B_j}$ 是系数取在 K 中的光滑（广义）Steinberg表示，而 $P_{(d-j+1,j)}$ 通过膨胀作用于 $v^{\mathrm{GL}_j(K)\ B_j}$。

此外， $D\big(\mathfrak{gl}_{d+1},P_{(d-j+1,j)}\big)$ 是局部解析分布代数 $D\big(\mathrm{GL}_{d+1}(K)\big)$ 的一个特定子代数：对于任意非阿基米德李群 G，我们定义其超代数 $\mathrm{hy}(G)$，它嵌入 $D(G)$ 并构成其中的一个子代数。对于局部解析子群 $H \subset G$，子代数 $D(\mathfrak{g},H)$ 定义为由 $\mathrm{hy}(G)$ 和 $D(H)$ 生成的子代数。超代数 $\mathrm{hy}(G)$ 的定义受到代数群 G 的分布代数的启发，例如 [41] 中所讨论的分布代数。当 G 是这样一个光滑代数群 G 的 K值点时，它可以与后者典范地等同。特别地，若 $\mathrm{char}(K) = 0$，则 $\mathrm{hy}(G)$ 与 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数一致。因此，$D(\mathfrak{g},H)$ 推广了 Orlik 和 Strauch 在 [58, §3.4] 中为 p进 K 所构造的方法。这个超代数对我们的价值在于：即使在 $\mathrm{char}(K) > 0$ 时，$\mathrm{hy}(G)$ 与 G 上单位元处的局部解析函数芽空间之间仍存在非退化配对（命题 1.6.12）。因此，非正式地说，代数 $D(\mathfrak{g},H)$ 包含了 H 周围的一个无穷小邻域。

最后，还有这个子空间

$$\widetilde{H}^j_{(\mathbb{P}^{d-j}_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}) := \mathrm{Ker}\Big(H^j_{(\mathbb{P}^{d-j}_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}) \to H^j(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}) \Big)$$

关于相对于被视为 $\mathbb{P}^d_K$的刚性解析子簇的舒伯特簇 $\left(\mathbb{P}^{d-j}_K\right)^{\mathrm{rig}}$ 的局部上同调。我们证明，这个子空间自然地带有一个 $D\big(\mathfrak{gl}_{d+1},P_{(d-j+1,j)}\big)$-模的结构。将其与 $D\big(\mathrm{GL}_{d+1}(K)\big)$ 取完备归纳张量积，得到 $D\big(\mathrm{GL}_{d+1}(K)\big)$-模

$$D\big(\mathrm{GL}_{d+1}(K)\big) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{D(\mathfrak{gl}_{d+1},P_{(d-j+1,j)}),\iota} \left(\widetilde{H}^j_{(\mathbb{P}^{d-j}_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_K \left(v_{B_j}^{\mathrm{GL}_j(K)}\right)'_b \right). \qquad (*)$$

此处 $v^{\mathrm{GL}_j(K)\ B_j}$ 带有最细局部凸拓扑。 $D\big(\mathrm{GL}_{d+1}(K)\big)$-模 $(*)$ 的强对偶，根据上述关于局部解析表示的反等价， 是一个局部解析 $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$-表示。

对于一个 p-进域，这与如下对 [56, 定理 1] 关于 $H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})'_b$的描述相关：在 $H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})$ 的滤过相同的情况下，Orlik 在那里得到的是局部解析诱导表示的某个子空间，而非 $(*)$ 的强对偶空间；定理 A 中短严格正合列的另外两项保持不变。然而，除了以这种方式事后诱导出的同构之外，$(*)$ 与 Orlik 得到的表示之间还存在一种更内在的联系。事实上，他所得到的子空间可以刻画为 $\mathcal{F}^{\mathrm{GL}_{d+1}(\ \ K\ \ )}_{P_{(d-j+1,j)}}\big(\widetilde{H}^j_{\mathbb{P}^{d-j}_K}\big)(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})\ v^{\mathrm{GL}_j(K)\ B_j}\ \ \ \ \ \ )$。这里使用的函子 $\mathcal{F}^G_P$ 是

由 Orlik和Strauch引入 [58]，用于在 K 上的分裂连通约化群G以及 $\subset$ G的标准抛物子群 P 的更一般设置。令 G =G(K)、 P = P(K)，并令 $\mathfrak{g}$、 $\mathfrak{p}$ 为相应的李代数。对于一个 $U(\mathfrak{g})$-模 $M \in \mathcal{O}^{\mathfrak{p}}{}_{\mathrm{alg}}$ （其中 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}{}_{\mathrm{alg}}$ 是 $\mathfrak{g}$的 BGG 范畴 $\mathcal{O}$ 的某个子范畴）以及标准 Levi子群 $L_{\mathbf{P}} \subset P$的容许光滑表示V，该函子给出一个容许的局部解析G-表示 $\mathcal{F}_P^G(M,V)$。预期它们的对偶可以描述为

$$\mathcal{F}_P^G(M,V)' \cong D(G) \otimes_{D(\mathfrak{g},P)} \left(M \otimes_K V'\right)$$

（对于平凡的 $V = K$，这就是 [58, 命题 3.7]）。此外， [1] Agrawal 和 Strauch 构造了函子，这些函子扩展了函子 $\mathcal{F}_P^G$，并且以类似的方式通过与 $D(G)$ 在 $D(\mathfrak{g},P)$ 上取张量积来定义。

$U(\mathfrak{g})$-模 M 在范畴 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}{}_{\mathrm{alg}}$ 中必然是有限生成的。因此，可以通过某个满同态 $U(\mathfrak{g})^{\oplus n} \twoheadrightarrow M$，利用子空间拓扑 $U(\mathfrak{g}) \subset D(G)$ 为其赋予局部凸拓扑。容许光滑表示 V 则可以赋予最细局部凸拓扑。为了将 Orlik 的描述与（$*$）进行比较，我们证明：

命题 B（命题 3.4.7）。存在一个 $D(G)$-模的拓扑同构

$$D(G) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{D(\mathfrak{g},P),\iota} \left(M \mathbin{\widehat{\otimes}}_{K,\pi} V_b'\right) \cong D(G) \otimes_{D(\mathfrak{g},P)} \left(M \otimes_K V'\right)$$

其含义是， $D(G) \otimes_{D(\mathfrak{g},P),\ \iota} \left(M \otimes_{K,\ \pi} V_b'\right)$ 通过上述方式赋予拓扑后已经是完备的，并且该拓扑与规范的 Fr´echet 拓扑一致；后者由其作为余容许（抽象） $D(G)$-模所诱导，参见 *[1]*。

此外，相对于舒伯特簇的代数局部上同调群（其核） $\widetilde{H}^j_{\mathbb{P}^{d-j}_K}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 是 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}(d-j+1,j)}$ 代数 中的一个元素。另一方面，我们可以将它视为 $\widetilde{H}^j{}_{(\mathbb{P}^{d-j}_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 的子空间（见推论 2.5.6）；我们在推论 3.4.9 中证明，该子空间拓扑与通过某个满同态$U(\mathfrak{g})^{\oplus n} \twoheadrightarrow \widetilde{H}^j_{\mathbb{P}^{d-j}_K}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$所诱导的局部凸拓扑一致。由此得到一个典范拓扑同构：($*$) 与 $D(G)$-模之间的典范拓扑同构，该模

$$D\big(\mathrm{GL}_{d+1}(K)\big) \otimes_{D(\mathfrak{gl}_{d+1}, P_{(d-j+1,j)})} \left(\widetilde{H}^j_{\mathbb{P}^{d-j}_K}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \otimes_K \left(v_{B_j}^{\mathrm{GL}_j(K)}\right)'\right)$$

赋有其典范的 Fr´echet 拓扑。

Orlik 在 [56] 中的证明用到了代数局部上同调群 $H^j_{\mathbb{P}^{d-j}_K}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 是泛包络代数 $U(\mathfrak{gl}_{d+1})$ 上有限生成的这一事实。对于正特征域，这一事实只有在特殊情形下才有类似结论，因此我们的策略是改为更直接地运用 $\mathrm{hy}\big(\mathrm{GL}_{d+1}(K)\big)$ 与 $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$ 上局部解析函数芽之间的非退化配对。这样做的代价是，所需的泛函分析论证会更加复杂。

乘法群 $K^\times$ 是最基本的局部 K解析李群的例子之一。我们附有附录 B，其中研究了正特征p局部域 K 上的 $K^\times$的一维连续表示和局部解析表示（即特征），这些表示取值于特征 p相同的非阿基米德域。

与 p-进情形相比，我们发现，相对于连续特征，局部解析特征显著更少（推论 B.2.3）。此外， $K^\times$ 的局部解析特征在某种意义上表现得很僵化。这里仅需关注主单位子群 $1 + \mathfrak{m}_K \subset K^\times$，其中 $\mathfrak{m}_K$ 是 K的整数环的极大理想。该子群构成 $K^\times$在通常分解下的非离散部分，而对于其特征，我们得到：

定理 C（定理 B.2.2，推论 B.2.3）。设 K 是特征为 $p>0$的局部域，并设 C 是 K的完备扩张。那么每个局部解析特征

$$\chi\colon 1+\mathfrak{m}_K \longrightarrow C^\times$$

在 $1+\mathfrak{m}_K \subset C^\times$ 上分解，并且存在 $c\in\mathbb{Z}_p$ 使得 $\chi=\chi_c$ 其中

$$\chi_c(z)=z^c:=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{c}{n}(z-1)^n \quad ,\textit{for all } z\in 1+\mathfrak{m}_K.$$

此外，所有 p^i 阶超导数 $D^{(p^i)}\chi$ 在 1 处的值均包含于 $\mathbb{F}_p\subset K$，且c 由 $c_i\equiv D^{(p^i)}\chi(1) \bmod (p)$ 唯一确定，对于 p-进展开 $c=\sum_{i=0}^{\infty}c_ip^i$。

这给出了一个$\mathrm{End}_{\mathrm{la}}(1+\mathfrak{m}_K)\cong\mathbb{Z}_p$ 的拓扑环同构，其中前者是局部解析自同态构成的环，其乘法由复合给出，并赋予紧开拓扑。

我们想进一步详细介绍其中一些单独截面的内容。第一章涵盖了实现我们目标所必需的局部解析表示理论。为方便读者起见，我们决定在前五个截面中详细重述基础理论，并且其中大部分内容都附有证明。

第六节讨论局部解析流形 X 上取值于局部凸向量空间 V 的局部解析函数芽在 $x\in X$ 处构成的空间 $C_x^{\mathrm{la}}(X,V)$。对于局部解析李群 G，该空间 $C_e^{\mathrm{la}}(G,K)$ 在单位元e 处的强对偶 $D_e(G)$ 嵌入局部解析分布代数 $D(G)$。随后将超代数 $\mathrm{hy}(G)$ 定义为 $D_e(G)$ 中那些在 $C_e^{\mathrm{la}}(G,K)$ 的某个幂上取值为零的元素。进一步地，按照 Orlik–Strauch [58]，我们考虑由 $\mathrm{hy}(G)$ 和 $D(H)$ 生成的子代数$D(\mathfrak{g},H)\subset D(G)$，其中 $H\subset G$ 为局部解析子群。与 Agrawal–Strauch [1], 的情形类似，这些子代数上的模对应于所谓的局部解析 $(\mathrm{hy}(G),H)$-模。

最后一节讨论如何赋予光滑、分离、可数型刚性解析 K-空间 X 的 K-有理点 $X(K)$ 局部 K-解析流形的结构。我们还证明，对于 K 上的光滑代数群 G，$\mathrm{hy}\big(\mathrm{G}(K)\big)$ 与 Dist(G) 相同。

第二章旨在证明，$H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})\text{and}\widetilde{H}^{d-j}{}_{(\mathbb{P}_K^j)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}_K^d,\mathcal{E})$ 的强对偶空间是紧型的局部解析表示。

虽然对于 $H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})$，这与 p-进情形中由 Schneider– Teitelbaum [70], 所考虑的 $\mathcal{E}=\Omega^{\mathbb{P}_K^d}$ 的处理方式相同，但局部上同调群还需要进行一些准备工作。那里的主要步骤是给出一个描述

$$\widetilde{H}^k_{(\mathbb{P}_K^j)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}_K^d,\mathcal{E})\cong\varprojlim_{n\in\mathbb{N}}\widetilde{H}^k_{\mathbb{P}_K^j(\varepsilon_n)^-}(\mathbb{P}_K^d,\mathcal{E})$$

其中 $\varepsilon_n:=|\pi|^n$，对于 K的素元 π。在右侧的极限中，相对于舒伯特簇周围的 ε_n-邻域 $\mathbb{P}_K^j(\varepsilon_n)^-$ 的局部上同调群是巴拿赫空间。为了以受控的方式取此极限，我们证明，计算 $\mathcal{E}$ 在补集 $\mathbb{P}_K^d\setminus\mathbb{P}_K^{j\vee}$ 上的上同调的某个Čech 复形的微分是严格同态。此 Čech复形上的拓扑来自主开子集 $D_+(X_i)\subset\mathbb{P}_K^d$的某些仿affinoid 子域。由此，我们纠正了 [56, 引理 1.31]证明中的一个缺陷。

Then$H^k_{\mathbb{P}_K^{d-j}(\varepsilon_n)^-}(\mathbb{P}_K^d,\mathcal{E})'_b$是一个局部解析 $P^{n+1}{}_{(d-j+1,j)}$-表示，其中 $P^{n+1}{}_{(d-j+1,j)}$是 $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)$ 的某个开子群，它稳定 $\mathbb{P}_K^{d-j}(\varepsilon_n)^-$。最终我们可以得出结论：$\widetilde{H}^j{}_{(\mathbb{P}_K^{d-j})^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}_K^d,\mathcal{E})'_b$是一个局部解析 $\big(\mathrm{hy}\big(\mathrm{GL}_{d+1}(K)\big),P_{(d-j+1,j)}\big)$-模。

最后一章包含定理 A 的证明。第一节中，我们回顾 Orlik 使用定义在补集上的某种无环“基本复形” ´étale 层的方法。

$\mathbb{P}^d_K \setminus \mathcal{X}$ 被视为一个闭伪阿迪克子空间。该复形刻画了补集的组合几何，并且更一般地适用于周期域，参见 [57]。如前所述，与之相关的谱序列给出了定理 A 中的滤过以及扩张

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^j(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})' \otimes_K v_{P_{(d-j+1,1,\dots,1)}}^{\mathrm{GL}_{d+1}(K)} &\longrightarrow \big(V^j/V^{j-1}\big)'_b \\ \longrightarrow \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ind}_{P^n_{(d-j+1,j)}}^{\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)} &\Big(\widetilde{H}^j_{\mathbb{P}^{d-j}_K(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})'_b \otimes_K v_{P^n_{(d-j+1,1,\dots,1)}}^{P^n_{(d-j+1,j)}}\Big) \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{$**$}$$

局部解析 $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$ 表示的。

接下来的两节将进一步分析式（$**$）中出现的最后一项。概括而言，我们的方法是将这一项嵌入 $C^{\mathrm{la}}\big(\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)\ W_j\big)$，其中

$$W_j := \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \Big(\widetilde{H}^j_{\mathbb{P}^{d-j}_K(\varepsilon_n)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})'_b \otimes_K v_{P^n_{(d-j+1,1,\dots,1)}}^{P^n_{(d-j+1,j)}}\Big).$$

对于 $C^{\mathrm{la}}\big(\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)\ W_j\big)$ 中的元素，若其在某个 $n \in \mathbb{N}$ 下对子群 $P^n{}_{(d-j+1,j)}$ 不变，则会转化为对 $\mathrm{P}_{(d-j+1,j)}(\mathcal{O}_K)$ 的作用以及 $\mathrm{hy}\big(\mathrm{GL}_{d+1}(K)\big)$ 的“无穷小”作用不变。随后取对偶，最终得到式（$**$）中的最后一项与（$*$）的强对偶之间的一个同构。

在最后一节中，我们将 p-进域 K 的情形下的描述，与 Orlik [56] 以及 Orlik 和 Strauch [58] 提出的函子 $\mathcal{F}^G_P$ 进行比较。这一比较以及 Agrawal 和 Strauch [1] 提出的 $\mathcal{F}^G_P$ 的推广，促使我们为一般的非阿基米德局部域定义函子 $\mathcal{F}^G_P$ 的类似物。

致谢。本文由作者的博士论文修改并增补而成。我要感谢我的导师 Sascha Orlik 将我引入这一丰富而有趣的研究课题。感谢他给予我的宝贵建议和大力支持。此外，我还要感谢 Oliver F¨urst、Eugen Hellmann、Roland Huber、Christoph Spenke、Matthias Strauch 和 Yingying Wang 提供的宝贵意见并参与讨论。

本项目的大部分工作是在作者作为研究生培训组 GRK 2240“代数、算术与拓扑中的代数几何方法”成员期间完成的。该研究生培训组由德国研究联合会资助。

记号与约定。我们记 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ 和 $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$。对于多重指标 $\underline{i} = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n$，其中 $n \in \mathbb{N}$，我们定义 $|\underline{i}| := i_1 + \dots + i_n$。对于 $\underline{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$，我们记 $\underline{r}^{\underline{i}} := r_1^{i_1} \cdots r_n^{i_n}$。

设 K 是一个带有非平凡绝对值 $|_|$ 的非阿基米德域：$K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$。我们令 $\mathcal{O}_K := \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$ 表示其整数环。对于 $n \in \mathbb{N}$、$\underline{r} \in \mathbb{R}^n_{>0}$ 和 $a \in K^n$，我们记为

$$B^n_{\underline{r}}(a) := \big\{x \in K^n \,\big|\, \forall i = 1, \dots, n : |x_i - a_i| \leq r_i\big\}$$

多半径为 $\underline{r}$、中心为 a 的“闭”球；它既是开集又是闭集。

在这项工作中，局部凸 K-向量空间发挥着核心作用。这些是拓扑 K-向量空间，其原点具有由 $\mathcal{O}_K$-子模组成的邻域基。对于这一非阿基米德泛函分析的理论，我们将经常参考 [27], [59] 和 [67] 。

对于局部凸 K-向量空间 V 和 W，我们将从 V 到 W 的连续同态所构成的 K-向量空间记为 $\mathcal{L}(V, W)$。赋予其有界收敛的强拓扑（分别地，逐点收敛的弱拓扑）后，该空间本身成为一个局部凸 K-向量空间，记为 $\mathcal{L}_b(V, W)$（分别地，$\mathcal{L}_s(V, W)$），参见 [67, Examples 第 35]页。我们注意到，对于局部凸 K-向量空间 f 的连续同态 $V' \to V$ 和 $h\colon\ W \to W'$，这些同态

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_b(V, W) &\longrightarrow \mathcal{L}_b(V', W), \quad g \longmapsto g \circ f, \quad \text{and} \\ \mathcal{L}_b(V, W) &\longrightarrow \mathcal{L}_b(V, W'), \quad g \longmapsto h \circ g, \end{aligned}$$

是连续的 [67, §18，第 113] 页。

此外，我们将 K-向量空间 V的对偶空间记为 $V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)$。当$V$是局部凸空间时，我们将连续线性形式组成的子空间记为 $V' := \mathcal{L}(V, K)$，并相应地将强对偶空间和弱对偶空间记为 V_b'和 V_s'。不过，当 E 是一个 K-巴拿赫空间时，我们有时简化记法，用 E' 表示其强对偶空间。对于局部凸 K-向量空间 V和 W，取转置可得同态（见 [27, §0.3.8]）

$$\mathcal{L}(V,W) \longrightarrow \mathcal{L}(W_b', V_b') \qquad \text{and} \qquad \mathcal{L}(V,W) \longrightarrow \mathcal{L}(W_s', V_s').$$

对于局部凸 K-向量空间 V和 W的张量积，我们将射影（分别为归纳）张量积拓扑记为$V \otimes_{K,\pi} W$（分别为$V \otimes_{K,\iota} W$），参见[67, §17]。我们将相应局部凸 K-向量空间的豪斯多夫完备化记为$V \mathbin{\widehat{\otimes}}_{K,\pi} W$和$V \mathbin{\widehat{\otimes}}_{K,\iota} W$。如果 V和 W都是 K-Fr´echet 空间，或者二者都是半完备 LB-空间，则射影张量积拓扑与归纳张量积拓扑一致，见 [67,命题 17.6] 和 [27, 命题 1.1.31]。在这些情形下，我们可以明确地记为 $V \otimes_K W$ 和$\wedge V \otimes_K W$。

具有连续同态的局部凸 K-向量空间范畴是 [76]意义下拟阿贝尔范畴的一个例子。严格态射恰好是同态 $f\colon\ V \to W$ 在约定意义下严格的同态，即其诱导的 $V/$核(f) $\to$像(f) 是一个拓扑同构。

对于群 G 的子群 H 和 H'，我们使用记号 $H \cdot H'$ 表示G 中所有形如 hh'（其中 $h \in H$、 $h' \in H'$）的元素所组成的子集。

最后，对于概形或刚性解析空间，当上下文能够明确所指的概形或刚性解析空间时，我们用 $\mathcal{O}$ 表示其结构层。

1. Locally Analytic Representation Theory

1.1. 非阿基米德流形。关于非阿基米德域上的流形基础知识，我们遵循 [12, §4,5] 和 [66, 第二章]。设 L 是一个带有非平凡绝对值 $|_|$的完备非阿基米德域。

设 $E = (E, \|_\|_E)$是一个 L-巴拿赫空间，并将 $E[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$记作取值于 E的 n 个变量的形式幂级数空间，其中 $n \in \mathbb{N}$。对于$\underline{r} \in \mathbb{R}^n_{>0}$，我们定义所有在 $B^n_{\underline{r}}(0)$ 上严格收敛且取值于 E 的幂级数所构成的子空间

$$\mathcal{A}_{\underline{r}}(L^n, E) := \left\{ \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}_0^n} v_{\underline{i}} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \;\middle|\; \underline{r}^{\underline{i}} \|v_{\underline{i}}\|_E \to 0 \text{ as } |\underline{i}| \to \infty \right\} \subset E[\![X_1, \ldots, X_n]\!].$$

L-向量空间 $\mathcal{A}_{\underline{r}}(L^n, E)$ 关于范数是一个 L-巴拿赫空间

$$\left\| \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}_0^n} v_{\underline{i}} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \right\|_r := \sup_{\underline{i} \in \mathbb{N}_0^n} \underline{r}^{\underline{i}} \|v_{\underline{i}}\|_E.$$

注意，对于 $\underline{r} \geq \underline{r}'$（即对所有 $j = 1,\ r_j \geq r_j'$、.....、 n），嵌入 $\mathcal{A}_{\underline{r}}(L^n, E) \subset \mathcal{A}_{\underline{r}'}(L^n, E)$ 是连续同态。因此，我们定义在 0 处收敛且取值于 E 的幂级数空间。

$$\mathcal{A}(L^n, E) := \bigcup_{\underline{r} \in \mathbb{R}^n_{>0}} \mathcal{A}_{\underline{r}}(L^n, E),$$

并赋予其归纳极限拓扑，即赋予它最细的局部凸拓扑 gy
使得所有嵌入 $\mathcal{A}_{\underline{r}}(L^n, E) \hookrightarrow \mathcal{A}(L^n, E)$ 都是连续的。

此外，每个 $f = \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}_0^n} v_{\underline{i}} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \in \mathcal{A}_{\underline{r}}(L^n, E)$ 定义了一个连续函数

$$B^n_{\underline{r}}(0) \longrightarrow E, \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}_0^n} v_{\underline{i}} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}. \tag{1.1}$$

命题1.1.1（幂级数恒等定理 [12, 4.1.4]）。令 $n \in \mathbb{N}$、 $\underline{r} \in \mathbb{R}^n_{>0}$，并令 E 为一个 L-巴拿赫空间。从 $\mathcal{A}_{\underline{r}}(L^n, E)$ 到 L-向量空间的同态

将 $f \in \mathcal{A}_{\underline{r}}(L^n, E)$ 与函数 (1.1) 对应所得到的 $B^n_{\underline{r}}(0)$ 上的连续函数是单射。

因此，我们将幂级数及其诱导的函数都记作 f。

命题1.1.2 ([12, 4.1.5] 或 [66, 命题5.4])。对于 $m, n \in \mathbb{N}$, $\underline{r} \in \mathbb{R}^m_{>0}$, $\underline{s} \in \mathbb{R}^n_{>0}$，令$f \in \mathcal{A}_{\underline{r}}(L^m, L^n)$写成 $f = (f_j)_{j=1,\dots,n}$，其中 $f_j \in \mathcal{A}_{\underline{r}}(L^m, L)$。此外，假设$\|f_j\|_{\underline{r}} \le s_j$，对于所有 $j = 1,\dots, n$，并令 E为一个 L-巴拿赫空间。则映射

$$\mathcal{A}_{\underline{s}}(L^n, E) \longrightarrow \mathcal{A}_{\underline{r}}(L^m, E)$$
$$g(\underline{Y}) = \textstyle\sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}_0^n} v_{\underline{i}} \underline{Y}^{\underline{i}} \longmapsto (g \circ f)(\underline{X}) := \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}_0^n} v_{\underline{i}} f_1(\underline{X})^{i_1} \cdots f_n(\underline{X})^{i_n}$$

是一个算子范数为 ≤ 1 的定义良好的连续同态，并且相关函数满足 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$，对所有 $x \in B^m_{\underline{r}}(0)$。

推论1.1.3([66, 推论5.5]).设 $f \in \mathcal{A}_{\underline{r}}(L^m, E)$，且 $y \in B^m_{\underline{r}}(0)$。则存在$f_y \in \mathcal{A}_{\underline{r}}(L^m, E)$，使得 $\|f_y\|_{\underline{r}} = \|f\|_{\underline{r}}$且相应函数满足

$$f(x) = f_y(x - y) \quad , \textit{for all } x \in B^m_{\underline{r}}(0) = B^m_{\underline{r}}(y).$$

定义 1.1.4. 设 $U \subset L^m$ 为 $m \in \mathbb{N}$ 的一个开子集，且 E 为一个 L-巴拿赫空间。如果对每个 $a \in U$，都存在一个幂级数$f_a \in \mathcal{A}_{\underline{r}}(L^m, E)$，其中某个 $\underline{r} \in \mathbb{R}^m_{>0}$，使得对所有 $x \in B^m_{\underline{r}}(a)$，都有 $f(x) = f_a(x - a)$，则称函数 $f\colon U \to E$ 局部 L-解析。我们将取值于 E 的、定义在 U 上的局部 L-解析函数所成的 L-向量空间记作 $C^{\mathrm{la}}(U, E)$。

注记 1.1.5。特别地，这样的局部 L-解析函数是连续的。

引理1.1.6（[66, 引理6.3]）。设 $U \subset L^m$ 和 $U' \subset L^n$ 为开子集。此外，设$f \in C^{\mathrm{la}}(U, L^n)$ 使得 $f(U) \subset U'$，并设 E 为一个 L-巴拿赫空间。那么映射

$$C^{\mathrm{la}}(U', E) \longrightarrow C^{\mathrm{la}}(U, E), \quad g \longmapsto g \circ f,$$

是良定义的且是 L-线性的。

定义 1.1.7. 设 X 是一个拓扑空间。

(i) X 的一个坐标图由一个开子集 $U \subset X$ 和一个映射 $\varphi\colon U \to L^m$组成，其中对于某个 $m \in \mathbb{N}$，该映射是到 L^m 的一个开子集上的同胚。我们有时在上下文允许时，仅用 φ 或 U 来指称一个坐标图。对于 $x \in X$，如果$x \in U$，我们说 φ 是围绕 x 的一个坐标图。若 $\varphi(x) = 0$，我们称 φ 以 x 为中心。

(ii) 如果 X 的两个坐标图 $\varphi\colon U \to L^m$ 和 $\psi\colon W \to L^n$ 的函数在线不卡

$$\psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap W) \longrightarrow \psi(U \cap W) \qquad \text{and} \qquad \varphi \circ \psi^{-1}\colon \psi(U \cap W) \longrightarrow \varphi(U \cap W)$$

都是局部 L-解析的。

(iii) X 的图册 $\mathcal{A}$ 是由一组两两相容的坐标图组成的集合，其定义域覆盖 X。如果 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ 也是一个图册，则 X 的两个图册 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 等价。若任何等价图册 $\mathcal{B}$ 都满足 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$，则图册 $\mathcal{A}$ 是极大的。

注记1.1.8. (i) 图册的等价确实是一种等价关系，并且每一个等 iv-
等价类包含唯一的极大图册，参见 [66, 注记 7.2]。

(ii) 给定 $x \in X$ 和 X 的极大图册 $\mathcal{A}$，在 $\mathcal{A}$ 中存在一个以 x 为中心的坐标图：令$\varphi\colon U \to L^m$ 为任意满足 $x \in U$ 的坐标图。则由引理 1.1.6，$\varphi'\colon U \to L^m$，$y \mapsto \varphi(y) - \varphi(x)$ 与 $\mathcal{A}$ 的图相容。

我们希望考虑具有以下良好性质的流形：

定义 1.1.9. 一个（有限维）局部 L-解析流形是一个豪斯多夫、旁紧、第二可数拓扑空间 X，并配有一个极大图册 $\mathcal{A}$。下文中，提及局部 L-解析流形的坐标图时，指的是其极大图册中的坐标图。

对于点 $x \in X$ 及其坐标图 $\varphi\colon U \to L^m$ 围绕 x，我们称 m 为 X 在 x 处的维数。根据 [66, 引理 7.1], ，该维数与围绕 x 的坐标图无关。

注记 1.1.10. (i) 任何局部 L-解析流形 X 都是严格仿紧的，即 X 的任意开覆盖都存在由两两不交开子集构成的细化（[12, 5.3.7] 或 [66,命题 8.7]）。

（ii）设 X 是局部 L-解析流形。那么，当且仅当 L 是局部紧的（即一个局部域）或 X 是离散拓扑空间时， X 是局部紧的。
（iii） X 的任意不交开覆盖都是可数的。此外，如果 L 是局部紧的，那么对于任意局部 L-解析流形 X，都存在一个由紧开子集组成的 X 的可数不交覆盖。

（ii）和（iii）的证明。这些陈述或许是众所周知的，但我们仍想在此给出证明。

对于（ii），首先假设 X 是局部紧的。如果对于所有 $x \in X$，我们都能找到坐标图 φ: $U \to L^0 = \{0\}$，满足 $x \in U$，则可推出 X 是离散的。另一方面，考虑存在坐标图 φ: $U \to L^n$ 且满足 $n > 0$ 的情形。于是我们找到一个紧子集 $C \subset U$；经过缩小后，不妨设 $\varphi(C) = B^n_{\underline{r}}(a)$，对于 $\underline{r} \in \mathbb{R}^n_{>0}$、 $a = (a_1, \ldots\ldots, a_n) \in \varphi(C)$。这意味着 $B^1_{r_1}(a_1) \subset L$ 也是紧的。但这等价于 L 是局部紧的。逆向蕴含见 [12, 5.9]。

在 (iii) 中，由于 X 是第二可数的，对于每个开覆盖 $X = \bigcup_{i\in I} U_i$，都存在一个可数子集 $J \subset I$，使得 $X = \bigcup_{i\in J} U_i$ 构成一个覆盖，见 [9, 第 IX 章 §2.8 命题 13]。如果覆盖 $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ 两两不交，我们必有 $J = I$。

此外，由于 X 是仿紧的， X 的拓扑可由一个满足严格三角不等式的度量定义，见 [66, 命题 8.7]。因此，存在一个 X 的拓扑基 $\mathcal{B}$，其元素都是既开又闭的子集 [9, ，见 □ 第 IX 章 §6 习题 2a)。如我们在 (ii) 中所见，假设 L 是局部紧的，意味着 X 是局部紧的；也就是说，对任意 $x \in X$，都存在一个 x 的紧邻域 C_x。于是我们可以找到一个既开又闭的子集 $B_x \in \mathcal{B}$，使得 $B_x \subset C_x$，因此它本身是紧的。总之，紧开子集构成了 X 的一个覆盖。因此，存在一个由紧开子集组成的可数集族 $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，它已经覆盖了 X。现在令 $W_n := C_n \setminus (C_0 \cup \ldots \cup C_{n-1})$，便得到所求的由紧开子集构成的可数不交覆盖 $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$。

定义 1.1.11（[12, 5.8.3]）。局部 L解析流形 X 的子集 $Y \subset X$ 称为局部 L解析子流形，如果对于每个 $y \in Y$，都存在一个坐标图 φ: $U \to L^m$，其定义域包含 x，以及一个线性子空间 $F \subset L^m$，使得 φ 诱导出一个同胚

$$\varphi|_{U\cap Y} : U \cap Y \longrightarrow \varphi(U) \cap F.$$

取定同构 $F \cong L^k$（对某个 $k \le m$），坐标图 $\varphi|_{U\cap Y}$: $U \cap Y \to L^k$ 赋予 Y局部 L解析流形的结构，参见 [12, 5.8.1]。事实上， Y 也是仿紧的，因为根据 [66, 命题 8.7]， X 是可度量化的。当 $Y \subset X$ 为开集时， Y 的极大图册由 X 的坐标图 U 组成，其中 $U \subset Y$，参见 [66, 第 48] 页。

注记 1.1.12. 两个局部 L-解析流形 X 和 Y 的乘积，在赋予乘积拓扑以及由以下坐标图给出的图册后，成为局部 L-解析流形: $\varphi \times \psi$: $U \times V \to L^{m+n}$，其中 φ: $U \to L^m$ 和 ψ: $V \to L^n$ 分别是 X 和 Y的坐标图。

定义 1.1.13. (i) 设 X 是一个局部 L-解析流形， E 是一个 L-巴拿赫空间。若对于 X的每个坐标图 φ: $U \to L^m$，函数 $f \circ \varphi^{-1}$: $\varphi(U) \to E$都是局部 L-解析的，则称函数 f: $X \to E$是局部 L-解析的。我们将这些函数构成的 L-向量空间记为 $C^{\mathrm{la}}(X, E)$。
(ii) 两个局部 L-解析流形之间的映射 f: $X \to Y$，若 f连续，并且对于 Y的所有坐标图 ψ: $V \to L^n$，从开局部 L-解析子流形 $f^{-1}(V)$ 到 L-巴拿赫空间 L^n 的函数 $\psi \circ f$都是局部 L-解析的，则称该映射为局部 L-解析的。

等价地，这样的 f: $X \to Y$在局部是 L-解析的，如果对于每个点 $x \in X$，存在一个坐标图 φ: $U \to L^m$，其定义在 x附近，以及一个坐标图 ψ: $V \to L^n$，其定义在 $f(x)$附近，使得 $f(U) \subset V$且 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^{\mathrm{la}}(\varphi(U)\ L^n)$，参见 [66, 引理 8.3]。

注记1.1.14。在 $Y \subset L^n$ 是具有局部 L-解析流形的典范结构的开子集的情况下，上述定义中的(i) 和 (ii) 是相容的。反过来，若$X \subset L^m$ 是一个开子集，则(i) 与定义 1.1.4 相容，参见 [12, 5.3.1,2]。

1.2. 局部解析函数。设 K 是一个完备非阿基米德域，且没有 n-平凡的绝对值 $|_|$，以及 $L \subset K$ 一个完备子域。

令 X 是一个局部 L-解析流形，而 V 是一个豪斯多夫局部凸 K-向量空间。在 $\mathrm{char}(K) = 0$ 的情形下，F´eaux de Lacroix [30] 定义了取值于 V 的局部解析函数，并赋予这类函数的空间 $C^{\mathrm{la}}(X, V)$ 一个局部凸 K-向量空间的结构。正如 Gr¨af 所指出的，这一结论可逐字转用于一般的完备非阿基米德域 K [32, Part I, App. A] 的情形。尽管如此，我们仍希望重新概述构造 $C^{\mathrm{la}}(X, V)$ 的理由以及它的一些性质。

回忆一下，对于一个局部凸 K-向量空间 V， V 的 BH-子空间是一个（代数）子空间 $E \subset V$，它可赋予 K-巴拿赫空间结构（其底层 K-向量空间结构来自 V），且相应的拓扑比其子空间拓扑更细。我们将带有其巴拿赫空间结构的 E 记作 $\overline{E}$，从而得到一个连续单射 $\overline{E} \hookrightarrow V$。注意，根据开映射定理 [67, 命题 8.6]，BH-子空间 $E \subset V$ 的任意两种巴拿赫空间结构所诱导的拓扑相同。

如果 E 是一个 K-巴拿赫空间，通过限制标量，它也具有 L-巴拿赫空间的结构。我们将自由地使用这种认同，例如考虑取值于 E 的 L^m 上的幂级数 $\mathcal{A}_{\underline{r}}(L^m, E)$，其中 $B^m_{\underline{r}}(0)$。

定义 1.2.1. 函数 $f\colon X \to V$ 称为局部解析函数，若对于每个 $a \in X$，存在一个 BH-子空间 $E \subset V$、一个坐标图 $\varphi\colon U \to B^n_{\underline{r}}(0)$ of X，对于某个 $\underline{r} \in \mathbb{R}^n_{>0}$，满足 $a \in U$，以及一个幂级数 $f_a \in \mathcal{A}_{\underline{r}}(L^n, \overline{E})$，使得 $f(x) = f_a(\varphi(x) - \varphi(a))$，对 a 的某个邻域中的所有 x 均成立。这里我们将 $f_a(\varphi(\,) - \varphi(a))$ 视为一个通过 $\overline{E} \hookrightarrow V$ 取值于 V 的函数。我们将取值于 V、定义在 X 上的局部解析函数所构成的 K-向量空间记为 $C^{\mathrm{la}}(X, V)$。

备注 1.2.2。特别地，局部解析函数 $f\colon X \to V$ 是连续的。

为了给 $C^{\mathrm{la}}(X, V)$赋予拓扑，将该空间表示为关于某些指标的局部解析函数空间的归纳极限。

定义1.2.3.（i）一个 V-索引 $\mathcal{I}$的 X是一个族 $\big(\varphi_i\colon U_i \to L^{m_i}$、$\underline{r}_i$、$E_i\big)_{i\in I}$，其中 φ_i是 X 的坐标图， $\underline{r}_i \in \mathbb{R}^{m_i}_{>0}$，而 $E_i \subset V$是 BH-子空间，使得

(1) $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ 是一个不交开覆盖，(2) $\varphi_i(U_i)$ $= B^{m_i}_{\underline{r}_i}(a_i)$，对于某个（或任意） $a_i \in \varphi_i(U_i)$。（ii） 给定两个 V-指标

$$\mathcal{I} = \big(\varphi_i\colon U_i \to L^{m_i}, \underline{r}_i, E_i\big)_{i\in I} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{J} = \big(\psi_j\colon W_j \to L^{n_j}, \underline{s}_j, F_j\big)_{j\in J}$$

如果对于每个 $i \in I$，都存在 $j \in J$ 使得 X，我们称 $\mathcal{I}$ 比 $\mathcal{J}$ 更细。

(1) $U_i \subset W_j$ （即 $\mathcal{I}$ 的覆盖是 $\mathcal{J}$ 的覆盖的细化），

(2) 存在 $a \in \varphi_i$（U_i）和 $g_{i,\ j} =$ （$g_{i,\ j,\ k}$）$_{k=1,\ \ldots\ldots n_j} \in \mathcal{A}_{\underline{r}_i}$（$L^{m_i}$， L^{n_j}），使得

$$\|g_{i,j,k} - g_{i,j,k}(0)\|_{\underline{r}_i} \le s_{j,k} \quad \text{, for all } k = 1, \ldots, n_j,$$

and $\psi_j \circ \varphi_i^{-1}(x) = g_{i,j}(x - a)$, for all $x \in \varphi_i(U_i)$,

(3) $F_j \subset E_i$ （这意味着 $\overline{F_j} \hookrightarrow \overline{E_i}$ 是连续的）。

注 1.2.4. 利用推论 1.1.3 可知，(ii) 中的条件 (2) 与 $a \in \varphi_i$（U_i）的选择无关，参见 [66, 第 76] 页。

引理 1.2.5 ([30, 注 2.1.9], 参见 [66, 引理 10.2])。 X 的 V-指标集合关于更精细关系构成一个有向集。

设 $\varphi\colon\ U \to L^m$ 是 X的一个坐标图。如果存在 $\underline{r} \in \mathbb{R}^m_{>0}$ 和 $a \in L^m$ 使得$\varphi(U) = B^m_{\underline{r}}(a)$，我们称 φ 为一个解析坐标图。对于这样的坐标图和一个 K-巴拿赫空间 E，我们定义

$$C^{\mathrm{rig}}(\varphi, E) := \left\{ f\colon U \to E \,\middle|\, \exists g \in \mathcal{A}_{\underline{r}}(L^m, E), \forall x \in U : f(x) = g(\varphi(x) - a) \right\}.$$

利用幂级数的恒等定理（命题 1.1.1），我们立即看到存在一个同构

$$\mathcal{A}_{\underline{r}}(L^m, E) \xrightarrow{\cong} C^{\mathrm{rig}}(\varphi, E), \quad g \longmapsto g(\varphi(_) - a).$$

通过这种方式，我们将 $C^{\mathrm{rig}}(\varphi, E)$ 视为一个 K-巴拿赫空间，其范数由 $\|f\| := \|g\|_{\underline{r}}$ 给出，当 $f = g(\varphi(\,) - a)$时。如果解析坐标图 $\varphi\colon\ U \to B^m_{\underline{r}}(a)$ 已明确，我们也写作

$$C^{\mathrm{rig}}(U, E) := C^{\mathrm{rig}}(\varphi, E).$$

备注 1.2.6. 如果存在某个 $a \in L^m$，使得 $\varphi(U) = B^m_{\underline{r}}(a)$，那么对于所有 $b \in \varphi(U)$，都有 $\varphi(U) = B^m_{\underline{r}}(b)$。然而，根据推论 1.1.3，定义中的$g \in \mathcal{A}_{\underline{r}}(L^m, E)$ 和 $\|f\|$ 的存在性不依赖于 $a \in \varphi(U)$ 的选择。

定义 1.2.7。设 $\mathcal{I} = \left(\varphi_i\colon\ U_i \to L^{m_i}, \underline{r}_i, E_i\right)_{i \in I}$ 是 X 的一个 V-指标。

(i)函数 $f\colon X \to V$从属于 $\mathcal{I}$，如果对于所有 $i \in I$，$f|_{U_i} \in C^{\mathrm{rig}}(\varphi_i, \overline{E_i})$。具体来说，这意味着，对于所有 $i \in I$，存在 $g_i \in \mathcal{A}_{\underline{r}_i}(L^{m_i}, \overline{E_i})$ 以及某个 $a_i \in \varphi_i(U_i)$，使得 $(f \circ \varphi_i^{-1})(x) = g_i(x - a_i)$，对于所有 $x \in \varphi_i(U_i)$。

(ii)我们将 K-向量空间中所有函数 $f\colon\ X \to V$从属于 $\mathcal{I}$ 的函数记为$C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{I}}(X, V)$。由于$(U_i)_{i \in I}$是 X的不相交覆盖，映射

$$C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{I}}(X, V) \longrightarrow \prod_{i \in I} C^{\mathrm{rig}}(\varphi_i, \overline{E_i}), \quad f \longmapsto (f|_{U_i})_{i \in I},$$

是 K-向量空间之间的一个同构。通过该同构，我们赋予 $C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{I}}(X, V)$ 一个来自右侧乘积拓扑的局部凸拓扑。

注记1.2.8. 如果索引集 I是有限的，那么 $C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{I}}(X, V)$ 本身就是一个 K-巴拿赫空间。无论如何，$C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{I}}(X, V)$ 是一个 K-Fr´echet 空间，因为 I 必然是可数的，参见注记 1.1.10 (iii)。

引理 1.2.9 ([30, 引理 2.1.9], 参见 [66, 引理 10.3])。若 V-指标 $\mathcal{I}$ 比V-指标 $\mathcal{J}$更细，则 $C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{J}}(X, V) \subset C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{I}}(X, V)$，且此包含映射是连续的。

命题 1.2.10 ([30, 引理 2.1.9], 参见 [66, 第 75] 页)。对于任意局部解析函数 $f\colon\ X \to V$，存在 X 的一个 V-指标 $\mathcal{I}$，使得 f 从属于 $\mathcal{I}$。换言之

$$C^{\mathrm{la}}(X, V) = \bigcup_{\mathcal{I}} C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{I}}(X, V)$$

其中并集取遍 X的所有 V-指标 $\mathcal{I}$。

因此，我们可以且将赋予 $C^{\mathrm{la}}(X, V)$关于 $C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{I}}(X, V)$的局部凸归纳极限拓扑，即使得嵌入 $C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{I}}(X, V) \hookrightarrow C^{\mathrm{la}}(X, V)$连续的最细局部凸拓扑。至此，局部凸$K$-向量空间 $C^{\mathrm{la}}(X, V)$的构造完成。

命题1.2.11（[30, 定理2.1.10], 参见 [66, 命题12.1]）。设 X 是一个局部 L-解析流形，且 V 是一个豪斯多夫局部凸 K-向量空间。对于任意 $x \in X$，求值同态

$$\mathrm{ev}_x\colon C^{\mathrm{la}}(X, V) \longrightarrow V, \quad f \longmapsto f(x),$$

是连续的。

推论1.2.12([30, 定理2.1.10],参见 [66, 推论12.2])。设 X 是一个局部 L-解析流形，且 V 是一个豪斯多夫局部凸 K-向量空间。那么 $C^{\mathrm{la}}(X, V)$ 是豪斯多夫的且为桶状。

证明。设 $f, f' \in C^{\mathrm{la}}(X,V)$ 满足 $f \neq f'$，并令 $x \in X$ 使得 $f(x) \neq f'(x)$。由于 V 是豪斯多夫的，存在 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的开邻域 $U, U' \subset V$，分别满足 $U \cap U' = \emptyset$。由命题 1.2.11，ev_x 是连续的，因此 $\mathrm{ev}_x^{-1}(U)$ 和 $\mathrm{ev}_x^{-1}(U')$ 是 $C^{\mathrm{la}}(X,V)$ 中分离 f 和 f' 的开子集。因此 $C^{\mathrm{la}}(X,V)$ 是豪斯多夫的。

由于 K-巴拿赫空间是桶状的（见 Cor. 6.16]，后的 [67，例 2），对每个 X 的 V-指标 $\mathcal{I}$，由 [67, 命题 14.3] 可知，直积 $C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{I}}(X,V)$ 是桶状的。此外，桶状局部凸 K 向量空间的归纳极限仍是桶状的（见 Cor. 6.16]，后的 [67，例 3），因此我们得出 $C^{\mathrm{la}}(X,V)$ 是桶状的。□

命题 1.2.13 ([30, Kor. 2.2.4], cf. [66, Prop. 12.5]). 设 X 是一个局部 L-解析流形，且 V 是一个豪斯多夫局部凸 K-向量空间。那么，对于任意由开子集 X_i构成的不交覆盖$X = \bigcup_{i\in I} X_i$，存在一个拓扑同构

$$C^{\mathrm{la}}(X,V) \xrightarrow{\cong} \prod_{i\in I} C^{\mathrm{la}}(X_i,V), \quad f \longmapsto (f|_{X_i})_{i\in I}.$$

证明。根据 [66, 引理 11.7]的陈述，只需证明：对于任意给定的V-指标 $\mathcal{J} = \big(\varphi_j\colon\ U_j \to L^{m_j}$、$\underline{r}_j$、$E_j\big)_{j\in J}$的 X，存在一个 V-指标 $\mathcal{I}$的 X，其比 $\mathcal{J}$更细化，且其覆盖是 $X = \bigcup_{i\in I} X_i$的细化。利用 [66, 引理 1.4],，我们发现，对于每个开子集 $\varphi_j(U_j \cap X_i) \subset L^{m_j}$ 且满足 $i \in I$、$j \in J$，存在一个形如

$$\varphi_j(U_j \cap X_i) = \bigcup_{k\in J_{i,j}} B^{m_j}_{\underline{s}_{i,j,k}}(a_{i,j,k}),$$

对于某些指标集 $J_{i,\ j}$，以及 $\underline{s}_{i,\ j,\ k} \in \mathbb{R}^{m_j}_{>0}$、$a_{i,\ j,\ k} \in L^{m_j}$。现在我们定义指标集$A := \{(i,j,k) \mid i \in I, j \in J, k \in J_{i,j}\}$，并令$W_{i,j,k} := \varphi_j^{-1}\big(B^{m_j}_{\underline{s}_{i\ ,j,k}}(a_{i,j,k})\big)$，其中 $(i,j,k) \in A$。那么，$W_{i,j,k}$ 构成了 X 的一个由坐标图组成的不交开覆盖。此外，

$$\mathcal{I} := \big(\varphi_j|_{W_{i,j,k}}\colon W_{i,j,k} \to L^{m_j}, \underline{s}_{i,j,k}, E_j\big)_{(i,j,k)\in A}$$

是一个比 $\mathcal{J}$更细的 V-指标，其覆盖按构造是 $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ 的一个细化。□

命题 1.2.14（[30, Bem. 2.1.11], [27, , 第 40] 页）。设 X 是一个局部 L-解析流形，且 V 是一个豪斯多夫局部凸 K-向量空间。

(i) 若 W 是豪斯多夫局部凸 K-向量空间，且 $\lambda\colon V \to W$ 是连续同态 *mo-*，则 λ 诱导一个连续同态

$$\lambda_*\colon C^{\mathrm{la}}(X,V) \longrightarrow C^{\mathrm{la}}(X,W), \quad f \longmapsto \lambda \circ f.$$

(ii) 若 Y 是局部 L-解析流形，且 $h\colon X \to Y$ 是局部 L-解析映射，则 h诱导一个连续同态

$$h^*\colon C^{\mathrm{la}}(Y,V) \longrightarrow C^{\mathrm{la}}(X,V), \quad f \longmapsto f \circ h.$$

证明. (i) 的结论由 [27, 命题 1.1.7], 推出。参见同上，第 40 页。

对于 (ii)，我们改编证明 [66, 命题 12.4 (ii)] 中概述的论证。首先，对于每个足够细的 V-指标 $\mathcal{J} = \big(\psi_j\colon\ W_j \to L^{n_j}, \underline{s}_j, F_j\big)_{j\in J}$of Y，我们构造一个 V-指标$\mathcal{I} = \big(\varphi_i\colon\ U_i \to L^{m_i}, \underline{r}_i, E_i\big)_{i\in I}$of X，使其满足：对于所有 $i \in I$，存在 $j \in J$，使得

(1) $U_i \subset h^{-1}(W_j)$，即 $\mathcal{I}$ 的覆盖是覆盖 $X = \bigcup_{j\in J} h^{-1}(W_j)$ 的细化。(2) 存在 $a_i \in \varphi_i(U_i)$ 和 $g_{i,j} = (g_{i,j,k})_{k=1,\dots,n_j} \in \mathcal{A}_{\underline{r}_i}(L^{m_i}, L^{n_j})$，使得

$$\|g_{i,j,k} - g_{i,j,k}(0)\|_{\underline{r}_i} \leq s_{j,k} \quad \text{, for all } k = 1, \dots, n_j,$$

且对所有 $x \in \varphi_i(U_i) = B^{m_i}_{\underline{r}_i}(a_i)$，都有 $\psi_j \circ h \circ \varphi_i^{-1}(x) = g_{i,j}(x - a_i)$,

(3) $F_j \subset E_i$.

事实上，对于给定的 V-索引 $\mathcal{J}$的覆盖$Y=\bigcup_{j\in J}W_j$，我们可以取 $X=\bigcup_{i\in I}U_i$ 为由解析图构成的 $X=\bigcup_{j\in J}h^{-1}(W_j)$的不交细化。根据定义1.1.13 (ii)中$h$ 是局部解析映射，我们可以假设对于所有$i\in I$、 $j\in J$，都有 $\psi_j\circ h\circ\varphi_i^{-1}\in C^{\mathrm{la}}(\varphi_i(U_i)\ L^{n_j})$，且 $U_i\subset h^{-1}(W_j)$，在取足够细的 $\mathcal{J}$ 和 $X=\bigcup_{i\in I}U_i$ 后成立。因此，进一步细化后，$X=\bigcup_{i\in I}U_i$ 满足性质 (2)。对于满足 $j\in J$ 且 $U_i\subset h^{-1}(W_j)$的 $i\in I$，我们定义 $E_i:=F_j$，从而得到所需的 V-索引 $\mathcal{I}$ 的 X。

对于这样的 $\mathcal{I}$和 $j\in J$、 $i\in I$，其中 $U_i\subset h^{-1}\left(W_j\right)$，我们可以使用以下同构

$$\mathcal{A}_{\underline{s}_j}(L^{n_j},\overline{F_j})\longrightarrow C^{\mathrm{rig}}(\psi_j,\overline{F_j}),\quad g\longmapsto g(\psi_j(_)-g_{i,j}(0)),$$
$$\mathcal{A}_{\underline{r}_i}(L^{m_i},\overline{E_i})\longrightarrow C^{\mathrm{rig}}(\varphi_i,\overline{E_i}),\quad g\longmapsto g(\varphi_i(_)-a_i),$$

以获得交换图

$$\begin{array}{ccc} C^{\mathrm{rig}}(\psi_j,\overline{F_j}) & \longrightarrow & C^{\mathrm{rig}}(\varphi_i,\overline{E_i}) \\ \cong\uparrow & & \uparrow\cong \\ \mathcal{A}_{\underline{s}_j}(L^{n_j},\overline{F_j}) & \longrightarrow & \mathcal{A}_{\underline{r}_i}(L^{m_i},\overline{E_i}) \end{array}$$

其中上面的映射由 $f\mapsto f\circ h$给出，而下面的映射由 $g\mapsto g\circ(g_{i,j}-g_{i,j}(0))$给出。由于后一个映射根据命题1.1.2是连续的，对于所有这样的 i和 j，由上面的同态诱导的同态 $C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{J}}(Y,V)\to C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{I}}(X,V)$,$f\mapsto f\circ h$ 是连续的。由于 Y的足够细的 V-指标 $\mathcal{J}$是任意的，这表明 $h^*\colon C^{\mathrm{la}}(Y,V)\to C^{\mathrm{la}}(X,V)$ 是连续的。□

命题 1.2.15. 设 X 是一个紧的局部 L-解析流形，且 V 是一个豪斯多夫局部凸 K-向量空间。

(i)（参见 [27, 第 40] 页）对所有 BH-子空间 $E\subset X$，取同态 $C^{\mathrm{la}}(X,\overline{E})\to C^{\mathrm{la}}(X,V)$ 的归纳极限，得到一个拓扑同构

$$\varinjlim_{E\subset V}C^{\mathrm{la}}(X,\overline{E})\xrightarrow{\cong}C^{\mathrm{la}}(X,V).$$

(ii)（参见 [27, 命题2.1.30]）如果 V 是LF-型，即可以写成递增并集$V=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\iota_n(V_n)$，其中 K-Fr´echet 空间之间通过连续单射 $\iota_n\colon V_n\hookrightarrow V$相连，那么$C^{\mathrm{la}}(X,V)$ 是一个LF-空间，即与一列 K-Fr´echet 空间的归纳极限拓扑同构。

如果 Veven 属于LB型，即递增并集 $V=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V_n$ 的 BH-子空间 V_n，那么$C^{\mathrm{la}}(X,V)$是 LB- 空间，即与一列 K- 巴拿赫空间的归纳极限拓扑同构。

(iii) ([30, 命题 2.3.2]) 若 V是紧型，则 $C^{\mathrm{la}}(X,V)$ 是紧型，并且

$$C^{\mathrm{la}}(X,K)\mathbin{\widehat{\otimes}}_K V\xrightarrow{\cong}C^{\mathrm{la}}(X,V),\quad f\otimes v\longmapsto f(_)v, \tag{1.2}$$

是拓扑同构。特别地，在这种情况下， $C^{\mathrm{la}}(X,K)$ 是紧型。

证明。首先注意，由于紧性， X 的每个不交开覆盖必为有限覆盖。因为 BH-子空间的有限和仍是 BH-子空间（ [27, 命题 1.1.5], ），所以对于所有坐标图具有相同 BH-子空间的 X 的 V-指标集，在 X 的所有 V-指标集中是共尾的。这证明了 (i) 中的拓扑同构。

对于 (ii)，若 V 是 LF-型，则 [11, I. §3.3 命题 1] 表明，对于 V 的每个 BH-子空间 E，单射 $\overline{E}\hookrightarrow V$ 都可经由到 V_n 的连续单射通过某个 ι_n 分解。对这些映射取归纳极限，得到一个连续单射 $\varinjlim_{E\subset V}C^{\mathrm{la}}(X,\overline{E})\hookrightarrow\varinjlim_{n\in\mathbb{N}}C^{\mathrm{la}}(X,V_n)$。此外， ι_n 导出一个连续单射 $\iota\colon\varinjlim_{n\in\mathbb{N}}C^{\mathrm{la}}(X,V_n)\hookrightarrow C^{\mathrm{la}}(X,V)$。复合

$$\varinjlim_{E\subset V}C^{\mathrm{la}}(X,\overline{E})\hookrightarrow\varinjlim_{n\in\mathbb{N}}C^{\mathrm{la}}(X,V_n)\hookrightarrow C^{\mathrm{la}}(X,V)$$

随后与 (i) 中的拓扑同构一致。因此 ι 本身是一个拓扑 cal 同构。

设 $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的一个不交开覆盖共尾序列，记作 $\mathcal{U}_n = \{U_{n,i}\}_{i\in I_n}$，其中指标集 I_n 均为有限集。首先对 V_n 的 BH- 子空间取归纳极限，我们得到一个拓扑同构

$$C^{\mathrm{la}}(X, V_n) \cong \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \prod_{i\in I_n} \varinjlim_{E\subset V_n} C^{\mathrm{rig}}(U_{n,i}, \overline{E}). \tag{1.3}$$

由于 V_n 是一个 K-Fr´echet 空间，存在一个拓扑同构

$$\varinjlim_{E\subset V_n} C^{\mathrm{rig}}(U_{n,i}, \overline{E}) \cong C^{\mathrm{rig}}(U_{n,i}, K)\,\widehat{\otimes}_K\, V_n, \tag{1.4}$$

参见 [27, 命题 2.1.13 (ii)]。由于后者是一个 K-Fr´echet 空间（见 [67, 命题 17.6] 之后的讨论），我们已将 $C^{\mathrm{la}}(X, V)$ 表示为 K-Fr´echet 空间的归纳极限。此外，若 V 为 LB 型，我们可以假设 V_n 是 K-巴拿赫空间。于是，由于 (1.4) 是一个 K-巴拿赫空间，且 (1.3) 中的乘积是有限的，上述结果还表明，在这种情况下，$C^{\mathrm{la}}(X, V)$ 是一个 LB-空间。

对于 (iii)，根据注 1.1.10 (ii)，我们可以区分 X 是离散的情形和 L 是局部紧的情形。在第一种情形下，对于某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $C^{\mathrm{la}}(X, V) \cong V^n$。现在假设 L 是局部紧的。这里我们要找到一个序列 $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中的元素是 X 的 V-指标，$\mathcal{I}_{n+1}$ 比 $\mathcal{I}_n$ 更细；该序列是共尾的，并且过渡映射 $C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{I}_n}(X, V) \hookrightarrow C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{I}_{n+1}}(X, V)$ 是紧的。将命题 1.2.13 应用于 X 的某个有限不交坐标图覆盖后，只需考虑 $X = B^m_r(0) \subset L^m$，其中 $r := (r, \dots, r) \in \mathbb{R}^m_{>0}$。取定满足 $0 < \varepsilon < 1$ 的 $\varepsilon \in |L|$。由于 L 是局部紧的，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都能找到一个有限闭球族 $(B^m_{\varepsilon^n r}(a_{n,i}))_{i=1,\dots,d_n}$，其半径为 $\varepsilon^n r$，并构成 X 的不交覆盖。于是，对于 $B^m_{\varepsilon^{n+1}r}(a) \subset B^m_{\varepsilon^n r}(b)$，所诱导的同态

$$C^{\mathrm{rig}}\big(B^m_{\varepsilon^n r}(b), K\big) \longrightarrow C^{\mathrm{rig}}\big(B^m_{\varepsilon^{n+1}r}(a), K\big)$$

K-巴拿赫空间的映射是紧的，参见 [67, §16 Claim，第 98] 页。

若 V 是紧型的，令 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为由 K-巴拿赫空间构成的归纳序列，其过渡映射是单射且紧，并满足 $V = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} V_n$。我们定义 V-指标 $\mathcal{I}_n := \big(B^m_{\varepsilon^n r}(a_{n,\,i})\ \varepsilon^n r, V_n\big)_{i=1,\ \dots,\ d_n}$，它们构成一个共尾序列。此外，同态

$$\begin{array}{ccc} C^{\mathrm{rig}}\big(B^m_{\varepsilon^n r}(b), V_n\big) & \longrightarrow & C^{\mathrm{rig}}\big(B^m_{\varepsilon^{n+1}r}(a), V_{n+1}\big) \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ C^{\mathrm{rig}}\big(B^m_{\varepsilon^n r}(b), K\big)\,\widehat{\otimes}_K\, V_n & \longrightarrow & C^{\mathrm{rig}}\big(B^m_{\varepsilon^{n+1}r}(a), K\big)\,\widehat{\otimes}_K\, V_{n+1} \end{array}$$

由 [67, 引理 18.12]可知，该映射是紧的。由引理 A.3 (iii) 可知，这些映射之和给出的同态 $C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{I}_n}(X, V) \hookrightarrow C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{I}_{n+1}}(X, V)$对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都是紧的，因此$C^{\mathrm{la}}(X, V)$是紧型的。

最后，[27, 命题 1.1.32 (i)] 表明 (1.2) 是一个拓扑同构。 □

推论 1.2.16（参见 [27, 第 40]页）。设 X 是一个局部紧、局部 L解析流形。那么 $C^{\mathrm{la}}(X, K)$ 是自反且完备的。

证明。由注 1.1.10 (iii)，我们得到一个由紧开子集构成的覆盖 $X = \bigcup_{i\in I} X_i$。于是命题 1.2.15 (iii) 表明，对于所有 $i \in I$，$C^{\mathrm{la}}(X_i, K)$ 都是自反且完备的 [67, 命题 16。10]，。由于这两个性质在取乘积时均得以保留（分别参见 [67, 命题 9.10 和 9.11] 以及 [67, 引理 7.8] 之前的注释），结论由命题 1.2.13 得出。□

命题 1.2.17（参见 [73, 引理 A.1] 以及 [72, 定理 12.2] 之后的讨论）。设 X 和 Y 是紧的局部 L 解析流形。那么映射

$$C^{\mathrm{la}}\big(X, C^{\mathrm{la}}(Y, K)\big) \xrightarrow{\cong} C^{\mathrm{la}}(X \times Y, K)\,, \quad f \longmapsto [(x, y) \mapsto f(x)(y)] \tag{1.5}$$

是一个定义良好的拓扑同构。

证明。只需在 X 的所有 $C^{\mathrm{la}}(Y,K)$-指标上定义(1.5)。为此，考虑一个 K-有限指数 $\mathcal{J}=\big(\psi_j\colon W_j\to L^{n_j},\underline{s}_j,K\big)_{j=1,\dots,e}$ of Y，由于 Y是紧的，其指标集必然是有限的。于是$C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{J}}(Y,K)\hookrightarrow C^{\mathrm{la}}(Y,K)$是一个 BH-子空间，而此形式的 BH-子空间穷尽了 $C^{\mathrm{la}}(Y,K)$。因此，只需考虑 X 的形如 $\mathcal{K}=\big(\varphi_i$的 $C^{\mathrm{la}}(Y,K)$-指标：$U_i\to L^{m_i},\underline{r}_i,C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{J}}(Y,K)\big)_{i=1,\dots,d}$，其中对于 $\mathcal{I}=\big(\varphi_i\colon U_i\to L^{n_i},\underline{r}_i,K\big)_{i=1,\dots,d}$ 是 X 的一个 K-指标，而 $\mathcal{J}$ 是 Y 的一个 K-指标。但利用

$$\mathcal{A}_{\underline{r}_i}\big(L^{m_i},\mathcal{A}_{\underline{s}_j}(L^{n_j},K)\big)\cong\mathcal{A}_{(\underline{r}_i,\underline{s}_j)}(L^{m_i+n_j},K)\tag{1.6}$$

我们发现，

$$\begin{aligned}C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{K}}\big(X,C^{\mathrm{la}}(Y,K)\big)&=\prod_{i=1}^{d}C^{\mathrm{rig}}\Big(\varphi_i,\prod_{j=1}^{e}C^{\mathrm{rig}}(\psi_j,K)\Big)\\&\cong\prod_{i,j=1}^{d,e}C^{\mathrm{rig}}(\varphi_i\times\psi_j,K)=C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{I}\times\mathcal{J}}(X\times Y,K)\end{aligned}$$

其中，$\mathcal{I}\times\mathcal{J}$ 是显然的 K-指标，指向 $X\times Y$。通过这种方式，我们得到连续的 hom o-态射（1.5）。此外，应用（1.6）可知。

$$C^{\mathrm{la}}(X\times Y,K)\longrightarrow C^{\mathrm{la}}\big(X,C^{\mathrm{la}}(Y,K)\big)\,,\quad f\longmapsto\big[x\mapsto[y\mapsto f(x,y)]\,\big],$$

定义了一个 K-线性映射，它是(1.5)的逆映射。由开映射定理[27, 定理1.1.17]可知，(1.5) 甚至是一个拓扑同构。□

推论 1.2.18。设 X 和 Y 是紧的局部 L-解析流形。则存在一个拓扑同构

$$C^{\mathrm{la}}(X,K)\,\widehat{\otimes}_K\,C^{\mathrm{la}}(Y,K)\xrightarrow{\cong}C^{\mathrm{la}}(X\times Y,K)\,,\quad f\otimes g\longmapsto[(x,y)\mapsto f(x)g(y)]\,.$$

证明。这可由命题 1.2.17 与命题 1.2.15 (iii) 合并得出。□

1.3. 局部解析表示。本节中，$L\subset K$ 仍是非阿基米德域 K 的完备子域，其绝对值$|_|$非平凡。我们将回顾局部 L-解析李群的局部解析表示这一概念，该概念也很容易推广到我们的情形（参见 [32, 第一部分，附录 A]），见 [30]。

定义 1.3.1. 局部 L-解析李群（或非阿基米德李群）是一个局部L-解析流形 G，它具有群结构，且乘法映射与求逆映射

$$m\colon G\times G\longrightarrow G\,,\qquad\mathrm{inv}\colon G\longrightarrow G$$

均为局部 L-解析的。

注记 1.3.2. (i) 在上述定义中，只需假设乘法映射是局部 L-解析的，因为这已经蕴含求逆映射也是局部 L-解析的，见 [12, 5.12.1], [66, 命题 13.6]。

(ii)如果 L 是局部紧的，那么特别地，每个非阿基米德李群 G 都是一个豪斯多夫、完全不连通且局部紧的拓扑群。因此，单位元 e 在 G 中的每个邻域都包含 G [8, 的一个开子群，见 Ch.III.§4.6，推论 1]。这意味着，e 在 G 中的每个邻域也包含一个紧开子群。

定义 1.3.3. 局部 L-解析李群 G 的局部 L-解析子群 H 是一个作为局部 L-解析子流形的子群 $H\subset G$。这样的子群自然地具有其自身的局部 L-解析李群结构，并且必然在 G 中闭，参见 [12, 5.12.3]。

例 1.3.4. 假设 L 是局部紧的，且素元为 π，并令 $d \in \mathbb{N}$。群 $\mathrm{GL}_d(L)$ 是局部 L-解析李群的一个例子。以单位元为中心的一族坐标图由下式给出:

$$1 + \pi^n M_d(\mathcal{O}_L) \longrightarrow B^{d^2}_{|\pi|^n}(0)\,, \quad 1 + (a_{ij}) \longmapsto (a_{ij}).$$

定义 1.3.5. 局部 L-解析李群G 的一个（左）局部解析 G-表示，是一个桶状、豪斯多夫局部凸 K-向量空间 V，带有一个由连续自同态构成的 G-作用，使得对所有 $v \in V$，轨道映射 $G \to V$, $g \mapsto g.v$ 按定义 1.2.1 的意义均为局部解析。局部解析 G-表示之间的同态，即 V 与 W 之间的同态，是一个 G-等变连续同态 $V \to W$。

注 1.3.6. 根据定义，局部解析G-表示的映射 $G \times V \to V$, $(g, v) \mapsto g.v$ 是分别连续的。但如果 G 是局部紧的（例如，如果 L 是局部紧的），那么根据引理 A.8，这已经等价于联合连续。

例 1.3.7. (i) 关于当 L 是局部非阿基米德域时的局部解析特征 $\psi\colon L \to K^\times$ 和 $\chi\colon L^\times \to K^\times$，请参阅附录 B 中的讨论。特别地，在定理 B.2.2 中，我们证明，对于特征 $\mathrm{char}(L) = p > 0$ 的局部域 L，每个局部 L-解析特征 $\chi\colon 1 + \mathfrak{m}_L \to K^\times$ 都具有形式 $\chi(z) = z^c$，其中 $c \in \mathbb{Z}_p$。这里，$1 + \mathfrak{m}_L \subset L^\times$ 表示满足 $|z - 1| < 1$ 的主单位子群。
(ii) 设 G 是一个紧的局部 L-解析李群，且 V 是一个豪斯多夫局部凸K-向量空间。于是

$$G \times C^{\mathrm{la}}(G, V) \longrightarrow C^{\mathrm{la}}(G, V)\,, \quad (g, f) \longmapsto f(g^{-1}_) := \big[h \mapsto f(g^{-1}h)\big],$$

定义了一个局部解析 G-表示，称为带有 $C^{\mathrm{la}}(G, V)$系数的左正则 G-表示。事实上，根据推论1.2.12，$C^{\mathrm{la}}(G, V)$是桶状且豪斯多夫的，并且根据命题 1.2.14(ii)，G-作用是通过连续自同态给出的。为了证明轨道映射是局部解析的，考虑局部 L-解析流形之间的局部解析映射

$$G \times G \longrightarrow G\,, \quad (g, h) \longmapsto g^{-1}h.$$

利用命题 1.2.17 和函子性，这个映射诱导出同态。

$$C^{\mathrm{la}}(G, V) \longrightarrow C^{\mathrm{la}}(G \times G, V) \cong C^{\mathrm{la}}(G, C^{\mathrm{la}}(G, V))\,, \quad f \longmapsto [g \mapsto [h \mapsto f(g^{-1}h)]],$$

其像恰好由轨道映射组成。

同样地，可以证明系数取在 $C^{\mathrm{la}}(G, V)$ 中的右正则 G-表示

$$G \times C^{\mathrm{la}}(G, V) \longrightarrow C^{\mathrm{la}}(G, V)\,, \quad (g, f) \longmapsto f(_g) := [h \mapsto f(hg)],$$

以及通过共轭作用得到的 G-表示，其系数取自 $C^{\mathrm{la}}(G, V)$

$$G \times C^{\mathrm{la}}(G, V) \longrightarrow C^{\mathrm{la}}(G, V)\,, \quad (g, f) \longmapsto f(g^{-1}_g),$$

是局部解析的 G-表示。

命题 1.3.8（参见 [30, Satz 3.1.7], [27, Prop. 3.6.14]）。设 G 是一个局部 L-解析李群，V 是一个局部解析的 G-表示。设 $W \subset V$ 是一个 G-不变闭子空间。

(i) 那么 V/W 是一个局部解析的 G-表示，其作用由诱导的 G-作用给出。(ii) 若 W 是桶状的，那么 W 是一个局部解析的 G-表示，其作用由诱导的G-作用给出。

证明。商空间 V/W 是桶状的（ [67, 推论 6 之后的说明）16], 且是豪斯多夫的，因为 $W \subset V$ 是闭的。此外，W的 G-不变性确保 G 在 W和 V/W上通过连续自同态作用。为证明轨道映射是局部解析的，考虑一个 BH-子空间 $E \subset V$。由于 $W \subset V$是闭的，$E \cap W \subset W$是一个 BH-子空间。因此，W的轨道映射是局部解析的。此外，由命题 1.2.14 (i) 的函子性，我们有一个连续同态 $C^{\mathrm{la}}(G, V) \to C^{\mathrm{la}}(G, V/W)$。对于 $v \in V$，其轨道映射在该同态下的像就是剩余类 $v + W$ 的轨道映射。□

命题 1.3.9（参见 [30, 引理 3.2。4], [27, 命题 3.6。11]）。设 H 是局部 L-解析李群 G的一个开子群，且 V 是一个局部凸的 K-向量空间， G 在其上通过连续自同态作用。那么， V 是局部解析的 G-表示，当且仅当V 是关于诱导的 H-作用的局部解析 H-表示。

证明。若 V 是局部解析的 H-表示，考虑 $v \in V$ 和 $g \in G$。则存在单位元 e 附近的解析坐标图 $U \subset H$ ，使轨道映射 $\rho_{g.v}$ 在该处由收敛幂级数给出。因此，轨道映射 ρ_v 在 g附近的解析坐标图 Ug 上由收敛幂级数给出。这表明 V 是局部解析的G-表示。反向蕴含显然。□

命题 1.3.10（对于 char(L) $= 0$，参见 [30, Kor. 3.1.9]）。设 G 是局部 L解析李群， E 是带有抽象 G-作用的 K-巴拿赫空间。则关于此 G-作用， E 是局部解析表示，当且仅当 E 上的 G-作用由 Bourbaki *[10,* III. *§*1.2 Expl. (3)*],* 意义下的解析线性表示给出；也就是说，它是李群间的局部L解析同态 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(E) \subset \mathcal{L}(E,E)$[1]。这里我们通过限制标量，将 E视为L-巴拿赫空间。

特别地，巴拿赫空间 K 上的局部解析 G-表示 E 是一致局部解析的：对于每个 $g \in G$，都存在 g 的一个邻域 $U \subset G$ ，使得在 U 上，所有轨道映射 $\rho_v|_U$、 $v \in E$ 都由收敛幂级数给出。

证明。我们的证明与 [30] 中的证明不同，后者使用了关于 G 的李代数元素的微分。

首先假设 E 是一个局部解析 G-表示。这意味着 G 通过连续自同态作用，即存在一个群（抽象群）同态 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(E)$。为了证明 ρ 是局部 L-解析映射，只需考虑一个固定的 $g \in G$ 以及一个以 g 为中心的坐标图 $\varphi\colon U \to \varphi(U)$。现在我们可以将命题 A.10 应用于函数$\rho \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \mathcal{L}_b(E,E)$ 以及连续的 L-双线性配对

$$\mathcal{L}_b(E,E) \times E \longrightarrow E\,, \quad (\lambda, v) \longmapsto \lambda(v), \tag{1.7}$$

的 L-巴拿赫空间。由于 [67, Rmk. 6.7], $\mathcal{L}_b(E,E)$ 的拓扑由算子范数诱导，因此 (1.7) 的连续性得以成立。于是，该命题表明，$\rho \circ \varphi^{-1}$ 在 0 的某个开邻域内是解析的，因为 ρ 的轨道映射是局部解析的。

反过来，若 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(E)$ 是李群的局部 L 解析同态，则命题 A.10 的逆向蕴含表明，对于 $v \in E$，轨道映射 $G \to E, g \mapsto g.v$ 是局部解析的。此外， G 显然通过连续自同态作用，因为 $\rho(G) \subset \mathcal{L}(E,E)$。□

1.4. 局部解析分布代数上的模。设 K 是一个球完备的完备非阿基米德域，并设 $L \subset K$ 是一个局部紧完备子域。注意，在这些假设下，每个局部 L 解析流形都存在一个由紧开子集组成的可数不交覆盖（见注 1.1.10 (iii)），并且局部凸 K 向量空间上的哈恩–巴拿赫定理适用，见 [67, Prop. 9.2]。

本节将回顾局部解析分布及其与局部解析表示之间的相互作用。我们遵循 [74] ，因为 L 的特征在此同样无关紧要。不过，我们有时会需要并证明稍强一些的结论。

定义 1.4.1. (i) 设 X 是一个局部 L-解析流形。局部解析 *tic* X 上的分布定义为强对偶空间

$$D(X,K) := C^{\mathrm{la}}(X,K)'_b.$$

(ii) 对于 $x \in X$，同态

$$\delta_x\colon C^{\mathrm{la}}(X,K) \longrightarrow K\,, \quad f \longmapsto f(x),$$

[1] 关于坐标图取值于 L-巴拿赫空间的局部 L-解析流形，以及其上的局部 L-解析映射的定义，参见 [12, §5.1]

根据命题 1.2.11，它是连续的。这个元素 $\delta_x \in D(X,K)$ 称为支集在 x 的狄拉克分布。

命题 1.4.2（参见 [74]）。设 X 是一个局部 L-解析流形。
(i) 局部凸 K-向量空间 $D(X,K)$是自反的。(ii) 若 X 是紧的，则 $D(X,K)$是核的 K-Fr´echet空间。(iii) 给定一个由开子集 X_i构成的互不相交覆盖 $X=\bigcup_{i\in I} X_i$，存在一个自然的拓扑同构

$$D(X,K) \cong \bigoplus_{i\in I} D(X_i,K).$$

特别地，对于每个 $\mu \in D(X,K)$，都存在某个紧开子集 $Y \subset X$，使其支撑于该子集上，即满足 $\mu \in D(Y,K) \subset D(X,K)$。
(iv) 由所有狄拉克分布 δ_x, $x \in X$生成的 $D(X,K)$的子空间是稠密的。

证明。若 X 是紧的，则根据命题 1.2.15 (iii)，$C^{\mathrm{la}}(X,K)$是紧型的。因此，其强对偶 $D(X,K)$是核的 K-Fr´echet空间（参见 [67, 命题 16.10] 和 [67, 命题 19.9]），从而证明了(ii)。

(iii) 的陈述由命题 1.2.13 和 [67, 命题 9.11] 得出。

注意，核的 Fr´echet 空间是自反的 [67, 推论 19.3 (ii)]，因此当 X 紧时，(i) 即得证。一般情形下，利用注 1.1.10 (iii)，我们可以找到一个由开紧子集构成的可数不交覆盖 $X=\bigcup_{i\in I} X_i$。由 [67, 命题 9.10] 和 [67, 命题 9.11] 可知，局部凸 K-向量空间的自反直和仍然是自反的。将此结论应用于 (iii) 中的直和，其中 $X=\bigcup_{i\in I} X_i$，可得 $D(X,K)$ 是自反的。

最后，令 $\Delta \subset D(X,K)$ 表示由 X 的狄拉克分布生成的子空间的闭包，并假设 $\Delta \subsetneq D(X,K)$。根据 Hahn-Banach 定理 [67, 推论 9.3],，存在一个非零连续线性泛函 $\bar{\ell}$: $D(X,K)/\Delta \to K$。由此可导出一个非零连续泛函 ℓ: $D(X,K) \to K$，它在 Δ 上为零。由于$D(X,K)$ 是自反的，ℓ 对应于一个定义在 X 上的局部解析函数 f。然而，ℓ 在 Δ 上为零意味着 $f=0$，这就产生了矛盾。□

命题 1.4.3（参见 [74, 命题 2.3][2]及 [73, 附录]）。设 G 是一个局部 L解析李群。存在一个分别连续的 K双线性映射

$$D(G,K)\times D(G,K) \longrightarrow D(G,K), \quad (\mu,\nu) \longmapsto \mu * \nu, \tag{1.8}$$

使得对于 g、$g' \in G$，有 $\delta_g * \delta_{g'} = \delta_{gg'}$。具体而言，对于 μ，$\nu \in D(G,K)$ 分别支撑于 H 和 H' 中的紧开子集 G、$\mu * \nu$ 上，并且在 $C^{\mathrm{la}}(H\cdot H', K)$ 上分解为[3]

$$\begin{aligned} C^{\mathrm{la}}(H\cdot H',K) &\xrightarrow{m^*} C^{\mathrm{la}}(H\times H',K) \cong C^{\mathrm{la}}(H,K)\,\widehat{\otimes}_K\, C^{\mathrm{la}}(H',K) \xrightarrow{\mu\otimes\nu} K. \\ f &\longmapsto [(h,h')\mapsto f(hh')] \end{aligned} \tag{1.9}$$

如果 G 是紧的，则 (1.8) 甚至是联合连续的。
证明。令 $G=\bigcup_{i\in I} H_i$ 是由紧开子集组成的可数不交覆盖。注意到存在一个拓扑同构 [46, 推论 1.2.14]

$$D(G,K)\,\widehat{\otimes}_{K,\iota}\, D(G,K) \cong \bigoplus_{i,j\in I} \left(D(H_i,K)\,\widehat{\otimes}_{K,\iota}\, D(H_j,K)\right).$$

因此，只需定义连续同态

$$D(H_i,K)\,\widehat{\otimes}_{K,\iota}\, D(H_j,K) \longrightarrow D(H_i\cdot H_j,K) \subset D(G,K)$$

以定义 (1.8)。G 的乘法映射诱导出一个连续同态

$$C^{\mathrm{la}}(H_i\cdot H_j,K) \xrightarrow{m^*} C^{\mathrm{la}}(H_i\times H_j,K) \cong C^{\mathrm{la}}(H_i,K)\,\widehat{\otimes}_{K,\pi}\, C^{\mathrm{la}}(H_j,K)$$

[2]For the proof of this proposition, Schneider and Teitelbaum refer to the diploma thesis [29] here which was not available to me.

[3]Recall that $H\cdot H'$ denotes the set $\{hh' \mid h\in H, h'\in H'\} \subset G$.

利用命题 1.2.14 (ii) 和推论 1.2.18。对这个同态取转置，得到连续同态

$$D(H_i,K)\mathbin{\widehat{\otimes}}_{K,\iota}D(H_j,K)\cong D(H_i,K)\mathbin{\widehat{\otimes}}_{K,\pi}D(H_j,K)\longrightarrow D(H_i\cdot H_j,K)$$

由 [67, 命题 17.6] 和 [67, 命题 20.13]可得。这也表明，卷积乘积由 (1.9) 给出，并且当 G 是紧的时，它是联合连续的。此外，对于 $g\in H_i, g'\in H_j$，线性形式 $\delta_{(g,g')}$ 与 $\delta_g\otimes\delta_{g'}$ 在 $C^{\mathrm{la}}(H_i,K)\otimes_K C^{\mathrm{la}}(H_j,K)\subset C^{\mathrm{la}}(H_i\times H_j,K)$ 上一致。利用 $C^{\mathrm{la}}(H_i,K)\otimes_K C^{\mathrm{la}}(H_j,K)$ 是一个稠密子空间，可得 $\delta_g*\delta_{g'}=\delta_{gg'}$。□

定义与命题 1.4.4。对于一个局部 L-解析李群 G，卷积乘积 (1.8) 赋予 $D(G,K)$ 一个结合且含幺的 K-代数结构，称为 G的（局部解析）分布代数。其单位元为 δ_e，其中 e 是 G 的单位元。若系数域 K 可由上下文确定，我们也将 $D(G)$ 记作：$=D(G,K)$。

证明。由 (1.8) 的分别连续性，只需对狄拉克分布检验 $D(G)$ 的必要性质。对于狄拉克分布，这些性质直接由 $\delta_g*\delta_{g'}=\delta_{gg'}$ 所保证的 G 作为群的相应性质推出，其中 $g,g'\in G$。□

推论 1.4.5（参见 [58, 命题 3.5] 的证明）。设 G 是一个局部 L-解析李群。对于$f\in C^{\mathrm{la}}(G,K)$ 以及分布 $\mu,\nu\in D(G)$，由 $G\to K$ 给出的函数

$$g\longmapsto\nu\big[g'\mapsto f(gg')\big]\quad and\quad g'\longmapsto\mu\big[g\mapsto f(gg')\big]$$

是局部解析的，并且我们有以下类似于 Fubini 定理的恒等式：

$$(\mu*\nu)(f)=\mu\big[g\mapsto\nu\big[g'\mapsto f(gg')\big]\big]=\nu\big[g'\mapsto\mu\big[g\mapsto f(gg')\big]\big].\tag{1.10}$$

证明。假设 ν 的支集包含于紧开子集 $H'\subset G$，则第一个函数限制在某个紧开子集 $H\subset G$ 上，等于 f 在下述映射下的像

$$C^{\mathrm{la}}(H\cdot H',K)\xrightarrow{m^*}C^{\mathrm{la}}(H\times H',K)\cong C^{\mathrm{la}}(H,C^{\mathrm{la}}(H',K))\xrightarrow{\nu_*}C^{\mathrm{la}}(H,K).$$

类似地，可以证明第二个函数是局部解析的。现在设 μ 的支集包含于紧开子集 $H\subset G$。那么，(1.10) 的陈述由下式的交换性得出

$$\begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{\cong} & C^{\mathrm{la}}(H,K)\mathbin{\widehat{\otimes}}_K C^{\mathrm{la}}(H',K) & \xrightarrow{\mu\otimes\nu} \\ C^{\mathrm{la}}(H\cdot H',K) & \xrightarrow{m^*} C^{\mathrm{la}}(H\times H',K) & & & K \\ & & \xrightarrow{\cong} & C^{\mathrm{la}}(H,C^{\mathrm{la}}(H',K)) \xrightarrow{\nu_*} C^{\mathrm{la}}(H,K) & \xrightarrow{\mu} \end{array}$$

以及针对 $\nu\circ\mu_*$ 的类似图表。□

局部 L-解析反自同构 $\mathrm{inv}: G\to G, g\mapsto g^{-1}$, 通过函子性诱导出局部凸 K-向量空间的一个自同构

$$\mathrm{inv}^*\colon C^{\mathrm{la}}(G,K)\longrightarrow C^{\mathrm{la}}(G,K),\quad f\longmapsto f\circ\mathrm{inv}.$$

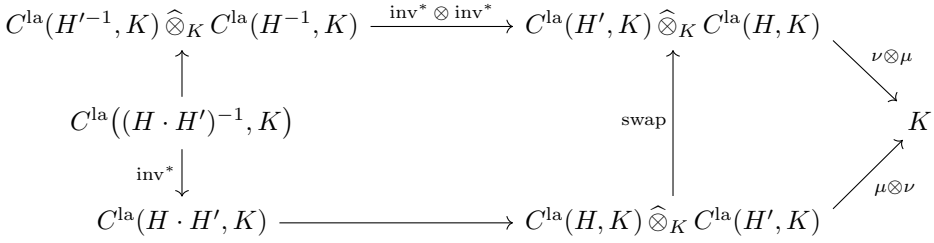
因此，我们得到一个局部凸 K-向量空间的自同构

$$D(G)\longrightarrow D(G),\quad \mu\longmapsto\dot\mu:=\mu\circ\mathrm{inv}^*=\big[f\mapsto\mu(f\circ\mathrm{inv})\big].\tag{1.11}$$

引理 1.4.6. 对于 $\mu,\nu\in D(G)$，我们有

$$(\mu*\nu)^{\cdot}=\dot\nu*\dot\mu.\tag{1.12}$$

证明。我们可以假设 μ 和 ν 分别支撑在紧开子集 H 和 H' 上，其中 H 和 H' 均为 G的子集。然后该断言由下列图表的交换性得出：



□

命题 1.4.7（参见 [74, 定理 2.2]）。设 X 是一个局部 L-解析流形，并且 V 是 a 豪斯多夫局部凸 K-向量空间。
(i) 存在唯一的连续 K-线性积分映射

$$I\colon C^{\mathrm{la}}(X,V)\longrightarrow\mathcal{L}_b\big(D(X,K),V\big) \tag{1.13}$$

使得 $I(f)(\delta_x)=f(x)$，对所有 $f\in C^{\mathrm{la}}(X,V)$ 和 $x\in X$。此外，该映射关于 X 和 V 是自然的，且是单射。

(ii) 如果 V 是 LB型，即 $V=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V_n$，对于一个由 $V_0\subset V_1\subset\ldots\subset V$个 BH-子空间组成的序列，那么 (1.13) 是 K-向量空间之间的同构，其逆为

$$I^{-1}\colon\mathcal{L}\big(D(X,K),V\big)\xrightarrow{\cong}C^{\mathrm{la}}(X,V)\,,\quad T\longmapsto\big[x\mapsto T(\delta_x)\big].$$

证明。首先注意，对于 $f\in C^{\mathrm{la}}(X,V)$，条件 $I(f)(\delta_x)=f(x)$ 对所有 $x\in X$ 都成立，这由 X 的狄拉克分布所生成子空间的稠密性唯一确定了 $I(f)$。

为证明 I 的存在，取 $X=\bigcup_{i\in I}X_i$ 为由开紧子集构成的可数不交覆盖。由命题 1.2.13 和命题 1.4.2 (iii)，分别得到拓扑同构 $C^{\mathrm{la}}(X,V)\cong\prod_{i\in I}C^{\mathrm{la}}(X_i,V)$ 和 $D(X,K)\cong\bigoplus_{i\in I}D(X_i,K)$，其中 $D(X_i,K)$ 是 K-Fr´echet 空间。由引理 A.9，我们有如下拓扑同构

$$\mathcal{L}_b\big(D(X,K),V\big)\xrightarrow{\cong}\prod_{i\in I}\mathcal{L}_b\big(D(X_i,K),V\big)\,,\quad F\longmapsto\big(F|_{D(X_i,K)}\big)_{i\in I}.$$

这样，我们可以归约到 X 为紧的情形。

这里我们首先假设 V 是一个 K-巴拿赫空间。由于 $C^{\mathrm{la}}(X,K)$ 是紧型的，由命题 A.7 可得一个连续线性双射 $C^{\mathrm{la}}(X,V)\to C^{\mathrm{la}}(X,K)\,\widehat{\otimes}_K\,V$。结合 [67, Cor. 18.8]，可得连续线性双射

$$\begin{aligned} I\colon C^{\mathrm{la}}(X,V)&\longrightarrow C^{\mathrm{la}}(X,K)\,\widehat{\otimes}_K\,V\xrightarrow{\cong}\mathcal{L}_b\big(D(X,K),V\big)\\ f(\,_\,)\,v&\longleftarrow\!\shortmid\qquad f\otimes v\qquad\longmapsto\big[\mu\mapsto\mu(f)\,v\big]\end{aligned} \tag{1.14}$$

满足 $I(f)(\delta_x)=f$({v5)。

如果 $V=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V_n$ 是 LB型，那么 V 的每个 BH-子空间都经由某个 $\overline{V_n}$ 按 [11,I 分解。§3.3 命题 1]。因此，根据命题 1.2.15 (i)，X 的紧性意味着，

$$C^{\mathrm{la}}(X,V)\cong\varinjlim_{n\in\mathbb{N}}C^{\mathrm{la}}(X,\overline{V_n}).$$

此外，连续单射 $\overline{V_n}\hookrightarrow V$ 诱导连续同态。

$$\mathcal{L}_b\big(D(X,K),\overline{V_n}\big)\longrightarrow\mathcal{L}_b\big(D(X,K),V\big).$$

这些进而产生一个连续同态

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{L}_b\big(D(X,K),\overline{V_n}\big)\longrightarrow\mathcal{L}_b\big(D(X,K),V\big)$$

根据 [11, I. §3.3 Prop. 1]，其为双射。对所有 $\overline{V_n}$，沿连续线性双射 (1.14) 取归纳极限，我们现在得到连续线性双射

$$I\colon C^{\mathrm{la}}(X,V)\cong \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} C^{\mathrm{la}}(X,\overline{V_n}) \longrightarrow \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_b\big(D(X,K),\overline{V_n}\big) \longrightarrow \mathcal{L}_b\big(D(X,K),V\big).$$

对于一般的豪斯多夫局部凸 K-向量空间 V，我们注意到，由于 X 的紧性， X 上的每个局部解析 V-值函数都经过 V 的某个 BH-子空间分解。因此，即使在这种情况下，我们也得到单射的 K-线性映射 I。□

推论 1.4.8. 设 X 是一个局部 L-解析流形， $V\neq\{0\}$ 是一个豪斯多夫局部凸 K-向量空间。那么存在一个自然的、分别连续的、非退化的 K-双线性配对

$$D(X,K)\times C^{\mathrm{la}}(X,V)\longrightarrow V\,,\quad (\mu,f)\longmapsto \mu(f):=I(f)(\mu). \tag{1.15}$$

该配对由 $D(X,K)$ 与 $C^{\mathrm{la}}(X,K)$ 之间的对偶关系诱导而来，即对于紧开 $U\subset X$ 和 BH-子空间 $E\subset V$，将配对 (1.15) 限制到 $D(U,K)\times C^{\mathrm{la}}(U,\overline{E})$ 后，所得配对由对偶配对 $D(U,K)\times C^{\mathrm{la}}(U,K)\to K$ 与 $\overline{E}$ 张量化给出：

$$D(U,K)\times C^{\mathrm{la}}(U,K)\mathbin{\widehat{\otimes}_K}\overline{E}\longrightarrow\overline{E}\,,\quad (\mu,f\otimes v)\longmapsto \mu(f)\,v, \tag{1.16}$$

根据命题 A.7。

证明。显然，由 I 定义的配对（1.15）是自然的、 K-双线性的，并且分别连续。与 $C^{\mathrm{la}}(X,K)$ 和 $D(X,K)$ 之间的对偶配对的兼容性，可由（1.14）中 I 的构造得到。

为证明非退化性，取一个分布 $\mu\in D(X,K)$，并假设对于所有 $f\in C^{\mathrm{la}}(X,V)$，都有 $\mu(f)=0$。设 μ 的支撑包含于某个紧开子集 $U\subset X$。此外，我们可找到 $v\in V$、 $v\neq 0$，使它们包含于某个 BH-子空间 $E\subset V$ 中。于是，对于所有 $h\in C^{\mathrm{la}}(U,K)$，都有 $\mu(h)\,v=\mu(h\otimes v)=0$。因此，$D(U,K)$ 与 $C^{\mathrm{la}}(U,K)$ 之间的对偶配对的非退化性蕴含 $\mu=0$。另一方面，考虑满足对所有 $\mu\in D(X,K)$ 都有 $\mu(f)=0$ 的 $f\in C^{\mathrm{la}}(X,V)$。于是，对于所有狄拉克分布 δ_x，都有 $f(x)=I(f)(\delta_x)=0$，从而 $f=0$。□

命题 1.4.9（[74, 命题 3.2]）。设 G 是一个局部 L解析李群，且 V是一个局部解析 G表示，其轨道映射为 $\rho_v\colon\ G\to V$，其中 $v\in V$。（i）该 K双线性映射

$$D(G)\times V\longrightarrow V\,,\quad (\mu,v)\longmapsto \mu*v:=I(\rho_v)(\mu), \tag{1.17}$$

是分别连续的，并且 V 由此成为一个 $D(G)$-模。如果 G 是紧的，且 V 是一个K-Fr´echet 空间，则 (1.17) 甚至是联合连续的。

(ii) K-双线性映射

$$D(G)\times V_b'\longrightarrow V_b'\,,\quad (\mu,\ell)\longmapsto \mu*\ell:=\big[v\mapsto \ell(\dot\mu*v)\big], \tag{1.18}$$

由与 (1.17) 互为共轭的 $D(G)$-作用给出的是分别连续的，并且 V_b' 通过这种方式成为一个 $D(G)$-模。如果 G 是紧的且 V_b' 是一个 K-Fr´echet 空间，例如当 V 是紧型时，那么 (1.18) 甚至是联合连续的。

特别地，对于所有 $g\in G$、 $v\in V$、 $\ell\in V_b'$，我们有 $\delta_g*v=g.v$，以及 $\delta_g*\ell=g.\ell$，其中 $g.\ell=\ell(g^{-1}.)$表示对偶的 G-作用。

证明. (1.17) 对 K 的双线性以及其关于 $D(G)$ 的连续性显然。现在固定一个分布$\mu\in D(G)$。我们可以假设 $\mu\in D(H,K)$，其中 $H\subset G$ 是某个紧开子集。由命题 1.4.2 (iv)，由于 $D(H,K)$ 是可度量的， μ 是序列 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in$D(H,K)$ 的极限，其中 μ_n 是狄拉克分布的线性组合。然而，狄拉克分布δ_g, $g\in H$ 在 V 上通过连续自同态 $v\mapsto g.v$ 作用。因此， μ_n 也通过连续自同态作用。由于这些 V 的连续自同态逐点收敛于由 μ 诱导的自同态，根据 Banach–Steinhaus 定理的一个版本 [11, III. §4.2, Cor. 2] ，由 μ 诱导的自同态是连续的。

为了证明 (1.17) 赋予 V 一个 $D(G)$-模的结构，我们需要验证 $\delta_e * v = v$，其中 e 是 G 的单位元；并且对于所有 $v \in V$、μ、$\nu \in D(G)$，都有 $\mu * (\nu * v) = (\mu * \nu) * v$。但这对狄拉克分布成立，因此由连续性可知，对 $D(G)$ 的一般元素也成立。

对于 (ii)，注意到由 (1.17) 诱导的同态 $D(G) \to \mathcal{L}_b(V,V)$ 根据 [11, III. §5.3, 命题 6] as $D(G)$ 是自反的，因而是桶状的 [67, 引理 15.4]。此外，取转置可得一个拓扑嵌入 $\mathcal{L}_b(V, V) \hookrightarrow \mathcal{L}_b(V_b', V_b')$，根据 [27,命题 1.1.36]。将此与 (1.11) 结合可得

$$\begin{array}{ccccc} D(G) & \longrightarrow & D(G) & \longrightarrow \mathcal{L}_b(V,V) & \hookrightarrow \mathcal{L}_b(V_b', V_b') \\ \mu & \longmapsto & \dot{\mu} & & \end{array}$$

这给出了分别连续的 K-双线性配对(1.18)。要看出这在 V_b'上定义了一个$D(G)$-模结构，我们再次先考虑狄拉克分布，然后通过连续性将其扩展到 $D(G)$ 的一般元素。

如果 G 是紧的，并且 V 或 V_b' 是Fr´echet空间，则(1.17)和(1.18)的联合连续性由 [11, III.§5.2推论 1] 得到，因为 $D(G)$在此情形下是一个 K-Fr´echet空间。□

命题 1.4.10（参见 [74, §3]）。设 G 是一个局部 L-解析李群。
通过 (1.17) 赋予一个 $D(G)$-模结构，得到范畴的等价

$$\begin{pmatrix} \textit{locally analytic } G\textit{-representations} \\ \textit{on locally convex } K\textit{-vector spaces} \\ \textit{of LB-type with continuous} \\ G\textit{-equivariant homomorphisms} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \textit{separately continuous } D(G)\textit{-modules} \\ \textit{on locally convex } K\textit{-vector spaces} \\ \textit{of LB-type with continuous} \\ D(G)\textit{-module maps} \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

(ii) 取强对偶并赋予 (1.18) 的 $D(G)$-模结构，得到范畴的反等价

$$\begin{pmatrix} \textit{locally analytic } G\textit{-representations} \\ \textit{on locally convex } K\textit{-vector spaces} \\ \textit{of compact type with continuous} \\ G\textit{-equivariant homomorphisms} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \textit{separately continuous } D(G)\textit{-modules} \\ \textit{on nuclear } K\textit{-Fréchet spaces} \\ \textit{with continuous } D(G)\textit{-module maps} \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

$$[f\colon V \to W] \longmapsto \left[f^t\colon W_b' \to V_b'\right].$$

如果 G 是紧的，那么后者的范畴已等同于核的 K-Fr´echet 空间上连续的 $D(G)$-模，其态射为连续的 $D(G)$-模同态。

证明。对于一个连续的 G-等变同态 $f\colon V \to W$，我们立即有$\delta_g * f(v) = f(\delta_g * v)$，对所有 $g \in G$, $v \in V$ 均成立。因此，由连续性以及狄拉克分布空间的稠密性可知，f 是一个 $D(G)$-模同态。另一方面，若 V 是一个分别连续的 $D(G)$-模且为 LB型，我们可以利用命题 1.4.7 (ii) 定义一个具有局部解析轨道映射 $\rho_v := I^{-1}(\mu \mapsto \mu * v)$ 的 G-作用，其中 $v \in V$。于是，$g \in G$ 通过端同态 $V \to V$, $v \mapsto \delta_g * v$ 作用，因此是连续的。容易验证，以此方式定义的函子是 (1.19) 的拟逆。

对于 (ii) 的陈述，注意到由 (i) 可知，第一个范畴等价于由紧型局部凸 K-向量空间上的分别连续 $D(G)$-模及连续的 $D(G)$-模映射构成的范畴。现在，命题 A.5 和命题 1.4.9 (ii) 表明函子 (1.20) 定义良好且本质满射。此外，对于紧型局部凸K-向量空间 V和 W，容易验证同态

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{L}_b(V,W) & \longrightarrow & \mathcal{L}_b(W_b', V_b') & \longrightarrow & \mathcal{L}_b\big((V_b')_b', (W_b')_b'\big) \cong \mathcal{L}_b(V,W), \\ f & \longmapsto & f^t & \longmapsto & (f^t)^t, \end{array}$$

利用 V和 W [67, 的自反性，命题16.10 (i)]，实际上就是恒等映射。结合对 $\mathcal{L}_b(W_b', V_b')$ 的类似论证，我们得出，通过取转置所诱导的自然映射是一个拓扑同构

$$\mathcal{L}_b(V,W) \longrightarrow \mathcal{L}_b(W_b', V_b'), \quad f \longmapsto f^t.$$

此外，计算可得，f 是 $D(G)$-模的同态，当且仅当 f^t 是。因此，(1.20) 是范畴的反等价。最后，如果 G 是紧的，则 K-Fr´échet空间上的分别连续的 $D(G)$-模结构根据 [11, III. §5.2 Cor. 1]，如前是联合连续的。□

1.5. 局部解析诱导。我们保持如下设定：K 是一个球完备的非阿基米德域，$L \subset K$ 是一个局部紧完备子域。现在我们回顾 [30, Kap. 4] 中的局部解析诱导概念，并与局部解析表示的“有限”诱导作一些简单比较。

定义 1.5.1（[30, §4.1]）。设 G 是一个局部解析李群，$H \subset G$ 是一个局部解析子群，V 是一个局部解析表示。我们定义子空间

$$\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{la},G}(V) := \left\{ f \in C^{\mathrm{la}}(G,V) \,\middle|\, \forall g \in G, h \in H : f(gh) = h^{-1}.f(g) \right\} \subset C^{\mathrm{la}}(G,V)$$

并考虑其带有左正则的 G-作用。我们注意到，求值同态的连续性以及 H 在 V 上的作用表明，该子空间是闭的。

命题1.5.2（参见 [30, 定理4.1.5]）。设 G 为一个局部 L解析李群，$H \subset G$为一个局部 L解析子群。此外，设 V 为一个局部解析 H表示。(i)（参见 [26, §2.1]）如果 V 是紧型的，并且存在一个紧开子群 $G_0 \subset G$使得 $G = G_0 \cdot H$，那么$\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{la}\,G}(V)$是一个紧型的局部解析 G 表示。(ii)（参见 [30, 定理4.3.1]）如果 V 是一个 K巴拿赫空间，且 G/H 是紧的，那么 $\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{la}\,G}(V)$是一个局部解析 G表示，并且投影映射 $G \to G/H$ 的任一截面都会诱导出一个拓扑同构$\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{la}\,G}(V) \cong C^{\mathrm{la}}(G/H, V)$。

证明。在这两种情况下，由命题1.2.14 (ii) 的函子性可知，G 作用于 $\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{la}\,G}(V)$ 上的连续自同态。在第一种情况下，对于这样的 $G_0 \subset G$，我们令 $H_0 := G_0 \cap H$。仿照 [26, §2.1]，我们可以将 V 视为一个局部解析的 H_0-表示，并且有一个同一性

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_H^{\mathrm{la},G}(V) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Ind}_{H_0}^{\mathrm{la},G_0}(V) \subset C^{\mathrm{la}}(G_0, V), \\ f &\longmapsto f|_{G_0} \end{aligned}$$

局部凸 K-向量空间上的（抽象）G_0-表示。由于 $C^{\mathrm{la}}(G_0, V)$ 是紧型的（命题 1.2.15 (iii)），根据命题 A.4，闭子空间 $\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{la}\,G}(V)$ 也具有这一性质。此外，由于 G_0/H_0 是紧的，G_0 在 $\mathrm{Ind}_{H_0}^{\mathrm{la}\,G_0}(V)$ 上作用的轨道映射是局部解析的，依据 [30, Satz 4.1.5]。由命题 1.3.9 可知，$\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{la}\,G}(V)$ 是一个局部解析 G-表示。

在第二种情况下，由于假设 G/H 是紧的，根据 [30, Satz 4.1.5]，G-作用在 $\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{la}\,G}(V)$ 上的轨道映射仍然是局部解析的。对于 $G \to G/H$ 的任意截面，拓扑同构 $\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{la}\,G}(V) \cong C^{\mathrm{la}}(G/H, V)$ 是 [30, Satz 4.3.1] 的内容。因此，$\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{la}\,G}(V)$ 是桶状的（参见推论 1.2.12），因而是局部解析的G-表示。□

引理 1.5.3（参见 [27, 定理 3.6.12]后的讨论）。设 V 是局部解析表示，定义在局部 L-解析李群 G 上，其轨道映射为 $\rho_v \colon G \to V$，其中 $v \in V$。若 V 是 LF-空间（即 V 与一列 K-Fr´échet 空间的归纳极限拓扑同构），则轨道同态

$$o \colon V \longrightarrow C^{\mathrm{la}}(G,V), \quad v \longmapsto \rho_v,$$

是连续的。

证明。令 $H \subset G$ 为一个紧开子群，使得 $G = \bigcup_{i \in I} H g_i$ 是一个不交覆盖。在命题 1.2.13 给出的拓扑同构下，同态 o 与映射

$$V \longrightarrow \prod_{i \in I} C^{\mathrm{la}}(Hg_i, V) \cong C^{\mathrm{la}}(G,V), \quad v \longmapsto \left(\rho_v|_{Hg_i}\right)_{i \in I}.$$

因此，只需证明对于所有 $i \in I$， $o_i\colon V \to C^{\mathrm{la}}(Hg_i, V)$， $v \mapsto \rho_v|_{Hg_i}$ 是连续的。我们固定 $i \in I$ 并考虑图 $\Gamma_{o'} \subset V \times C^{\mathrm{la}}(H', V)$，对于 $H' := Hg_i$。容易计算得到， $\Gamma_{o'}$ 正是连续同态的核

$$V \times C^{\mathrm{la}}(H', V) \longrightarrow \prod_{h \in H} V\,, \quad (v, f) \longmapsto \big((hg_i).v - f(hg_i)\big)_{h \in H}.$$

因此 $\Gamma_{o'} \subset V \times C^{\mathrm{la}}(H', V)$ 是闭的，由闭图定理的一个版本 [11, II. §4.6 命题 10] 可知， o' 是连续的。为此我们指出，特别是 V 是 LF-型（见 [27, p. 15]），因此根据命题 1.2.15 (ii)， $C^{\mathrm{la}}(H', V)$ 是 LF-型。□

当 H 是 G 中有限指数的子群时，自然会考虑 H-表示的“有限”归纳法 V

$$\mathrm{Ind}_H^G(V) := \bigoplus_{i=1}^n g_i \bullet V$$

其中 $g_1, \ldots, g_n$ 是 G/H 的陪集代表元。这里，$\mathrm{Ind}_H^G(V)$ 上的 G-作用定义为

$$g.\Big(\sum_{i=1}^n g_i \bullet v_i\Big) = \sum_{i=1}^n g_{j(i)} \bullet h_i.v_i,$$

对于满足 $gg_i = g_{j(i)}h_i$, $j(i) \in \{1, \ldots, n\}$, $h_i \in H$ 的 $g \in G$。我们可以将此与局部解析诱导进行比较。

命题 1.5.4. 设 G 是一个局部 L-解析李群，且 $H \subset G$ 是一个有限指数的局部 L-解析子群。设 V 是一个局部解析 H-表示，且它是一个 LF-空间。则存在一个 G-等变的拓扑同构

$$\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{la},G}(V) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ind}_H^G(V)\,, \quad f \longmapsto \sum_{i=1}^n g_i \bullet f(g_i), \tag{1.21}$$

其中 $g_1, \ldots, g_n$ 是 G/H 的陪集代表元。

证明。我们首先注意到，同态 (1.21) 是 G-等变的；它是连续的，因为求值同态 $\mathrm{ev}_{g_i}\colon C^{\mathrm{la}}(G, V) \to V$ 是连续的。接下来我们考虑

$$\mathrm{Ind}_H^G(V) \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^{\mathrm{la},G}(V)\,, \quad \sum_{i=1}^n g_i \bullet v_i \longmapsto \big[g \mapsto h^{-1}.v_i \quad \text{, for } g = g_i h \text{ with } h \in H\big],$$

它是 (1.21) 的逆映射。利用 $C^{\mathrm{la}}(G, V) = \bigoplus_{i=1}^n C^{\mathrm{la}}(g_i H, V)$，这个同态 is 同态的直和

$$g_i \bullet V \longrightarrow C^{\mathrm{la}}(g_i H, V) \cap \mathrm{Ind}_H^{\mathrm{la},G}(V)\,, \quad v \longmapsto \big[g_i h \mapsto h^{-1}.v \quad \text{, for } h \in H\big].$$

这些又都可以分别识别为 $\mathrm{inv}^* \circ o$: $V \to C^{\mathrm{la}}(H, V)$，它由引理 1.5.3 知是连续的。□

注记1.5.5. 设 G 是一个群， $H \subset G$ 是一个有限指数的子群。

(i)设 V 是一个局部凸的 K-向量空间，同时也是一个（抽象的） H-表示 on. 于是我们有一个 G-等变的拓扑同构 $\mathrm{Ind}_H^G(V)'_b \cong \mathrm{Ind}_H^G(V'_b)$，通过

$$\Big(\bigoplus_{i=1}^n g_i \bullet V\Big)'_b \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i=1}^n g_i \bullet V'_b\,, \quad \ell \longmapsto \sum_{i=1}^n g_i \bullet \big[v \mapsto \ell(g_i \bullet v)\big],$$

其中 $g_1, \ldots, g_n$ 是 G/H 的陪集代表元。

（ii）我们还有以下形式的推拉公式（投影公式）：设 V 和 W 是局部凸的 K-向量空间，其中 V 是一个（抽象的） G-表示，而 W 是一个（抽象的） H-表示。则存在一个 G-等变的拓扑同构

$$V \otimes_K \mathrm{Ind}_H^G(W) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ind}_H^G\big(V|_H \otimes_K W\big)\,, \quad \sum_{i=1}^n v_i \otimes g_i \bullet w_i \longmapsto \sum_{i=1}^n g_i \bullet (g_i^{-1}.v_i \otimes w_i)$$

当张量积两边都赋予射影张量积拓扑或归纳张量积拓扑时。再次， g_1，...， g_n 表示 G/H 的陪集代表元。

鉴于命题 1.4.10(ii) 中的反等价，局部解析诱导也可以用与局部解析分布代数取张量积来表示。为此，我们需要以下内容，参见 [46, 注记 1.2.11]以及 [27, §1.2]。

定义1.5.6。（i）我们将分别连续的局部凸 K-代数定义为：一个局部凸 K-向量空间 A，它具有 K-代数的结构，且乘法映射 $A \times A \to A$ 分别连续。如果乘法映射还是联合连续的，我们就简称 A 为局部凸 K-代数。

此外，如果 A 是 K-Fr´echet 空间，我们称 A 为 K-Fr´echet 代数。我们注意到，此类代数的乘法映射自动是联合连续的 [11, III. §5.2 Cor.1]。

(ii) 设 A 是一个分别连续的局部凸 K-代数， M 是一个局部凸 K-向量空间。若 M 是左 A-模，且数乘映射分别连续，我们称 M 为分别连续的局部凸（左） A-模。若 A 是局部凸 K-代数，且数乘映射联合连续，则称 M 为局部凸（左） A-模。

若 M 是分别连续的局部凸 A-模， K-Fr´echet 代数为 A，且其本身是一个 K-Fr´echet 空间，则称 M 为一个 A-Fr´echet 模。同样，此类 M 的数乘自动联合连续。

引理 1.5.7（[27, 引理 1.2.3]）。设 $A \to B$ 是局部凸 K-代数之间的连续同态， M 是一个局部凸 A-模。那么存在一个 B-模的同构

$$B \otimes_A M \cong \big(B \otimes_{K,\pi} M\big)\big/M',$$

其中， M' 是由 $ba \otimes m - b \otimes am$ 生成的 B-子模， $b \in B$、 $a \in A$、 $m \in M$。赋予 $B \otimes_A M$ 诱导商拓扑后，它成为一个局部凸 B-模。

定义 1.5.8。在上述引理的情形下，我们用 $B \otimes_{A,\ \pi} M$ 表示带有此商拓扑的 B-模 $B \otimes_A M$。此外，我们将其豪斯多夫完备化记为 $B \mathbin{\widehat{\otimes}}_{A,\ \pi} M$。

注 1.5.9。注意， $B \mathbin{\widehat{\otimes}}_{A,\ \pi} M$ 仍是一个局部凸 B-模。若 $B \mathbin{\widehat{\otimes}}_{K,\ \pi} M$ 是遗传完备的，即其所有豪斯多夫商空间都是完备的（定义 1.1.39], ），那么根据推论 2.2] ，完备化保持以下对象的严格正合性：

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow B \otimes_{K,\pi} M \longrightarrow B \otimes_{A,\pi} M \longrightarrow 0.$$

因此，我们有 $B \mathbin{\widehat{\otimes}}_{A,\ \pi} M \cong \big(B \mathbin{\widehat{\otimes}}_{K,\ \pi} M\big)\big/\overline{M'}$，其中 $\overline{M'}$表示 M'在 $B \mathbin{\widehat{\otimes}}_{K,\ \pi} M$中的闭包。举例来说，当 B和 M都是 K-弗雷歇空间时（参见命题 17.6]之后的讨论），或二者都是紧型时（参见命题 1.1.32（i）] ），$B \mathbin{\widehat{\otimes}}_{K,\ \pi} M$ 满足上述条件；关于后一种情形，可参见定义 1.1.39]之后的说明。

同样地，如果 $A \to B$ 是分别连续的局部凸 K-代数的连续同态，并且 M是分别连续的局部凸 A-模，那么在赋予$B \otimes_{K,\iota} M$的商拓扑后， $B \otimes_A M$成为分别连续的局部凸 B-模（参见 [46, 注 1.2.11]）。在此情况下，我们记 $B \otimes_{A,\iota} M$。此外，我们令$B \mathbin{\widehat{\otimes}}_{A,\iota} M$ 表示其豪斯多夫完备化。

注 1.5.10.在 $A \to B$ 是 K-Fr´echet 代数的连续同态且 M 是一个 A-Fr´echet模的情况下，$B \otimes_K M$上的射影张量积拓扑和归纳张量积拓扑根据命题 17.6]一致。因此我们随后简单地写作 $B \mathbin{\widehat{\otimes}}_A M$（以及 $B \otimes_A M$），以表示 B-Fr´echet 模（分别为局部凸 B-模）。

引理1.5.11. (i) 对于一个局部凸（分别连续局部凸）带单位 K-代数 A 以及一个局部凸（分别连续局部凸）

A-模 M，存在局部凸 A-模之间的拓扑同构

$$A \otimes_{A,\pi} M \xrightarrow{\cong} M\,, \quad a \otimes m \longmapsto am,$$

（分别为分别连续的局部凸 A-模 $A \otimes_{A,\ \iota} M \cong M$）。
(ii) 设 A 和 B 为局部凸 K代数，L、M 和 N 分别为局部凸右 A-模、局部凸 A-B-双模和局部凸左 B-模。则存在一个典范拓扑同构

$$\big(L \otimes_{A,\pi} M\big) \otimes_{B,\pi} N \cong L \otimes_{A,\pi} \big(M \otimes_{B,\pi} N\big).$$

对于分别连续的局部凸 K代数和分别连续的局部凸模，关于归纳张量积拓扑，同样的断言也成立。

证明。在 **(i)** 中，同态

$$\begin{array}{ccccc} M & \longrightarrow & A \otimes_{K,\iota} M & \longrightarrow & A \otimes_{K,\pi} M \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ & & A \otimes_{A,\iota} M & & A \otimes_{A,\pi} M \end{array}$$

由 $m \mapsto 1 \otimes m$ 给出的映射根据归纳张量积拓扑的定义是连续的。 gy
（参见 [67, §17 A.]），并构成各自所述同构的逆映射。

对于 **(ii)**，张量积在（交换）环上满足结合律，这是一个经典结果。特别地，这对 L、M 和 N 中的格在 $\mathcal{O}_K$ 上都成立，因此

$$\varphi\colon \big(L \otimes_K M\big) \otimes_K N \longrightarrow L \otimes_K \big(M \otimes_K N\big)$$

甚至在射影张量积拓扑下也是一个拓扑同构。（这些拓扑由 $\mathcal{O}_K$ 上此类格的张量积定义，参见 [67, §17 B.]）。现在我们可以转到商。

$$\begin{aligned} \pi_\ell\colon \big(L \otimes_{K,\pi} M\big) \otimes_{K,\pi} N &\longrightarrow \big(L \otimes_{A,\pi} M\big) \otimes_{K,\pi} N \longrightarrow \big(L \otimes_{A,\pi} M\big) \otimes_{B,\pi} N, \\ \pi_r\colon L \otimes_{K,\pi} \big(M \otimes_{K,\pi} N\big) &\longrightarrow L \otimes_{K,\pi} \big(M \otimes_{B,\pi} N\big) \longrightarrow L \otimes_{A,\pi} \big(M \otimes_{B,\pi} N\big). \end{aligned}$$

于是，$\pi_r \circ \varphi$ 在 π_ℓ上分解，且 $\pi_\ell \circ \varphi^{-1}$ 在 π_r 上分解，从而得到所求的拓扑同构。

对于仅具有分别连续的局部凸 K代数和模的情形，我们回顾一下，两个局部凸 K向量空间 V 和 W 的张量积 $V \otimes_K W$ 上的归纳张量积拓扑，是相对于同态而言的最终局部凸拓扑

$$\begin{aligned} _ \otimes w\colon V &\longrightarrow V \otimes_K W\,, \quad v' \longmapsto v' \otimes w, \\ v \otimes _\colon W &\longrightarrow V \otimes_K W\,, \quad w' \longmapsto v \otimes w', \end{aligned}$$

for all $v \in V$, $w \in W$. For fixed $v = \sum_{i=1}^r \ell_i \otimes m_i \in L \otimes_{K,\iota} M$, it then follows from the 交换图

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\quad m_i \otimes _ \quad} & M \otimes_{K,\iota} N \\ {\scriptstyle (\ell_i \otimes m_i) \otimes _}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \ell_i \otimes _} \\ \big(L \otimes_{K,\iota} M\big) \otimes_{K,\iota} N & \xrightarrow{\varphi} & L \otimes_{K,\iota} \big(M \otimes_{K,\iota} N\big) \end{array}$$

即 $\varphi \circ (v \otimes$ **)** 是连续的。进而，对于固定的 $n \in N$，.....的交换性 of

$$\begin{array}{ccc} L \otimes_{K,\iota} M & & \\ {\scriptstyle _ \otimes n}\big\downarrow & \searrow^{L \otimes_{K,\iota} (_ \otimes n)} & \\ \big(L \otimes_{K,\iota} M\big) \otimes_{K,\iota} N & \xrightarrow{\varphi} & L \otimes_{K,\iota} \big(M \otimes_{K,\iota} N\big) \end{array}$$

表明 $\varphi\circ(\otimes n)$也是连续的。因此 [67, 引理5.1 (i)] 蕴含φ 是连续的。同样可以推得 φ^{-1} 是连续的，因此相对于归纳张量积拓扑， φ 是一个拓扑同构。然后按照前一种情形中的论证进行处理。□

命题1.5.12（参见 [47, §5]）。设 G 是一个紧的局部 L-解析李群，带有一个局部 L-解析子群 $H\subset G$，且 V 是一个紧型的局部解析 H-表示。那么存在一个典范拓扑同构的 $D(G)$-模

$$\left(\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{la},G}(V)\right)_b'\cong D(G)\,\widehat{\otimes}_{D(H)}\,V_b'.$$

证明。根据 $\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{la}\,G}(V)$ 的定义，并利用 $C^{\mathrm{la}}(G,V)\cong C^{\mathrm{la}}(G,K)\,\widehat{\otimes}_K\,V$，我们得到正合序列。

$$\begin{aligned}0\longrightarrow \mathrm{Ind}_H^{\mathrm{la},G}(V)\xrightarrow{\iota} C^{\mathrm{la}}(G,K)\,\widehat{\otimes}_K\,V\xrightarrow{\psi}&\prod_{g\in G,h\in H}V\\ f\otimes v\quad\longmapsto&\left(f(gh)\,v-f(g)\,h^{-1}.v\right)_{g,h}\end{aligned}\tag{1.22}$$

其中 ι 是严格的。我们想要考虑通过取强对偶得到的复形。 of (1.22)。根据 [67, Rmk. 16.1]，此对偶复形的同态是连续的。

根据 [67, 命题 9.11] 我们有一个拓扑同构

$$\left(\prod_{g\in G,h\in H}V\right)_b'\xrightarrow{\cong}\bigoplus_{g\in G,h\in H}V_b'.$$

在此同构下， ψ 的转置由下式给出

$$\begin{aligned}\psi^t\colon\bigoplus_{g\in G,h\in H}V_b'&\longrightarrow\left(C^{\mathrm{la}}(G,K)\,\widehat{\otimes}_K\,V\right)_b',\\ \sum\ell_{g,h}&\longmapsto\left[f\otimes v\mapsto\sum f(gh)\,\ell_{g,h}(v)-f(g)\,\ell_{g,h}(h^{-1}.v)\right].\end{aligned}$$

此外还有如下拓扑同构

$$D(G)\,\widehat{\otimes}_K\,V_b'\xrightarrow{\cong}\left(C^{\mathrm{la}}(G,K)\,\widehat{\otimes}_K\,V\right)_b',\quad\delta\otimes\ell\longmapsto\left[f\otimes v\mapsto\delta(f)\,\ell(v)\right],$$

由 [67, 命题 20.13] 和 [67, 推论 20.14]可得。由于有 $f(g)\,\ell(h^{-1}.v)=\delta_g(f)\,(h.\ell)(v)$ 且$f(gh)=(\delta_g*\delta_h)(f)$，(1.22) 的强对偶复形为

$$\begin{aligned}\bigoplus_{g\in G,h\in H}V_b'\xrightarrow{\psi^t}D(G)\,\widehat{\otimes}_K\,V_b'\xrightarrow{\iota^t}\left(\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{la},G}(V)\right)_b'\longrightarrow 0\\ \sum\ell_{g,h}\longmapsto\sum\delta_g*\delta_h\otimes\ell_{g,h}-\delta_g\otimes h.\ell_{g,h}.\end{aligned}$$

由于 ι 是闭嵌入，由 Hahn-Banach定理 [67, 推论 9.4] 可知 ι^t 是满射；由开映射定理 [67, 命题 8.6] 可知 ι^t 是严格的。此外，根据 [11, IV. §4.1 命题 2]，有 $\mathrm{Ker}(\iota^t)=\mathrm{Im}(\iota)^\perp$，其中

$$\mathrm{Im}(\iota)^\perp:=\left\{\ell\in D(G)\,\widehat{\otimes}_K\,V_b'\,\middle|\,\forall v\in\mathrm{Im}(\iota):\ell(v)=0\right\}.$$

于是，由 (1.22) 的代数正合性可得 $\mathrm{Im}(\iota)^\perp=\mathrm{Ker}(\psi)^\perp$，这意味着 $\mathrm{Ker}(\iota^t)=\mathrm{Ker}(\psi)^\perp\subset\mathrm{Im}(\psi^t)$，由引理 A.11 可知。由于 $\mathrm{Im}(\psi^t)\subset\mathrm{Ker}(\iota^t)$ 且 $\mathrm{Ker}(\iota^t)$ 是闭的，因此有 $\mathrm{Ker}(\iota^t)=\overline{\mathrm{Im}(\psi^t)}$。但 $\mathrm{Im}(\psi^t)$ 由以下元素生成

$$\delta_g*\delta_h\otimes\ell-\delta_g*h.\ell\quad,\text{for }g\in G,\,h\in H,\,\ell\in V_b'.$$

因此，注 1.5.9 连同狄拉克分布的稠密性给出了拓扑- 同构

$$\left(\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{la},G}(V)\right)_b'\cong\left(D(G)\,\widehat{\otimes}_K\,V_b'\right)/\overline{\mathrm{Im}(\psi^t)}\cong D(G)\,\widehat{\otimes}_{D(H)}\,V_b'.$$

由于 ι^t 关于 $D(G)\mathbin{\widehat{\otimes}}_K V_b'$的第一分量上的 $D(G)$-作用，通过左乘是 $D(G)$-线性的，我们看到上述同构是一个 $D(G)$-模的同构。

□

1.6. 超代数。本节中， K 仍是一个球完备的非阿基米德域，其含有一个局部紧完备子域 $L \subset K$。我们重述局部解析函数芽的概念，并依照 [30, §2.3] 和 [46, §1.2]，考察这些函数的对偶空间的某些子代数。

定义 1.6.1. 设 X 是一个局部 L解析流形， V 是一个豪斯多夫局部凸K向量空间。对于 $x \in X$，我们将以 V 为值、在 x 处定义于 X上的局部解析函数芽空间定义为对所有 x的开邻域 $U \subset X$ 取归纳极限所得的空间

$$C_x^{\mathrm{la}}(X,V) := \varinjlim_{x\in U\subset X} C^{\mathrm{la}}(U,V)$$

该空间配备典范限制同态，并赋予归纳极限拓扑。

引理 1.6.2（参见 [30, §2.3.1]）。设 X 是一个局部 L解析流形， V 是一个豪斯多夫局部凸 K向量空间。

(i) 对于每个带有 $x \in U$ 的开子集 $U \subset X$，典范映射

$$C^{\mathrm{la}}(U,V) \longrightarrow C_x^{\mathrm{la}}(X,V)$$

是一个严格满同态。

(ii) 我们有一个典范拓扑同构

$$C_x^{\mathrm{la}}(X,V) \cong \varinjlim_{(U,E)} C^{\mathrm{rig}}(U,\overline{E})$$

其中，后一个归纳极限取遍所有解析图对 $\varphi\colon U \to L^m$ *nd* BH-子空间 $E \subset V$，使得 $x \in U$。它们按如下方式构成偏序。

$$(U,E) \geq (W,F) \ :\Longleftrightarrow\ U \subset W \text{ and } F \subset E.$$

特别地， $C^{\mathrm{rig}}(U,\overline{E}) \subset C_x^{\mathrm{la}}(X,V)$ 均为 BH-子空间。

证明。对于 (i)，注意到对于开子集 $U' \subset U$of X，限制映射 $C^{\mathrm{la}}(U,V) \to C^{\mathrm{la}}(U',V)$ 是严格满同态，因为它由投影给出。

$$C^{\mathrm{la}}(U,V) \cong \prod_{i\in I} C^{\mathrm{la}}(U_i,V) \longrightarrow C^{\mathrm{la}}(U',V),$$

对于一个合适的由开子集 $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ 构成的不交覆盖，使得 $U' \in \{U_i\}_{i\in I^\circ}$。对于一个固定的开子集 $U \subset X$，其中 $x \in U$，典范同态 $C^{\mathrm{la}}(U,V) \to C_x^{\mathrm{la}}(X,V)$ 是关于这些限制映射的归纳极限，其中 $U' \subset U$ 满足 $x \in U'$。由于它是相应余核上的余极限， $C^{\mathrm{la}}(U,V) \to C_x^{\mathrm{la}}(X,V)$ 本身是严格满同态。

对于 (ii)，根据定义

$$C_x^{\mathrm{la}}(X,V) = \varinjlim_{x\in U\subset X} \Big(\varinjlim_{\mathcal{I}} C_{\mathcal{I}}^{\mathrm{la}}(U,V)\Big)$$

其中“内层”归纳极限取遍 U 的所有 V-指标 $\mathcal{I}$。后者是拓扑的 *ly* 同构于以该有向集为指标的归纳极限

$$\Phi := \big\{(U,\mathcal{I}) \,\big|\, U \subset X \text{ open with } x \in U, \mathcal{I} \text{ a } V\text{-index of } U\big\}$$

赋予如下预序：设 $(U,\mathcal{I})$、$(W,\mathcal{J})$ 是 Φ 的元素，其中

$$\mathcal{I} = \big(\varphi_i\colon U_i \to L^{m_i}, \underline{r}_i, E_i\big)_{i\in I} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{J} = \big(\psi_j\colon W_j \to L^{n_j}, \underline{s}_j, F_j\big)_{j\in J}.$$

于是，当 $U \subset W$ 且嵌入 $U \hookrightarrow W$ 下 $\mathcal{I}$ 与 $\mathcal{J}$ 之间满足证明命题 1.2.14 (ii) 中的关系时，我们定义 $(U,\mathcal{I}) \geq (W,\mathcal{J})$：对每个 $i \in I$，存在 $j \in J$ 使得

(1) $U_i \subset W_j \cap U$，即 $\mathcal{I}$的覆盖是覆盖$U = \bigcup_{j\in J} W_j \cap U$的细化，

(2)存在 $a_i \in \varphi_i(U_i)$和 $g_{i,j} = (g_{i,j,k})_{k=1,\dots,n_j} \in \mathcal{A}_{\underline{r}_i}(L^{m_i}, L^{n_j})$ 使得

$$\|g_{i,j,k} - g_{i,j,k}(0)\|_{\underline{r}_i} \leq s_{j,k} \quad , \text{for all } k = 1, \dots, n_j,$$

以及 $\psi_j \circ \varphi_i^{-1}(x) = g_{i,\ j}(x - a_i)$，对所有 $x \in \varphi_i(U_i) = B^{m_i}_{\underline{r}_i}(a_i)$,

(3) $F_j \subset E_i$.

现在考虑那些$(U, \mathcal{I})$ 中的子集 $\Psi \subset \Phi$，对于这些对象，$\mathcal{I}$ 的覆盖仅由其自身 U 构成。此子集在 Φ 中是共尾的：对于 $(U, \mathcal{I}) \in \Phi$，取 $i_0 \in I$ 使得 $x \in U_{i_0}$。然后

$$(U_{i_0}, \mathcal{I}_0) := \Big(U_{i_0}, \big(\varphi_{i_0} : U_{i_0} \to L^{m_{i_0}}, \underline{r}_{i_0}, E_{i_0}\big)\Big) \in \Psi,$$

以及 $(U_{i_0}, \mathcal{I}_0) \geq (U, \mathcal{I})$。因此我们得出结论，

$$C^{\mathrm{la}}_x(X, V) \cong \varinjlim_{(U,\mathcal{I}) \in \Psi} C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{I}}(U, V).$$

但有向集 Ψ 恰好是由满足以下条件的对(U, E)组成的有向集：$\varphi\colon\ U \to L^m$ 是 x 周围的一个解析图，且 $E \subset V$是一个BH-子空间。对于这样的 $\mathcal{I} = \big(\varphi\colon\ U \to L^m, \underline{r}, E\big)$，若$(U, \mathcal{I}) \in \Psi$，我们还有 $C^{\mathrm{la}}_{\mathcal{I}}(U, V) = C^{\mathrm{rig}}(U, \overline{E})$。□

命题1.6.3。设 X 为一个局部 L-解析流形，V 为一个豪斯多夫局部 con。 *vex* K-向量空间，以及 $x \in X$。

(i)（参见 $[30,$ 定理2.3.1$]$）局部凸的 K-向量空间 $C^{\mathrm{la}}_x(X, V)$ 是豪斯多夫的并且 ba *r-*

relled.

(ii)（参见 $[30,$ 定理 2.3.1$]$）如果 V是 LB型，那么 $C^{\mathrm{la}}_x(X, V)$ 是一个 LB-空间。

(iii)（参见 $[30,$ Satz 2.3.2$]$）若 V为紧型，则 $C^{\mathrm{la}}_x(X, V)$ 为紧型，且 th *ere*

是一个自然的拓扑同构 $C^{\mathrm{la}}_x(X, V) \cong C^{\mathrm{la}}_x(X, K) \mathbin{\widehat{\otimes}_K} V$。

(iv) 若 E 是一个 K-巴拿赫空间，则每个以 x 为中心的解析坐标图 φ 都诱导一个拓扑同构 $C^{\mathrm{la}}_x(X,$ $E) \cong \mathcal{A}(L^m, E)$，其中 m 是 x处 X 的维数。

证明。设 $\varphi\colon\ U \to B^m_r(0)$ 是一个以 x为中心的解析坐标图，其中某个 $r := (r, \dots, r) \in \mathbb{R}^m_{>0}$。取满足 $0 < \varepsilon < 1$的 $\varepsilon \in |L|$。则解析坐标图 $U_n := \varphi^{-1}\big(B^m_{\varepsilon^n r}(0)\big) \to B^m_{\varepsilon^n r}(0)$ 构成 x的一个邻域基；根据引理 1.6.2 (ii)，我们有

$$C^{\mathrm{la}}_x(X, V) \cong \varinjlim_{(n,E)} C^{\mathrm{rig}}(U_n, \overline{E}) \tag{1.23}$$

其中归纳极限是对 $n \in \mathbb{N}$ 和 V的 BH-子空间 E 组成的数对取的。由于这些 $C^{\mathrm{rig}}(U_n, \overline{E})$ 是 K-巴拿赫空间，根据 Cor. 6.16$]$之后的 $[67,$ Expl. 3$)$，$C^{\mathrm{la}}_x(X, V)$ 是桶状的。此外，我们有连续单射

$$C^{\mathrm{rig}}(U_n, \overline{E}) \cong \mathcal{A}_{\varepsilon^n r}(L^m, \overline{E}) \longrightarrow \prod_{\underline{i} \in \mathbb{N}_0^m} \overline{E} \longrightarrow \prod_{\underline{i} \in \mathbb{N}_0^m} V$$

通过将幂级数映射为其系数的元组。对这些取归纳极限，我们得到一个连续单射 $C^{\mathrm{la}}_x(X, V)$ $\hookrightarrow \prod_{\underline{i} \in \mathbb{N}_0^m} V$。由此可知，$C^{\mathrm{la}}_x(X, V)$ 是豪斯多夫的。

如果 V是LB型的，则记 $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ 为BH-子空间 $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$的递增序列。那么，($\{(n, V_n)$ $\mid n \in \mathbb{N}\}$)构成 (1.23) 中有向集的共尾子集。因此，在这种情况下，$C^{\mathrm{la}}_x(X, V)$ 甚至是一个 LB-空间。

现在令 V 为紧型，即 $V \cong \lim\limits_{\longrightarrow n \in \mathbb{N}} V_n$，其中 $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列 K-巴拿赫空间，且具有单射的紧过渡同态。类似于命题 1.2.15 (iii) 的证明，过渡映射

$$C^{\mathrm{rig}}(U_n, \overline{V_n}) \longrightarrow C^{\mathrm{rig}}(U_{n+1}, \overline{V_{n+1}})$$

紧且单射，从而表明 $C^{\mathrm{la}}_x(X, V)$ 属于紧型。拓扑同构 $C^{\mathrm{la}}_x(X, V) \cong C^{\mathrm{la}}_x(X, K) \mathbin{\widehat{\otimes}_K} V$现在由 $[27,$ 命题 1.1.32 (i)$]$ 得出。

对于 K-巴拿赫空间 E，(iv) 中的结论可直接由定义得出。

$$\mathcal{A}(L^m, E) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{\varepsilon^n r}(L^m, E).$$

□

命题1.6.4. 设 $\varphi\colon X \to Y$ 是局部 L-解析流形之间的局部 L-解析映射，并设 V 是一个豪斯多夫局部凸 K-向量空间。对于 $x \in X$，映射 φ诱导出一个连续同态

$$\varphi^*\colon C^{\mathrm{la}}_{\varphi(x)}(Y,V) \longrightarrow C^{\mathrm{la}}_x(X,V), \quad f \longmapsto f\circ\varphi.$$

证明。令 $U \subset Y$为 $\varphi(x)$的一个开邻域。则 $\varphi^{-1}(U)$是 x 的一个开邻域，而局部 L-解析映射 $\varphi^{-1}(U) \to U$ 诱导出一个连续同态 $C^{\mathrm{la}}(U,V) \to C^{\mathrm{la}}(\varphi^{-1}(U)\ V)$，根据命题 1.2.14(ii)。通过归纳极限的泛性质，这些诱导出所需的 φ^*。□

命题 1.6.5.设 X 是一个局部 L-解析流形且 $x \in X$。(i)关于逐点乘法， $C^{\mathrm{la}}_x(X,K)$ 是一个局部 K-代数，其极大理想

$$\mathfrak{m}_x := \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_x) \subset C^{\mathrm{la}}_x(X,K).$$

这里 $\mathrm{ev}_x\colon C^{\mathrm{la}}_x(X,K) \to K$表示由$\mathrm{ev}_x\colon C^{\mathrm{la}}(U,K) \to K$诱导的连续求值同态，对于所有开邻域 $U \subset X$关于 x。

(ii) 令 m 为 X 在 x处的维数。选择一个以 x 为中心的解析图，得到一个拓扑同构 $C^{\mathrm{la}}_x(X,K) \cong \mathcal{A}(L^m,K)$，将 K-代数与收敛幂级数环同构。

(iii) 对所有 $n \in \mathbb{N}$， $\mathfrak{m}_x^n \subset C^{\mathrm{la}}_x(X,K)$ 都是有限余维的闭子空间。

证明。显然， $C^{\mathrm{la}}_x(X,K)$ 是一个 K-代数，且 $\mathfrak{m}_x$ 是一个极大理想。利用幂级数的通常逆函数定理，可以证明每个 $f \in C^{\mathrm{la}}_x(X,K) \setminus \mathfrak{m}_x$ 都有乘法逆元，即 $C^{\mathrm{la}}_x(X,K)$ 是局部的。

对于 (ii)，注意到命题 1.6.3 (iv) 中的拓扑同构是 K-代数的同构。

为了证明 $\mathfrak{m}_x^n$ 是有限余维的闭子空间，我们可以利用 (ii) 改为处理 $\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_0)^n \subset \mathcal{A}(L^m,K)$。在那里，我们有严格满同态

$$\mathcal{A}_r(L^m,K) \longrightarrow K^{\binom{m+n-1}{n-1}}, \quad \sum_{\underline{i}\in\mathbb{N}_0^m} a_{\underline{i}}\, X^{i_1}\cdots X^{i_m} \longmapsto (a_{\underline{i}})_{|\underline{i}|\le n-1},$$

对每个 $r > 0$ 都成立。这些诱导出一个严格满同态 $\mathcal{A}(L^m,K) \to K^{\binom{m+n-1}{n-1}}$，其核恰好是 $\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_0)^n$。这证明了 (iii) 的结论。□

引理 1.6.6。设 G 是一个局部 L-解析李群，其单位元为 e。乘法 $m\colon G\times G \to G$ 诱导出一个 K-代数的连续同态

$$\Delta\colon C^{\mathrm{la}}_e(G,K) \longrightarrow C^{\mathrm{la}}_e(G,K)\,\widehat{\otimes}_K\, C^{\mathrm{la}}_e(G,K) \tag{1.24}$$

与.....相容的是

$$C^{\mathrm{la}}(H,K) \xrightarrow{m^*} C^{\mathrm{la}}(H\times H,K) \cong C^{\mathrm{la}}(H,K)\,\widehat{\otimes}_K\, C^{\mathrm{la}}(H,K),$$

对每个紧开子群 $H \subset G$。此外，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\Delta(\mathfrak{m}_e^n) \subset \sum_{i=0}^{n} \mathfrak{m}_e^i\,\widehat{\otimes}_K\,\mathfrak{m}_e^{n-i}.$$

证明。设 $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 G 的一族紧开子群，使得限制同态 $C^{\mathrm{rig}}(H_n,K) \to C^{\mathrm{rig}}(H_{n+1},K)$ 是紧的。那么相应同态 m^* 的归纳极限给出一个连续同态

$$C^{\mathrm{la}}_e(G,K) \cong \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} C^{\mathrm{rig}}(H_n,K) \xrightarrow{m^*} \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} C^{\mathrm{rig}}(H_n\times H_n,K)$$

通过引理 1.6.2 (ii)。此外，

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} C^{\mathrm{rig}}(H_n\times H_n,K) \cong \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \left(C^{\mathrm{rig}}(H_n,K)\,\widehat{\otimes}_K\, C^{\mathrm{rig}}(H_n,K)\right) \cong C^{\mathrm{la}}_e(G,K)\,\widehat{\otimes}_K\, C^{\mathrm{la}}_e(G,K)$$

由 [67, Expl. after Prop. 17.10] 和 [27, Prop. 1.1.32 (i)]。所得的连续映射 (1.24) 是 K-代数的同态。现在考虑连续同态

$$\mathrm{ev}_e \otimes \mathrm{ev}_e \colon C_e^{\mathrm{la}}(G,K) \otimes_K C_e^{\mathrm{la}}(G,K) \longrightarrow K\,, \quad f \otimes f' \longmapsto f(e)f'(e).$$

以及诱导的 $\mathrm{ev}_e \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{ev}_e$: $C_e^{\mathrm{la}}(G,K) \mathbin{\widehat{\otimes}}_K C_e^{\mathrm{la}}(G,K) \to K$。我们声称

$$\big(\mathrm{ev}_e \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{ev}_e\big) \circ \Delta = \mathrm{ev}_e. \tag{1.25}$$

事实上，只需考虑一个紧开子群 $H \subset G$，并证明该结论对

$$C^{\mathrm{rig}}(H,K) \xrightarrow{\Delta} C^{\mathrm{rig}}(H,K) \mathbin{\widehat{\otimes}}_K C^{\mathrm{rig}}(H,K) \xrightarrow{\mathrm{ev}_e \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{ev}_e} K.$$

注意，由于完备张量积的稠密性和可度量性，我们可以将 $C^{\mathrm{rig}}(H,K) \mathbin{\widehat{\otimes}}_K C^{\mathrm{rig}}(H,K)$ 中的每个元素表示为收敛和 $\sum_{n\geq 0} f_n \otimes f_n'$，其中某些$f_n, f_n' \in C^{\mathrm{rig}}(H,K)$。因此，对于 $f \in C^{\mathrm{rig}}(H,K)$，我们可以写作 $\Delta(f) = \sum_{n\geq 0} f_n \otimes f_n'$，从而对所有 $g, g' \in H$，都有 $f(gg') = \sum_{n\geq 0} f_n(g) f_n'(g')$。我们计算得

$$\big((\mathrm{ev}_e \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{ev}_e) \circ \Delta\big)(f) = (\mathrm{ev}_e \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{ev}_e)\bigg(\sum_{n\geq 0} f_n \otimes f_n'\bigg) = \sum_{n\geq 0} f_n(e) f_n'(e) = f(e) = \mathrm{ev}_e(f).$$

由 (1.25) 可知 $\Delta(\mathfrak{m}_e) \subset \mathrm{核}\big(\mathrm{ev}_e \mathbin{\widehat{\otimes}}_K \mathrm{ev}_e\big)$。我们想证明，$C_e^{\mathrm{la}}(G,K) \mathbin{\widehat{\otimes}}_K C_e^{\mathrm{la}}(G,K)$ 的这个后一个子空间等于 $C_e^{\mathrm{la}}(G,K) \mathbin{\widehat{\otimes}}_K \mathfrak{m}_e + \mathfrak{m}_e \mathbin{\widehat{\otimes}}_K C_e^{\mathrm{la}}(G,K)$。由于这个短严格正合列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}_e \longrightarrow C_e^{\mathrm{la}}(G,K) \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

由紧型 K-向量空间组成（见命题 A.4），它与 $C_e^{\mathrm{la}}(G,K)$的完备张量积根据 [13, 推论 2.2] 仍然是严格正合的：

$$0 \longrightarrow C_e^{\mathrm{la}}(G,K) \mathbin{\widehat{\otimes}}_K \mathfrak{m}_e \longrightarrow C_e^{\mathrm{la}}(G,K) \mathbin{\widehat{\otimes}}_K C_e^{\mathrm{la}}(G,K) \xrightarrow{\mathrm{id} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{ev}_e} C_e^{\mathrm{la}}(G,K) \longrightarrow 0.$$

同样，映射 $\mathrm{id} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{ev}_e$ 限制为严格满同态 $\mathfrak{m}_e \mathbin{\widehat{\otimes}}_K C_e^{\mathrm{la}}(G,K) \to \mathfrak{m}_e$。由于 $\mathrm{ev}_e \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{ev}_e = \mathrm{ev}_e \circ (\mathrm{id} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{ev}_e)$，我们得出结论：

$$\begin{aligned}\Delta(\mathfrak{m}_e) \subset \mathrm{Ker}\big(\mathrm{ev}_e \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{ev}_e\big) = \big(\mathrm{id} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{ev}_e\big)^{-1}(\mathfrak{m}_e) &= \mathrm{Ker}\big(\mathrm{id} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{ev}_e\big) + \mathfrak{m}_e \mathbin{\widehat{\otimes}}_K C_e^{\mathrm{la}}(G,K) \\ &= C_e^{\mathrm{la}}(G,K) \mathbin{\widehat{\otimes}}_K \mathfrak{m}_e + \mathfrak{m}_e \mathbin{\widehat{\otimes}}_K C_e^{\mathrm{la}}(G,K).\end{aligned}$$

关于 $\Delta(\mathfrak{m}_e^n)$ 的断言（其中 $n \in \mathbb{N}$），现在由以下事实得出：Δ 是一个 K-代数同态。

□

对于局部 L-解析李群 G，现在我们想研究这些支集在 e 的局部解析芽空间的强对偶。我们继续用 e 表示G的单位元，并记 $D_e(G) = D_e(G,K) := C_e^{\mathrm{la}}(G,K)'_b$。

注 1.6.7。K-代数 $C_e^{\mathrm{la}}(G,K)$ 构成了 Lyubinin 在 [51, 第 3.1 章2] 和 [52, 第 3 章2]中所研究的 CT-Hopf $\widehat{\otimes}$-代数的一个例子。

确实，设 $H_n \subset G$对于 $n \in \mathbb{N}$是一族紧开子群，使得限制同态 r_n：$C^{\mathrm{rig}}(H_n,K) \to C^{\mathrm{rig}}(H_{n+1},K)$ 是紧的。那么每个 $C^{\mathrm{rig}}(H_n,K)$ 都是一个Banach Hopf $\widehat{\otimes}$-代数（具有余乘法 Δ、余单位 ev_e 和对极 inv^*），并且过渡同态 r_n 是 Banach Hopf $\widehat{\otimes}$-代数的同态。

此外，对偶 $D_e(G)$是一个 NF-Hopf $\widehat{\otimes}$-代数 [52, 命题 3.13]。 □

基于经典上与代数群相关联的超代数[4]，我们作出如下定义。

[4]通常将此对象称为“分布代数”，参见 [41, I. Ch.7]。但为避免混淆，这里我们更倾向于使用“超代数”这一名称。

定义与命题 1.6.8。设 G 是一个局部 L-解析李群。我们定义

$$\begin{aligned}\mathrm{hy}(G,K)_n &:= \big\{\mu \in D_e(G,K) \,\big|\, \mu(\mathfrak{m}_e^{n+1}) = 0\big\} \quad , \text{for } n \in \mathbb{N}_0,\\ \mathrm{hy}(G,K) &:= \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathrm{hy}(G,K)_n,\end{aligned}$$

并将 $\mathrm{hy}(G,K)$ 称为 G 的超代数。

于是，$\mathrm{hy}(G,K)_n$ 是 $D(G,K)$ 中的有限维闭子空间，它是通过严格满同态 $C^{\mathrm{la}}(G,K) \to C_e^{\mathrm{la}}(G,K)$ 得到的。此外，$\mathrm{hy}(G,K)$ 是 $D(G,K)$ 的一个 K- 子代数，并且

$$\mathrm{hy}(G,K)_n * \mathrm{hy}(G,K)_m \subset \mathrm{hy}(G,K)_{n+m} \quad , \text{for all } n,m \in \mathbb{N}_0.$$

当系数域 K 默认已知时，我们记 $\mathrm{hy}(G) := \mathrm{hy}(G,K)$。

证明。我们可以假设 G 是紧的，并考虑满同态 $C^{\mathrm{la}}(G,K) \to C_e^{\mathrm{la}}(G,K)$ 的转置 $D_e(G) \to D(G)$。由于 $C^{\mathrm{la}}(G,K)$ 和 $C_e^{\mathrm{la}}(G,K)$ 是自反的局部凸 K-向量空间，我们可以应用 [11, IV. §4.2 Cor. 1] ，得出 $D_e(G) \to D(G)$ 是严格单同态。因此，我们可以将 $D_e(G) \subset D(G)$ 视为一个闭子空间。对于命题 1.6.5 (iii) 中的闭嵌入，我们记为 $\iota\colon \mathfrak{m}_e^{n+1} \hookrightarrow C_e^{\mathrm{la}}(G,K)$。根据 [11, IV. §4.1 Prop. 2], ，我们有

$$D_e(G) \supset \mathrm{hy}(G)_n = \mathrm{Ker}(\iota^t) \cong \mathrm{Coker}(\iota)'$$

特别地，这是一个有限维子空间。因此，我们将 $\mathrm{hy}(G)_n$ 实现为 $D(G)$的一个闭有限维子空间。

现在设 $\mu \in \mathrm{hy}(G)_n$ 和 $\nu \in \mathrm{hy}(G)_m$。由于 $C^{\mathrm{la}}(G,K) \to C_e^{\mathrm{la}}(G,K)$ 在 $C^{\mathrm{la}}(H,K)$ 上分解，对于任意紧开子群 $H \subset G$，我们可以假设 G 是紧的。于是分布 $\mu * \nu\colon C^{\mathrm{la}}(G,K) \to K$ 分解为

$$\begin{array}{ccccc} C^{\mathrm{la}}(G,K) & \xrightarrow{\Delta} & C^{\mathrm{la}}(G,K)\,\widehat{\otimes}_{K,\pi}\, C^{\mathrm{la}}(G,K) & \xrightarrow{\mu\otimes\nu} & \\ \downarrow & & \downarrow & & K \\ C_e^{\mathrm{la}}(G,K) & \xrightarrow{\Delta} & C_e^{\mathrm{la}}(G,K)\,\widehat{\otimes}_{K,\pi}\, C_e^{\mathrm{la}}(G,K) & \xrightarrow{\mu\otimes\nu}. & \end{array}$$

由引理 1.6.6，我们知道 $\Delta(\mathfrak{m}_e^{n+m+1}) \subset \sum_{i=0}^{n+m+1} \mathfrak{m}_e^i \,\widehat{\otimes}_K\, \mathfrak{m}_e^{n+m+1-i}$。因此我们得到 $(\mu\otimes\nu)\big(\Delta(\mathfrak{m}_e^{n+m+1})\big) = 0$，这表明 $\mu * \nu \in \mathrm{hy}(G)_{n+m}$。□

例 1.6.9。假设 K 是 L的有限域扩张，并令 G 为 L上的光滑代数群。在注 1.7.8 (ii) 中，我们将赋予 L-值点群 $\mathrm{G}(L)$ 一个局部 L-解析李群的结构。此外，我们将在推论 1.7.10 中看到，$\mathrm{hy}\big(\mathrm{G}(L)\big)$ 与 $\mathrm{Dist}(\mathrm{G}) \otimes_L K$规范地一致。这里，Dist(G) 表示 [41, I. Ch.7]中所处理的超代数（代数分布代数）。特别地，如果 $\mathrm{char}(L) = 0$，则这是一个同构 $\mathrm{hy}\big(\mathrm{G}(L)\big) \cong U(\mathfrak{g}) \otimes_L K$，其中 $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数，而 $U(\mathfrak{g})$ 是其泛包络代数 [41, I. §7.10]。

引理1.6.10。设 G 是一个局部 L-解析李群。那么拓扑自同构 *sm*
(1.11) 保持 $\mathrm{hy}(G)$，即它诱导出一个自同构

$$\mathrm{hy}(G) \longrightarrow \mathrm{hy}(G)\,, \quad \mu \longmapsto \dot{\mu}.$$

证明。这由以下观察得出：对于每个开邻域 $U \subset G$ （关于 e），$\mathrm{inv}(U)$ 也是 e 的开邻域，并且所诱导的拓扑自同构

$$\mathrm{inv}^\sharp\colon C_e^{\mathrm{la}}(G,K) \longrightarrow C_e^{\mathrm{la}}(G,K)\,, \quad f \longmapsto f \circ \mathrm{inv},$$

满足 $\mathrm{inv}^\sharp(\mathfrak{m}_e) = \mathfrak{m}_e$。 □

备注 1.6.11。在 [52, 第 1.2 章中，定义了 Banach Hopf $\widehat{\otimes}$-代数的有限对偶。对于 CT-Hopf $\widehat{\otimes}$-代数，采用显然类似的定义，$\mathrm{hy}(G)$ 是 $C_e^{\mathrm{la}}(G,K)$ 的有限对偶。

命题 1.6.12。设 G 是一个局部 L-解析李群，$V \neq \{0\}$ 是一个豪斯多夫局部凸 K-向量空间。配对（1.15）诱导出一个自然的、分别连续的、非退化 K-双线性配对

$$D_e(G) \times C_e^{\mathrm{la}}(G,V) \longrightarrow V\,, \quad (\mu, f) \longmapsto \mu(f) := \mu(\tilde{f}), \tag{1.26}$$

其中，$\tilde{f} \in C^{\mathrm{la}}(G,V)$ 表示 f 的某个提升。限制到 $C^{\mathrm{rig}}(U,\overline{E}) \subset C_e^{\mathrm{la}}(G,V)$ 后，对于 e 周围的紧开坐标图 U 和 BH-子空间 $E \subset V$，此配对表示为

$$D_e(G) \times C^{\mathrm{rig}}(U,\overline{E}) \longrightarrow D_e(G) \times C_e^{\mathrm{la}}(G,K)\,\widehat{\otimes}_K\,\overline{E} \longrightarrow \overline{E}. \tag{1.27}$$

这里，最后一个映射是 $C_e^{\mathrm{la}}(G,K)$ 与 $D_e(G)$ 之间的对偶配对同 $\overline{E}$ 的完备张量积。

证明。我们可以假设 G 是紧的。为说明 (1.26) 定义良好，考虑 $\tilde{f} \in \mathrm{Ker}\big(C^{\mathrm{la}}(G,V) \to C_e^{\mathrm{la}}(G,V)\big)$。设 $E \subset V$ 为一个 BH-子空间，使得 $\tilde{f} \in C^{\mathrm{la}}(G,\overline{E})$。此外，记 $\tau\colon C^{\mathrm{la}}(G,K) \to C_e^{\mathrm{la}}(G,K)$ 和 $\tau_{\overline{E}}\colon C^{\mathrm{la}}(G,\overline{E}) \to C_e^{\mathrm{la}}(G,\overline{E})$ 为引理 1.6.2 (i) 中的严格满同态。于是，对短严格正合列取张量积

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\tau) \longrightarrow C^{\mathrm{la}}(G,K) \longrightarrow C_e^{\mathrm{la}}(G,K) \longrightarrow 0$$

将 $\overline{E}$ 代入后，由完备张量积在局部凸 K-向量空间上的左正合性，得到 [13, 引理 2.1 (ii)] 所示的下列交换图，其中各行正合。

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\tau)\,\widehat{\otimes}_K\,\overline{E} & \longrightarrow & C^{\mathrm{la}}(G,K)\,\widehat{\otimes}_K\,\overline{E} & \longrightarrow & C_e^{\mathrm{la}}(G,K)\,\widehat{\otimes}_K\,\overline{E} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\tau_{\overline{E}}) & \longrightarrow & C^{\mathrm{la}}(G,\overline{E}) & \longrightarrow & C_e^{\mathrm{la}}(G,\overline{E})
\end{array}\,.$$

由于中间和右侧的竖直同态根据命题 A.7都是双射，我们看到核$(\tau_{\overline{E}}) \to$ 核$(\tau)\,\widehat{\otimes}_K\,\overline{E}$ 也是双射。如果将 $\tilde{f}$ 视为核$(\tau)\widehat{\otimes}_K\,\overline{E}$的一个元素，并对其应用配对 (1.16)，我们得到 $\mu(\tilde{f}) = 0$，对于所有 $\mu \in D_e(G)$，正如（参见 [11, IV. §4.1 命题 2]）

$$D_e(G) = \{\mu \in D(G) \,|\, \mu(\mathrm{Ker}(\tau)) = 0\}\,.$$

(1.26)的分别连续性以及 $D_e(G)$中的非退化性，分别由(1.15)的相应结论得出。此外，描述(1.27)由(1.16)推出。

还需证明 $C_e^{\mathrm{la}}(G,V)$ 中的非退化性。为此，设 $f \in C_e^{\mathrm{la}}(G,V)$ 满足对所有 $\mu \in D_e(G)$ 都有 $\mu(f) = 0$。我们必须证明 $f = 0$。设 U 是 e 周围的一个紧开坐标图，且 $E \subset V$ 是一个 BH-子空间，使得 $f \in C^{\mathrm{rig}}(U,\overline{E})$。那么我们有拓扑同构 $C^{\mathrm{rig}}(U,\overline{E}) \cong C^{\mathrm{rig}}(U,K)\,\widehat{\otimes}_K\,\overline{E}$，而 $C^{\mathrm{rig}}(U,K)\otimes_K \overline{E}$ 是其中的一个稠密子空间。因此，我们可以找到序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^{\mathrm{rig}}(U,K)$、$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{E}$，二者均收敛到 0，且满足 $f = \sum_{n\geq 1} f_n \otimes a_n$。由我们的假设和描述 (1.27) 可得，

$$0 = \mu(f) = \sum_{n\geq 1} \mu(f_n)a_n \quad \text{, for all } \mu \in D_e(G).$$

这意味着

$$\sum_{n\geq 1} \lambda(f_n)a_n = 0 \quad \text{, for all } \lambda \in C^{\mathrm{rig}}(U,K)', \tag{1.28}$$

由于同态 $D_e(G) \to C^{\mathrm{rig}}(U,K)'$ 由$C_e^{\mathrm{la}}(G,K)$与 $D_e(G)$之间的对偶配对诱导且为满射。

从现在起，我们将 $C^{\mathrm{rig}}(U,K)$ 视为一个局部凸的 K-向量空间，并将其与趋于 0 的序列空间相同视之

$$c_0(\mathbb{N}) := \big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K^{\mathbb{N}} \,\big|\, a_n \to 0 \text{ as } n \to \infty\big\}$$

赋予上确界范数。我们接下来的论证利用了这一点：$c_0(\mathbb{N})$ 是一个具有所谓逼近性质的 K-巴拿赫空间，本质上是以下内容的一个特例：

命题 4. [62, 6] 在阿基米德情形下的表述。不过，我们希望给出一种简洁而详尽的论述。为了证明 $f = 0$ 属于 $c_0(\mathbb{N}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_K \overline{E}$，我们将证明：

$$T(f) = 0 \quad \text{, for all } T \in \big(c_0(\mathbb{N}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_K \overline{E}\big)' \text{ with } T \neq 0.$$

我们固定这样的 T，并注意到我们有一个 K-向量空间的同构

$$\big(c_0(\mathbb{N}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_K \overline{E}\big)' \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}\big(c_0(\mathbb{N}), \overline{E}'\big)\,, \quad S \longmapsto \big[(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto [v \mapsto S((a_n)_{n\in\mathbb{N}} \otimes v)]\big], \tag{1.29}$$

根据 [67, Rmk. 20.12]。令 $C := \|T\|^{-1}_{\mathcal{L}\,(c_0(\mathbb{N})\ \overline{E}')}$，并令 $\varepsilon > 0$。现在我们考虑投影 ns

$$P_m \colon c_0(\mathbb{N}) \longrightarrow c_0(\mathbb{N})\,, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots) \quad \text{, for } m \in \mathbb{N},$$

它们构成有限秩的连续自同态。由于 $f_n \to 0$ 属于 $c_0(\mathbb{N})$，存在某个 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq N$，都有 $\|f_n\|_{c_0(\mathbb{N})} < C\,\varepsilon$。扩大 N之后，我们可以假设即使对所有 $n \in \mathbb{N}$，也有 $\|f_n - P_N(f_n)\|_{c_0(\mathbb{N})} < C\,\varepsilon$。

我们令 $S := T \circ P_N \in \mathcal{L}\big(c_0(\mathbb{N})\overline{E}'\big)$。由于 S 是有限秩的，存在 $r \in \mathbb{N}$、λ_1、……、$\lambda_r \in c_0(\mathbb{N})'$，以及 ℓ_1、……、$\ell_r \in \overline{E}'$，使得 $S = \big[x \mapsto \sum_{i=1}^r \lambda_i(x)\ \ell_i\big]$（参见 [67, §18]）。因此，当我们将 $S \in \big(c_0(\mathbb{N}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_K \overline{E}\big)'$ 作用于 f时，利用 (1.29) 可得

$$S(f) = \sum_{n\geq 1}\sum_{i=1}^{r} \lambda_i(f_n)\,\ell_i(a_n) = \sum_{i=1}^{r} \ell_i\bigg(\sum_{n\geq 1} \lambda_i(f_n)\,a_n\bigg) = 0.$$

对于最后一个等式，我们在此使用了 (1.28)。因此

$$\begin{aligned}
|T(f)| \leq |T(f) - S(f)| + |S(f)| = |T(f) - S(f)| &= \bigg|\sum_{n\geq 1} T(f_n)(a_n) - S(f_n)(a_n)\bigg| \\
&\leq \max_{n\geq 1}\Big(\|T(f_n) - S(f_n)\|_{\overline{E}'} \cdot \|a_n\|_{\overline{E}}\Big) = \max_{n\geq 1}\Big(\big\|T\big(f_n - P_N(f_n)\big)\big\|_{\overline{E}'} \cdot \|a_n\|_{\overline{E}}\Big) \\
&\leq \max_{n\geq 1}\Big(\|T\|_{\mathcal{L}(c_0(\mathbb{N}),\overline{E}')} \cdot \|f_n - P_N(f_n)\|_{c_0(\mathbb{N})} \cdot \|a_n\|_{\overline{E}}\Big) < \varepsilon \cdot \max_{n\geq 1} \|a_n\|_{\overline{E}}.
\end{aligned}$$

对于 $\varepsilon \to 0$，这表明 $T(f) = 0$。由于 $T \neq 0$ 是任意的 $T \in \big(c_0(\mathbb{N}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_K \overline{E}\big)'$，我们可以得出结论：$f = 0$。□

推论 1.6.13. 设 G 是一个局部 L-解析李群。那么 $\mathrm{hy}(G) \subset D_e(G)$ 是一个稠密的K-子代数。特别地，对于任意豪斯多夫局部凸 K-向量空间 $V \neq 0$，由K-双线性配对

$$\mathrm{hy}(G) \times C^{\mathrm{la}}_e(G, V) \longrightarrow V$$

由 (1.26) 诱导，且是非退化的[5]。

证明。首先，我们证明上述配对在 $V = K$ 时是非退化的。在 $\mathrm{hy}(G)$ 中这显然成立。另一方面，设 $f \in C^{\mathrm{la}}_e(G, K)$ 满足对于所有 $\mu \in \mathrm{hy}(G)$，都有 $\mu(f) = 0$。对于任意 $n \in \mathbb{N}_0$，可得 $f \in \mathrm{hy}(G)^\perp_n$，其中我们考虑相对于 (1.26) 的正交补

$$\mathrm{hy}(G)^\perp_n = \big\{f' \in C^{\mathrm{la}}_e(G, K) \,\big|\, \forall \mu \in \mathrm{hy}(G)_n : \mu(f') = 0\big\}.$$

但根据定义，我们有 $\mathrm{hy}(G)_n = (\mathfrak{m}_e^{n+1})^\perp$，而由 II. §6.3 Cor. 3]，有 $\big((\mathfrak{m}_e^{n+1})^\perp\big)^\perp = \mathfrak{m}_e^{n+1}$。因此 $f \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathfrak{m}_e^{n+1}$，我们应用克鲁尔交定理得出 $f = 0$。

为了证明 $\underline{\mathrm{hy}(G)} \subset D_e(G)$ 的稠密性，反设存在 $\delta \in D_e(G) \setminus \mathrm{hy}(G)$。由哈恩–巴拿赫定理 [67, Cor. 9.3]，存在 $f \in C^{\mathrm{la}}_e(\underline{G, K})$，使得对于所有 $\mu \in \mathrm{hy}(G)$，都有 $\mu(f) = 0$，且 $\delta(f) = 1$。但正如我们刚才所见，这意味着 $f = 0$，矛盾。

现在，$\mathrm{hy}(G)$ 与 $C^{\mathrm{la}}_e(G, V)$ 之间配对的非退化性由 $\mathrm{hy}(G)$ 是 $D_e(G)$ 的稠密子空间以及命题 1.6.12 得出。□

[5]在 [30, Kor. 4.7.4] 中，F´eaux de Lacroix 证明配对 $U(\mathfrak{g}) \otimes_L K \times C^{\mathrm{la}}_e(G, V) \to V$ 在 $\mathrm{char}(L) = 0$ 的情形下是非退化的。他的证明使用了相对于 $\mathfrak{g}$ 中元素的微分，因此我们在此采用不同的方法。

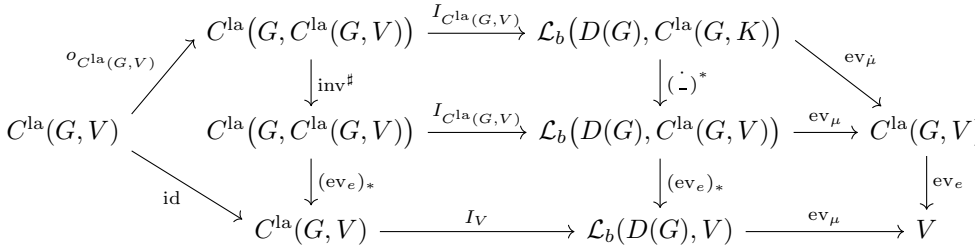
命题1.6.14。设 G 是一个紧的局部 L-解析李群，且 V 是一个豪斯多夫局部凸 K-向量空间。若我们考虑带有左正则 G-表示的 $C^{\mathrm{la}}(G,V)$，则在 V 中有等式

$$(\dot{\mu} * f)(e) = \mu(f) \quad , \textit{for all } \mu \in D(G),\ f \in C^{\mathrm{la}}(G,V).$$

证明。设

$$o_{C^{\mathrm{la}}(G,V)} \colon C^{\mathrm{la}}(G,V) \longrightarrow C^{\mathrm{la}}\big(G, C^{\mathrm{la}}(G,V)\big)\,, \quad f \longmapsto \rho_f,$$

表示轨道同态，它将函数 f 映射为其在左正则 G-表示下的轨道映射。此外，设 I_W 表示与豪斯多夫局部凸 K-向量空间 W相关联的积分映射 (1.13)。现在固定 $\mu \in D(G)$，并利用 I_W 的自然性，考虑下列交换图:



将函数 $f \in C^{\mathrm{la}}(G,V)$ 沿上方路径的同态映射到 V，得到 $\big(I_{C^{\mathrm{la}}(G,V)}(\rho_f)(\dot{\mu})\big)(e) = (\dot{\mu} * f)(e)$。沿下方路径取像，则得到 $I_V(f)(\mu) = \mu(f)$。因此，由上述交换图的交换性可得所述结论。□

命题 1.6.15。设 G 是一个局部 L-解析李群。
(i) 对于每个豪斯多夫局部凸 K-向量空间 V，该 G-表示

$$G \times C^{\mathrm{la}}_e(G,V) \longrightarrow C^{\mathrm{la}}_e(G,V)\,, \quad (g,f) \longmapsto f(g^{-1}_g), \tag{1.30}$$

是局部解析的。
(ii) 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，伴随表示 $\qquad\qquad 0$，

$$\mathrm{Ad}_n \colon G \times \mathrm{hy}(G)_n \longrightarrow \mathrm{hy}(G)_n\,, \quad (g,\mu) \longmapsto \mathrm{Ad}_n(g)(\mu) := \big[f \mapsto \mu\big(f(g_g^{-1})\big)\big]\,,$$

是局部解析的。

证明。对于 (i)，令 $H \subset G$ 是一个紧开子群。根据例1.3.7(ii)，带有通过共轭定义的 H-作用的 $C^{\mathrm{la}}(H,V)$是一个局部解析的 H-表示。由于严格满同态 $C^{\mathrm{la}}(H,V) \to C^{\mathrm{la}}_e(G,V)$关于通过共轭定义的作用是 H-等变的，根据命题 1.3.8 (i)， $C^{\mathrm{la}}_e(G,V)$是一个局部解析的 H-表示。此外，命题 1.6.4 中的函子性表明， G 作用于 $C^{\mathrm{la}}_e(G,V)$ 上的拓扑自同态。因此，命题 1.3.9 蕴含 $C^{\mathrm{la}}_e(G,V)$ 是一个局部解析的 G-表示。

对于第二个陈述，令 $V = K$，并考虑带有 (i) 中 G-作用的局部解析 G-表示$C^{\mathrm{la}}_e(G,K)$。由于该表示是紧型的，根据命题 1.4.10 (ii)， $D_e(G)$ 关于由 (1.30) 诱导的结构是一个分别连续的 $D(G)$-模。我们声称，对于 $n \in \mathbb{N}_0$，$\mathrm{hy}(G)_n \subset D_e(G)$ 是一个 $D(G)$-子模。事实上，如果 $f \in \mathfrak{m}_e \subset C^{\mathrm{la}}_e(G,K)$，那么

$$\mathrm{ev}_e\big(f(g^{-1}_g)\big) = f(g^{-1}eg) = f(e) = 0,$$

这表明对于所有 $g \in G$， $f(g^{-1}_g) \in \mathfrak{m}_e$。此外，在 (1.30) 中， G 通过 K-代数同态作用。因此， $\mathfrak{m}_e^{n+1} \subset C^{\mathrm{la}}_e(G,K)$ 是一个局部解析的 G-子表示。由此可得，$\mathrm{hy}(G)_n \subset D_e(G)$ 是一个 $D(G)$-子模。由于 $\mathrm{hy}(G)_n$ 是有限维的，因此特别是 LB型的。于是，命题 1.4.10 的等价 (i) 表明，$\mathrm{hy}(G)_n$ 带有局部解析 G-表示的结构，且该结构由 Ad_n 给出。□

定义与命题 1.6.16（参见 [58, 命题 3.5]）。假设 K 是 L的有限扩张。设 G 是一个局部 L-解析李群， $H \subset G$ 是一个局部 L-解析子群。那么，由 $\mathrm{hy}(G,K)$ 和 $D(H,K)$ 生成的 $D(G,K)$ 的 K-子代数中的每个元素，都是形如 $\mu * \delta$ 的元素的有限和，其中 $\mu \in \mathrm{hy}(G,K)$， $\delta \in D(H,K)$。

我们将这个子代数记为 $D(\mathfrak{g},H,K) \subset D(G,K)$；当系数域已明确时，记为 $D(\mathfrak{g},H)$。

证明。经过适当调整，我们按照命题 [58, Prop. 3.5] 的证明进行类似推导。只需证明，对所有 $\delta \in D(H)$， $\mu \in \mathrm{hy}(G)$， $\delta * \mu$ 都是元素 $\mu' * \delta'$ 的有限和，其中 $\mu' \in \mathrm{hy}(G)$， $\delta' \in D(H)$。我们固定这样的 δ 和 μ，并可假设 $\mu \in \mathrm{hy}(G)_n$，其中某个 $n \in \mathbb{N}_0$ 存在。由命题 1.3.10，$\mathrm{hy}(G)_n$ 上的伴随表示 Ad_n 是由局部 L-解析的李群 $G \to \mathrm{GL}\big(\mathrm{hy}(G)_n\big)$ 到局部 L-解析的李群的一个映射。因此，对于 $\mathrm{hy}(G)_n$ 的一个 L-基 $\mu_1, \ldots\ldots, \mu_r$，存在 $c_1, \ldots\ldots, c_r \in C^{\mathrm{la}}(G,K)$，使得

$$\mathrm{Ad}_n(g)(\mu) = \sum_{i=1}^{r} c_i(g)\,\mu_i \quad \text{, for all } g \in G.$$

我们将 $\delta_i \in D(H)$ 定义为，对于 $i = 1, \ldots\ldots, r$，满足

$$\delta_i(f) := \delta\big[h \mapsto c_i(h)\,f(h)\big] \quad \text{, for } f \in C^{\mathrm{la}}(H,K).$$

然后，对于 $f \in C^{\mathrm{la}}(G,K)$，我们计算

$$\begin{aligned}
(\delta * \mu)(f) &= \delta\Big[h \mapsto \mu\big[g \mapsto f(hg)\big]\Big] = \delta\Big[h \mapsto \mathrm{Ad}_n(h)(\mu)\big[g \mapsto f(gh)\big]\Big] \\
&= \delta\left[h \mapsto \left(\sum_{i=1}^{r} c_i(h)\,\mu_i\right)\big[g \mapsto f(gh)\big]\right] = \sum_{i=1}^{r} \delta\Big[h \mapsto c_i(h)\,\mu_i\big[g \mapsto f(gh)\big]\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{r} \delta\Big[h \mapsto \mu_i\big[g \mapsto c_i(h)\,f(gh)\big]\Big] = \sum_{i=1}^{r} \mu_i\Big[g \mapsto \delta\big[h \mapsto c_i(h)\,f(gh)\big]\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{r} \mu_i\Big[g \mapsto \delta_i\big[h \mapsto f(gh)\big]\Big] = \sum_{i=1}^{r} (\mu_i * \delta_i)(f).
\end{aligned}$$

在几个地方使用推论 1.4.5。因此，我们看到 $\delta * \mu = \sum_{i=1}^{r} \mu_i * \delta_i$。 □

推论 1.6.17. 假设 K 是 L的有限扩张，并设 V 是局部 L-解析李群 G的局部解析表示。那么我们有

$$g.(\mu * v) = \mathrm{Ad}_n(g)(\mu) * (g.v) \quad \text{, for all } g \in G,\ \mu \in \mathrm{hy}(G),\ v \in V,$$

其中 $n \in \mathbb{N}_0$ 使得 $\mu \in \mathrm{hy}(G)_n$。

证明。对于 $g \in G$ 和 $\mu \in \mathrm{hy}(G)_n$，我们找到 $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathrm{hy}(G)_n$ 和 $c_1, \ldots, c_r \in C^{\mathrm{la}}(G,K)$ 使得

$$\mathrm{Ad}_n(g)(\mu) = \sum_{i=1}^{r} c_i(g)\,\mu_i$$

因此， $\delta_g * \mu = \sum_{i=1}^{r} c_i(g)\,\mu_i * \delta_g$ 与上述命题的证明中一样。接下来，我们计算 $v \in V$，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_n(g)(\mu) * (g.v) &= \sum_{i=1}^{r} c_i(g)\,\mu_i * (g.v) = \sum_{i=1}^{r} c_i(g)\,\mu_i * (\delta_g * v) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{r} c_i(g)\,\mu_i * \delta_g\right) * v = (\delta_g * \mu) * v = g.(\mu * v).
\end{aligned}$$

□

我们希望类似于Agrawal 和Strauch 在 [1]中研究的 p-adic情形，对 K-代数 $D(\mathfrak{g},H)$ 上的模进行刻画。

定义1.6.18（参见 [1, 定义7.4.1]）。假设 K 是 L的有限扩张，并令G 为一个局部 L-解析李群，其具有一个局部 L-解析子群 $H \subset G$。我们称一个局部解析 H-表示 V，若其同时是一个hy(G)-模，则称其为局部解析 (hy(G) H)-模，如果 hy(G) 的数乘映射 $\times V \to V$在 hy(G) 赋予 hy(G) $\subset D(G)$ 的子空间拓扑时是分别连续的，并且以下两个相容条件成立：

（1）hy(H) 作为 hy(G) 的 K-子代数的作用，与由 Proposition 1.4.9 (i) 中 hy(H) 作为 $D(H)$ 的 K-子代数所诱导的作用一致。（2）对于所有 $h \in H$、 $\mu \in$ hy(G)、 $v \in V$ 以及满足 $\mu \in$ hy(G)$_n$ 的 $n \in \mathbb{N}_0$，我们有

$$h.(\mu * v) = \mathrm{Ad}_n(h)(\mu) * (h.v).$$

注记 1.6.19. 由 Corollary 1.6.17 可知，对于任意局部 L-解析子群 $H \subset G$，一个局部解析的 G-表示自然地带有局部解析的（hy(G) H）-模结构。

推论 1.6.20（参见 [1, 引理 7.4.2]）。赋予一个局部解析的（hy(G) H）-模结构，自然等价于赋予一个分别连续的 $D(\mathfrak{g}, H)$-模结构。此外，取强对偶空间得到范畴的反等价

$$\begin{pmatrix} \textit{locally analytic } (\mathrm{hy}(G), H)\textit{-modules} \\ \textit{on locally convex } K\textit{-vector spaces} \\ \textit{of compact type with continuous } H\textit{-} \\ \textit{and } \mathrm{hy}(G)\textit{-equivariant homomorphisms} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \textit{separately continuous } D(\mathfrak{g}, H)\textit{-modules} \\ \textit{on nuclear } K\textit{-Fréchet spaces} \\ \textit{with continuous } D(\mathfrak{g}, H)\textit{-module maps} \end{pmatrix}.$$

证明。一个局部解析的 (hy(G) H)-模 V自然带有一个分别连续的D(H)-模结构，由命题 1.4.10 (i) 给出。通过令

$$(\mu * \delta) * v := \mu * (\delta * v) \quad \text{, for } \mu \in \mathrm{hy}(G),\ \delta \in D(H),\ v \in V,$$

并作 K-线性延拓，我们得到一个分别连续的同态

$$D(\mathfrak{g}, H) \times V \longrightarrow V$$

它由条件 (1) 保证良定义。要证明这定义了一个 D(g, H)-模结构，唯一需要验证的非平凡断言是结合律。利用 hy(G)-作用和 D(H)-作用的结合律，以及狄拉克分布的稠密性，只需证明

$$(\delta_h * \mu) * v = \delta_h * (\mu * v) \quad \text{, for all } h \in H,\ \mu \in \mathrm{hy}(G), \text{ and } v \in V.$$

但如推论 1.6.17 的证明中所示，我们有 that

$$(\delta_h * \mu) * v = \mathrm{Ad}_n(h)(\mu) * (h.v).$$

因此，结合律由条件 (2) 得出。这也表明，反过来，我们可以在一个分别连续的 D(g, H)-模上赋予局部解析的 (hy(G) H)-模结构。

对于范畴的反等价，论证与命题 1.4.10(ii) 的证明类似。□

1.7. 刚性解析空间所导出的非阿基米德流形。这里我们希望为满足某些假设的刚性解析空间和概形关联局部解析流形。将此应用于光滑代数群 G，可使我们把与 G 关联的局部解析李群的超代数与 [41, I. §7.7] 中定义的（代数）分布代数 Dist(G) 联系起来。目前，设 L 是一个完备的非阿基米德域，其绝对值 $|_|$ 非平凡。

设 X 是一个刚性解析 L-空间，并令 $\mathfrak{m}_x$ 表示 $\mathcal{O}_X$ 中的极大理想，x，其中 $x \in X$。我们在 X 的 L-值点集上考虑

$$X(L) = \{x \in X \mid \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = L\}$$

由 $U(L) \subset X(L)$ 生成的拓扑，其中遍历所有仿射子域 $U \subset X$。

引理 1.7.1. 对于仿 affinoid 单位球 $\mathbb{B}^n = \mathrm{Sp}\, K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$，对 $n \in \mathbb{N}_0$，如上在 $\mathbb{B}^n(L) = B_1^n(0)$ 上定义的拓扑与经由 $B_1^n(0) \subset L^n$ 给出的“欧几里得”拓扑一致。

证明. 根据 [7, 7.2.5 推论 4]， $U \subset \mathbb{B}^n$ 仿 affine 子域构成 $\mathbb{B}^n$ 的典范拓扑的一组基。此外，对于任意 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$，魏尔施特拉斯域

$$\mathbb{B}^n(f_1, \ldots, f_r) := \big\{ y \in \mathbb{B}^n \,\big|\, |f_1(y)| \leq 1, \ldots, |f_r(y)| \leq 1 \big\} = \mathbb{B}^n(f_1) \cap \ldots \cap \mathbb{B}^n(f_r),$$

对于 $f_1, \ldots, f_r \in \mathfrak{m}_x$ 构成 x 在典范拓扑 [7, 7 中的邻域基。2.1，命题 3 (ii)]。

对于 L 值的 $x \in \mathbb{B}^n(L)$ 和 $f \in \mathfrak{m}_x = (T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n)$，令 $f_i' \in L\langle T_1, \ldots, T_n \rangle$ 使得 $f = f_1'(T_1 - x_1) + \ldots + f_n'(T_n - x_n)$。此外，我们找到 $c \in L^\times$ 使得 $|c| = \max_{i=1}^n |f_i'|_{\sup} =: \varepsilon^{-1}$。那么，对于 $y \in \mathbb{B}^n_{\varepsilon,\, x} := \mathbb{B}^n\big(c(T_1 - x_1) \ldots,\ c(T_n - x_n)\big)$，即满足 $\max_{i=0}^n |y_i - x_i| \leq \varepsilon$ 的 $y \in \mathbb{B}^n$，我们有

$$|f(y)| \leq \max_{i=1}^n |f_i'(y)||y_i - x_i| \leq \varepsilon^{-1} \max_{i=1}^n |y_i - x_i| \leq 1,$$

因此 $\mathbb{B}^n_{\varepsilon,x} \subset \mathbb{B}^n(f)$。我们得出，对于 $\varepsilon \in |L^\times|$，$\mathbb{B}^n_{\varepsilon,x}$ 构成 x 的典范拓扑的邻域基。但我们还有 $\mathbb{B}^n_{\varepsilon,x}(L) = B^n_\varepsilon(x)$，这表明 $\mathbb{B}^n(L)$ 上的“欧几里得”拓扑比通过 $\mathbb{B}^n$ 的仿 affinoid 子域定义的拓扑更精细。

由 $B^n_\varepsilon(x) = \mathbb{B}^n_{\varepsilon,\, x}(L)$ 以及 $\mathbb{B}^n_{\varepsilon,\, x}$ 是仿射子域这一事实可知，这两个拓扑相同，这很容易得到，因为 $x \in \mathbb{B}^n(L)$ 和 $\varepsilon \in |L^\times|$。□

对于具有良好性质的 X，我们现在希望赋予 $X(L)$局部L-解析流形的结构。为定义坐标图，我们将使用以下引理。其表述可能众所周知，但由于我们未能在文献中找到它，故给出一个证明。

引理 1.7.2. 设 X 是一个刚性解析 L-簇，且 $x \in X$ 是局部维数为 n的正则 L-有理点。那么存在一个开仿射子域 $U \subset X$，使得 $x \in U$，并且 U 同构于 n维单位球 $\mathbb{B}^n$。此外，对于 $\mathfrak{m}_x$的一组正则参数 $(f_1, \ldots, f_n)$，可以选取同构 $\varphi\colon U \xrightarrow{\cong} \mathbb{B}^n$，使得 $\varphi(x) = 0$，并且在诱导的 $\mathcal{A}(L^n, L) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{B}^n,0} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{X,x}$ 下，T_i 映射到 f_i。

证明. 我们可以假设 X 是仿射刚性空间，例如 $X = \operatorname{Sp} A$，其中 A是某个仿射刚性 L-代数。由于 $x \in X$ 是正则的，$A_{\mathfrak{m}}$ 是一个正则局部环（[7, 7.3.2，命题 8(i)]），其中 $\mathfrak{m} \subset A$表示对应于 x的极大理想。

令 $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{m}$表示一组正则参数，且令 $\overline{f}_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ 为 f_i 在 $A_{\mathfrak{m}} \to \mathcal{O}_{X,x}$下的像，参见 [7, 7.3.2，命题 3]。将 X缩小后，我们可以假设 $\overline{f}_i$ 提升到 $f_i \in \mathfrak{m}$，从而 f_i 在局部化映射 $A \to A_{\mathfrak{m}}$下映射到 f_i。利用 $\mathfrak{m} \subset A$ 是有限生成的，可以验证存在 $s \in A \setminus \mathfrak{m}$，使得 $s\,\mathfrak{m} \subset (f_1, \ldots, f_n)$ 且 $|s(x)| \geq 1$。将 A 替换为完备局部化 $A\langle s^{-1} \rangle$后，我们可以假设 $\mathfrak{m} = (f_1, \ldots, f_n)$。此外，通过缩放，我们可以假设 $|f_i|_{\sup} \leq 1$，或等价地，f_i 是幂有界的，参见 [7, 6.2.3，命题 1]。因此存在一个 L-代数的连续同态 [7, 6.1.1，命题 4]

$$\varphi^\flat\colon L\langle T_1, \ldots, T_n \rangle \longrightarrow A, \quad T_i \longmapsto f_i,$$

它诱导出一个态射 $\varphi\colon X \to \mathbb{B}^n$ 仿射刚性空间 L簇。由此可得 $\varphi(x) = 0 \in \mathbb{B}^n$，并且 x是 X中唯一映射到 0 的点，因为 $\mathfrak{m} = (f_1, \ldots, f_n)$。现在 $\varphi^\flat$诱导出局部环完备化之间的一个同态

$$\widehat{\varphi}^\flat_x\colon L[\![T_1, \ldots, T_n]\!] \cong \widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{B}^n,0} \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}, \quad T_i \longmapsto \overline{f_i}.$$

由于 $\overline{f_1}$、……、$\overline{f_n}$生成了$\mathfrak{m}\mathcal{O}_{X,x}$和 $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}\mathcal{O}_{X,x} \cong L$，我们可以应用 [25, 定理7.16b.]得出 $\widehat{\varphi}^\flat_x$ 是满射的。通过考察这些环的维数可知，$\widehat{\varphi}^\flat_x$ 实际上是同构。然后，[7, 7.3.3，命题 5] 表明，存在一个包含 0 的仿射子域 $V \subset \mathbb{B}^n$，使得 $\varphi\colon \varphi^{-1}(V) \to V$ 是同构。但是，对于 $c \in L^\times$ 满足 $|c| \geq 1$ 的情形，魏尔施特拉斯域 $\mathbb{B}^n(cT_1$、……、$cT_n)$ 构成了一个基

$0 \in \mathbb{B}^n$ 的邻域，参见引理 1.7.1 的证明。这样我们就得到了所需的开仿射解析子域。

$$U := \varphi^{-1}\big(\mathbb{B}^n(cT_1, \ldots, cT_n)\big) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{B}^n(cT_1, \ldots, cT_n) \cong \mathbb{B}^n.$$

□

引理 1.7.3. 设 $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^m$ 是刚性解析 L-空间之间的态射，其中 $n, m \in \mathbb{N}_0$。则诱导映射 $B_1^n(0) \to B_1^m(0)$ 由收敛幂级数给出。

证明. 根据 [7, 6.1.1 命题 4]，我们有

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{B}^n, \mathbb{B}^m) \cong \mathrm{Hom}_{L-alg}\big(L\langle Y_1, \ldots, Y_m\rangle, L\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\big) \cong \big(\mathcal{O}_L\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\big)^m.$$

其中，对 $(f_1, \ldots, f_m) \in \big(\mathcal{O}_L\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\big)^m$，赋予如下同态：它在$L$-值点上的取值为

$$\mathbb{B}^n(L) \longrightarrow \mathbb{B}^m(L), \quad z \longmapsto \big(f_1(z), \ldots, f_m(z)\big).$$

□

定义 1.7.4（[43, 定义 2.5.6]）。若存在一个容许覆盖 $X = \bigcup_{i\in I} U_i$，由仿射刚性开子域 $U_i \subset X$构成，且 I 至多可数，则称刚性解析 L-空间为可数型。

注记 1.7.5. (i) 此类空间的例子包括与有限型概形相关联的刚性解析 L-空间 over L [43, Rmk. 2.5.11]。

(ii) 当域 L 含有一个稠密的可数子域时（例如，当 L 是非阿基米德局部域时），任何可数型刚性解析 L-空间 X 的容许开子集 U 本身都是可数型的 [6]。

(ii) 的证明。取一个由开仿射解析子域 $U_i \subset X$ 构成的至多可数的容许覆盖 $X = \bigcup_{i\in I} U_i$，并考虑容许开集 $U \cap U_i \subset U_i$，我们可以假设 X 是仿射刚性空间。

因此，令 $X = \mathrm{Sp}\, A$，其中 L 是某个仿射刚性空间代数 A，并令 $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ 是由开仿射解析子域 $U_i \subset X$ 构成的某个容许覆盖。关于 X的典范拓扑而言，这个容许覆盖是一个开覆盖。根据 [5, 命题2.1.15], ，我们有一个拓扑嵌入 $X \hookrightarrow \mathcal{M}(A)$，其中 $\mathcal{M}(A)$ 表示与 A 相关联的 Berkovich 谱。此外，利用 L 包含一个稠密的可数子域这一事实，可以找到一个拓扑嵌入 $\mathcal{M}(A) \hookrightarrow [0,1]^{\mathbb{N}}$，参见 [18, 第 4] 页。因此，$U$ 赋予其诱导的子空间拓扑后具有一个可数基 [9, 第IX章 §2.8命题 12]。但这意味着已经存在一个至多可数的子集 $J \subset I$，使得 $U = \bigcup_{i\in J} U_i$ 是一个覆盖 [9, 第 IX 章 §2.8 命题13]。□

定义与命题 1.7.6. 设 X 是一个光滑、分离、可数型的刚性解析 L-空间。那么，赋予由 $U(L) \subset X(L)$（对所有仿射子域 $U \subset X$）生成的拓扑的 $X(L)$，以及由引理 1.7.2 的同构诱导的坐标图构成的图册，是一个局部 L-解析流形。我们将其记为 X^{la}。

证明. 对每个 $x \in X(L)$，由引理 1.7.2，存在一个包含 x 的仿射子域 $U_x \subset X$，以及一个同构 $\varphi_x\colon U_x \xrightarrow{\cong} \mathbb{B}^{n_x}$, $x \mapsto 0$，其中 n_x 是 x 处的局部维数。这些同构给出了坐标图

$$\varphi_x\colon U_x(L) \xrightarrow{\cong} B_1^{n_x}(0) \subset L^{n_x}$$

我们希望证明其相容。对于 x、$y \in X(L)$，我们得到刚性解析 L-空间的一个同构

$$\varphi_y \circ \varphi_x^{-1}\colon \varphi_x(U_x \cap U_y) \xrightarrow{\cong} U_x \cap U_y \xrightarrow{\cong} \varphi_y(U_x \cap U_y).$$

[6] 我们从 https://mathoverflow.net/q/155500 （版本：2014-01-23）了解到这一点，并在证明中遵循了用户“ACL”(https://mathoverflow.net/users/10696/acl) 在该处提出的推理思路。

对于 $z \in \varphi_x(U_x \cap U_y)(L)$，我们找到 $c \in L^\times$ 使得

$$Y' := Y\big(c\,(T_1 - z_1), \ldots, c\,(T_{n_x} - z_{n_x})\big) \subset Y := \varphi_x(U_x \cap U_y)$$

是一个开仿射解析子域，且

$$\psi_z \colon Y' \xrightarrow{\cong} \mathbb{B}^{n_x}, \quad w \longmapsto c\,(w - z),$$

并且 $Y'(L) = B^{n_x}_{|c|^{-1}}(z)$。将引理 1.7.3 应用于

$$\varphi_y \circ \varphi_x^{-1} \circ \psi_z^{-1} \colon \mathbb{B}^{n_x} \longrightarrow Y' \longrightarrow \varphi_x^{-1}(Y') \longrightarrow \varphi_y(\varphi_x^{-1}(Y')) \hookrightarrow \mathbb{B}^{n_y}$$

我们得到 $f(w) := (\varphi_y \circ \varphi_x^{-1} \circ \psi_z^{-1})(w)$ 可由收敛幂级数表示，其中 $w \in B^{n_x}_{|c|^{-1}}(z)$。因此，对于所有 $z \in Y(L)$，以及满足条件的 w，$(\varphi_y \circ \varphi_x^{-1})(w) = f(c\,(w - z))$ 表明，$\varphi_y \circ \varphi_x^{-1}$ 在 $\varphi_x(U_x \cap U_y)(L)$ 上是局部 L-解析的。这说明对于 $x \in X(L)$，图 φ_x 是相容的，由此得到由它们诱导的极大图册。

为证明 $X(L)$ 是第二可数的，设 $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ 是由开仿射解析子域构成的容许覆盖。根据 X 为可数型这一假设，我们可以假设 I 至多可数。但每个仿射刚性空间 X_i 都是某个 $\mathbb{B}^{n_i}$ 的子空间，且赋予典范拓扑。因此，根据引理 1.7.1，$X_i(L) \subset \mathbb{B}^{n_i}(L) \subset L^{n_i}$ 是第二可数的。

由 X 是分离的假设可知，对角态射 $\Delta\colon X \to X \times_L X$ 是闭浸入。由 [7, 9.3.5 引理 3] 可知，对于每个开仿射解析子域 $U \subset X$，$U \times_L U \subset X \times_L X$ 都是开仿射解析子域；由 [7, 9.5.3 命题 2]可知，态射 $\Delta\colon U \to U \times_L U$是闭浸入。因此，$\Delta(U) \subset U \times_L U$在典范拓扑下是闭的。于是我们可以推出，在 L-值点的层面上

$$\Delta\big(U(L)\big) \subset U(L) \times U(L) = (U \times_L U)(L)$$

当 $U(L)$ 配备由 U的所有开仿射解析子域生成的拓扑时，它是闭的。这表明 $X(L)$ 是豪斯多夫的。最后，由于 $X(L)$ 显然是局部紧的，且它还是第二可数和豪斯多夫的，因此我们可以得出它是仿紧的。□

推论 1.7.7. 通过赋予

$$X \longmapsto X^{\mathrm{la}},$$
$$[f\colon X \to Y] \longmapsto f|_{X^{\mathrm{la}}}$$

我们得到一个函子，它将可数型光滑分离刚性解析 L-空间的全子范畴映到局部 L-解析流形的范畴。

证明。与前一个命题的证明一样，可以证明刚性解析 L-空间之间的态射会在相应的流形之间诱导出一个局部 L-解析映射。□

注记1.7.8. (i)对于一个光滑、分离的 L-概形 X 有限型，我们可以转到刚性解析化 X^{rig}，根据注记 1.7.5 (i)，它是可数型的。由于分离性和光滑性会传递到 X^{rig}，我们可以将局部 L-流形 $(X^{\mathrm{rig}})^{\mathrm{la}}$与 X 关联起来。我们将所得函子记为 $(\,)^{\mathrm{la}}$。

（ii）特别地，如果G是 L 上的光滑代数群，那么它必然是分离的。由函子性可知，代数群 G 的结构赋予 G^{la} 具有局部 L-解析李群的结构。

我们现在假设 L 是一个局部紧的完备非阿基米德域，并令 K 是 L的有限扩张。

命题 1.7.9。设 X 是一个光滑、分离的刚性解析 L-空间，具有可数型，$x \in X(L)$。则存在局部 K- 代数的同构

$$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_L K \xrightarrow{\cong} C^{\mathrm{la}}_x(X^{\mathrm{la}}, K), \quad f \otimes \lambda \longmapsto \lambda f|_{X^{\mathrm{la}}}. \tag{1.31}$$

证明。利用引理 1.7.2，我们找到一个包含 x 的仿射子域 $U \subset X$ 以及一个同构 $\varphi\colon U \xrightarrow{\cong} \mathbb{B}^n$，对于某个 $n \in \mathbb{N}_0$，满足 $\varphi(x) = 0$。对于 $\varepsilon \in |\mathcal{O}_L \setminus \{0\}|$，我们考虑魏尔施特拉斯域 $\mathbb{B}^n_\varepsilon := \mathbb{B}^n(cT_1, \ldots, cT_n) \subset \mathbb{B}^n$，其中 $c \in L$ 使得 $|c| = \varepsilon^{-1}$。然后

仿affinoid 子域 $U_\varepsilon := \varphi^{-1}(\mathbb{B}_\varepsilon^n)$的集合在包含 x 的仿 affinoid 子域族中是共尾的。因此我们发现

$$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_L K \cong \Big(\varinjlim_{\varepsilon \in |\mathcal{O}_L \setminus \{0\}|} \mathcal{O}(U_\varepsilon) \Big) \otimes_L K \cong \varinjlim_{\varepsilon \in |\mathcal{O}_L \setminus \{0\}|} \mathcal{O}(U_\varepsilon) \otimes_L K.$$

另一方面，由 $U_\varepsilon(L) \to B_\varepsilon^n(0)$ 诱导的图在以 x 为中心的解析图族中构成一个共尾子集。因此，根据引理 1.6.2 (ii)

$$C_x^{\mathrm{la}}(X^{\mathrm{la}}, K) \cong \varinjlim_{\varepsilon \in |\mathcal{O}_L \setminus \{0\}|} C^{\mathrm{rig}}(U_\varepsilon(L), K).$$

但是存在相容的 L-代数同构

$$\mathcal{O}(U_\varepsilon) \longrightarrow C^{\mathrm{rig}}(U_\varepsilon(L), L), \quad f \longmapsto f|_{U_\varepsilon(L)}, \quad \text{for all } \varepsilon \in |\mathcal{O}_L \setminus \{0\}|. \tag{1.32}$$

事实上，逆映射如下给出：对于 $f \in C^{\mathrm{rig}}(U_\varepsilon(L), L)$，令 $g \in \mathcal{A}_\varepsilon(L^n, L)$ 为满足对所有 $z \in U_\varepsilon(L)$ 均有 $f(z) = g(\varphi(z))$ 的收敛幂级数。由于 $\mathcal{A}_\varepsilon(L^n, L) = \mathcal{O}(\mathbb{B}_\varepsilon^n)$，我们将 f 映射到 $\varphi^\flat(g)$，其中 $\varphi^\flat\colon \mathcal{O}(\mathbb{B}_\varepsilon^n) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}(U_\varepsilon)$ 是与 $\varphi|_{U_\varepsilon}$ 对应的仿射刚性空间 L- 代数的同构。将 (1.32) 与 K 的张量积结合，便得到（参见 [27,§2.3]）

$$\mathcal{O}(U_\varepsilon) \otimes_L K \cong C^{\mathrm{rig}}(U_\varepsilon(L), L) \otimes_L K \cong C^{\mathrm{rig}}(U_\varepsilon(L), K)$$

对这些同构取归纳极限，得到 (1.31)。

此外，我们注意到同构 (1.32) 保持在 x 处消失的函数所构成的极大理想，因此 (1.31) 是局部 K 代数的同构。□

推论 1.7.10. 设 G 是定义在 L 上的光滑代数群。那么 $\mathbf{G}^{\mathrm{rig}}$ 的同构 (1.31) 诱导出一个 K-Hopf 代数的典范同构。

$$\mathrm{hy}(\mathbf{G}^{\mathrm{la}}, K) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Dist}(\mathbf{G}) \otimes_L K$$

其中 Dist(G)表示G 的分布代数，参见 *[41,* I。*§7.7]*。特别地，如果 char(L) $= 0$，那么hy($\mathbf{G}^{\mathrm{la}}$, K) $\cong U$(Lie G) $\otimes_L K$。

证明。正如注 1.7.8 (ii)中所指出的，我们可以应用命题 1.7.9，从而得到一个局部 K-代数的同构

$$\alpha\colon \mathcal{O}_{\mathbf{G}^{\mathrm{rig}},e} \otimes_L K \xrightarrow{\cong} C_e^{\mathrm{la}}(\mathbf{G}^{\mathrm{la}}, K).$$

因此，对于每个 $n \in \mathbb{N}_0$，我们都有一个同态

$$\mathrm{hy}(\mathbf{G}^{\mathrm{la}}, K)_n \longrightarrow \left\{ \ell \in (\mathcal{O}_{\mathbf{G}^{\mathrm{rig}},e} \otimes_L K)^* \,\middle|\, \ell(\mathfrak{m}_e^{n+1} \otimes_L K) = 0 \right\}, \quad \mu \longmapsto \mu \circ \alpha. \tag{1.33}$$

令 $\mathfrak{M}_e =$ 核(ev$_e$) $\subset C_e^{\mathrm{la}}$(G^{la}, K)表示极大理想。根据命题1.6.5 (iii)，每个$\mu \in C_e^{\mathrm{la}}$(G^{la}, K)* 满足 $\mu(\mathfrak{M}_e^{n+1}) = 0$ 的都经由 C_e^{la}(G^{la}, K)的有限维商分解。因此，每个这样的 μ 已经是连续的，从而 (1.33) 是 K- 向量空间的同构。

$\widehat{}$ $\widehat{}$此外，令$\mathcal{O}_{\mathbf{G},e}$ 和 $\mathcal{O}_{\mathbf{G}^{\mathrm{rig}},e}$ 分别表示相应的 $\mathfrak{m}_e$-进完备化。如[6, 第 113]页所述，这些完备化是典范同构的[7]。同态

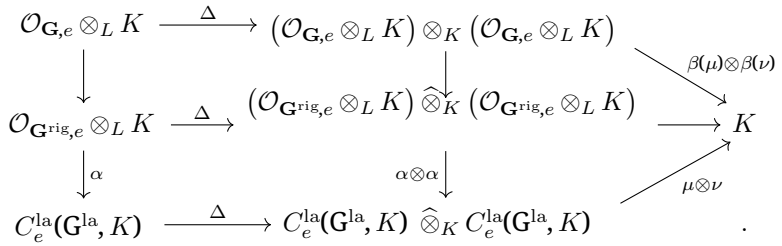
$$\left(\mathcal{O}_{\mathbf{G}^{\mathrm{rig}},e} \otimes_L K\right)^* \longleftarrow \left(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}^{\mathrm{rig}},e} \otimes_L K\right)^* \cong \left(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbf{G},e} \otimes_L K\right)^* \longrightarrow \left(\mathcal{O}_{\mathbf{G},e} \otimes_L K\right)^*$$

因此限制后得到一个同构

$$\begin{aligned} \left\{ \ell \in (\mathcal{O}_{\mathbf{G}^{\mathrm{rig}},e} \otimes_L K)^* \,\middle|\, \ell(\mathfrak{m}_e^{n+1} \otimes_L K) = 0 \right\} &\cong \left\{ \ell \in (\mathcal{O}_{\mathbf{G},e} \otimes_L K)^* \,\middle|\, \ell(\mathfrak{m}_e^{n+1} \otimes_L K) = 0 \right\} \\ &\cong \mathrm{Dist}_n(\mathbf{G}) \otimes_L K. \end{aligned}$$

[7]在 [6] Bosch 指的是 [48, 定理 2。1], 但我无法取得这篇论文。

由下列交换图可知，所得的 $\beta\colon \mathrm{hy}(\mathbf{G}^{\mathrm{la}}, K) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Dist}(\mathbf{G}) \otimes_L K$ 是 K-Hopf 代数的同构，对于 μ, $\nu \in \mathrm{hy}(\mathbf{G}^{\mathrm{la}}, K)$:



□

2. $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E})'_b$ and Local Cohomology Groups as Locally Analytic Representations

设 K 是一个带有非平凡绝对值 $|_|$的完备非阿基米德域。

2.1. 刚性解析空间上的凝聚上同调与局部上同调的拓扑。本节要考虑一种比我们稍后在 Drinfeld 上半空间中所需情形更一般的情况。设 X 是一个刚性解析 K-空间， $\mathcal{E}$ 是一个凝聚 $\mathcal{O}_X$-模。按照 [61, 1.6] ，我们想回顾一下，如何在容许开子集上为 $\mathcal{E}$ 的截面及其凝聚上同调群赋予规范的局部凸拓扑。

设 $U = \mathrm{Sp}\, A \subset X$ 是一个仿射子域，其中 K是某个仿射刚性空间 A-代数。根据 Kiehl 定理 [7, 9.4.3 定理 3]， $\mathcal{E}(U)$是一个有限 A-模，因此具有完备赋范 A-模的结构，且该结构在范数等价意义下唯一 [7, 3.7.3 命题 3]。固定这样一个范数 $\mathcal{E}$后，U成为一个 K-巴拿赫空间。对于另一个仿射子域 $U' \subset U \subset X$，所诱导的限制同态 $\mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U')$是连续的。

接下来，我们想研究一个容许开子集 $U \subset X$。对于由仿射刚性开子域 $U_i \subset X$ 构成的容许覆盖$U = \bigcup_{i\in I} U_i$，交集 $U_i \cap U_j$（ i、 $j \in I$）再次是容许开子集，并且我们可以找到由仿射刚性开子域 $V_{ijk} \subset X$ 构成的容许覆盖 $U_i \cap U_j = \bigcup_{k\in I_{ij}} V_{ijk}$。由于 $\mathcal{E}(U_i \cap U_j) \to \prod_{k\in I_{ij}} \mathcal{E}(V_{ijk})$ 是 K-向量空间的单射，我们有一个正合序列

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{E}(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j\in I} \prod_{k\in I_{ij}} \mathcal{E}(V_{ijk}) \tag{2.1}$$

K 向量空间。我们希望利用这个正合序列为 $\mathcal{E}(U)$ 赋予局部凸拓扑。然而，为了使这一做法不依赖于容许覆盖，我们只考虑所涉及的覆盖至多可数的情形（例如，当 U 是可数型时，见定义 1.7.4）。在这种情形下，(2.1) 中的乘积至多可数，因此是 K-Fr´echet 空间。由此可知，带有子空间拓扑的 $\mathcal{E}(U)$ 也是一个 K-Fr´echet 空间。要说明这一拓扑与（至多可数的）容许覆盖无关，只需考虑此类覆盖的细化情形。经典结果表明，所诱导的复形同态在代数意义下是拟同构 [v11].2 定理 [v12]。然后可仿照 [4, VII 中复 Fr´echet 空间复形的情形，利用引理 1.32] 推出所诱导的上同调群之间的同构甚至是拓扑同构。注意，对于允许至多可数容许覆盖的容许开集 $U' \subset U$，限制同态 $\mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U')$ 是连续的。

现在考虑一个容许开子集 $U \subset X$，它有一个至多可数的容许覆盖 $U = \bigcup_{i\in I} U_i$，其覆盖成员均为容许开子集，并且每个成员都有一个至多可数的仿射子域容许覆盖。此外，假设 U 的覆盖是 $\mathcal{E}$-无环的，也就是说， $\mathcal{E}$ 在 U_i 的交集上的所有高阶上同调群都消失。对于

例如，当 X 是分离的时，如果 U_i 是仿射刚性空间或准 Stein [61, 16]，则满足这一条件。ˇ然后得到相应的 Čech 复形

$$\prod_{i\in I}\mathcal{E}(U_i)\longrightarrow\prod_{i_0,i_1\in I}\mathcal{E}(U_{i_0}\cap U_{i_1})\longrightarrow\dots \tag{2.2}$$

在 K-向量空间 [6, 6 的层面上计算 $H^k(U,\mathcal{E})$。2 定理 5], 及其微分是连续的。注意，(2.2) 由 K-Fr´echet 空间组成，因为上述所有乘积都是可数的。我们赋予 $H^k(U,\mathcal{E})$ 局部凸拓扑，该拓扑由其作为 (2.2) 中某一项的子商所诱导。

由开映射定理 [67, 命题 8.6] ，当且仅当 (2.2) 的微分是严格的时，此拓扑才是豪斯多夫的。但一般而言，情况并非如此。与之前一样，可以证明 $H^k(U,\mathcal{E})$ 上的拓扑不依赖于至多可数覆盖的选择。

此外，我们还要考虑 $\mathcal{E}$ 关于集合论补集 $Z:=X\setminus U$ 的局部上同调群。现在假设 X 具有一个 $\mathcal{E}$-无环、至多可数的容许覆盖 $X=\bigcup_{j\in J}V_j$，其由容许开子集构成，且每个容许开子集都有一个至多可数的仿射刚性开子域容许覆盖。我们还假设交集 $U_i\cap V_j$ 存在至多可数的仿射刚性开子域容许覆盖。例如，若 X 准分离，则满足后一假设。在此情形下，我们可以假设覆盖 $U=\bigcup_{i\in I}U_i$ 是 $U=\bigcup_{j\in J}V_j\cap U$ 的细化。因此，我们得到 Čech 复形之间的连续同态

$$\begin{array}{ccccc}\prod_{j\in J}\mathcal{E}(V_j) & \longrightarrow & \prod_{j_0,j_1\in J}\mathcal{E}(V_{j_0}\cap V_{j_1}) & \longrightarrow & \dots\\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \prod_{i\in I}\mathcal{E}(U_i) & \longrightarrow & \prod_{i_0,i_1\in I}\mathcal{E}(U_{i_0}\cap U_{i_1}) & \longrightarrow & \dots\end{array}$$

这进而诱导出连续同态 $H^k(X,\mathcal{E})\to H^k(U,\mathcal{E}),\ \ k\geq 0$，通过 us ual 图追逐。

作为 K-向量空间，局部上同调群 $H^k_Z(X,\mathcal{E})$ 通过函子核$(\Gamma(X,)\to\Gamma(U,))$ [33, Exp. 2, Def.2.1] 的右导出函子$H^k_Z(X,)$定义。它们属于 K-向量空间的长正合上同调序列 [33, Exp. 2, Cor. 2.9]:

$$\dots\longrightarrow H^{k-1}_Z(X,\mathcal{E})\longrightarrow H^{k-1}(X,\mathcal{E})\longrightarrow H^{k-1}(U,\mathcal{E})\xrightarrow{\partial^{k-1}}H^k_Z(X,\mathcal{E})\longrightarrow\dots. \tag{2.3}$$

我们赋予 $H^k_Z(X,\mathcal{E})$ 关于 ∂^{k-1} 的局部凸终拓扑，即使得 ∂^{k-1} 连续的最细局部凸拓扑。

注记 2.1.1. 由 [67, 引理 5.1 (i)] 可知，采用此拓扑于$H^k_Z(X,\mathcal{E})$时，同态 $H^k_Z(X,\mathcal{E})\to H^k(X,\mathcal{E})$ 也是连续的。此外，∂^{k-1} 甚至是由引理 A.12 得出的严格同态。

2.2.等变向量丛的相干（局部）上同调。现在考虑一个刚性解析群簇 G，其定义在 K 上，并带有乘法态射 $m\colon G\times_K G\to G$；以及一个刚性解析 K-簇 X，其带有由该刚性解析群簇给出的作用 $\sigma\colon G\times_K X\to X$。此外，设 $\mathcal{E}$是一个 G-等变相干 $\mathcal{O}_X$-模，即一个带有同构的相干 $\mathcal{O}_X$-模

$$\Phi\colon\sigma^*\mathcal{E}\xrightarrow{\cong}\mathrm{pr}_2^*\mathcal{E}$$

满足 $G\times_K G\times_K X$ 上余循环条件的 $\mathcal{O}_{G\times_K X}$-模:

$$\mathrm{pr}_{23}^*\Phi\circ(\mathrm{id}_G\times\sigma)^*\Phi=(m\times\mathrm{id}_X)^*\Phi.$$

对于任意 $g\in G(K)$，$g\colon\mathrm{Sp}\ K\to G$，稍微滥用一下记号，我们也用 g表示诱导的自同构 $X\xrightarrow{g\times\text{恒等映射}}G\times_K X\xrightarrow{\sigma}X$。由此得到一个同构

$$\Phi_g\colon g^*\mathcal{E}=(g\times\mathrm{id}_X)^*\sigma^*\mathcal{E}\xrightarrow{(g\times\mathrm{id}_X)^*\Phi}(g\times\mathrm{id}_X)^*\mathrm{pr}_2^*\mathcal{E}=\mathcal{E}$$

$\mathcal{O}_X$-模，对于每个 $g \in G(K)$。

固定 $g \in G(K)$，并令 $U \subset X$ 为一个容许开子集。下文中，我们保留前一节的假设，即 U 存在一个至多可数的容许 $\mathcal{E}$-无环开子集覆盖，而这些开子集又各自存在至多可数的容许仿射刚性开子域覆盖。由此可得上同调群之间诱导的 K-向量空间同构

$$\varphi_g \colon H^k(U,\mathcal{E}) \longrightarrow H^k(U, g_* g^* \mathcal{E}) \cong H^k(g^{-1}(U), g^*\mathcal{E}) \xrightarrow{\Phi_g(g^{-1}(U))} H^k(g^{-1}(U),\mathcal{E}). \tag{2.4}$$

特别地，如果 g 稳定 U，我们便得到 $H^k(U,\mathcal{E})$ 的一个自同构。

对于仿射子域 $V \subset U$，我们将与 $g\colon g^{-1}(V) \to V$ 对应的仿射K-代数之间的连续同态记为 $g_V^\flat \colon \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(g^{-1}(V))$。于是

$$\varphi_{g,V} \colon \mathcal{E}(V) \longrightarrow g_* g^* \mathcal{E}(V) = g^*\mathcal{E}\big(g^{-1}(V)\big) \xrightarrow{\Phi_g(g^{-1}(V))} \mathcal{E}\big(g^{-1}(V)\big)$$

是 $g_V^\flat$-半线性的，即对于所有 $a \in \mathcal{O}(V)$ $e \in \mathcal{E}(V)$，都有 $\varphi_{g,\,V}(ae) = g_V^\flat(a)\varphi_{g,\,V}(e)$。利用 $\mathcal{E}(V)$ 和 $\mathcal{E}(g^{-1}(V))$ 是有限的 $\mathcal{O}(V)$-模和 $\mathcal{O}(g^{-1}(V))$-模这一事实，可知 $\varphi_{g,\,V}$ 是连续的（参见 [7, 3.7.3 命题 2]，其中证明了线性同态的这一结论）。我们对所有 $V = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_r}$（$i_0$，……，$i_r \in I$）应用此结论，从而得到 Čech 复形之间的一个连续同态

$$\begin{array}{ccccc} \prod\limits_{i\in I} \mathcal{E}(U_i) & \longrightarrow & \prod\limits_{i_0,i_1\in I} \mathcal{E}(U_{i_0}\cap U_{i_1}) & \longrightarrow & \ldots \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \prod\limits_{i\in I} \mathcal{E}\big(g^{-1}(U_i)\big) & \longrightarrow & \prod\limits_{i_0,i_1\in I} \mathcal{E}\big(g^{-1}(U_{i_0}\cap U_{i_1})\big) & \longrightarrow & \ldots. \end{array} \tag{2.5}$$

事实上，(2.5) 诱导了同构 (2.4)，因此这些同构是连续的。

注意，更一般地，对于满足前述假设的容许开子集 $V \subset g^{-1}(U)$，g 诱导连续同态

$$H^k(U,\mathcal{E}) \xrightarrow{\varphi_g} H^k(g^{-1}(U),\mathcal{E}) \longrightarrow H^k(V,\mathcal{E}).$$

转而考察局部上同调群，我们现在考虑 $Z := X \setminus U$，以及一个子集$W \subset X$，使得 $g^{-1}(Z) \subset W$，且 $X \setminus W$ 是满足上述~假设的容许开子集。同构 $\Phi_g\colon g^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ 随即诱导同态

$$\varphi_g \colon H^k_Z(X,\mathcal{E}) \longrightarrow H^k_W(X,\mathcal{E}) \tag{2.6}$$

K-向量空间的同态。这些同态构成局部上同调长正合列之间的一个同构

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots & \longrightarrow & H^k_Z(X,\mathcal{E}) & \longrightarrow & H^k(X,\mathcal{E}) & \longrightarrow & H^k(U,\mathcal{E}) & \xrightarrow{\partial^k} & H^{k+1}_Z(X,\mathcal{E}) & \longrightarrow & \ldots \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_g} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_g} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_g} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_g} & & \\ \ldots & \longrightarrow & H^k_W(X,\mathcal{E}) & \longrightarrow & H^k(X,\mathcal{E}) & \longrightarrow & H^k(X\setminus W,\mathcal{E}) & \xrightarrow{\partial^k} & H^{k+1}_W(X,\mathcal{E}) & \longrightarrow & \ldots. \end{array}$$

在关于 X 的覆盖满足适当假设的条件下，由 [67, 引理 5.1 (i)] 可知，同态 $\varphi_g\colon H^k_Z(X,\mathcal{E}) \to H^k_W(X,\mathcal{E})$ 也是连续的。注意，若 $W = g^{-1}(Z)$，则此 φ_g 是一个拓扑同构。

2.3. Drinfeld 上半空间的凝聚上同调。设 K 是一个非阿基米德局部域，其整数环为 $\mathcal{O}_K$，剩余特征为 $p > 0$。我们将 K 的代数闭包的完备化记为 C，其整数环记为 $\mathcal{O}_C$，并将 C上的绝对值记为$|_|$。此外，我们固定 K 的一个素元 π，使得 $\mathfrak{m}_K = (\pi)$。

对于固定的 $d \in \mathbb{N}$，我们现在考虑线性代数群 $\mathsf{G} := \mathrm{GL}_{d+1,\,K}$在射影空间 $\mathbb{P}^d_K$上的作用。我们用 $G = \mathrm{GL}_{d+1}(K)$ 表示G 的 K-有理点，并设 $G_0 := \mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)$，它是 G 的一个开极大紧子群。

我们将采用以下约定：$\mathbb{P}^d_K = \mathrm{ProjSym}(K^{d+1})^*$ 是 K^{d+1} 中直线的射影空间，其中 $\mathrm{Sym}(K^{d+1})^* = K[X_0,\dots,X_d]$，$X_0$、…、$X_d$ 是 K^{d+1}的标准基的对偶基。

于是，自然的左作用 $\sigma\colon \mathrm{GL}_{d+1,K}\times_K \mathbb{P}^d_K \to \mathbb{P}^d_K$ 由下式给出

$$\mathrm{GL}_{d+1}(C)\times \mathbb{P}^d_K(C) \longrightarrow \mathbb{P}^d_K(C)\,,\quad (g,z)\longmapsto gz := [z_0\colon \dots \colon z_d]\cdot g^{-1},$$

在 C 值点上。注意，兼容的左 G 作用在 $K[X_0,\dots,X_d]$ 上由 $g\cdot X_j = \sum_{i=0}^d g_{ij}X_i$ 给出，对于 $g=(g_{ij})\in G$，因此 $\mathfrak{m}_{gz} = g(\mathfrak{m}_z)$，其中 $\mathfrak{m}_z\subset K[X_0,\dots,X_d]$ 表示对应于 $z\in\mathbb{P}^d_K(C)$ 的极大理想。若无歧义，我们将继续用 $\mathrm{GL}_{d+1,K}$、$\mathbb{P}^d_K$ 和 σ 分别表示相应的刚性解析化及刚性解析群作用。

现在，我们遵循 Schneider 和 Stuhler [69, §1] 回顾 Drinfeld 上半空间及其刚性解析结构的定义。除非另有说明，对于 $z\in\mathbb{P}^d_K(C)$，我们总是假设 z 的代表元 $[z_0\colon\dots\colon z_d]$ 是幺模的，即满足 $|z_i|\le 1$，对所有 $i=0,\dots,d$ 以及 $|z_i|=1$ 均成立，其中某个 i。于是，对于任意超平面 $H\subset\mathbb{P}^d_K(C)$，我们取某个幺模线性形式 $\ell_H\in\left(\mathcal{O}_C^{d+1}\right)^*$（即对于某个幺模的 $\lambda=(\lambda_0,\dots,\lambda_d)\in\mathcal{O}_C^{d+1}$，有 $\ell_H(z)=\sum_{i=0}^d\lambda_i z_i$），使得

$$H=\left\{z\in\mathbb{P}^d_K(C)\,\middle|\,\ell_H(z)=0\right\}.$$

这个线性形式 ℓ_H 在 $\mathcal{O}_C$中只确定到一个单位元。

令 $\mathcal{H}$ 表示所有 K-有理超平面的集合（即存在某个 $\lambda\in\mathcal{O}_K^{d+1}$ 定义H）于 $\mathbb{P}^d_K(C)$ 中。作为集合，维数为 d 的 Drinfeld 上半空间在 K 上定义为

$$\mathcal{X}=\mathbb{P}^d_K(C)\Big\backslash\bigcup_{H\in\mathcal{H}}H.$$

为描述其作为刚性解析簇的结构，令

$$\mathcal{X}_n:=\left\{z\in\mathbb{P}^d_K(C)\,\middle|\,\forall H\in\mathcal{H}:|\ell_H(z)|\ge|\pi|^n\right\},$$

对于 $n\in\mathbb{N}$。$\mathcal{X}_n\subset\mathbb{P}^d_K$ 是开仿射子簇。此外，通过容许覆盖$\mathcal{X}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{X}_n$，Drinfeld 上半空间是$\mathbb{P}^d_K$ 的一个容许开 K-解析子簇，实际上还是一个 Stein 空间 [69, §1，命题 4]。回顾一下，这意味着对于任意相干的$\mathcal{O}_\mathcal{X}$-模 $\mathcal{E}$，高阶上同调群均消失 [45, Satz 2.4]：$H^j(\mathcal{X},\mathcal{E})=0$，对于 $j>0$。

开仿射子集 $\mathcal{X}_n\subset\mathbb{P}^d_K$ 在 G_0的作用下保持不变。事实上，令$g\in G_0$和 $z=[z_0\colon\dots\dots\colon z_d]\in\mathcal{X}_n$。注意，$gz$的代表元 $[z_0\colon\dots\dots\colon z_d]\cdot g^{-1}$已经是幺模的。对于任意 $H\in\mathcal{H}$，其中 ℓ_H 对应于幺模的 $\lambda\in\mathcal{O}_C^{d+1}$，我们需要检验 $|\ell_H(gz)|\ge|\pi|^n$。但是我们有

$$|\ell_H(gz)|=|[z_0\colon\dots\colon z_d]\cdot g^{-1}\cdot\lambda^t|=|\ell_{g^{-1}(H)}(z)|\ge|\pi|^n,$$

以及 $g^{-1}(H)$ 是对应于 $g^{-1}\cdot\lambda^t$ 的超平面。

现在考虑容许开刚性解析子群。

$$H_{n+1}:=\left\{g\in\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_C)\,\middle|\,\exists h\in G_0,h'\in\mathrm{M}_{d+1}(\mathcal{O}_C):g=h+\pi^{n+1}h'\right\}\subset\mathrm{GL}_{d+1}(C),\quad(2.7)$$

对于 $n\in\mathbb{N}$。那么$\mathrm{GL}_{d+1,K}$ 在 $\mathbb{P}^d_K$ 上的作用 σ 限制为 H_{n+1} 在 $\mathcal{X}_n$ 上的作用：令$z\in\mathcal{X}_n$，并令 $g\in H_{n+1}$ 满足 $g=h+\pi^{n+1}h'$，对于 $h\in G_0$，$h'\in\mathrm{M}_{d+1}(\mathcal{O}_C)$。我们计算，对于$H\in\mathcal{H}$，

$$|\ell_H(g^{-1}z)|=|\ell_{h(H)}(z)+\pi^{n+1}\ell_H([z_0\colon\dots\colon z_d]\cdot h')|=|\ell_{h(H)}(z)|\ge|\pi|^n$$

由于 $|\ell_{h(H)}(z)|>|\pi^{n+1}\ell_H([z_0\colon\dots\colon z_d]\cdot h')|$。

现考虑一个 G-等变向量丛 $\mathcal{E}$，其定义在 $\mathbb{P}^d_K$上。我们想说明，$H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})'_b$，即 $\mathcal{E}$ 在 Drinfeld 上半空间 $\mathcal{X}$ 上的整体截面的强对偶，是一个局部解析的 G-表示。所采用的方法类似于 Schneider 和 Teitelbaum [70] 处理典范线丛 $\mathcal{E}=\Omega^d_{\mathbb{P}^d_K}$ 时所使用的方法。但为方便读者起见，我们附上证明。

命题 2.3.1（参见 [70, 推论 3.9]）。该表示

$$G \times H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})'_b \longrightarrow H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})'_b\,, \quad (g,\ell) \longmapsto \ell(g^{-1}._), \tag{2.8}$$

是局部解析的。此外，典范映射

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{E})' \longrightarrow \left(\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{E})\right)'_b = H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})'_b \tag{2.9}$$

是拓扑同构，而 $H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})'_b$ 以这种方式为紧型，即它是.....的归纳极限。

$$H^0(\mathcal{X}_1,\mathcal{E})' \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{E})' \hookrightarrow H^0(\mathcal{X}_{n+1},\mathcal{E})' \hookrightarrow \ldots \tag{2.10}$$

其中，由 $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}_{n+1}$ 诱导的过渡映射是紧的且单射的。

对于这个命题，我们分几个步骤进行。

引理 2.3.2. G 在 $H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})$ 上的自然作用以及 $H_{n+1}(K)$ 在 $H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{E})$ 上的作用，对于所有 $n\in\mathbb{N}$，均由连续自同态给出。

证明。这由前一节（第 2.2 节）中的讨论可得。 □

引理 2.3.3. 整体截面空间 $H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})$ 是以下 K-巴拿赫空间的射影极限

$$H^0(\mathcal{X},\mathcal{E}) \cong \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{E})$$

相对于限制映射 $\mathcal{E}(\mathcal{X}_{n+1}) \to \mathcal{E}(\mathcal{X}_n)$。这些同态是紧的，且具有稠密像。此外，上述同构是 G_0-等变的。

证明。我们将第 2.1 节中的讨论应用于容许覆盖 $\mathcal{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}_n$。注意到 $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}_{n+1}$，拓扑同构

$$H^0(\mathcal{X},\mathcal{E}) = \mathrm{Ker}\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}(\mathcal{X}_n) \to \prod_{l,m\in\mathbb{N}} \mathcal{E}(\mathcal{X}_l \cap \mathcal{X}_m)\right) \cong \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{E})$$

由 (2.2) 得出。按构造，此同构是 G_0-等变的。

现在我们仿照 [70, §1 命题 4] 进行论证。对每个 $n\in\mathbb{N}$，$\mathcal{X}_n$ 都是 $\mathcal{X}_{n+1}$ [69, §1 中的一个魏尔施特拉斯域。命题 4] 的证明。这意味着 $\mathcal{O}(\mathcal{X}_{n+1})$ 的像在 $\mathcal{O}(\mathcal{X}_n)$ [7, 7 中稠密。3.4 命题 2]。

此外，根据 [69, §1，命题 4] 的证明，$\psi\colon \mathcal{O}(\mathcal{X}_{n+1}) \to \mathcal{O}(\mathcal{X}_n)$ 这一同态在 [5, 定义 2.51], 的意义下是内的，即存在一个严格满同态

$$\tau\colon K\langle T_1,\ldots,T_m\rangle \twoheadrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{X}_{n+1})$$

从某个 $m\in\mathbb{N}$ 的仿射刚性空间 K-代数出发，使得

$$\sup_{y\in\mathcal{X}_n} |\psi(\tau(T_i))(y)| < 1,$$

对所有 $i = 1$，.....，m 均成立。根据 [70, §1 引理 5]，可知 ψ 作为局部凸 K-向量空间之间的同态是紧的。

对于一般的向量丛 $\mathcal{E}$，根据 Kiehl 定理 [7, 9.4.3 定理 3]，我们知道，对某个 $k\in\mathbb{N}_0$，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(\mathcal{X}_{n+1})^{\oplus k} & \xrightarrow{\psi^{\oplus k}} & \mathcal{O}(\mathcal{X}_n)^{\oplus k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}(\mathcal{X}_{n+1}) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathcal{X}_n) \end{array}$$

其中竖直映射是严格满同态。于是，引理 A.3 (ii) 和 (iii) 表明，$\mathcal{E}(\mathcal{X}_{n+1}) \to \mathcal{E}(\mathcal{X}_n)$ 是紧的。上面的交换图还表明，该限制同态的像是稠密的。□

引理 2.3.4. 对于 $n \in \mathbb{N}$，表示

$$G_0 \times H^0(\mathcal{X}_n, \mathcal{E}) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}_n, \mathcal{E}), \quad (g, v) \longmapsto g.v,$$

在 K-巴拿赫空间 $H^0(\mathcal{X}_n, \mathcal{E})$ 上是局部解析的。

证明。我们已经在引理 2.3.2 中看到，每个 $g \in G_0 \subset H_{n+1}(K)$ 都通过一个连续自同构作用于 $H^0(\mathcal{X}_n, \mathcal{E})$。因此，只需证明对于每个 $v \in H^0(\mathcal{X}_n, \mathcal{E})$，轨道映射 $G_0 \to H^0(\mathcal{X}_n, \mathcal{E})$，$g \to g.v$ 是局部解析的。

为此，我们固定 $v \in \mathcal{E}(\mathcal{X}_n)$和 $g \in G_0$，并完全按照 [70, 命题2.1']进行。我们使用可容许的开刚性解析子群 (2.7) 和刚性解析坐标图

$$\iota_g \colon D_{n+1} := 1 + \pi^{n+1} \mathrm{M}_{d+1}(\mathcal{O}_C) \longrightarrow H_{n+1}, \quad h \longmapsto gh.$$

注意， D_{n+1} 作为刚性解析簇同构于多圆盘$\mathrm{Sp}\, K\langle T_1, \ldots, T_{(d+1)^2}\rangle$。由于 H_{n+1} 固定 $\mathcal{X}_n$，我们可以限制群作用 σ，并得到如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} D_{n+1} \times_K \mathcal{X}_n & \xrightarrow{\iota_g \times \mathrm{id}} & H_{n+1} \times_K \mathcal{X}_n & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{X}_n \\ & \searrow^{\mathrm{pr}_2} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} & & \\ & & \mathcal{X}_n & & \end{array}.$$

令 $F_v \in \mathcal{E}(\mathcal{X}_n)\langle T_1, \ldots, T_{(d+1)^2}\rangle$ 表示 v 在.....作用下映射到的幂级数

$$\begin{array}{rl} \mathcal{E}(\mathcal{X}_n) \longrightarrow & (\iota_g \times \mathrm{id})^* \sigma^* \mathcal{E}(D_{n+1} \times_K \mathcal{X}_n) \\ & \downarrow{\scriptstyle (\iota_g \times \mathrm{id})^* \Phi(D_{n+1} \times_K \mathcal{X}_n)} \\ (\iota_g \times \mathrm{id})^* \mathrm{pr}_2^* \mathcal{E}(D_{n+1} \times_K \mathcal{X}_n) \cong & \mathrm{pr}_2^* \mathcal{E}(D_{n+1} \times_K \mathcal{X}_n) \\ \cong & \big(\mathcal{O}(D_{n+1}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_K \mathcal{O}(\mathcal{X}_n)\big) \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}_n)} \mathcal{E}(\mathcal{X}_n) \\ \cong & \mathcal{E}(\mathcal{X}_n)\langle T_1, \ldots, T_{(d+1)^2}\rangle. \end{array}$$

现在，对于一个 K-值点 $h \in D_{n+1}(K)$,

$$\begin{array}{ccccc} D_{n+1} \times_K \mathcal{X}_n & \xrightarrow{\iota_g \times \mathrm{id}} & H_{n+1} \times_K \mathcal{X}_n & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{X}_n \\ {\scriptstyle h \times \mathrm{id}}\uparrow & & & \nearrow_{gh} & \\ \mathcal{X}_n & & & & \end{array}.$$

就 K-仿射代数而言，态射 $h \times \mathrm{id} \colon \mathcal{X}_n \to D_{n+1} \times_K \mathcal{X}_n$ 由幂级数的求值给出

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_h \colon \mathcal{O}(D_{n+1}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_K \mathcal{O}(\mathcal{X}_n) \cong \mathcal{O}(\mathcal{X}_n)\langle T_1, \ldots, T_{(d+1)^2}\rangle &\longrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{X}_n), \\ F &\longmapsto F(h). \end{aligned}$$

因此我们得到交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}(\mathcal{X}_n) & \longrightarrow & (\iota_g \times \mathrm{id})^* \sigma^* \mathcal{E}(D_{n+1} \times_K \mathcal{X}_n) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathcal{X}_n)\langle T_1, \ldots, T_{(d+1)^2}\rangle \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle (h \times \mathrm{id})^*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_h} \\ & & (gh)^* \mathcal{E}(\mathcal{X}_n) & \xrightarrow{\Phi_{gh}(\mathcal{X}_n)} & \mathcal{E}(\mathcal{X}_n) \end{array}$$

这表明 $gh.v = F_v(h)$。由此我们得出，轨道映射 $G_0 \to \mathcal{E}(\mathcal{X}_n)$ 在 g 的开邻域 $\iota_g(D_{n+1})(K)$ 上是解析的。□

推论 2.3.5. 对偶表示

$$G_0 \times H^0(\mathcal{X}_n, \mathcal{E})' \longrightarrow H^0(\mathcal{X}_n, \mathcal{E})', \quad (g, \ell) \longmapsto \ell(g^{-1}._),$$

在 K-巴拿赫空间 $H^0(\mathcal{X}_n, \mathcal{E})'$ 上是局部解析的。

证明。我们采用与 [70, 命题3.8]的证明类似的论证。根据命题 1.3.10， G_0 在 $H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{E})$上的表示（来自引理2.3.4）由局部解析同态 $\rho\colon G_0 \to \mathrm{GL}(H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{E}))$ 给出，该同态属于局部 K-解析李群。于是对偶表示

$$\rho^*\colon G_0 \longrightarrow \mathrm{GL}\big(H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{E})'\big), \quad g \longmapsto \rho(g^{-1})^t,$$

同样由李群之间的局部解析同态给出 [10, III. §3.11 Cor. 2], an d
因此是局部解析的。 □

命题 2.3.1 的证明。关于 $H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})'_b$ 的陈述，我们仿照 [70, 命题 1.4] 的证明进行论证。由引理 2.3.3，同态 $H^0(\mathcal{X}_{n+1},\mathcal{E}) \to H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{E})$ 的像是稠密的。因此，投影 $H^0(\mathcal{X},\mathcal{E}) \to H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{E})$ 的像也稠密 [8, Ch. II. §3.5 Thm. 1]。我们应用 [67, 命题 16.5] 得出 (2.9) 是一个拓扑同构。

由于 $H^0(\mathcal{X}_{n+1},\mathcal{E}) \to H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{E})$ 的像是稠密的，转置 $H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{E})' \to H^0(\mathcal{X}_{n+1},\mathcal{E})'$ 是单射。此外，[67, 引理 16.4] 表明它们是紧的。

关于 G作用（2.8），我们在引理 2.3.2 中已经看到， G 在 $H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})$ 上通过连续自同态作用。因此，在 $H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})'_b$ 上的对偶 G作用也通过连续自同态作用。

由命题 1.3.9 可知，只需证明（2.8）的轨道映射限制在 G_0 上时是局部解析的。对于任意 $\ell \in H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})'_b$，存在某个 $n\in\mathbb{N}$，使得 $\ell \in H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{E})'$，且根据引理 2.3.3，嵌入 $H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{E})' \hookrightarrow H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})'_b$ 是 G_0-等变的。

但我们在推论 2.3.5 中已经看到， ℓ 的轨道映射 $G_0 \to H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{E})'$ 是局部解析的。由于 $H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})'_b$ 关于（ 2.10 ）是紧型的， $H^0(\mathcal{X}_n,\mathcal{E})' \hookrightarrow H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})'_b$ 构成一个 BH- 子空间。因此，根据定义， ℓ的轨道映射 $G_0 \to H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})'_b$ 也是局部解析的。□

˘ 2.4. 舒伯特簇补集的某些 Čech 复形的严格性。接下来，我们的目标是考察相对于舒伯特簇 $\mathbb{P}^j_K \subset (\mathbb{P}^d_K)^{\mathrm{rig}}$ 的 $\mathcal{E}$ 局部上同调群的强对偶如何成为局部解析表示。此外，通过用舒伯特簇周围“管状邻域”的局部上同调群构造一个穷竭，我们将证明这些强对偶空间与 (2.10) 中类似，属于紧型。

˘ 然而，本节的第一步是证明某些用于计算这些舒伯特簇补集上同调的 Čech 复形由严格连续同态构成。严格性使我们能够以良好的方式转向相对于舒伯特簇周围“管状邻域”的局部上同调。

首先，我们定义 $\mathbb{P}^d_K$ 的某些刚性解析子簇，它们是舒伯特簇的邻域

$$\mathbb{P}^r_K = \big\{[z_0:\ldots:z_r:0:\ldots:0] \in \mathbb{P}^d_K\big\} := V_+(X_{r+1},\ldots,X_d) \subset \mathbb{P}^d_K,$$

对于固定的 $r\in\{0,\ldots,d-1\}$。对于 $0<\varepsilon<1$、 $\varepsilon \in |\overline{K}|$， $\mathbb{P}^r_K$ 周围的“开” ε-邻域定义为

$$\mathbb{P}^r_K(\varepsilon) := \big\{[z_0:\ldots:z_d] \in \mathbb{P}^d_K \,\big|\, \forall i=r+1,\ldots,d : |z_i| \le \varepsilon\big\}, \tag{2.11}$$

以及将“闭的”那个作为

$$\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^- := \big\{[z_0:\ldots:z_d] \in \mathbb{P}^d_K \,\big|\, \forall i=r+1,\ldots,d : |z_i| < \varepsilon\big\}.$$

我们将描述这些 ε 邻域补集的一些容许覆盖。令 $\lambda\in K^\times$ 和 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $\varepsilon = \sqrt[m]{|\lambda|}$。我们有容许覆盖

$$\mathbb{P}^d_K \setminus \mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^- = \bigcup_{i=r+1}^{d} U_{i,\varepsilon} \tag{2.12}$$

由魏尔施特拉斯域得到的

$$U_{i,\varepsilon} = D_+(X_i)_\varepsilon := \left\{[z_0 : \ldots : z_d] \in \mathbb{P}^d_K \,\middle|\, \forall j = 0, \ldots, d : \varepsilon\,|z_j| \le |z_i|\right\}$$
$$= \left\{[z_0 : \ldots : z_d] \in \mathbb{P}^d_K \,\middle|\, \forall j = 0, \ldots, d : \left|\lambda \frac{z_j^m}{z_i^m}\right| \le 1\right\},$$

参见 [7, 6.1.5 定理 4]。下文将把这个覆盖 (2.12) 记作 $\mathcal{U}_\varepsilon$。注意，$U_{i,\varepsilon}$ 包含于射影空间的标准仿射开子集 $D_+(X_i)$ 中。

此外，对于 $0 \le \varepsilon < 1$、$\varepsilon \in |\overline{K}|$，令

$$U^-_{i,\varepsilon} = D_+(X_i)^-_\varepsilon := \left\{[z_0 : \ldots : z_d] \in \mathbb{P}^d_K \,\middle|\, \forall j = 0, \ldots, d : \varepsilon\,|z_j| < |z_i|\right\}.$$

于是 $U^-_{i,\varepsilon}$ 成为 $\mathbb{P}^d_K$ 的一个开容许子域，并且通过以下容许覆盖成为准 Stein：

$$U^-_{i,\varepsilon} = \bigcup_{|\mathcal{O}_{\overline{K}}| \ni \varepsilon_m \searrow \varepsilon} U_{i,\varepsilon_m},$$

对于任意严格递减的 $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset |\overline{K}^\times|$序列，其中 $\varepsilon_m > \varepsilon$、$\varepsilon_m \to \varepsilon$。对于仿射代数的相关同态，要求其具有稠密像；对于 Weierstrass 域 [7, 7 的每个嵌入，这一条件均得到满足。3.4 命题 2]。在 $\varepsilon = 0$ 的极端情形下，我们有$U^-_{i,0} = U_{\text{刚性}\,i}$，参见 [7, 9.3.4 例 2]。此处 U_i^{rig} 表示开仿射子概形 $U_i := D_+(X_i) \subset \mathbb{P}^d_K$ 的刚性解析化。

我们用 $\mathcal{U}^-_\varepsilon$表示容许覆盖

$$\mathbb{P}^d_K \setminus \mathbb{P}^r_K(\varepsilon) = \bigcup_{i=r+1}^{d} U^-_{i,\varepsilon}. \tag{2.13}$$

在极端情形 $\varepsilon = 0$下，当我们想表示 $\mathbb{P}^r_K \subset (\mathbb{P}^d_K)^{\mathrm{rig}}$ 的补集是一个容许开子集时，也记作 $(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}} \subset \mathbb{P}^d_K$

$$\mathbb{P}^d_K \setminus \left(\mathbb{P}^r_K\right)^{\mathrm{rig}} = \bigcup_{i=r+1}^{d} U_i^{\mathrm{rig}} = \bigcup_{i=r+1}^{d} \bigcup_{|\mathcal{O}_{\overline{K}}| \ni \varepsilon_m \searrow 0} U_{i,\varepsilon_m}.$$

此外，我们用 $\mathcal{U}$ 表示由仿射开子概形构成的标准覆盖

$$\mathbb{P}^d_K \setminus \mathbb{P}^r_K = \bigcup_{i=r+1}^{d} U_i. \tag{2.14}$$

最后，对于任意子集 $I \subset \{0, \ldots, d\}$，我们记作

$$U_{I,\varepsilon} := \bigcap_{i\in I} U_{i,\varepsilon}, \tag{2.15}$$

类似地，$U^-_{I,\varepsilon}$、U_I和 $U_{\mathrm{rig}\,I}$。根据约定，我们令$U_\emptyset = U_{\emptyset,\varepsilon} = U^-_{\emptyset,\varepsilon} := \mathbb{P}^d_K$。

引理 2.4.1. 设 $0 < \varepsilon < 1$满足$\varepsilon \in |\overline{K}|$。设 $I \subset \{0, \ldots, d\}$，并用 $\mathcal{E}^{\mathrm{alg}}(U_I)$ 表示代数簇 U_I 上的 $\mathcal{E}$的截面。则同态 $\mathcal{E}^{\mathrm{alg}}(U_I) \to \mathcal{E}(U_{I,\varepsilon})$ 是由$U_{I,\varepsilon}$ 为 U_I^{rig} 的一个容许开子域所诱导的，它是单射且其像稠密。特别地，$\mathcal{E}(U_{I,\varepsilon})$ 是 $\mathcal{E}^{\mathrm{alg}}(U_I)$ 的完备化，其中后者取自 $\mathcal{E}(U_{I,\varepsilon})$ 的巴拿赫拓扑所诱导的拓扑。

证明。我们可以假设 $I = \{i_0, \ldots, i_m\} \ne \emptyset$。那么同构

$$U_{i_0} = D_+(X_{i_0}) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Spec} K\left[T_{(j,i_0)} \mid j = 0, \ldots, d, j \ne i_0\right],$$
$$\frac{X_j}{X_{i_0}} \longleftarrow\!\shortmid\, T_{(j,i_0)},$$

概形诱导出一个同构 $U_I \cong \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$，其中

$$A = K\big[T_{(j,i_k)} \,\big|\, j = 0,\dots,d, k = 0,\dots,m, \text{ with } j \neq i_k\big],$$
$$\mathfrak{a} = \big(T_{(i_j,i_k)}T_{(i_k,i_j)} - 1 \,\big|\, j,k = 0,\dots,m, \text{ with } j \neq k\big).$$

回顾一下，U_I^{rig} 是通过容许覆盖 [7, 9定义的。3.4 示例 2]

$$U_I^{\mathrm{rig}} = \bigcup_{n\geq 0} U_{I,|\pi|^n},$$

并且我们有同构 $U_{I,|\pi|^n} \cong \mathrm{Sp}(A_n/\mathfrak{a}A_n)$，对于

$$A_n = K\big\langle \pi^n T_{(j,i_k)} \,\big|\, j = 0,\dots,d, k = 0,\dots,m, \text{ with } j \neq i_k\big\rangle.$$

我们看到，由于 A 在 A_n中稠密， $A/\mathfrak{a} \hookrightarrow A_n/\mathfrak{a}A_n$ 具有稠密像。此外，Weierstrass 子域$U_{I,\ \varepsilon} \subset U_I^{\mathrm{rig}}$ 包含在某个$U_{I,\ |\pi|^n}$ 中，因此 $A/\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathcal{O}(U_{I,\ \varepsilon})$也稠密 [7, 7。3.4 命题 2]。这就解决了结构层 $\mathcal{E} = \mathcal{O}$的情形。

对于一般的 G-等变向量丛 $\mathcal{E}$ 在 $\mathbb{P}_K^d$ 上，根据引理 2.4.4，我们找到一个平凡化$\mathcal{E}^{\mathrm{alg}}|_{U_{i_0}} \cong (\mathcal{O}^{\mathrm{alg}})^{\oplus n}|_{U_{i_0}}$，对于 $n := \mathrm{rk}(\mathcal{E})$。因此，该结论由相容的同构 $\mathcal{E}^{\mathrm{alg}}(U_I) \cong \mathcal{O}^{\mathrm{alg}}(U_I)^{\oplus n}$和 $\mathcal{E}(U_{I,\varepsilon}) \cong \mathcal{O}(U_{I,\varepsilon})^{\oplus n}$得出。□

注记 2.4.2。可以具体描述仿射代数 $\mathcal{O}(U_{I,\varepsilon})$上的高斯范数 $|_|_\varepsilon$ （进而描述 $\mathcal{O}^{\mathrm{alg}}(U_I)$ 上的高斯范数），参见 [56, 引理 1.3 的证明1]:

$$\left|\sum_{\underline{k}\in\Lambda_I} a_{\underline{k}} X_0^{k_0}\cdots X_d^{k_d}\right|_\varepsilon = \sup_{\underline{k}\in\Lambda_I} |a_{\underline{k}}| \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{|\max(0,\underline{k})|}. \tag{2.16}$$

这里我们使用记号

$$\Lambda_I := \left\{ \underline{k} \in \mathbb{Z}^{d+1} \,\middle|\, \sum_{i=0}^{d} k_i = 0 \text{ , and } \forall i \in \{0,\dots,d\}\setminus I : k_i \geq 0 \right\},$$

and

$$\max(0,\underline{k}) := \big(\max(0,k_0),\dots,\max(0,k_d)\big).$$

我们将需要以下关于与覆盖 (2.14)[8] 相关的 Čech 复形的结果。

定理2.4.3。设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathbb{P}_K^d$ 上的G-等变向量丛，且 $0 < \varepsilon < 1$ 具有$\varepsilon \in |\overline{K}|$。对于与覆盖 (2.14) 相关联、计算凝聚上同调 $H^\bullet(\mathbb{P}_K^d \setminus \mathbb{P}_K^r, \mathcal{E})$ 的 Čech 复形 $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{E})$，微分

$$d^q \colon C^q(\mathcal{U},\mathcal{E}) \longrightarrow C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{E})$$

是严格连续同态，当每个 $\mathcal{E}(U_I)$ $(= \mathcal{E}^{\mathrm{alg}}(U_I))$ $\subset \mathcal{E}(U_{I,\varepsilon})$ 都赋予来自 $\mathcal{E}(U_{I,\varepsilon})$ 的巴拿赫拓扑的拓扑时，对于 $I \subset \{r+1,\dots,d\}$。

令 $\mathbf{T} \subset \mathrm{G}$ 表示对角矩阵构成的分裂极大环面。对于其特征群，我们通过选取特征，得到通常的同一识 $X(\mathbf{T}) \cong \mathbb{Z}^{d+1}$

$$\epsilon_i \colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbb{G}_m\,, \quad \mathrm{diag}(t_0,\dots,t_d) \longmapsto t_i \quad \text{, for } i = 0,\dots,d,$$

作为 $\mathbb{Z}$-基。回顾一下，对于任何 T-模 V 按照 [41, I. §2.7], 的意义，我们都有一个分解为权重空间 [41, I. §2.11]

$$V \cong \bigoplus_{\underline{\lambda}\in X(\mathbf{T})} V_{\underline{\lambda}} \quad \text{, for } V_{\underline{\lambda}} := \big\{ v \in V \,\big|\, \forall\ K\text{-algebras } R,\ \forall t \in \mathbf{T}(R) : t.(v\otimes 1) = v \otimes \underline{\lambda}(t) \big\}.$$

特别地，这是相对于 $T := \mathrm{T}(K)$ 在 V 上诱导的作用的同时特征空间分解。我们称 $v \in V$ 为 T- 齐次，如果 $v \in V_{\underline{\lambda}}$，其中 $\underline{\lambda} \in X(\mathbf{T})$。

[8]定理 2.4.3 的陈述见于 [56, 引理 1.31]的证明中。然而，其中给出的论证存在一些缺陷。

注意，对于所有$i = 0$、.....、d，开仿射子集$U_i \subset \mathbb{P}^d_K$ 在T 的作用下保持不变。因此，截面 $\mathcal{E}(U_i)$ 的 K-向量空间获得了一个 T-模结构，该结构分解为权空间

$$\mathcal{E}(U_i) = \bigoplus_{\underline{\lambda} \in X(\mathbf{T})} \mathcal{E}(U_i)_{\underline{\lambda}}. \tag{2.17}$$

对于 $x \in \mathbb{P}^d_K$，我们用 $\mathcal{E}(x) := \mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$ 表示 $\mathcal{E}$ 在 x 处的纤维，其中 $\mathfrak{m}_x$ 是局部环 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_K,x}$ 的极大理想。 K-向量空间 $\mathcal{E}(x)$ 与关联于 $\mathcal{E}$ 的几何向量丛在 x 处的纤维存在典范同构。

注意到，在 $\mathbb{P}^d_K$ 上的 T-作用的固定点为 $x_i := [0 : \ldots : 0 : 1 : 0 : \ldots : 0] \in U_i$，对于$i = 0, \ldots, d$。因此我们在 $\mathcal{E}_{x_i}$上得到T-模结构。当以通常方式将 $\mathcal{O}$ 的结构层视为G-等变层时，极大理想$\mathfrak{m}_{x_i} \subset \mathcal{O}_{x_i}$ 出于同样原因是一个 T-子模。由此可得

$$t.(se) = (t.s)(t.e) \quad \text{, for all } t \in \mathbf{T}(R),\ s \in \mathcal{O}(U_i) \otimes_K R, \text{ and } e \in \mathcal{E}(U_i) \otimes_K R, \tag{2.18}$$

that

$$t.(se) = (t.s)(t.e) \quad \text{, for all } t \in \mathbf{T}(R),\ s \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_K,x_i} \otimes_K R, \text{ and } e \in \mathcal{E}_{x_i} \otimes_K R,$$

对于所有 K-代数 R。因此， $\mathfrak{m}_{x_i}\mathcal{E}_{x_i} \subset \mathcal{E}_{x_i}$ 也是一个T-子模，并且我们在商 $\mathcal{E}(x_i)$ 上得到一个 T-模的结构。

引理 2.4.4（参见 [44, 引理 4.6]）。设 $\mathcal{E}$ 是定义在 $\mathbb{P}^d_K$ 和$i \in \{0, \ldots, d\}$上的 G-等变向量丛。对于所有开子集 $U \subset U_i$，存在 T-等变同构，它们是 $\mathcal{O}(U)$-模之间的同构

$$\mathcal{E}(U) \cong \mathcal{O}(U) \otimes_K \mathcal{E}(x_i),$$

且与限制同态相容。

证明。由 [41, I.5.16] 和 [41, II.1.10], 可知，G-等变向量丛 $\mathcal{E}$ 在开仿射子集 U_i上是平凡的。特别地，我们可以在 $\mathcal{E}(U_i)$ 中找到生成 $\mathcal{E}|_{U_i}$ 的全局截面。为此，我们可以取 $\mathcal{E}(U_i)$ 的一个 K-基 $(e_j)_{j\in J}$。对于开集 $U \subset U_i$，我们定义同态

$$\varphi_U \colon \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(U) \otimes_K \mathcal{E}(x_i)\,, \quad \sum_{j\in J} s_j e_j|_U \longmapsto \sum_{j\in J} s_j \otimes e_j(x_i) \quad \text{, for } s_j \in \mathcal{O}(U),$$

$\mathcal{O}(U)$-模之间的同态。注意， φ_U与所选的 K-基 $(e_j)_{j\in J}$ 无关。 φ_U 的逆映射定义为

$$\mathcal{O}(U) \otimes_K \mathcal{E}(x_i) \longrightarrow \mathcal{E}(U)\,, \quad s \otimes \sum_{j\in J} a_j e_j(x_i) \longmapsto \sum_{j\in J} a_j s e_j|_U \quad \text{, for } s \in \mathcal{O}(U),\ a_j \in K.$$

为证明 φ_U 是 T-等变的，取 $t \in T$、 $k \in J$ 和 $t.e_k = \sum_{j\in J} a_j e_j$ 属于 $\mathcal{E}(U_i)$，其中 $a_j \in K$。由 (2.18) 可知，对所有 $s \in \mathcal{O}(U)$,

$$\begin{aligned}\varphi_U\big(t.(se_k|_U)\big) &= \varphi_U\left(\sum_{j\in J}(t.s)a_j e_j|_U\right) = t.s \otimes \sum_{j\in J} a_j e_j(x_i)\\ &= t.\big(s \otimes e_k(x_i)\big) = t.\varphi_U\big(se_k|_U\big).\end{aligned}$$

φ_U 与限制同态的相容性是显然的。 □

对于非空的 $I \subset \{0, \ldots, d\}$，在 $\mathcal{E}(U_I)$ 上固定某些范数，使其实现局部凸拓扑将会很有帮助。回顾一下，

$$\mathcal{O}(U_{I,\varepsilon}) = \left\{ \sum_{\underline{k}\in\Lambda_I} a_{\underline{k}}\, X^{\underline{k}} \,\middle|\, |a_{\underline{k}}| \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{|\max(0,\underline{k})|} \to 0 \text{ as } |\underline{k}| \to \infty \right\},$$

其范数由 (2.16) 给出。现在我们选取一些 $i \in I$，并令 $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{E}(x_i)$ 为由权 $\underline{\lambda}_1, \dots, \underline{\lambda}_n \in X(\mathbf{T})$ 的权向量组成的 K-基。我们赋予 $\mathcal{E}(x_i)$ 由此基规定的范数，即

$$\left| \sum_{l=1}^{n} a_l \, v_l \right| := \max_{l=1}^{n} |a_l| \quad , \text{for } a_1, \dots, a_n \in K.$$

我们继续用 v_l 表示 $\mathcal{E}(U_i)$ 中在引理 2.4.4 的同构下对应于 $1 \otimes v_l$ 的元素。因此，我们有一个 $\mathcal{O}(U_i)$-模的同构

$$\mathcal{O}(U_i)^{\oplus n} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}(U_i), \quad (f_1, \dots, f_n) \longmapsto \sum_{l=1}^{n} f_l \, v_l.$$

这诱导出 $\mathcal{O}(U_{I,\varepsilon})$-模 $\mathcal{E}(U_{I,\varepsilon})$ 与 $\cong \mathcal{O}(U_{I,\varepsilon})^{\oplus n}$ 之间的同构，从而为前者赋予范数

$$\left| \sum_{l=1}^{n} f_l \, v_l \right|_\varepsilon := \sup_{\substack{l=1,\dots,n \\ \underline{k} \in \Lambda_I}} |a_{l,\underline{k}}| \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{|\max(0,\underline{k})|} \quad , \text{for } a_{l,\underline{k}} \in K \text{ with } f_l = \sum_{\underline{k} \in \Lambda_I} a_{l,\underline{k}} \, X^{\underline{k}} \in \mathcal{O}(U_{I,\varepsilon}). \tag{2.19}$$

我们在 $\mathcal{E}(U_{I,\varepsilon})$ 及其子空间 $\mathcal{E}(U_I)$ $(= \mathcal{E}^{\mathrm{alg}}(U_I))$ 上固定此范数，并从下标中省略 ε。注意，对于 $i \in I$ 或 $\mathcal{E}(x_i)$ 的权向量基的不同选择，上述构造通过 [7, 3 在 $\mathcal{E}(U_{I,\varepsilon})$ 上给出一个等价的范数。7.3 命题 3]。

作为证明定理 2.4.3 的主要步骤，我们希望证明，对于“足够大”的权 $\underline{\lambda} \in X(\mathbf{T})$，当改变 $\underline{\lambda}$ 的“极端”项时，权空间 $\mathcal{E}(U_I)_{\underline{\lambda}}$ 以一致的方式变化。为此，对于 $m \in \mathbb{N}_0$，我们定义

$$\Delta_m := \left\{ \underline{\lambda} \in X(\mathbf{T}) \cong \mathbb{Z}^{d+1} \,\middle|\, \forall j = 0, \dots, d : |\lambda_j| \leq m \right\}.$$

由于 T-模 $\mathcal{E}(x_i)$ 是有限维的，我们可以找到某个 $M \in \mathbb{N}$，使得所有 $\mathcal{E}(x_0) \dots, \mathcal{E}(x_d)$ 的权都集中在 Δ_M 中；也就是说，对于所有 $i \in \{0, \dots, d\}$ 以及所有满足 $\mathcal{E}(x_i)_{\underline{\lambda}} \neq \{0\}$ 的 $\underline{\lambda} \in X(\mathbf{T})$，都有 $\underline{\lambda} \in \Delta_M$。此外，我们设 $N := (2d+1)M + d$。

命题 2.4.5. 对于每个 $\underline{\mu} \in X(\mathbf{T})$，都存在 $\underline{\nu} \in \Delta_N$ 和 $C \in \varepsilon^{\mathbb{N}_0}$，使得对于所有非空的 $I \subset \{0, \dots, d\}$，存在一个同构

$$\varphi^I_{\underline{\mu},\underline{\nu}} \colon \mathcal{E}(U_I)_{\underline{\mu}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}(U_I)_{\underline{\nu}}$$

K-向量空间的同构，满足 $|\varphi^I_{\underline{\mu},\underline{\nu}}(v)| = C\,|v|$；对于所有 $v \in \mathcal{E}(U_{I,\varepsilon})_{\underline{\mu}}$ 都成立，并且这些同构与限制同态相容；也就是说，对于所有 $I \subset J \subset \{0, \dots, d\}$，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(U_I)_{\underline{\mu}} & \longrightarrow & \mathcal{E}(U_J)_{\underline{\mu}} \\ {\scriptstyle \varphi^I_{\underline{\mu},\underline{\nu}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^J_{\underline{\mu},\underline{\nu}}} \\ \mathcal{E}(U_I)_{\underline{\nu}} & \longrightarrow & \mathcal{E}(U_J)_{\underline{\nu}}. \end{array}$$

证明。我们对 $\|\underline{\mu}\| := \sum_{j=0}^{d} |\mu_j|$ 进行归纳法。注意，对于 $\underline{\mu} \in \Delta_N$，我们可以取 $\underline{\nu} := \underline{\mu}$, $C := 1$，以及恒等同态，从而得到该命题的断言。这也处理了基例 $\|\underline{\mu}\| = 0$。

因此，我们现在假设 $\underline{\mu} \notin \Delta_N$。令 u、$v \in \{0, \dots, d\}$，使得 μ_u 在各项 μ_0、.....、μ_d 中最大，而项 μ_v 最小。我们设 $\underline{\mu} - \alpha_{u,\,v} := \underline{\mu} - \epsilon_u + \epsilon_v$。

对于固定的 $I \subset \{0, \dots, d\}$，满足 $i \in I$，设 $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{E}(x_i)$ 是由权为 $\underline{\lambda}_1, \dots, \underline{\lambda}_n$ 的权向量组成的 K-基。于是，我们得到该权重空间的如下 K-基

$$\mathcal{E}(U_I)_{\underline{\mu}} = \bigoplus_{l \in L_{\underline{\mu},\,I}} K \cdot X^{\underline{\mu} - \underline{\lambda}_l} \, v_l$$

其中 $L_{\underline{\mu},\,I} := \left\{ l \in \{1, \dots, n\} \,\middle|\, X^{\underline{\mu} - \underline{\lambda}_l} \in \mathcal{O}(U_I) \right\}$。

引理 2.4.6. 对于 $l \in \{1, \dots, n\}$，有

$$X^{\underline{\mu}-\underline{\lambda}_l} \in \mathcal{O}(U_I) \quad \textit{if and only if} \quad X^{(\underline{\mu}-\alpha_{u,v})-\underline{\lambda}_l} \in \mathcal{O}(U_I).$$

若情况如此，则对于某个 $l \in \{1, \dots, n\}$，我们还有 $\mu_u > M+1$ 和 $\mu_v < -(M+1)$，因此特别有 $u \neq v$。

证明。我们首先注意到，$X^{\underline{\mu}-\underline{\lambda}_l} \in \mathcal{O}(U_I)$ 当且仅当 $\sum_{j=0}^{d} \mu_j - \lambda_{l,\,j} = 0$ 并且对于所有 $j \in \{0, \dots, d\} \setminus I$，都有 $\mu_j - \lambda_{l,\,j} \geq 0$。对于 $X^{(\underline{\mu}-\alpha_{u,v})-\underline{\lambda}_l}$，相应的结论同样成立。因此，要证明所述等价关系，只需关注 X_u 和 X_v的指数。

由于 $\underline{\mu} \notin \Delta_N$，存在 $j \in \{0, \dots, d\}$ 使得 $|\mu_j| > N$。我们区分两种情况： $\mu_j > 0$ 和 $\mu_j < 0$。若 $\mu_j > 0$，则由μ_u的极大性可得 $\mu_u > N \geq M+1$ 。利用 $|\lambda_{l,\,u}| \leq M$ 我们得到

$$\mu_u - 1 - \lambda_{l,u} > N - 1 - M \geq 0$$

并且 $\mu_u - \lambda_{l,u} \geq 0$，因此在这种情况下， X_u 的指数并不构成障碍。关于 X_v 的指数，由于 $(\underline{\mu} - \alpha_{u,v})_v - \lambda_{l,v} \geq \mu_v - \lambda_{l,v}$，我们发现，若 $X^{\underline{\mu}-\underline{\lambda}_l} \in \mathcal{O}(U_I)$，则 $X^{(\underline{\mu}-\alpha_{u,v})-\underline{\lambda}_l} \in \mathcal{O}(U_I)$。反过来，假设 $X^{(\underline{\mu}-\alpha_{u,v})-\underline{\lambda}_l} \in \mathcal{O}(U_I)$，特别地$\sum_{j=0}^{d} \big((\underline{\mu} - \alpha_{u,v})_j - \lambda_{l,j}\big) = 0$ 且 $(\underline{\mu} - \alpha_{u,v})_v - \lambda_{l,\,v} \geq 0$。我们计算

$$\left|\sum_{j=0}^{d} \mu_j\right| = \left|\sum_{j=0}^{d} (\mu_j - \lambda_{l,j}) + \sum_{j=0}^{d} \lambda_{l,j}\right| = \left|\underbrace{\sum_{j=0}^{d} \big((\underline{\mu} - \alpha_{u,v})_j - \lambda_{l,j}\big)}_{=0} + \sum_{j=0}^{d} \lambda_{l,j}\right|$$

$$= \left|\sum_{j=0}^{d} \lambda_{l,j}\right| \leq \sum_{j=0}^{d} |\lambda_{l,j}| \leq (d+1)M.$$

Then

$$(d+1)M \geq \left|\sum_{j=0}^{d} \mu_j\right| = \left|\mu_u + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq u}}^{d} \mu_j\right|$$

再结合 $\mu_u > N = (2d+1)M + d$，可推出 $\sum_{j=0}^{d} \mu_j < -d(M+1)$。因此，存在$_{j \neq u}$ $j' \in \{0, \dots, d\}$、 $j' \neq u$，使得 $\mu_{j'} < -(M+1)$。由 μ_v的极小性可知， $\mu_v < -(M+1)$。但利用 $|\lambda_{l,v}| \leq M$，我们得到

$$(\underline{\mu} - \alpha_{u,v})_v - \lambda_{l,v} = \mu_v + 1 - \lambda_{l,v} < -(M+1) + 1 + M = 0.$$

因此，只有当 $v \in I$ 时， $X^{(\underline{\mu}-\alpha_{u,v})-\underline{\lambda}_l} \in \mathcal{O}(U_I)$ 才可能出现。我们还得出 $X^{\underline{\mu}-\underline{\lambda}_l} \in \mathcal{O}(U_I)$，从而完成了此情形的证明。

现在我们考虑 $\mu_j < 0$ 的情形。由 μ_v的极小性可知， $\mu_v < -N \leq -(M+1)$。与之前一样，我们有

$$(d+1)M \geq \left|\sum_{j=0}^{d} \mu_j\right| = \left|\mu_v + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq v}}^{d} \mu_j\right|.$$

由此以及 $\mu_v < -N$，我们得出存在 $j' \in \{0, \dots, d\}$、 $j' \neq v$，使得 $\mu_{j'} > M+1$。由于 μ_u 是极大的，因此 $\mu_u > M+1$ 也成立。因此

$$(\underline{\mu} - \alpha_{u,v})_u - \lambda_{l,u} = \mu_u - 1 - \lambda_{l,u} > (M+1) - 1 - M = 0,$$

并且还有 $\mu_u - \lambda_{l,u} \geq 0$。这表明在此情形下， X_u 的指数并不构成障碍。对于 X_v 的指数，我们计算

$$(\underline{\mu} - \alpha_{u,v})_v - \lambda_{l,v} = \mu_v + 1 - \lambda_{l,v} < -N + 1 + M < 0,$$

以及 $\mu_v - \lambda_{l,v} < 0$。因此， $X^{\underline{\mu}-\underline{\lambda}_l} \in \mathcal{O}(U_I)$ 或 $X^{(\underline{\mu}-\alpha_{u,v})-\underline{\lambda}_l} \in \mathcal{O}(U_I)$ 中的任一条件都蕴含 $v \in I$。这证明了 $\mu_j < 0$ 情形下的断言。□

利用上述引理，我们看到

$$\mathcal{E}(U_I)_{\underline{\mu}-\alpha_{u,v}} = \bigoplus_{l\in L_{\underline{\mu},I}} K\cdot X^{(\underline{\mu}-\alpha_{u,v})-\underline{\lambda}_l}\, v_l,$$

并定义以下 K-向量空间同构

$$\varphi^I_{\underline{\mu},\underline{\mu}-\alpha_{u,v}} \colon \mathcal{E}(U_I)_{\underline{\mu}} \longrightarrow \mathcal{E}(U_I)_{\underline{\mu}-\alpha_{u,v}}\,, \quad X^{\underline{\mu}-\underline{\lambda}_l}\, v_l \longmapsto X^{(\underline{\mu}-\alpha_{u,v})-\underline{\lambda}_l}\, v_l.$$

对于 $l\in L_{\underline{\mu},\,I}$，由 $\mu_u > M+1$、$\mu_v < -(M+1)$ 以及 $\underline{\lambda}_l\in\Delta_M$ 可得

$$\begin{aligned} (\underline{\mu}-\alpha_{u,v})_u - \lambda_{l,u} &\geq 0, & \mu_u-\lambda_{l,u}&\geq 0,\\ (\underline{\mu}-\alpha_{u,v})_v - \lambda_{l,v} &\leq 0, & \mu_v-\lambda_{l,v}&\leq 0. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \max\big(0,(\underline{\mu}-\alpha_{u,v})_u-\lambda_{l,u}\big) &= \mu_u-1-\lambda_{l,u} = \max\big(0,\mu_u-\lambda_{l,u}\big)-1,\\ \max\big(0,(\underline{\mu}-\alpha_{u,v})_v-\lambda_{l,v}\big) &= 0 \qquad\qquad\quad = \max\big(0,\mu_v-\lambda_{l,v}\big), \end{aligned}$$

由此得出，

$$\begin{aligned} \big|X^{(\underline{\mu}-\alpha_{u,v})-\underline{\lambda}_l}\, v_l\big| &= \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\sum_{j=0}^d \max\left(0,(\underline{\mu}-\alpha_{u,v})_j-\lambda_{l,j}\right)}\\ &= \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\left(\sum_{j=0}^d \max(0,\mu_j-\lambda_{l,j})\right)-1} = \varepsilon\,\big|X^{\underline{\mu}-\underline{\lambda}_l}\, v_l\big|. \end{aligned}$$

因此我们有 $|\varphi^I_{\underline{\mu},\underline{\mu}-\alpha_{u,v}}(v)| = \varepsilon\,|v|$，对所有 $v\in\mathcal{E}(U_I)_{\underline{\mu}}$。

接下来我们验证上述同构族 $\varphi^I := \varphi^I_{\underline{\mu},\underline{\mu}-\alpha_{u,v}}$ 与限制映射相容。为此，考虑 $I\subset J\subset\{0,\dots,d\}$，其中 $i\in I$ 且 $j\in J$。令

$$\mathcal{E}(U_I)=\bigoplus_{l=1}^n \mathcal{O}(U_I)\, v_l \quad\text{and}\quad \mathcal{E}(U_J)=\bigoplus_{k=1}^n \mathcal{O}(U_J)\, w_k,$$

对于由 v_1、.....、v_n 组成的 $\mathcal{E}(x_i)$ 的权向量 K-基，其权为 $\underline{\lambda}_1$、.....、$\underline{\lambda}_n$；以及由 w_1、.....、w_n 组成的 $\mathcal{E}(x_j)$ 的权向量 K-基，其权为 $\underline{\kappa}_1$、.....、$\underline{\kappa}_n$，分别给出同构 φ^I 和 φ^J。令 $\mathrm{res}:\ \mathcal{E}(U_I)\ \hookrightarrow\ \mathcal{E}(U_J)$ 表示限制映射，它是 $\mathcal{O}(U_I)$-线性且单射的。此外，存在 $a_{l,\,k}\in K$，使得

$$\mathrm{res}(v_l)=\sum_{k=1}^n a_{l,k}\, X^{\underline{\lambda}_l-\underline{\kappa}_k}\, w_k \quad \text{, for all } l=1,\dots,n,$$

因为 $\mathrm{res}(v_l)\in\mathcal{E}(U_J)$ 的权为 $\underline{\lambda}_l$。对于满足 $X^{\underline{\mu}-\underline{\lambda}_l}\in\mathcal{O}(U_I)$ 的 $l\in\{1,\dots,n\}$，我们现在计算

$$\begin{aligned} \mathrm{res}\Big(\varphi^I\big(X^{\underline{\mu}-\underline{\lambda}_l}\, v_l\big)\Big) &= \mathrm{res}\Big(X^{(\underline{\mu}-\alpha_{u,v})-\underline{\lambda}_l}\, v_l\Big) = X^{(\underline{\mu}-\alpha_{u,v})-\underline{\lambda}_l}\,\mathrm{res}(v_l)\\ &= X^{(\underline{\mu}-\alpha_{u,v})-\underline{\lambda}_l}\sum_{k=1}^n a_{l,k}\, X^{\underline{\lambda}_l-\underline{\kappa}_k}\, w_k = \sum_{k=1}^n a_{l,k}\, X^{(\underline{\mu}-\alpha_{u,v})-\underline{\kappa}_k}\, w_k\\ &= \varphi^J\Big(\sum_{k=1}^n a_{l,k}\, X^{\underline{\mu}-\underline{\kappa}_k}\, w_k\Big) = \varphi^J\Big(X^{\underline{\mu}-\underline{\lambda}_l}\sum_{k=1}^n a_{l,k}\, X^{\underline{\lambda}_l-\underline{\kappa}_k}\, w_k\Big)\\ &= \varphi^J\big(X^{\underline{\mu}-\underline{\lambda}_l}\,\mathrm{res}(v_l)\big) = \varphi^J\Big(\mathrm{res}\big(X^{\underline{\mu}-\underline{\lambda}_l}\, v_l\big)\Big) \end{aligned}$$

which shows the compatibility for $I\subset J$.

最后，我们想应用归纳假设。在对于所有满足 $I\neq\emptyset$ 的 $I\subset\{0,\dots,d\}$，集合 $L_{\underline{\mu},\,I}$ 均为空的情况下，我们发现，对于所有这类 I，都有 $\mathcal{E}(U_I)_{\underline{\mu}}=\{0\}$。例如，我们可以取 $\underline{\nu}:=(M+1,\dots,M+1)\in\Delta_N$，并看到，对于所有这类 I 以及所有 $l=1,\dots,n$，都有 $\underline{\nu}-\underline{\mu}_l\notin\Lambda_I$。由此可得 $\mathcal{E}(U_I)_{\underline{\nu}}=\{0\}$，从而轻而易举地得到所需的同构。

另一方面，若存在某个满足 $I \neq \emptyset$ 的 $I \subset \{0,\dots,d\}$，使得 $L_{\underline{\mu},\, I}$ 非空，则引理 2.4.6 的第二个断言表明

$$\|\underline{\mu} - \alpha_{u,v}\| = |\mu_u - 1| + |\mu_v + 1| + \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq u,v}}^{d} |\mu_j| = (\mu_u - 1) - (\mu_v + 1) + \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq u,v}}^{d} |\mu_j| = \|\underline{\mu}\| - 2.$$

将归纳法假设应用于$\underline{\mu} - \alpha_{u,\, v}$，我们得到 $\underline{\nu} \in \Delta_N$ 以及同构- 映射族 $\varphi^I_{\underline{\mu}-\alpha_{u,\, v},\, \underline{\nu}}$，对于 $I \subset \{0,\dots,d\}$，如所规定。然后，通过取复合映射，该陈述对 $\underline{\mu}$ 成立

$$\varphi^I_{\underline{\mu},\underline{\nu}} := \varphi^I_{\underline{\mu}-\alpha_{u,v},\underline{\nu}} \circ \varphi^I_{\underline{\mu},\underline{\mu}-\alpha_{u,v}}.$$

□

定理 2.4.3 的证明。回顾一下，在 (2.19) 中，对于每个非空的 $I \subset \{0,\dots,d\}$，我们在 $\mathcal{E}(U_I)$ 上固定了一个范数。这赋予了 $q \geq 0$ 的 q 阶 ˇCech 上链空间，

$$C^q(\mathcal{U},\mathcal{E}) = \bigoplus_{(i_0,\dots,i_q)\in\{r+1,\dots,d\}^{q+1}} \mathcal{E}\big(U_{\{i_0,\dots,i_q\}}\big)$$

并且也赋予了范数。我们还有 $C^q(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 的权空间分解。

$$C^q(\mathcal{U},\mathcal{E})_{\underline{\lambda}} = \bigoplus_{(i_0,\dots,i_q)\in\{r+1,\dots,d\}^{q+1}} \mathcal{E}\big(U_{\{i_0,\dots,i_q\}}\big)_{\underline{\lambda}} \quad \text{, for } \underline{\lambda} \in X(\mathbf{T}),$$

在诱导的 T-作用下。注意，如果我们有 $f \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 的权分解，则由 (2.19) 可知

$$|f| = \sup_{\underline{\lambda}\in X(\mathbf{T})} |f_\lambda| \quad \text{, for } f = \sum_{\underline{\lambda}\in X(\mathbf{T})} f_{\underline{\lambda}}, \text{ with } f_{\underline{\lambda}} \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{E})_{\underline{\lambda}}.$$

由于限制映射 $\mathrm{res}_{I,J}\colon \mathcal{E}(U_I) \hookrightarrow \mathcal{E}(U_J)$ 对于 $I \subset J \subset \{r+1,\dots,d\}$ 都是 T-等变的，因此微分也是如此

$$d^q\colon C^q(\mathcal{U},\mathcal{E}) \longrightarrow C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{E}),$$

$$\big(f_{(i_0,\dots,i_q)}\big)_{(i_0,\dots,i_q)} \longmapsto \Big(\sum_{k=0}^{q+1}(-1)^k \mathrm{res}_{I,J}\big(f_{(j_0,\dots,\widehat{j_k},\dots,j_{q+1})}\big)\Big)_{(j_0,\dots,j_{q+1})},$$

ˇ的 Čech 复形。因此，我们可以将 d^q 限制到各个权空间

$$d^q_{\underline{\lambda}}\colon C^q(\mathcal{U},\mathcal{E})_{\underline{\lambda}} \longrightarrow C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{E})_{\underline{\lambda}} \quad \text{, for } \underline{\lambda} \in X(\mathbf{T}).$$

现在令 $N \in \mathbb{N}$ 如命题 2.4.5 之前所定义，并考虑

$$d^q_N\colon \bigoplus_{\underline{\lambda}\in\Delta_N} C^q(\mathcal{U},\mathcal{E})_{\underline{\lambda}} \longrightarrow \bigoplus_{\underline{\lambda}\in\Delta_N} C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{E})_{\underline{\lambda}}, \quad \big(f_{\underline{\lambda}}\big)_{\underline{\lambda}\in\Delta_N} \longmapsto \big(d^q_{\underline{\lambda}}(f_{\underline{\lambda}})\big)_{\underline{\lambda}\in\Delta_N}.$$

由于该同态的值域是有限维的 K-向量空间，根据[11, I.2.3. 推论]， d^q_N 是严格的。因此存在 $R > 0$ 使得

$$B_R(0) \cap \mathrm{Im}(d^q_N) \subset d^q_N\big(B_1(0)\big) \tag{2.20}$$

其中 $B_R(0)$ 和 $B_1(0)$ 分别表示半径为 R 和 1 的“闭”球。

要证明 d^q 本身是严格的，只需证明

$$B_R(0) \cap \mathrm{Im}(d^q) \subset d^q\big(B_1(0)\big) \tag{2.21}$$

通过缩放。为此，令 $g \in$ 像$(d^q) \cap B_R(0)$，并令 $g = \sum_{\underline{\lambda}\in X(\mathbf{T})} g_{\underline{\lambda}}$为一个权分解，其中 $g_{\underline{\lambda}} \in C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{E})_{\underline{\lambda}}$。由于 $|g| = \sup_{\underline{\lambda}\in X(\mathbf{T})} |g_{\underline{\lambda}}|$，对于所有 $\underline{\lambda} \in X(\mathbf{T})$，我们都有 $|g_{\underline{\lambda}}| \leq R$。此外，由于 d^q 是 T-等变的，我们还有 $g_{\underline{\lambda}} \in$ 像$(d^q_{\underline{\lambda}})$。因此，对于 $\underline{\lambda} \in \Delta_N$，由(2.20)可知，存在 $f_{\underline{\lambda}} \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{E})_{\underline{\lambda}}$，使得 $|f_{\underline{\lambda}}| \leq 1$ 且 $d^q_{\underline{\lambda}}(f_{\underline{\lambda}}) = g_{\underline{\lambda}}$。

对于 $\underline{\lambda} \notin \Delta_N$，依次应用命题 2.4.5，以找到 $\underline{\nu} \in \Delta_N$、 $C \in \varepsilon^{\mathbb{N}_0}$以及一族相容的同构

$$\varphi^I_{\underline{\lambda},\underline{\nu}} \colon \mathcal{E}(U_I)_{\underline{\lambda}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}(U_I)_{\underline{\nu}} \quad \text{, for all non-empty } I \subset \{0,\dots,d\},$$

使得 $|\varphi^I_{\underline{\lambda},\,\underline{\nu}}(v)| = C\,|v|$，对所有 $v \in \mathcal{E}(U_I)_{\underline{\lambda}}$ 均成立。我们将这些同构取直和，得到同构

$$\varphi^q_{\underline{\lambda},\underline{\nu}} \colon C^q(\mathcal{U},\mathcal{E})_{\underline{\lambda}} \xrightarrow{\cong} C^q(\mathcal{U},\mathcal{E})_{\underline{\nu}} \quad \text{, for all } q \geq 0,$$

使得 $|\varphi^q_{\underline{\lambda},\,\underline{\nu}}(v)| = C\,|v|$，对所有 $v \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{E})_{\underline{\lambda}}$ 均成立。此外，$\varphi^I_{\underline{\lambda},\,\underline{\nu}}$ 与典范限制映射的相容性意味着图表

$$\begin{array}{ccc} C^q(\mathcal{U},\mathcal{E})_{\underline{\lambda}} & \xrightarrow{d^q_{\underline{\lambda}}} & C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{E})_{\underline{\lambda}} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi^q_{\underline{\lambda},\underline{\nu}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi^{q+1}_{\underline{\lambda},\underline{\nu}}} \\ C^q(\mathcal{U},\mathcal{E})_{\underline{\nu}} & \xrightarrow{d^q_{\underline{\nu}}} & C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{E})_{\underline{\nu}} \end{array}$$

该图表交换。由于 $\varepsilon \in |\overline{K}|$，经过对 K 作有限扩张的标量扩张后，我们不妨设 $\varepsilon = |a|$，其中 $a \in K$。然后，将 (2.20) 乘以 a 的适当次幂，并限制到相对于原来的 K 有理的向量，我们得到

$$B_{CR}(0) \cap \mathrm{Im}(d^q_N) \subset d^q_N\big(B_C(0)\big).$$

由于我们有 $|\varphi^{q+1}_{\underline{\lambda}\,\underline{\nu}}(g_{\underline{\lambda}})| = C\,|g_{\underline{\lambda}}| \leq CR$，因此可找到 $h \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{E})_{\underline{\nu}}$，使得 $|h| \leq C$ 且 $d^q_{\underline{\nu}}(h) = \varphi^{q+1}_{\underline{\lambda}\,\underline{\nu}}(g_{\underline{\lambda}})$。那么 $f_{\underline{\lambda}} := \big(\varphi^q_{\underline{\lambda},\,\underline{\nu}}\big)^{-1}(h)$ 满足 $d^q_{\underline{\lambda}}(f_{\underline{\lambda}}) = g_{\underline{\lambda}}$ 且 $|f_{\underline{\lambda}}| = C^{-1}|h| \leq 1$。

总之，对于每个 $\underline{\lambda} \in X(\mathbf{T})$，我们得到一个元素 $f_{\underline{\lambda}} \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{E})_{\underline{\lambda}}$，使得 $d^q_{\underline{\lambda}}(f_{\underline{\lambda}}) = g_{\underline{\lambda}}$且 $|f_{\underline{\lambda}}| \leq 1$。将它们相加

$$f := \sum_{\underline{\lambda} \in X(\mathbf{T})} f_{\underline{\lambda}}$$

我们发现 $d^q(f) = g$，并且 $|f| = \sup_{\underline{\lambda} \in X(\mathbf{T})} |f_{\underline{\lambda}}| \leq 1$。这表明 (2.21) 成立，因此 d^q具有严格性。□

2.5. 舒伯特簇管状邻域的局部上同调。我们先固定一些记号。对于 $r \in \{0,\dots,d-1\}$ 和 $0 < \varepsilon < 1$ 满足 $\varepsilon \in |\overline{K}|$的情形，定义

$$\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}) := \mathrm{Ker}\Big(H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}) \longrightarrow H^i(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})\Big)$$

并赋予其子空间拓扑。我们以类似方式定义 $\widetilde{H}^i_{(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$、$\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$，以及$\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$。

引理 2.5.1. 设 $0 < \varepsilon < \varepsilon' < 1$ with $\varepsilon,\varepsilon' \in |\overline{K}|$, and $I \subset \{0,\dots,d\}$. 则过渡映射

$$\mathcal{E}(U_{I,\varepsilon}) \longrightarrow \mathcal{E}(U_{I,\varepsilon'})$$

是 K-巴拿赫空间之间的一个紧同态，且像稠密。

证明. 若 $I = \emptyset$，则有 $U_{I,\,\varepsilon} = U_{I,\,\varepsilon'} = \mathbb{P}^d_K$ 且 $\mathcal{E}(\mathbb{P}^d_K)$ 是一个有限维 K-向量空间。因此，根据引理 16.4]，所讨论的同态是紧的。

现在假设 $I \neq \emptyset$。这里的方法与引理 2.3.3 的证明类似。对于$I = \{i_0,\dots,i_m\}$，我们考虑仿射刚性空间 K-代数

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &:= K\big\langle \varepsilon T_{(j,i_k)} \,\big|\, j = 0,\dots,d, k = 0,\dots,m, \text{ with } j \neq i_k \big\rangle \\ &= \left\{ \sum_{\underline{\mu} \in \mathbb{N}_0^{d(m+1)}} a_{\underline{\mu}}\,\underline{T}^{\underline{\mu}} \in K[\![\underline{T}]\!] \;\middle|\; |a_{\underline{\mu}}| \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{|\underline{\mu}|} \to 0 \text{ as } |\underline{\mu}| \to \infty \right\}, \end{aligned}$$

参见 [7, 6.1.5 定理 4]。与引理 2.4.1 的证明类似，我们有 $U_{I,\ \varepsilon}=\mathrm{Sp}(A_\varepsilon/\mathfrak{a}A_\varepsilon)$，对于理想

$$\mathfrak{a}=\big(T_{(i_j,i_k)}T_{(i_k,i_j)}-1\,\big|\,j,k=0,\dots,m,\text{ with }j\neq k\big).$$

对 $U_{I,\varepsilon'}$ 也作类似定义，我们得到一个仿射刚性空间 K-代数的交换图

$$\begin{array}{ccc} A_\varepsilon & \xhookrightarrow{\ \psi\ } & A_{\varepsilon'} \\ {\scriptstyle\tau}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\tau'} \\ A_\varepsilon/\mathfrak{a}A_\varepsilon & \xrightarrow{\ \overline{\psi}\ } & A_{\varepsilon'}/\mathfrak{a}A_{\varepsilon'} \end{array}$$

其中竖直映射是严格满同态，且 $\overline{\psi}$ 是过渡同态 $\mathcal{O}(U_{I,\varepsilon})\to\mathcal{O}(U_{I,\varepsilon'})$。我们声称，$\overline{\psi}$ 是仿射刚性空间 K-代数的内同态，其含义见 [5, 定义 2.5.1]。事实上，对于 $T=T_{(j,i_k)}\in A_\varepsilon$，我们有：

$$\sup_{x\in U_{I,\varepsilon'}}|\overline{\psi}(\tau(T))(x)|=\sup_{x\in U_{I,\varepsilon'}}|\tau'(\psi(T))(x)|\le|\psi(T)|_{\sup}=|\psi(T)|_{A_{\varepsilon'}}=\frac{1}{\varepsilon'}<\frac{1}{\varepsilon}.$$

由 [70, §1 引理 5] 可知，$\overline{\psi}$ 是局部凸 K-向量空间之间的紧同态。

对于一般的 G-等变向量丛 $\mathcal{E}$，我们也可以再次应用 Kiehl 定理 [7, 9.4.3 定理 3]，得到严格满同态 $\mathcal{O}(U_{I,\varepsilon})^{\oplus k}\twoheadrightarrow\mathcal{E}(U_{I,\varepsilon})$ 和 $\mathcal{O}(U_{I,\varepsilon'})^{\oplus k}\twoheadrightarrow\mathcal{E}(U_{I,\varepsilon'})$，它们彼此相容，其中某个 $k\in\mathbb{N}_0$。然后将引理 A.3 (ii) 和 (iii) 应用于

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(U_{I,\varepsilon})^{\oplus k} & \xrightarrow{\ \overline{\psi}^{\oplus k}\ } & \mathcal{O}(U_{I,\varepsilon'})^{\oplus k} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{E}(U_{I,\varepsilon}) & \longrightarrow & \mathcal{E}(U_{I,\varepsilon'}) \end{array}$$

证明 $\mathcal{E}(U_{I,\ \varepsilon})\to\mathcal{E}(U_{I,\ \varepsilon'})$ 是紧的。

最后，由引理 2.4.1 可知，过渡映射的像是稠密的。 □

命题 2.5.2. 设 $0<\varepsilon<1$ with $\varepsilon\in|\overline{K}|$. 设 $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 是某个严格递减序列，满足 $\varepsilon_m\in|\overline{K}|$、$\varepsilon<\varepsilon_m<1$ 和 $\varepsilon_m\to\varepsilon$. 那么， K-Fr´echet 空间 $H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$ 是下列 K-巴拿赫空间的射影极限

$$H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})\cong\varprojlim_{\varepsilon_m\searrow\varepsilon}H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)^-}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}).\tag{2.22}$$

过渡同态

$$H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)^-}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})\longrightarrow H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_n)^-}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})\quad,\ for\ \varepsilon_m<\varepsilon_n,$$

它们由嵌入 $\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)^-\subset\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_n)^-$ 诱导，且是紧的并具有稠密像，因此 $H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$ 是核的。此外，代数簇 $\mathbb{P}^d_K$ 的局部上同调群 $H^i_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$ 构成 $H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$ 的稠密子空间。

The analogous statements for $\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$ *hold as well.*

证明。我们首先关注与 $\mathbb{P}^r_K$的“闭”邻域相关联的 K-巴拿赫空间。目前我们固定 $0<\varepsilon<1$，使其满足 $\varepsilon\in|\overline{K}|$，并考虑与覆盖(2.12)相关联的Čech复形 $C^\bullet(\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{E})$，该复形计算上同调群 $H^i(\mathbb{P}^d_K\setminus\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-,\mathcal{E})$。对于此 Čech 复形，我们令

$$Z^i(\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{E}):=\mathrm{Ker}\big(C^i(\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{E})\xrightarrow{d^i_\varepsilon}C^{i+1}(\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{E})\big),$$

$$B^i(\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{E}):=\mathrm{Im}\big(C^{i-1}(\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{E})\xrightarrow{d^{i-1}_\varepsilon}C^i(\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{E})\big)$$

ˇ ˇ 分别表示 i阶 Čech 上循环（Čech cocycles）空间和 i 阶 Čech 上边界空间。 We

ˇ 用类似的记号表示后续将出现的 Čech 复形。

回顾引理 2.4.1， 上链 $C^i(\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{E})$ 具有 K-巴拿赫空间的结构，而由代数截面构成的上链 $C^i(\mathcal{U},\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})$ 是其中的稠密子空间。首先，我们要说明诱导在 $H^i(\mathbb{P}^d_K\setminus\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-,\mathcal{E})$,$\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$ 和 $H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$ 上的局部凸拓扑也赋予这些空间 K-巴拿赫空间的结构，并且它们对应的“代数”版本 $H^i(\mathbb{P}^d_K\setminus\mathbb{P}^r_K,\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})$， $\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})$ 和$H^i_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})$ 分别嵌入为稠密子空间。

为此，我们考虑带有由 $C^i(\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{E})$ 诱导的子空间拓扑的 $C^i(\mathcal{U},\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})$，使得 $C^i(\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{E})$ 是 $C^i(\mathcal{U},\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})$ 的完备化。我们将所有“代数”项赋予由 $C^i(\mathcal{U},\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})$ 诱导的拓扑，并将所有“解析”项赋予由$C^i(\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{E})$ 诱导的拓扑。

由定理 2.4.3 可知，微分 $d^i\colon C^i(\mathcal{U},\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})\to C^{i+1}(\mathcal{U},\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})$ 是严格的，而微分 $d^i_\varepsilon\colon C^i(\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{E})\to C^{i+1}(\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{E})$ 是 d^i 的完备化。因此 [7, 1.1.9 命题 5] 表明， $Z^i(\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{E})$ 是 $Z^i(\mathcal{U},\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})$ 的完备化，而 $B^{i+1}(\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{E})$ 是 $B^{i+1}(\mathcal{U},\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})$ 的完备化。此外，注意到根据 [7, 1.1.9 命题 4], ， d^i_ε 是严格的；也就是说， $B^{i+1}(\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{E})$ 是 $C^{i+1}(\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{E})$ 的闭子空间，因此 $H^i(\mathbb{P}^d_K\setminus\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-,\mathcal{E})$ 是一个 K-巴拿赫空间。

我们还有短严格正合序列

$$0\longrightarrow B^i(\mathcal{U},\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})\longrightarrow Z^i(\mathcal{U},\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})\longrightarrow H^i(\mathbb{P}^d_K\setminus\mathbb{P}^r_K,\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})\longrightarrow 0.$$

该序列的完备化给出短严格正合序列 [7, 1。1.9 推论 6]

$$0\longrightarrow B^i(\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{E})\longrightarrow Z^i(\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{E})\longrightarrow H^i(\mathbb{P}^d_K\setminus\mathbb{P}^r_K,\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})\widehat{\ }\longrightarrow 0.$$

因此，由完备化的泛性质得到的映射 $H^i(\mathbb{P}^d_K\setminus\mathbb{P}^r_K,\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})\widehat{\ }\to H^i(\mathbb{P}^d_K\setminus\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-,\mathcal{E})$ 是拓扑同构，而 $H^i(\mathbb{P}^d_K\setminus\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-,\mathcal{E})$ 是 $H^i(\mathbb{P}^d_K\setminus\mathbb{P}^r_K,\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})$ 的完备化。

Now 回顾局部上同调的长正合列 ogy

$$\begin{aligned}\ldots\longrightarrow H^{i-1}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})\xrightarrow{\alpha^{i-1}}H^{i-1}(\mathbb{P}^d_K\setminus\mathbb{P}^r_K,\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})\\ \xrightarrow{\partial^{i-1}}H^i_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})\xrightarrow{\beta^i}H^i(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})\longrightarrow\ldots.\end{aligned}\tag{2.23}$$

我们在局部上同调群 $H^i_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})$ 上赋予关于 ∂^{i-1} 的局部凸终拓扑。如注记 2.1.1 所示，这使得 ∂^{i-1} 严格且 β^i 连续。此外，同态 α^i 和 β^i 也是严格的，因为 $H^i(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})$ 是有限维的局部凸 K-向量空间 [59, 推论 3.4。25]。对于 $\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-\subset\mathbb{P}^d_K$，也有类似的情形。

由这个长严格正合序列，我们得到如下各行均严格正合的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}0&\longrightarrow&\mathrm{Ker}(\alpha^{i-1})&\longrightarrow&H^{i-1}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})&\xrightarrow{\alpha^{i-1}}&\mathrm{Im}(\alpha^{i-1})&\longrightarrow&0\\ &&\downarrow&&\|&&\downarrow&&\\ 0&\longrightarrow&\mathrm{Ker}(\alpha^{i-1}_\varepsilon)&\longrightarrow&H^{i-1}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})&\xrightarrow{\alpha^{i-1}_\varepsilon}&\mathrm{Im}(\alpha^{i-1}_\varepsilon)&\longrightarrow&0.\end{array}\tag{2.24}$$

由于 α^{i-1}_ε是严格满同态，因此 $\mathrm{Im}(\alpha^{i-1})\to\mathrm{Im}(\alpha^{i-1}_\varepsilon)$ 是严格满同态 [76, 命题 1.1.8]。

由 (2.23) 我们还得到交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}0&\longrightarrow&\mathrm{Im}(\alpha^{i-1})&\longrightarrow&H^{i-1}(\mathbb{P}^d_K\setminus\mathbb{P}^r_K,\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})&\xrightarrow{\partial^{i-1}}&\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}^{\mathrm{alg}})&\longrightarrow&0\\ &&\downarrow&&\downarrow&&\downarrow&&\\ 0&\longrightarrow&\mathrm{Im}(\alpha^{i-1}_\varepsilon)&\longrightarrow&H^{i-1}(\mathbb{P}^d_K\setminus\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-,\mathcal{E})&\xrightarrow{\partial^{i-1}_\varepsilon}&\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})&\longrightarrow&0\end{array}\tag{2.25}$$

其各行均严格正合。这里我们利用了 (2.23) 的正合性，得以识别 $\mathrm{Ker}(\partial^{i-1}) = \mathrm{Im}(\alpha^{i-1})$ 和 $\mathrm{Im}(\partial^{i-1}) = \mathrm{Ker}(\beta^i) =: \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}^{\mathrm{alg}})$，对“解析”项也同样如此。复合映射 $\mathrm{Im}(\alpha^{i-1}) \to H^{i-1}(\mathbb{P}^d_K \setminus \mathbb{P}^r_K, \mathcal{E}^{\mathrm{alg}}) \to H^{i-1}(\mathbb{P}^d_K \setminus \mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-, \mathcal{E})$ 是一个严格单同态 [76, Prop. 1.1.7]。因此，$\mathrm{Im}(\alpha^{i-1}) \to \mathrm{Im}(\alpha^{i-1}_\varepsilon)$ 也是一个严格单同态 [76, Prop. 1.1.8], ，由此可得 $\mathrm{Im}(\alpha^{i-1}) \cong \mathrm{Im}(\alpha^{i-1}_\varepsilon)$。对 (2.25) 的第一行取完备化，并采用与之前类似的推理，可得 $\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 是 $\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}^{\mathrm{alg}})$ 的完备化。

由(2.24) 我们还可以通过应用适当版本的蛇引理A.13得出，$\mathrm{核}(\alpha^{i-1}) = \mathrm{核}(\alpha^{i-1}_\varepsilon)$。由于根据 (2.23) 的正合性，$\mathrm{像}(\beta^i) = \mathrm{核}(\alpha^i)$ 且 $\mathrm{像}(\beta^i_\varepsilon) = \mathrm{核}(\alpha^i_\varepsilon)$，我们得到短严格正合列

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}^{\mathrm{alg}}) \longrightarrow H^i_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}^{\mathrm{alg}}) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha^i) \longrightarrow 0.$$

对该序列作完备化后，得到如下具有严格正合行的交换图 [7, 1.1.9 Prop. 4, Cor. 6]

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}^{\mathrm{alg}})\widehat{\ } & \longrightarrow & H^i_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}^{\mathrm{alg}})\widehat{\ } & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\alpha^i) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow\cong & & \downarrow & & \downarrow\cong & & \\ 0 & \longrightarrow & \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) & \longrightarrow & H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\alpha^i_\varepsilon) & \longrightarrow & 0. \end{array} \tag{2.26}$$

通过蛇引理A.13可知，中间的垂直同态也是拓扑同构。因此，$H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$是$H^i_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}^{\mathrm{alg}})$的完备化。

固定 $0 < \varepsilon < 1$，使其满足 $\varepsilon \in |\overline{K}|$，并取符合规定的严格递减序列 $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$，现在我们考虑 $\varepsilon < \varepsilon_m < \varepsilon_n < 1$，其中 ε_m、$\varepsilon_n \in |\overline{K}|$。利用交换性，

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}^{\mathrm{alg}}) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) & \longrightarrow & \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_n)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \end{array}$$

根据我们刚刚证明的关于“代数”子空间稠密性的结论，过渡同态 $\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \to \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_n)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 的像是稠密的。类似地，可以证明 $H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \to H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_n)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$。

为了证明过渡同态是紧的，我们从交换图开始

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z^i(\mathcal{U}_{\varepsilon_m}, \mathcal{E}) & \longrightarrow & C^i(\mathcal{U}_{\varepsilon_m}, \mathcal{E}) & \xrightarrow{d^i_{\varepsilon_m}} & B^{i+1}(\mathcal{U}_{\varepsilon_m}, \mathcal{E}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Z^i(\mathcal{U}_{\varepsilon_n}, \mathcal{E}) & \longrightarrow & C^i(\mathcal{U}_{\varepsilon_n}, \mathcal{E}) & \xrightarrow{d^i_{\varepsilon_n}} & B^{i+1}(\mathcal{U}_{\varepsilon_n}, \mathcal{E}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

具有严格正合行。我们在引理 2.5.1 中看到，中间的垂直同态是紧的。因此，引理 A.3 (i)推出 $Z^i(\mathcal{U}_{\varepsilon_m}, \mathcal{E}) \to Z^i(\mathcal{U}_{\varepsilon_n}, \mathcal{E})$ 是紧的。利用引理A.3(ii)，以类似的方式可以得出，that$H^{i-1}(\mathbb{P}^d_K \setminus \mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)^-, \mathcal{E}) \to H^{i-1}(\mathbb{P}^d_K \setminus \mathbb{P}^r_K(\varepsilon_n)^-, \mathcal{E})$ 和 $\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \to \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_n)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 是紧的。对于

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) & \longrightarrow & H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\alpha^i_{\varepsilon_m}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_n)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) & \longrightarrow & H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_n)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\alpha^i_{\varepsilon_n}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

两行中的局部凸 K-向量空间的短严格正合列相容地分裂，因为 $\mathrm{Ker}(\alpha^i_{\varepsilon_m}) \cong \mathrm{Ker}(\alpha^i_{\varepsilon_n})$ 是有限维的 [59, 推论 3.4.27]。因此，过渡同态 $H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)\text{-}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \to H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_n)\text{-}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 由引理 A.3 (iii) 可知是紧的。

注 2.5.3. 既然我们已经看到过渡映射 $H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)\text{-}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \to H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_n)\text{-}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 的像是稠密的，我们便可以应用 [56, 命题 1.3.3]，在此处得到拓扑同构 (2.22)。不过，我们还将介绍 [56,注 1.3.6] 中提到的替代方法。为此，需要以下引理。

引理 2.5.4（参见 [56, 引理 1.3.7]）。考虑一个严格正合序列

$$0 \longrightarrow V'_n \longrightarrow V_n \longrightarrow V''_n \longrightarrow 0 \quad , \textit{for } n \in \mathbb{N},$$

的 K-Fr´echet 空间。如果过渡映射 $V'_{n+1} \to V'_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都具有稠密像 e, 那么这个序列

$$0 \longrightarrow \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} V'_n \longrightarrow \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} V_n \longrightarrow \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} V''_n \longrightarrow 0 \tag{2.27}$$

也是严格正合的。

证明。我们可以将 V'_n 视为 $V_n \to V''_n$的核。由于取（射影）极限与取核可交换，我们看到 $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} V'_n$ 是 $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} V_n \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} V''_n$的核。

此外，由于过渡同态 $V'_{n+1} \to V'_n$ 具有稠密像，这个逆系统满足拓扑 Mittag-Leffler 条件。因此，(2.27) 是向量空间 [34, 13.2.4 (i)] 的短正合列。最后，开映射定理 [67, 命题 8.6] 表明，$\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} V_n \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} V''_n$也是严格的。□

微分 $d^i_\varepsilon\colon C^i(\mathcal{U}^-_\varepsilon, \mathcal{E}) \to C^{i+1}(\mathcal{U}^-_\varepsilon, \mathcal{E})$ 是微分$d^i_{\varepsilon_m}\colon C^i(\mathcal{U}_{\varepsilon_m}, \mathcal{E}) \to C^{i+1}(\mathcal{U}_{\varepsilon_m}, \mathcal{E})$ 的射影极限。因此我们有 $C^i(\mathcal{U}^-_\varepsilon, \mathcal{E}) \cong \varprojlim_{\varepsilon_m \searrow \varepsilon} C^i(\mathcal{U}_{\varepsilon_m}, \mathcal{E})$，且$Z^i(\mathcal{U}^-_\varepsilon, \mathcal{E}) \cong \varprojlim_{\varepsilon_m \searrow \varepsilon} Z^i(\mathcal{U}_{\varepsilon_m}, \mathcal{E})$, 因为（射影）极限与取核可交换。但根据引理 2.5.4，有如下短严格正合列

$$0 \longrightarrow \varprojlim_{\varepsilon_m \searrow \varepsilon} Z^i(\mathcal{U}_{\varepsilon_m}, \mathcal{E}) \longrightarrow \varprojlim_{\varepsilon_m \searrow \varepsilon} C^i(\mathcal{U}_{\varepsilon_m}, \mathcal{E}) \longrightarrow \varprojlim_{\varepsilon_m \searrow \varepsilon} B^{i+1}(\mathcal{U}_{\varepsilon_m}, \mathcal{E}) \longrightarrow 0$$

因此我们可以得出 $B^{i+1}(\mathcal{U}^-_\varepsilon, \mathcal{E}) \cong \varprojlim_{\varepsilon_m \searrow \varepsilon} B^{i+1}(\mathcal{U}_{\varepsilon_m}, \mathcal{E})$。以类似的方式，我们得到$H^i(\mathbb{P}^d_K \setminus \mathbb{P}^r_K(\varepsilon)\ \mathcal{E}) \cong \varprojlim_{\varepsilon_m \searrow \varepsilon} H^i(\mathbb{P}^d_K \setminus \mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)^-, \mathcal{E})$。

同样地对同态 $\beta^i_\varepsilon = \varprojlim_{\varepsilon_m \searrow \varepsilon} \beta^i_{\varepsilon_m}$ 和 $\alpha^i_\varepsilon = \varprojlim_{\varepsilon_m \searrow \varepsilon} \alpha^i_{\varepsilon_m}$进行论证，我们发现 $\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \cong \varprojlim_{\varepsilon_m \searrow \varepsilon} \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)\text{-}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$，且 $\mathrm{Ker}(\alpha^i_\varepsilon) \cong \varprojlim_{\varepsilon_m \searrow \varepsilon} \mathrm{Ker}(\alpha^i_{\varepsilon_m})$。现在我们对该射影系统取射影极限

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)\text{-}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \longrightarrow H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)\text{-}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha^i_{\varepsilon_m}) \longrightarrow 0$$

短严格正合列，从而得到如下具有严格正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \varprojlim\limits_{\varepsilon_m \searrow \varepsilon} \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)\text{-}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) & \longrightarrow & \varprojlim\limits_{\varepsilon_m \searrow \varepsilon} H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)\text{-}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) & \longrightarrow & \varprojlim\limits_{\varepsilon_m \searrow \varepsilon} \mathrm{Ker}(\alpha^i_{\varepsilon_m}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\cong & & \downarrow & & \downarrow\cong & & \\
0 & \longrightarrow & \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) & \longrightarrow & H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\alpha^i_\varepsilon) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

由于外侧的竖直映射都是拓扑同构，由蛇引理A.13可得 $H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \cong \varprojlim_{\varepsilon_m \searrow \varepsilon} H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)\text{-}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$. □

同样的推理表明，在极端情形 $\varepsilon = 0$ 下有如下结论。

推论 2.5.5. 对于任意严格递减序列 $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset |\overline{K}|$，满足 $0 < \varepsilon_m < 1$ 和 $\varepsilon_m \to 0$，K-Fr´echet 空间 $H^i_{(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 是 K-巴拿赫空间的射影极限

$$H^i_{(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \cong \varprojlim_{\varepsilon_m \searrow 0} H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}).$$

具有稠密像的紧过渡映射。此外，代数簇 $\mathbb{P}^d_K$ 的局部上同调群 $H^i_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 构成 $H^i_{(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 的稠密子空间。

对于 $\widetilde{H}^i_{(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$，类似的断言成立。

关于相对于“开” ε-邻域的局部上同调群 $H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 的射影极限，也有一项结果。

推论 2.5.6。对于任意严格递减序列 $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset |\overline{K}|$，其中 $0 < \varepsilon_m < 1$ a nd $\varepsilon_m \to 0$，存在一个拓扑同构

$$H^i_{(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \cong \varprojlim_{\varepsilon_m \searrow 0} H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \tag{2.28}$$

K-Fr´ech 的 集空间。此外，过渡同态 $isms$

$$H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \longrightarrow H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \quad , for\ \varepsilon_m < \varepsilon_n,$$

是紧的，并且具有稠密像。

同样，对于 $\widetilde{H}^i_{(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$，类似的陈述也是成立的。

证明。对于拓扑同构(2.28)，论证与前一个命题证明的最后部分类似。为了证明引理2.5.4的拓扑Mittag-Leffler条件得到满足，使用命题 2.5.2 关于 $H^i_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \subset H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 的稠密性的陈述。

要证明过渡同态是紧的，注意对于 $\varepsilon_m < \varepsilon_n$，过渡映射可分解为

$$H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \longrightarrow H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_n)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \longrightarrow H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}). \tag{2.29}$$

第一个同态是从核的局部凸 K-向量空间到一个 K-巴拿赫空间的连续线性映射，因此由 [67, 命题 19.5]可知它是紧的。由 [67,注 16.7 (i)] 可知，复合映射 (2.29) 也是紧的。

对于 $\widetilde{H}^i{}_{(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$，论证类似。 □

命题 2.5.7。局部上同调群有如下描述

$$H^i_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) = \begin{cases} 0 & , for\ i < d-r\ \ or\ i > d, \\ H^{d-r}_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) & , for\ i = d-r, \\ H^i(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) & , for\ i > d-r. \end{cases}$$

对于 $0 < \varepsilon < 1$ 满足 $\varepsilon \in |\overline{K}|$的情形，我们有

$$H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) = \begin{cases} 0 & , for\ i < d-r\ \ or\ i > d, \\ H^{d-r}_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) & , for\ i = d-r, \\ H^i(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) & , for\ i > d-r, \end{cases}$$

对于$H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$和$H^i_{(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$，结论也类似。

证明。$H^i_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 的结论见 [56, 第 595–597] 页（其中的论证与域 K 无关）。对于 $H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$、$\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 和 $H^i_{(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$，该断言则由“代数”局部上同调群的稠密性推出。 □

2.6. 关于舒伯特簇的局部上同调群作为局部解析表示。记 $\mathrm{B} \subset \mathrm{G} = \mathrm{GL}_{d+1,K}$ 为下三角矩阵的博雷尔子群，$\mathrm{T} \subset \mathrm{G}$ 为对角矩阵的极大环面。对于 $i = 0, \ldots, d$，令$\epsilon_i \colon \mathrm{T} \to \mathbb{G}_m$ 为如下特征：$\epsilon_i(\mathrm{diag}(t_0, \ldots, t_d)) = t_i$，并设 $\alpha_{i,j} := \epsilon_i - \epsilon_j$，其中$i \neq j$；以及 $\alpha_i := \alpha_{i+1,i}$，其中 $i = 0, \ldots, d-1$。那么 G 关于 T 的根为

$$\Phi = \{\alpha_{i,j} \mid 0 \leq i \neq j \leq d\}$$

它相对于 $\mathrm{T} \subset \mathrm{B}$ 的单根为

$$\Delta = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_{d-1}\}.$$

此外，对于 $I \subset \Delta$，我们用 $\mathrm{P}_I \subset \mathrm{G}$ 表示与 I 相关联的（下）标准抛物子群，即由 B 和根子群 $\mathrm{U}_{-\alpha}$（其中 $\alpha \in I$）生成的子群。例如，我们有 $\mathrm{P}_\emptyset = \mathrm{B}$ 和 $\mathrm{P}_\Delta = \mathrm{G}$。我们记作 $P_I := \mathrm{P}_I(K)$，这是 G 的一个局部K解析子群。我们令 $P_{I,\,0} := \mathrm{P}_{I,\,\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_K)$，它是$P_I$的一个紧开子群。这里，$\mathrm{P}_{I,\,\mathbb{Z}}$ 表示 $\mathrm{GL}_{d+1,\,\mathbb{Z}}$ 的相应标准抛物子群。此外，考虑典范约化同态

$$p_n \colon G_0 \longrightarrow \mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K/\pi^n),$$

对于 $n \in \mathbb{N}$。我们定义

$$P_I^n := p_n^{-1}\big(\mathbf{P}_{I,\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_K/\pi^n)\big)$$

它是 G_0 的一个开紧子群，包含 $P_{I,\,0}$。

现在固定 $r \in \{0, \ldots, d-1\}$。那么极大抛物子群 $\mathrm{P}_{\Delta\setminus\{\alpha_r\}}$ 稳定子簇 $\mathbb{P}^r_K$ 于 $\mathbb{P}^d_K$ 中。因此，在G 对 $(\mathbb{P}^d_K)^{\mathrm{rig}}$ 的群作用下，$P_{\Delta\setminus\{\alpha_r\}}$ 稳定 $(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}$。

我们断言，对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon \in |\overline{K}|$，其中 $|\pi|^n \leq \varepsilon < 1$，子群 $P^n_{\Delta\setminus\{\alpha_r\}} \subset G_0$稳定 $\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)$。事实上，对于 $[z_0 \colon \ldots \colon z_d] \in \mathbb{P}^r_K(\varepsilon)$ 和 $g = (g_{ij}) \in P^n_{\Delta\setminus\{\alpha_r\}}$，我们记作$g^{-1}z =: [w_0 \colon \ldots \colon w_d]$。因此，对于 $j = r+1, \ldots, d$，

$$|w_j| = \left|\sum_{i=0}^{d} z_i g_{ij}\right| \leq \max\Big(\max_{i=0}^{r} |z_i g_{ij}|, \max_{i=r+1}^{d} |z_i g_{ij}|\Big) \leq \max\Big(\max_{i=0}^{r} 1 \cdot |\pi^n|, \max_{i=r+1}^{d} \varepsilon \cdot 1\Big) \leq \varepsilon.$$

类似地，可以计算得出，对于任意满足 $|\pi|^n < \varepsilon < 1$ 的 $\varepsilon \in |\overline{K}|$ 和 $n \in \mathbb{N}$，$\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-$ 由 $P^n_{\Delta\setminus\{\alpha_r\}}$ 稳定。

命题 2.6.1（参见 [56, 推论1.3.9]）。（i）设 $\varepsilon \in |\overline{K}|$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $|\pi|^n < \varepsilon < 1$。则该表示

$$P^n_{\Delta\setminus\{\alpha_r\}} \times \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})'_b \longrightarrow \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})'_b, \quad (g, \ell) \longmapsto \ell(g^{-1}_),$$

是局部解析的。此外，对于任意严格递减序列 $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset |\overline{K}|$，满足 $\varepsilon_m \to \varepsilon$ 且 $\varepsilon < \varepsilon_m < 1$，典范映射

$$\varinjlim_{\varepsilon_m \searrow \varepsilon} \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})' \longrightarrow \Big(\varprojlim_{\varepsilon_m \searrow \varepsilon} \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})\Big)'_b = \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})'_b$$

是一个拓扑同构，并且按这种方式，$\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})'_b$ 是紧型的，即它是 K-巴拿赫空间的归纳极限。

$$\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_1)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})' \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})' \hookrightarrow \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_{m+1})^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})' \hookrightarrow \ldots$$

具有紧的、单射的过渡同态。（ii）对于极端情形 $\varepsilon = 0$，该表示

$$P_{\Delta\setminus\{\alpha_r\}} \times \widetilde{H}^i_{(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})'_b \longrightarrow \widetilde{H}^i_{(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})'_b, \quad (g, \ell) \longmapsto \ell(g^{-1}_),$$

是局部解析的，并且底层的局部凸 K-向量空间 $\widetilde{H}^i_{(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})'_b$ 类似于 (i)，属于紧型。

与第 2.3 节一样，我们逐步进行。

引理 2.6.2。（i）设 $0 < \varepsilon < 1$ with $\varepsilon \in |\overline{K}|$。对于 $n \in \mathbb{N}$ with $|\pi|^n \leq \varepsilon$（分别为 $|\pi|^n < \varepsilon$），群 $P^n_{\Delta\setminus\{\alpha_r\}}$ 通过连续自同态作用于 $H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$（分别作用于 $H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$），且拓扑同构 (2.22) 是 $P^n_{\Delta\setminus\{\alpha_r\}}$-等变的。此外，对于 $H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 和 $\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$，相应的断言同样成立。

（ii）在极端情形 $\varepsilon = 0$、$P_{\Delta\setminus\{\alpha_r\}}$ 通过连续自同态作用于 $H^i_{(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 和 $\widetilde{H}^i_{(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$，且拓扑同构 (2.22) 是 $P_{\Delta\setminus\{\alpha_r\},\,0}$-等变的。

证明。对于局部上同调群，这可由第 2.2 节中的讨论得出。局部上同调的长正合列关于相应群作用是等变的这一事实，意味着核 $\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$、$\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 和 $\widetilde{H}^i_{(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 满足所述断言。□

引理 2.6.3. 对于满足 $|\pi|^n < \varepsilon < 1$ 的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon \in |\overline{K}|$，表示

$$P^n_{\Delta\setminus\{\alpha_r\}} \times \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \longrightarrow \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}), \quad (g, v) \longmapsto g.v,$$

在 K-巴拿赫空间 $\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 上是局部解析的。

证明。与引理 2.3.4 中一样，唯一尚待证明的断言是轨道映射

$$P^n_{\Delta\setminus\{\alpha_r\}} \longrightarrow \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}), \quad g \longmapsto g.v,$$

对每个 $v \in \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 都是局部解析的。为此，我们先证明 $P^n_{\Delta\setminus\{\alpha_r\}}$ 在 $H^i(\mathbb{P}^d_K \setminus \mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-, \mathcal{E})$ 上的作用所对应的轨道映射是局部解析的。

固定 $g \in P^n_{\Delta\setminus\{\alpha_r\}}$，并考虑仿射子域 $gD_n \subset \mathrm{GL}_{d+1}(C)$，其中我们设定 $D_n := 1 + \pi^n M_{d+1}(\mathcal{O}_C)$，其刚性解析坐标图

$$\iota_g \colon D_n \longrightarrow gD_n, \quad h \longmapsto gh.$$

此外，我们声称，对于每个固定的 $v \in \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$，轨道映射

$$P^n_{\Delta\setminus\{\alpha_r\}} \longrightarrow H^i(\mathbb{P}^d_K \setminus \mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-, \mathcal{E}), \quad h \longmapsto h.v,$$

限制在 $gD_n(K)$ 上由一个收敛幂级数给出。

为此，我们考虑 $\mathbb{P}^d_K \setminus \mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-$ 的容许覆盖 $\mathcal{U}_\varepsilon$，其 Čech 复形 $C^i(\mathcal{U}_\varepsilon, \mathcal{E})$ 计算 $H^i(\mathbb{P}^d_K \setminus \mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-, \mathcal{E})$。我们固定一个非空子集 $I \subset \{r+1, \ldots, d\}$，并按 (2.15) 中的记号记 $U := U_{I,\varepsilon}$。于是，对所有 $h \in gD_n$，都有 $h(U) = g(U)$。确实，令 $z = [z_0 \colon \ldots \colon z_d] \in U$，并令 $(1 + h') \in D_n$，使得

$$[z_0 \colon \ldots \colon z_d] \cdot (1 + h') =: [w_0 \colon \ldots \colon w_d] \quad \text{, with } w_i = z_i + \sum_{j=0}^{d} z_j h'_{ji}.$$

对于 $i \in I$，我们有

$$\Big| \sum_{j=0}^{d} z_j h'_{ji} \Big| \leq \max_{j=0}^{d} |z_j h'_{ji}| \leq \max_{j=0}^{d} |z_j| \, |\pi|^n < \max_{j=0}^{d} \varepsilon \, |z_j| \leq |z_i|$$

其中最后一个不等式成立是因为 $z \in U \subset U_{i,\varepsilon_0}$ 这意味着 $|w_i| = |z_i|$。现在我们计算，对于 $i \in I$, $j \in \{0, \ldots, d\}$:

$$\varepsilon \, |w_j| \leq \max \Big(\varepsilon \, |z_j|, \max_{k=0}^{d} \varepsilon \, |z_k h'_{kj}| \Big) \leq \max \Big(|z_i|, \max_{k=0}^{d} \varepsilon \, |\pi|^n \, |z_k| \Big) \leq |z_i| = |w_i|$$

这意味着 $(1 + h')^{-1}.z \in U$。

由于上述非空子集 $I \subset \{r+1, \ldots, d\}$ 是任意的，我们得到一个映射

$$gD_n(K) \times C^i(g(\mathcal{U}_\varepsilon), \mathcal{E}) \longrightarrow C^i(\mathcal{U}_\varepsilon, \mathcal{E})$$

它赋予 $H^i(\mathbb{P}^d_K \setminus \mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-, \mathcal{E})$ 上的 $P^n_{\Delta\setminus\{\alpha_r\}}$ 作用，并将其限制到 $gD_n(K)$，参见 (2.5)。这里，$g(\mathcal{U}_\varepsilon)$ 表示平移覆盖 $\mathbb{P}^d_K \setminus \mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^- = \bigcup_{i=r+1}^d g(U_{i,\varepsilon})$。因此，只需证明，对于每个满足 $U := U_{I,\varepsilon}$ 的 $v \in \mathcal{E}(g(U))$，当 $I \subset \{r+1, \dots, d\}$ 非空时，映射 $gD_n(K) \to \mathcal{E}(U)$, $h \mapsto h.v$ 由一个收敛幂级数给出。

为此，我们采用与引理 2.3.4 的证明类似的方法。利用对于所有 $h \in gD_n$, σ 群作用：$\mathrm{GL}_{d+1,\ K} \times_K \mathbb{P}^d_K \to \mathbb{P}^d_K$ 诱导出以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} D_n \times_K U & \xrightarrow{\iota_g \times \mathrm{id}} & gD_n \times_K U & \xrightarrow{\sigma} & g(U) \\ & \searrow^{\mathrm{pr}_2} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} & & \\ & & U & & \end{array}.$$

令 $F_v \in \mathcal{E}(U)\langle T_1, \dots, T_{(d+1)^2}\rangle$ 为 $v \in \mathcal{E}(g(U))$ 在……下所映射到的幂级数

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(g(U)) \longrightarrow (\iota_g \times \mathrm{id})^* \sigma^* \mathcal{E}(D_n \times_K U) & \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (\iota_g \times \mathrm{id})^* \Phi(D_n \times_K U)} & \\ (\iota_g \times \mathrm{id})^* \mathrm{pr}_2^* \mathcal{E}(D_n \times_K U) &\cong \mathrm{pr}_2^* \mathcal{E}(D_n \times_K U) \\ &\cong \big(\mathcal{O}(D_n) \mathbin{\widehat{\otimes}_K} \mathcal{O}(U)\big) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{E}(U) \\ &\cong \mathcal{E}(U)\langle T_1, \dots, T_{(d+1)^2}\rangle. \end{aligned}$$

现在，对于 $h \in D_n(K)$,

$$\begin{array}{ccccc} D_n \times_K U & \xrightarrow{\iota_g \times \mathrm{id}} & gD_n \times_K U & \xrightarrow{\sigma} & g(U) \\ {\scriptstyle h\times\mathrm{id}}\uparrow & & & \nearrow_{gh} & \\ U & & & & \end{array}.$$

关于 K-仿射刚性空间代数，态射 $h \times \mathrm{id}\colon U \to D_n \times_K U$ 由幂级数的求值同态给出

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_h \colon \mathcal{O}(D_n) \mathbin{\widehat{\otimes}_K} \mathcal{O}(U) \cong \mathcal{O}(U)\langle T_1, \dots, T_{(d+1)^2}\rangle &\longrightarrow \mathcal{O}(U), \\ F &\longmapsto F(h). \end{aligned}$$

因此我们得到交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}(g(U)) & \longrightarrow & (\iota_g \times \mathrm{id})^* \sigma^* \mathcal{E}(D_n \times_K U) & \longrightarrow & \mathcal{E}(U)\langle T_1, \dots, T_{(d+1)^2}\rangle \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle (h\times\mathrm{id})^*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_h} \\ & & (gh)^* \mathcal{E}(U) & \xrightarrow{\Phi_{gh}(U)} & \mathcal{E}(U) \end{array}$$

这表明 $gh.v = F_v(h)$。

既然我们已经看到 $P^n_{\Delta\setminus\{\alpha_r\}}$-表示 $H^i(\mathbb{P}^d_K \setminus \mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-, \mathcal{E})$ 是局部解析的，现在我们来考虑局部上同调的长正合列

$$\dots \longrightarrow H^{i-1}(\mathbb{P}^d_K \setminus \mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-, \mathcal{E}) \xrightarrow{\partial_\varepsilon^{i-1}} H^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \longrightarrow H^i(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \longrightarrow \dots.$$

由于该序列是$P^n_{\Delta\setminus\{\alpha_r\}}$-等变的，命题1.3.8 (ii) 表明，核$\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 也是一个局部解析表示。□

命题 2.6.1 的证明。我们采用与命题 2.3.1 证明类似的方法。我们在命题 2.5.2 中已经看到，过渡映射 $\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_{m+1})^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}) \to \widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})$ 是紧的且具有稠密像。

如推论 2.3.5 的证明中一样，可以从引理 2.6.3推出，$\widetilde{H}^i_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)^-}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})'$ 上的对偶表示也是局部解析的。命题随后类似地得证。□

备注 2.6.4。上同调群 $H^i(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$ 是有限维代数 G-表示。由推论 1.7.7 可知，诱导的同态 $G\to \mathrm{GL}(H^i(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}))$ 在 K 值点上是局部 K-解析李群的同态。因此，根据命题 1.3.10，$H^i(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$ 是局部解析 G-表示。

3. The $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$-Representation $H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})$

设 K 是一个非阿基米德局部域，$\mathcal{E}$ 是 $\mathbb{P}^d_K$ 上的一个 G-等变向量丛。这里记 $\mathrm{G}=\mathrm{GL}_{d+1,\,K}$，并将 $G=\mathrm{GL}_{d+1}(K)$ 记作与之关联的局部 K-解析李群。

3.1. Orlik 基本复形与相关谱序列。本节我们要重述 Orlik 的方法 [56]，该方法利用无穷远除子 $\mathcal{Y}:=\mathbb{P}^d_K\setminus\mathcal{X}$ 的几何结构，得到 $H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})'_b$ 的局部解析 G-子表示的一个滤过，并将相应子商表示为某些局部解析 G-表示的扩张。由于其中针对 p-进域 K 所引入的论证可以原样推广到一般非阿基米德局部域的情形，我们这里只作概述。有时我们会补充一些细节，另一些时候则请读者参阅 [56] 中的完整证明。

我们所关注的整体截面空间 $H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})$，通过局部上同调的长正合列与补集$\mathcal{Y}$ 相关联

$$0\longrightarrow H^0(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})\longrightarrow H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})\longrightarrow H^1_{\mathcal{Y}}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})\longrightarrow H^1(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})\longrightarrow 0. \tag{3.1}$$

这里，当 $i>0$ 时，高阶上同调群 $H^i(\mathcal{X},\mathcal{E})$ 消失，因为 $\mathcal{X}$ 是准 Stein。由于 $H^i(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$ 在 $i=0,1$ 时是有限维代数 G- 表示，主要难点在于理解 $H^1_{\mathcal{Y}}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$。

在这方面，[56] 的策略如下展开。令 $(\mathbb{P}^d_K)^{\mathrm{ad}}$ 和 $\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}$ 分别表示附属于 $\mathbb{P}^d_K$ 和 $\mathcal{X}$ 的阿迪克空间。接着考虑补集

$$\mathcal{Y}^{\mathrm{ad}}:=(\mathbb{P}^d_K)^{\mathrm{ad}}\setminus\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}$$

根据引理 3.2]，（参见 [39, 第 1 章 10]），它是 $(\mathbb{P}^d_K)^{\mathrm{ad}}$ 的闭伪阿迪克子空间。由于 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}$ 的 Zariski 拓扑，以及 $\mathbb{P}^d_K=(\mathbb{P}^d_K)^{\mathrm{rig}}$ 和 $(\mathbb{P}^d_K)^{\mathrm{ad}}$ 的 Zariski 拓扑彼此等价（见 [38, 命题 4.5 (i)]），因此对所有 $i\geq 0$，$H^i_{\mathcal{Y}^{\mathrm{ad}}}\big((\mathbb{P}^d_K)^{\mathrm{ad}},\mathcal{E}\big)=H^i_{\mathcal{Y}}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$。

回顾一下，对于 G 的单根集合 $\Delta=\{\alpha_0,\dots,\alpha_{d-1}\}$ 的子集 $I:=\mathrm{GL}_{d+1,K}$，我们将相应的（下）标准抛物子群记为 P_I。我们写作 $P_I:=\mathrm{P}_I(K)$,$P_{I,0}:=\mathrm{P}_{I,\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_K)$，以及 $P^n_I:=p_n^{-1}(\mathrm{P}_{I,\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_K/\pi^n))$，其中

$$p_n\colon G_0:=\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)\longrightarrow \mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K/\pi^n)$$

是典范约化同态。这里，$\mathrm{P}_{I,\mathbb{Z}}$ 表示 $\mathrm{GL}_{d+1,\mathbb{Z}}$ 的相应标准抛物子群。

对于满足 $\Delta\backslash I=\{\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_s}\}$、$i_1<\ldots<i_s$ 的子集 $I\subsetneq\Delta$，我们定义闭子簇

$$Y_I:=\mathbb{P}_K\Big(\bigoplus_{j=0}^{i_1}K\cdot e_j\Big)=\mathbb{P}^{i_1}_K=V_+(X_{i_1+1},\dots,X_d)\subset\mathbb{P}^d_K$$

从而

$$\mathcal{Y}^{\mathrm{ad}}=\bigcup_{I\subsetneq\Delta}\bigcup_{g\in G/P_I}gY_I^{\mathrm{ad}}.$$

此外，对于紧开子集 $W\subset G/P_I$，我们考虑

$$Z_I^W:=\bigcup_{g\in W}gY_I^{\mathrm{ad}}$$

它是 $(\mathbb{P}^d_K)^{\mathrm{ad}}$ 的闭伪阿迪克子空间，参见 [57, 引理 3.2]。特别地，我们有 $\mathcal{Y}^{\mathrm{ad}}=Z^{G/P_{\Delta\setminus\{\alpha_{d-1}\}}}_{\Delta\setminus\{\alpha_{d-1}\}}$。

接下来，在 $\mathcal{Y}^{\mathrm{ad}}$ 上定义某些 ′支持在Z_I^{G/P_I} 上的局部常值截面的 étale 层。为此，令

$$\Phi_{I,g}\colon gY_I^{\mathrm{ad}} \longrightarrow \mathcal{Y}^{\mathrm{ad}}$$
$$\Psi_{I,W}\colon Z_I^W \longrightarrow \mathcal{Y}^{\mathrm{ad}}$$

为闭伪阿迪克空间的嵌入，并考虑 ′étale 层

$$\mathbb{Z}_{g,I} := (\Phi_{I,g})_*(\Phi_{I,g})^*\mathbb{Z}_{\mathcal{Y}^{\mathrm{ad}}}$$
$$\mathbb{Z}_{Z_I^W} := (\Psi_{I,W})_*(\Psi_{I,W})^*\mathbb{Z}_{\mathcal{Y}^{\mathrm{ad}}}$$

其中， $\mathbb{Z}_{\mathcal{Y}^{\mathrm{ad}}}$ 表示 $\mathcal{Y}^{\mathrm{ad}}$ 上的常值 ′étale 层，其茎等于 $\mathbb{Z}$。

此外，令 $\mathcal{C}_{G/P_I}$ 表示 G/P_I 的由紧开子集构成的不交覆盖范畴，其态射由细化给出。对于形如$G/P_I = \bigcup_{j\in A} W_j$的覆盖 $c \in \mathcal{C}_{G/P_I}$ ，令 $\mathbb{Z}_c$ 表示层同态的像

$$\bigoplus_{j\in A} \mathbb{Z}_{Z_I^{W_j}} \hookrightarrow \prod_{g\in G/P_I} \mathbb{Z}_{g,I}$$

该同态由同态 $\mathbb{Z}_{Z_I^{W_j}} \to \mathbb{Z}_{g,\ I}$（ $g \in W_j$）诱导，参见 [56, 第 621]页。对 $\mathcal{C}_{G/P_I}$ 的所有覆盖取归纳极限，便得到前述层

$$\varinjlim_{c\in\mathcal{C}_{G/P_I}} \mathbb{Z}_c$$

其截面是在 Z_I^{G/P_I} 上支撑、取值于 $\mathbb{Z}$的局部常值截面。

借助由限制映射给出的适当层同态，这些层拼接 er
从而得到 $\mathcal{Y}^{\mathrm{ad}}$ 上的层复形

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{\mathcal{Y}^{\mathrm{ad}}} \longrightarrow \bigoplus_{\substack{I\subset\Delta\\ |\Delta\setminus I|=1}} \varinjlim_{c\in\mathcal{C}_{G/P_I}} \mathbb{Z}_c \longrightarrow \ldots \longrightarrow \bigoplus_{\substack{I\subset\Delta\\ |\Delta\setminus I|=i}} \varinjlim_{c\in\mathcal{C}_{G/P_I}} \mathbb{Z}_c \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \longrightarrow \bigoplus_{\substack{I\subset\Delta\\ |\Delta\setminus I|=d-1}} \varinjlim_{c\in\mathcal{C}_{G/P_I}} \mathbb{Z}_c \longrightarrow \varinjlim_{c\in\mathcal{C}_{G/P_\emptyset}} \mathbb{Z}_c \longrightarrow 0. \tag{3.2}$$

定理 3.1.1（[56, 定理 2.1.1]）。复形 (3.2) 是无环的。

现在，设 $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to \ldots$ 是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_K}$-模 $\mathcal{E}$ 的一个内射分解。令 $\iota\colon \mathcal{Y}^{\mathrm{ad}} \hookrightarrow (\mathbb{P}^d_K)^{\mathrm{ad}}$ 表示闭嵌入。我们希望考虑将 $\mathrm{Hom}(\iota_*(\,)\ \mathcal{I}^q)$ 作用于 $\mathbb{Z}_{\mathcal{Y}^{\mathrm{ad}}}$ 的无环分解 (3.2) 所得到的双复形，即

$$E_0^{p,q} := \begin{cases} \mathrm{Hom}\Big(\iota_*\Big(\bigoplus_{\substack{I\subset\Delta\\ |\Delta\setminus I|=-p+1}} \varinjlim_{c\in\mathcal{C}_{G/P_I}} \mathbb{Z}_c\Big), \mathcal{I}^q\Big) & \text{, if } -(d-1)\le p\le 0,\ q\ge 0, \\ 0 & \text{, else.} \end{cases} \tag{3.3}$$

这个双复形集中在左上象限。

存在 G 在 $E^\bullet$上的自然作用，$_0{}^\bullet$ 如下：固定 $g \in G$ 和 $I \subsetneq \Delta$,，由沿自同构 g 取逆像的函子性，我们有一个同态

$$\mathrm{Hom}\Big(\iota_*\Big(\varinjlim_{c\in\mathcal{C}_{G/P_I}} \mathbb{Z}_c\Big), \mathcal{I}^q\Big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\Big(g^{-1}\iota_*\Big(\varinjlim_{c\in\mathcal{C}_{G/P_I}} \mathbb{Z}_c\Big), g^{-1}\mathcal{I}^q\Big). \tag{3.4}$$

此外，对于限制$\overline{g}\colon \mathcal{Y}^{\mathrm{ad}} \to \mathcal{Y}^{\mathrm{ad}}$ 的 g，我们有 $\overline{g}^{-1}\mathbb{Z}_c = \mathbb{Z}_{g^{-1}c}$，其中 $g^{-1}c$ 表示平移覆盖 $G/P_I = \bigcup_{j\in A} g^{-1}W_j$，对于 $c = \{W_j \mid j \in A\}$。这就得到

$$g^{-1}\iota_*\Big(\varinjlim_{c\in\mathcal{C}_{G/P_I}} \mathbb{Z}_c\Big) \cong \iota_*\overline{g}^{-1}\Big(\varinjlim_{c\in\mathcal{C}_{G/P_I}} \mathbb{Z}_c\Big) \cong \iota_*\Big(\varinjlim_{c\in\mathcal{C}_{G/P_I}} \mathbb{Z}_{g^{-1}c}\Big).$$

与由 Φ_g诱导的同态 $g^{-1}\mathcal{I}^q \to g^*\mathcal{I}^q \to \mathcal{I}^q$： $g^*\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ 在第二个分量中，我们得到一个同态

$$\mathrm{Hom}\Big(g^{-1}\iota_*\Big(\varinjlim_{c\in\mathcal{C}_{G/P_I}}\mathbb{Z}_c\Big), g^{-1}\mathcal{I}^q\Big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\Big(\iota_*\Big(\varinjlim_{c\in\mathcal{C}_{G/P_I}}\mathbb{Z}_{g^{-1}c}\Big), \mathcal{I}^q\Big). \tag{3.5}$$

然后， g 通过由 (3.4) 和 (3.5) 复合而成的端同态作用。

与双复形(3.3) 相关联的有两个谱序列 ${}^{\mathrm{h}}E^{p,q}_r$ 和 ${}^{\mathrm{v}}E^{p,q}_r$。由于对于每个 $n\in\mathbb{Z}$，满足 $p+q=n$ 和 ${}^{\mathrm{h}}E^{p,q}_0 \neq 0$ 的有序对$(p,q)\in\mathbb{Z}^2$ 只有有限多个，因此两个谱序列都收敛于双复形 [77, 标签 0132]的总上同调。由于 ${}^{\mathrm{h}}E^{p,q}_0$ 的所有行除 $p=0$ 处的项外都是正合的，我们计算

$${}^{\mathrm{h}}E^{p,q}_1 = \begin{cases} \mathrm{Hom}(\iota_*\mathbb{Z}_{\mathcal{Y}^{\mathrm{ad}}}, \mathcal{I}^q) & \text{, if } p=0,\ q\geq 0,\\ 0 & \text{, else.}\end{cases}$$

因此 ${}^{\mathrm{h}}E^{p,q}_2$ 内容如下

$${}^{\mathrm{h}}E^{p,q}_2 = \begin{cases} \mathrm{Ext}^q(\iota_*\mathbb{Z}_{\mathcal{Y}^{\mathrm{ad}}}, \mathcal{E}) & \text{, if } p=0,\ q\geq 0,\\ 0 & \text{, else,}\end{cases}$$

并且谱序列 ${}^{\mathrm{h}}E^{p,q}_r$ 在第二页退化。此外，我们有 G-等变同构

$${}^{\mathrm{h}}E^{0,q}_2 = \mathrm{Ext}^q(\iota_*\mathbb{Z}_{\mathcal{Y}^{\mathrm{ad}}}, \mathcal{E}) = H^q_{\mathcal{Y}^{\mathrm{ad}}}\big((\mathbb{P}^d_K)^{\mathrm{ad}}, \mathcal{E}\big) = H^q_{\mathcal{Y}}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}),$$

对于所有 $q\geq 0$，由 [33, 命题 2.3 bis.]。

现在我们转向谱序列 ${}^{\mathrm{v}}E^{p,q}_r$并计算得到

$${}^{\mathrm{v}}E^{p,q}_1 = \begin{cases} \mathrm{Ext}^q\Big(\iota_*\Big(\bigoplus_{\substack{I\subset\Delta\\ |\Delta\setminus I|=-p+1}}\varinjlim_{c\in\mathcal{C}_{G/P_I}}\mathbb{Z}_c\Big), \mathcal{E}\Big) & \text{, if } -(d-1)\leq p\leq 0,\ q\geq 0,\\ 0 & \text{, else.}\end{cases}$$

此外，对于所有的 $I\subsetneq\Delta$, ， [56, 命题 2.21] 证明存在一个同构。

$$\mathrm{Ext}^q\Big(\iota_*\Big(\varinjlim_{c\in\mathcal{C}_{G/P_I}}\mathbb{Z}_c\Big), \mathcal{E}\Big) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}}\bigoplus_{g\in G_0/P_I^n} H^q_{gY_I(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}), \tag{3.6}$$

对于所有 $q\geq 0$，其中“开” ε_n-邻域of Y_I 的定义见(2.11)。在此及下文中，我们将 $\varepsilon_n := |\pi|^n$ 记作 $n\in\mathbb{N}$。

注记3.1.2. 我们想解释 G-作用如何从等式（3.6）左端的 Ext 群传递到右端。在此过程中，我们将引入一些有用的记号。

首先注意，由于岩泽分解（参见 [16, §3.5]），$G/P_I \cong G_0/P_{I,0}$。pr oof 同构（3.6）的构造利用了覆盖族

$$G/P_I = \bigcup_{g\in G_0/P_I^n} gP_I^n/P_I \quad \text{, with } gP_I^n/P_I := \big\{gpP_I \in G/P_I \mid p\in P_I^n\big\},$$

对于 $n\in\mathbb{N}$，在 $\mathcal{C}_{G/P_I}$ 中是共尾的。这表明

$$\varinjlim_{c\in\mathcal{C}_{G/P_I}}\mathbb{Z}_c = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}}\bigoplus_{g\in G_0/P_I^n}\mathbb{Z}_{Z_I^{gP_I^n}}.$$

接下来应用 [33, 命题 2.3 bis。] 并论证某些高阶导出的逆极限消失。

那么，当右侧配备以下由连续自同态给出的 G 作用时，同构 (3.6) 是 G-等变的：对于固定的 $g \in G$，要给出一个使 g 作用的自同态，只需定义相容的同态。

$$\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \bigoplus_{g\in G_0/P_I^n} H^q_{gY_I(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{s_m} H^q_{g_iY_I(\varepsilon_m)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}), \tag{3.7}$$

对所有 $m \in \mathbb{N}$。这里， g_1、.....、 g_{s_m} 是 G_0/P_I^m 的一些陪集代表元，因此我们有 $G/P_I = \bigcup_{i=1}^{s_m} g_i P_I^m/P_I$。

我们选择 $n = n(g,m) \geq m$ 足够大，使得对于陪集代表元 h_1、...、 h_{s_n} 的 G_0/P_I^n，覆盖 $G/P_I = \bigcup_{j=1}^{s_n} h_j P_I^n/P_I$ 是平移覆盖$G/P_I = \bigcup_{i=1}^{s_m} g g_i P_I^m/P_I$ 的细化。通过这种方式，我们得到一个满射

$$\sigma_g \colon \{1,\dots,s_n\} \longrightarrow \{1,\dots,s_m\}$$

其中 $\sigma_g(j)$由 $h_j P_I^n/P_I \subset g g_{\sigma_g(j)} P_I^m/P_I$ 定义。

计算可得。

$$h_j Y_I(\varepsilon_n) = h_j P_I^n.Y_I \subset g g_{\sigma_g(j)} P_I^m.(P_I.Y_I) = g g_{\sigma_g(j)} Y_I(\varepsilon_m)$$

那么这些同态

$$\varphi_g \colon H^q_{h_jY_I(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}) \longrightarrow H^q_{g_{\sigma_g(j)}Y_I(\varepsilon_m)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$$

由 (2.6) 得出

$$\begin{aligned}\bigoplus_{j=1}^{s_n} H^q_{h_jY_I(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}) &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{s_m} H^q_{g_iY_I(\varepsilon_m)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}),\\ (v_1,\dots,v_{s_n}) &\longmapsto \Big(\sum_{j\in\sigma_g^{-1}(\{1\})} \varphi_g(v_j),\dots,\sum_{j\in\sigma_g^{-1}(\{s_m\})} \varphi_g(v_j)\Big).\end{aligned}$$

将此与投影结合起来

$$\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \bigoplus_{g\in G_0/P_I^n} H^q_{gY_I(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{s_n} H^q_{h_jY_I(\varepsilon_{n(g,m)})}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$$

得到所求的同态 (3.7)。可以验证这些同态彼此相容，且不依赖于 n 的选择。□

注意，当 $g \in G_0$ 时， g 的作用的 n 总可以选为 $n = m$。在这种情况下， g 甚至会分别作用于 (3.6) 中射影极限的每个组成部分。

利用同构

$$\varphi_{g_i} \colon H^q_{g_iY_I(\varepsilon_m)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}) \longrightarrow H^q_{Y_I(\varepsilon_m)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}),$$

对于 G_0/P_I^m的陪集代表元 g_1、...、 g_{s_m}，我们得到一个 G_0-等变同构

$$\bigoplus_{i=1}^{s_m} H^q_{g_iY_I(\varepsilon_m)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Ind}_{P_I^m}^{G_0}\Big(H^q_{Y_I(\varepsilon_m)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})\Big), \quad (v_1,\dots,v_{s_m}) \longmapsto \sum_{i=1}^{s_m} g_i \bullet \varphi_{g_i}(v_i).$$

因此，谱序列如下所示

$${}^{\mathrm{v}}E_1^{p,q} = \bigoplus_{\substack{I\subset\Delta\\ |\Delta\setminus I|=-p+1}} \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ind}_{P_I^n}^{G_0}\Big(H^q_{Y_I(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})\Big) \Rightarrow {}^{\mathrm{v}}E_\infty^{p+q} = {}^{\mathrm{h}}E_\infty^{p+q} = H_{\mathcal{Y}}^{p+q}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}).$$

继续通过考虑复形 $K^\bullet_{q,n}$ 定义为

$$K^p_{q,n} := \bigoplus_{\substack{I\subset\Delta\\ |\Delta\setminus I|=-p+1}} \operatorname{Ind}_{P_I^n}^{G_0}\Big(H^q_{Y_I(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})\Big),$$

对于 $-(d-1) \leq p \leq 0, q \geq 0$，从而 ${}^{\mathrm{v}}E_1^{\bullet,q} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} K_{q,n_0}^{\bullet}$ 应用命题2.5.7 于关于 $Y_I(\varepsilon_n) = \mathbb{P}_K^{i_1}$ 的局部上同调群，对于 $I \subsetneq \Delta$with $\Delta \setminus I = \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}\}, i_1 < \ldots < i_s$，以及 $q \geq 0$，我们发现

$$H^q_{Y_I(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E}) = \begin{cases} 0 & , \text{if } \{\alpha_0, \ldots, \alpha_{d-q-1}\} \not\subset I, \\ H^q_{\mathbb{P}_K^{d-q}(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E}) & , \text{if } \{\alpha_0, \ldots, \alpha_{d-q-1}\} \subset I \text{ and } \alpha_{d-q} \notin I, \\ H^q(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E}) & , \text{if } \{\alpha_0, \ldots, \alpha_{d-q}\} \subset I. \end{cases}$$

特别地，复形 $K_{q,\,n}^{\bullet}$ 集中在次数 $p = -q+1, \ldots, 0$ 上。

下一步是通过以下 G-等变的短严格正合列，将复形 $K_{q,\,n}^{\bullet}$ 表示为复形 $K_{q,\,n}^{\prime\bullet}$ 和 $K_{q,\,n}^{\prime\prime\bullet}$ 的扩张

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_{q,n}^{\prime p} & := & \bigoplus_{\substack{I\subset\Delta \\ |\Delta\setminus I|=-p+1 \\ \alpha_0,\ldots,\alpha_{d-q-1}\in I \\ \alpha_{d-q}\notin I}} \mathrm{Ind}_{P_I^n}^{G_0}\left(\widetilde{H}^q_{\mathbb{P}_K^{d-q}(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_{q,n}^{p} & := & \bigoplus_{\substack{I\subset\Delta \\ |\Delta\setminus I|=-p+1 \\ \alpha_0,\ldots,\alpha_{d-q-1}\in I}} \mathrm{Ind}_{P_I^n}^{G_0}\left(H^q_{Y_I(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_{q,n}^{\prime\prime p} & := & \bigoplus_{\substack{I\subset\Delta \\ |\Delta\setminus I|=-p+1 \\ \alpha_0,\ldots,\alpha_{d-q-1}\in I}} \mathrm{Ind}_{P_I^n}^{G_0}\left(H^q(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

K-Fr´echet 空间中的。该序列由以下短严格正合列诱导

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H^q(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E}) \longrightarrow H^q(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E}) \longrightarrow 0,$$

对于满足 $\alpha_0, \ldots, \alpha_{d-q} \in I$ 的 $I \subsetneq \Delta$，以及

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}^q_{\mathbb{P}_K^{d-q}(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E}) \longrightarrow H^q_{\mathbb{P}_K^{d-q}(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E}) \longrightarrow H^q(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E}) \longrightarrow 0,$$

对于满足 $\alpha_0, \ldots, \alpha_{d-q-1} \in I$, $\alpha_{d-q} \notin I$ 的 $I \subsetneq \Delta$。后一序列中的第二个同态是满射，因为 $H^q(\mathbb{P}_K^d \setminus \mathbb{P}_K^{d-q}(\varepsilon_n)\ \mathcal{E}) = 0$。

根据命题 2.5.2，射影系统 $(K_{q,n}^{\prime p})_{n\in\mathbb{N}}$ 满足引理 2.5.4 的拓扑 Mittag-Leffler 条件。因此，我们得到如下 G_0-等变的短严格正合序列

$$0 \longrightarrow \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} K_{q,n}^{\prime\bullet} \longrightarrow {}^{\mathrm{v}}E_1^{\bullet,q} \longrightarrow \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} K_{q,n}^{\prime\prime\bullet} \longrightarrow 0 \tag{3.8}$$

K-Fr´echet 空间的复形。

可以发现，对于所有的 $q \geq 0, n \in \mathbb{N}$，复形 $K_{q,n}^{\prime\bullet}$ 和 $K_{q,n}^{\prime\prime\bullet}$ 除最左端和最右端的位置外均为无上同调复形 [56, 引理 2.2.5]。检查（拓扑）Mittag-Leffler 条件后，可得复形 $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} K_{q,n}^{\prime\bullet}$ 和 $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} K_{q,n}^{\prime\prime\bullet}$ 除最左端和最右端的位置外也均为无上同调复形 [56, 注记 2.2.6]。为计算 ${}^{\mathrm{v}}E_2^{p,q}$，我们可以考察复形 (3.8) 的上同调长正合列。由此可知，${}^{\mathrm{v}}E_2^{p,q} = H^p(\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} K_{p,n}^{\bullet})$ 中仅 $p = -q+1, q = 1, \ldots, d$ 对应的项以及 $p = 0, q \geq 2$ 对应的项非零。对于这些项，我们得到一个短严格正合

序列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\Big(\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} K'^{-q+1}_{q,n} \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} K'^{-q+2}_{q,n}\Big) \longrightarrow {}^{\mathrm{v}}E_2^{-q+1,q} \\ \longrightarrow \operatorname{Ker}\Big(\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} K''^{-q+1}_{q,n} \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} K''^{-q+2}_{q,n}\Big) \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

对于 $q = 1, \dots, d$，并且可以证明

$${}^{\mathrm{v}}E_2^{0,q} = H^q(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}),$$

对于 $q \geq 2$。此外，由此可得，谱序列 ${}_{\mathrm{v}}E^{p,}{}_{r}{}^{q}$在第 E_2 页 [56,p. 633] 退化。

我们想要研究 (3.9) 的强对偶。首先考察 $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} K''^{p}_{q,n}$。由于每个 $K''^{p}_{q,n}$ 都是有限维的，$\big(K''^{p}_{q,n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ 的过渡同态是紧的[67, 引理 16.4] 因此 $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} K''^{p}_{q,n}$ 是核的 K-Fréchet 空间 [67, 命题 19.9]。那么 $\operatorname{Ker}\big(\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} K''^{-q+1}_{q,n} \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} K''^{-q+2}_{q,n}\big)$ 也是核的 K-Fréchet 空间 [67, 命题 19.4 (i)]。由此可得

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\Big(\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} K''^{-q+1}_{q,n} \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} K''^{-q+2}_{q,n}\Big)'_b &\cong \Big(\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}\big(K''^{-q+1}_{q,n} \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} K''^{-q+2}_{q,n}\big)\Big)'_b \\ &\cong \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}\big(K''^{-q+1}_{q,n} \to K''^{-q+2}_{q,n}\big)'_b \end{aligned}$$

根据 [67, 命题 16.5]。由于$K''^{\bullet}_{q,n}$ 在$K''^{-q+2}_{q\,n}$处正合，$K''^{-q+1}_{q,n} \to K''^{-q+2}_{q\,n}$的像是闭的，并且这个同态是严格的 [11, IV. §4.2 定理 1]。因此 [11, IV. §4.1 命题 2] 意味着存在拓扑同构

$$\operatorname{Ker}\big(K''^{-q+1}_{q,n} \to K''^{-q+2}_{q,n}\big)'_b \cong \operatorname{Coker}\Big(\big(K''^{-q+2}_{q,n}\big)'_b \to \big(K''^{-q+1}_{q,n}\big)'_b\Big).$$

为简化记号，我们将对应于子集 $I_{d-q} = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{d-q-1}\} \subset \Delta$的标准抛物子群记作 $Q_{d-q} := P^{I_{d-q}}$ 对于。在备注 1.5.5 (i) 中，我们已经看到，取强对偶与有限诱导彼此可交换。因此，我们得到一个 G-等变的拓扑同构

$$\begin{aligned} &\operatorname{Coker}\Big(\big(K''^{-q+2}_{q,n}\big)'_b \to \big(K''^{-q+1}_{q,n}\big)'_b\Big) \\ &\quad\cong \operatorname{Ind}_{Q^n_{d-q}}^{G_0}\big(H^q(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})'\big) \Big/ \sum_{i=d-q}^{d-1} \operatorname{Ind}_{P^n_{I_{d-q}\cup\{\alpha_i\}}}^{G_0}\big(H^q(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})'\big) \\ &\quad\cong \Big(H^q(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})' \otimes_K \operatorname{Ind}_{Q^n_{d-q}}^{G_0}(K)\Big) \Big/ \sum_{i=d-q}^{d-1} H^q(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})' \otimes_K \operatorname{Ind}_{P^n_{I_{d-q}\cup\{\alpha_i\}}}^{G_0}(K) \\ &\quad\cong H^q(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})' \otimes_K v_{Q^n_{d-q}}^{G_0} \end{aligned}$$

其中

$$v_{Q^n_{d-q}}^{G_0} := \operatorname{Ind}_{Q^n_{d-q}}^{G_0}(K) \Big/ \sum_{i=d-q}^{d-1} \operatorname{Ind}_{P^n_{I_{d-q}\cup\{\alpha_i\}}}^{G_0}(K). \tag{3.10}$$

我们使用了备注 1.5.5(ii)中的推拉公式，因为 $H^q(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})'$ 已经是一个G-表示，并且与 $H^q(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})'$ 取射影张量积是正合的，这一点由 [13,引理 2.1 (ii)]可知。

此外， [27, 命题 1.1.32 (i)] 给出

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \Big(H^q(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})' \otimes_K v_{Q^n_{d-q}}^{G_0}\Big) \cong H^q(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})' \mathbin{\widehat{\otimes}}_K \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \Big(v_{Q^n_{d-q}}^{G_0}\Big).$$

该张量积的第二个因子可以表示为一个光滑广义Steinberg表示（参见 [17]）

$$v_{P_I}^G := \mathrm{Ind}_{P_I}^{\mathrm{sm},G}(K) \Big/ \sum_{I \subsetneq J \subset \Delta} \mathrm{Ind}_{P_J}^{\mathrm{sm},G}(K),$$

对于 $I \subset \Delta$。这里 $\mathrm{Ind}_{P_I}^{\mathrm{sm}\,G}(K)$表示平凡 P_I-表示的光滑诱导，即在 P_I 下不变的局部常值函数空间，赋予左正则 G-作用：

$$\mathrm{Ind}_{P_I}^{\mathrm{sm},G}(K) := \big\{ f \in C^{\mathrm{sm}}(G,K) \,\big|\, \forall g \in G, p \in P_I : f(gp) = f(g) \big\}.$$

引理3.1.3. 对于 $I \subset \Delta$，存在一个 G-等变的拓扑同构

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \left(\mathrm{Ind}_{P_I^n}^{G_0}(K) \Big/ \sum_{I \subsetneq J \subset \Delta} \mathrm{Ind}_{P_J^n}^{G_0}(K) \right) \cong v_{P_I}^G$$

其中$v_{P_I}^G$ 表示赋予最细局部凸拓扑的广义光滑 Steinberg 表示。

证明。对于所有 $J \subset \Delta$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们都有一个定义良好的、 G_0-等变嵌入

$$\mathrm{Ind}_{P_J^n}^{G_0}(K) \longrightarrow \mathrm{Ind}_{P_J}^{\mathrm{sm},G}(K), \quad \sum_{i=1}^{s_n} g_i \bullet \lambda_i \longmapsto \big[g \mapsto \lambda_i \text{ , if } gP_J \in g_i P_J^n / P_J \big]. \tag{3.11}$$

这里 g_1、……、g_{s_n} 是 G_0/P_J^n的陪集代表元。由于$\mathrm{Ind}_{P_J^n}^{G_0}(K)$ 是有限维的，当右侧带有最细局部凸拓扑时，这是一个连续同态。

此外，给定一个局部常值函数 $f\colon G \to K$ in $\mathrm{Ind}_{P_J}^{\mathrm{sm}\,G}(K)$，存在 $n \in \mathbb{N}$，使得对于覆盖 $G/P_J = \bigcup_{i=1}^{s_n} g_i P_J^n / P_J$，函数 f在每个开子集 $g_i P_J^n \cdot P_J$上都是常值。因此， f包含在 (3.11) 的像中。取 $\mathrm{Ind}_{P_J}^{\mathrm{sm}\,G}(K)$ 上最细局部凸拓扑后，可得 $\mathrm{Ind}_{P_J}^{\mathrm{sm}\,G}(K) \cong \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Ind}_{P_J^n}^{G_0}(K)$ 是一个拓扑同构。

以显然的方式定义 $v_{P_I^n}^{G_0}$ 后，我们对以下图表取归纳极限

$$\begin{array}{ccccccc}
\bigoplus\limits_{I \subsetneq J \subset \Delta} \mathrm{Ind}_{P_J^n}^{G_0}(K) & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_{P_I^n}^{G_0}(K) & \longrightarrow & v_{P_I^n}^{G_0} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\bigoplus\limits_{I \subsetneq J \subset \Delta} \mathrm{Ind}_{P_J}^{\mathrm{sm},G}(K) & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_{P_I}^{\mathrm{sm},G}(K) & \longrightarrow & v_{P_I}^{G} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

这些图表的行均严格正合。蛇引理A.13 随即表明，所诱导的 G_0-等变同态 $\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} v_{P_I^n}^{G_0} \to v_{P_I}^G$ 是一个拓扑同构。此外，当 $\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} v_{P_I^n}^{G_0}$ 携带由注记 3.1.2 所诱导的 G-作用时，该同构也是 G-等变的。□

现在我们转向 $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} K_{q,n}^{\prime p}$。根据推论 2.5.6，$\big(K_{q,n}^{\prime p}\big)_{n \in \mathbb{N}}$ 的过渡同态是紧的，因此 $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} K_{q,n}^{\prime p}$ 也是一个核的 K-Fr´echet 空间。与之前类似，可以得出 that

$$\mathrm{Ker}\Big(\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} K_{q,n}^{\prime -q+1} \to \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} K_{q,n}^{\prime -q+2} \Big)_b^{\prime} \cong \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Coker}\Big(\big(K_{q,n}^{\prime -q+1}\big)_b^{\prime} \to \big(K_{q,n}^{\prime -q+2}\big)_b^{\prime} \Big)$$

右侧归纳极限中的单射紧过渡同态。

我们将与子集$J_{d-q} := \Delta \setminus \{\alpha_{d-q}\} \subset \Delta$对应的标准抛物子群记为 $\mathrm{P}^{d-q} := \mathrm{P}^{J_{d-q}}$。根据命题 2.6.1 (ii)，我们回顾可知 $W_n := H^q_{\mathbb{P}^{d-q}_K(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E})^{\prime}_b$是一个局部解析的 P_{d-q}^n-表示。利用“有限”归纳

$\mathrm{Ind}_{P^n_{d-q}}^{G_0}(-)$、备注 1.5.5 (ii) 中的推拉公式，以及与W_n [13, 引理 2.1 (ii)], 张量积的正合性, 我们计算得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Coker}\Big(\big(K'^{-q+2}_{q,n}\big)'_b \to \big(K'^{-q+1}_{q,n}\big)'_b\Big)\\
&\quad\cong \mathrm{Ind}_{Q^n_{d-q}}^{G_0}(W_n)\Big/\sum_{i=d-q+1}^{d-1}\mathrm{Ind}_{P^n_{I_{d-q}\cup\{\alpha_i\}}}^{G_0}(W_n)\\
&\quad\cong \mathrm{Ind}_{P^n_{d-q}}^{G_0}\left(\mathrm{Ind}_{Q^n_{d-q}}^{P^n_{d-q}}(W_n)\Big/\sum_{i=d-q+1}^{d-1}\mathrm{Ind}_{P^n_{I_{d-q}\cup\{\alpha_i\}}}^{P^n_{d-q}}(W_n)\right)\\
&\quad\cong \mathrm{Ind}_{P^n_{d-q}}^{G_0}\left(\Big(W_n\otimes_K \mathrm{Ind}_{Q^n_{d-q}}^{P^n_{d-q}}(K)\Big)\Big/\sum_{i=d-q+1}^{d-1}W_n\otimes_K\mathrm{Ind}_{P^n_{I_{d-q}\cup\{\alpha_i\}}}^{P^n_{d-q}}(K)\right)\\
&\quad\cong \mathrm{Ind}_{P^n_{d-q}}^{G_0}\Big(W_n\otimes_K v_{Q^n_{d-q}}^{P^n_{d-q}}\Big)
\end{aligned}$$

与有限维表示

$$v_{Q^n_{d-q}}^{P^n_{d-q}}:=\mathrm{Ind}_{Q^n_{d-q}}^{P^n_{d-q}}(K)\Big/\sum_{i=d-q+1}^{d-1}\mathrm{Ind}_{P^n_{I_{d-q}\cup\{\alpha_i\}}}^{P^n_{d-q}}(K).$$

注记3.1.4。我们希望描述诱导的 G-作用于

$$\mathrm{Ker}\Big(\varprojlim_{n\in\mathbb{N}}K'^{-q+1}_{q,n}\to\varprojlim_{n\in\mathbb{N}}K'^{-q+2}_{q,n}\Big)'_b\cong\varinjlim_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Ind}_{P^n_{d-q}}^{G_0}\Big(\widetilde{H}^q_{\mathbb{P}^{d-q}_K(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})'_b\otimes_K v_{Q^n_{d-q}}^{P^n_{d-q}}\Big).$$

为简化记号，我们在此记 $\mathsf{P}=\mathsf{P}^{d-q}$ 和 $\mathsf{Q}=\mathsf{Q}^{d-q}$。固定 $g\in G$，并考虑右侧项中的一个元素 v。取 $m\in\mathbb{N}$，使得

$$v=\sum_{i=1}^{s_m}g_i\bullet v_i\in\mathrm{Ind}_{P^m}^{G_0}\Big(\widetilde{H}^q_{\mathbb{P}^{d-q}_K(\varepsilon_m)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})'_b\otimes_K v_{Q^m}^{P^m}\Big),$$

其中 g_1、……、g_{s_m} 是 G_0/P^m 的陪集代表元。

与注记3.1.2类似，取 $n\geq m$，使得 $G/Q=\bigcup_{j=1}^{s_n}h_jQ^n/Q$ 是由 h_1、……、h_{s_n} 这些 G_0/Q^n 的陪集代表元确定的平移覆盖 $G/Q=\bigcup_{i=1}^{s_m}gg_iQ^m/Q$ 的细化。我们可以考虑在满射 $G/Q\to G/P$ 下 G/P 的诱导覆盖。扩大 n 后，我们可以假设诱导覆盖 $G/P=\bigcup_{i=1}^{s_n}h_jP^n/P$ 是诱导覆盖 $G/P=\bigcup_{i=1}^{s_m}gg_iP^m/P$ 的细化。

对于 $j=1,\ldots,s_n$，根据注记3.1.2中的记号，我们有 $h_jQ^n/Q\subset gg_{\sigma_g(j)}Q^m/Q$。我们断言这意味着 $h_jP^n/Q\subset gg_{\sigma_g(j)}P^m/Q$。事实上，利用

$$h_jP^n/Q=\bigcup_{h_{j'}P^n=h_jP^n}h_{j'}Q^n/Q\subset\bigcup_{h_{j'}P^n=h_jP^n}gg_{\sigma_g(j')}Q^m/Q\subset\bigcup_{h_{j'}P^n=h_jP^n}gg_{\sigma_g(j')}P^m/Q$$

只需证明$g_{\sigma_g(j)}P^m=g_{\sigma_g(j')}P^m$，如果 $h_jP^n=h_{j'}P^n$。为此，我们计算得到$h_jQ^n/P\subset h_jP^n/P\cap gg_{\sigma_g(j)}P^m/P$。根据关于 n 相对于 G/P 的覆盖的假设，这表明 $h_jP^n/P\subset gg_{\sigma_g(j)}P^m/P$ [9]。于是，如果 $h_jP^n=h_{j'}P^n$，集合 $gg_{\sigma_g(j)}P^m/P$ 和 $gg_{\sigma_g(j')}P^m/P$ 有非空交集，这意味着 $g_{\sigma_g(j)}P^m=g_{\sigma_g(j')}P^m$。

我们现在令 $p_{g,j}:=h_j^{-1}gg_{\sigma_g(j)}$，从而有 $P^n/Q\subset p_{g,j}P^m/Q$。然后，$g$ 诱导出连续同态

$$\varphi^t_{p_{g,j}}\colon\widetilde{H}^q_{\mathbb{P}^{d-q}_K(\varepsilon_m)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})'_b\longrightarrow\widetilde{H}^q_{\mathbb{P}^{d-q}_K(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})'_b.$$

[9]请注意，函数 σ_g 是关于 G/Q 的覆盖定义的。

此外，我们有 $p_g^{-1}\,,\ {}_jP^n \subset P^m \cdot Q$。用局部常值函数 $p_{g,\ j}$ 表示给出了一个连续同态

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{Q^m}^{P^m}(K) &\longrightarrow \mathrm{Ind}_{Q^n}^{P^n}(K),\\ f &\longmapsto f(p_{g,j}^{-1}_) = \big[p \mapsto f(p')\ ,\ \text{if } p_{g,j}^{-1}p = p'q,\ \text{for } p' \in P^m,\ q \in Q\big].\end{aligned}$$

由此得到一个连续同态$\psi_{p_{g,j}}\colon\ v_{Q^m}^{P^m} \to v_{Q^n}^{P^n}$。我们令 $\tau_{p_{g,j}}$ 表示 th e 张量积

$$\tau_{p_{g,j}} := \varphi^t_{p_{g,j}} \otimes \psi_{p_{g,j}} \colon \widetilde{H}^q_{\mathbb{P}_K^{d-q}(\varepsilon_m)}(\mathbb{P}_K^d,\mathcal{E})'_b \otimes_K v_{Q^m}^{P^m} \longrightarrow \widetilde{H}^q_{\mathbb{P}_K^{d-q}(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}_K^d,\mathcal{E})'_b \otimes_K v_{Q^n}^{P^n}.$$

总的来说，g 所作用的同态为

$$g.\Big(\sum_{i=1}^{s_m} g_i \bullet v_i\Big) = \sum_{j=1}^{s_n} h_j \bullet \tau_{p_{g,j}}(v_{\sigma_g(j)}) \in \mathrm{Ind}_{P^n}^{G_0}\Big(\widetilde{H}^q_{\mathbb{P}_K^{d-q}(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}_K^d,\mathcal{E})'_b \otimes_K v_{Q^n}^{P^n}\Big).$$

□

由于谱序列 $_{\mathrm{v}}\ E^{p}{}_{,r}{}^{\ q}$ 在 E_2 页退化，我们得到 $H^1_{\mathcal{Y}}(\mathbb{P}_K^d,\mathcal{E})$ 的一个滤过，其各项为 G-不变子空间，且相邻子商同构于$_{\mathrm{v}}E^{-q+1,}{}_2{}^{\ q}$。更确切地说，考虑到关于 $\mathcal{Y} \subset \mathbb{P}_K^d$ 的局部上同调长正合列 (3.1)，我们得到以下定理。

定理 3.1.5（参见 [56, 定理 2.2.8]）。设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathbb{P}_K^d$上的一个 G-等变向量丛。那么存在一个由闭 $D(G)$-子模构成的滤过

$$H^0(\mathcal{X},\mathcal{E}) = V^d \supset V^{d-1} \supset \ldots \supset V^1 \supset V^0 = H^0(\mathbb{P}_K^d,\mathcal{E}),$$

以及，对于 $q = 1, \ldots, d$, 局部解析 G-表示的短严格正合列

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow H^q(\mathbb{P}_K^d,\mathcal{E})' \otimes_K v_{Q_{d-q}}^G &\longrightarrow \big(V^q/V^{q-1}\big)'_b\\ &\longrightarrow \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ind}_{P_{d-q}^n}^{G_0}\Big(\widetilde{H}^q_{\mathbb{P}_K^{d-q}(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}_K^d,\mathcal{E})'_b \otimes_K v_{Q_{d-q}^n}^{P_{d-q}^n}\Big) \longrightarrow 0.\end{aligned} \tag{3.12}$$

当 K 是一个 p-进域时，Orlik 进一步分析了 (3.12) 右侧的项。在 [56, 第 634] 页，他证明存在一个局部解析 G 表示的同构。

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ind}_{P_{d-q}^n}^{G_0}\Big(\widetilde{H}^q_{\mathbb{P}_K^{d-q}(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}_K^d,\mathcal{E})'_b \otimes_K v_{Q_{d-q}^n}^{P_{d-q}^n}\Big) \cong \mathrm{Ind}_{P_{d-q}}^{\mathrm{la},G}\Big(N'_{d-q} \otimes v_{Q_{d-q}}^{P_{d-q}}\Big)^{\mathfrak{d}_{d-q}}. \tag{3.13}$$

我们解释此处所使用的记号。令 $U(\mathfrak{g})$和 $U(\mathfrak{p}_{d-q})$分别表示 G和 P_{d-q} 的李代数的泛包络代数。可以证明，$\widetilde{H}^q_{\mathbb{P}_K^{d-q}}(\mathbb{P}_K^d,\mathcal{E})$是 $U(\mathfrak{g})$ 的一个广义Verma 模的商。更确切地说，存在一个有限维的 P_{d-q}-子表示 $N_{d-q} \subset \widetilde{H}^q_{\mathbb{P}_K^{d-q}}(\mathbb{P}_K^d,\mathcal{E})$，它作为一个 $U(\mathfrak{g})$-模 [56, 引理 1.2.1]，生成该模，即存在一个 $U(\mathfrak{g})$-模的满同态

$$U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_{d-q})} N_{d-q} \twoheadrightarrow \widetilde{H}^q_{\mathbb{P}_K^{d-q}}(\mathbb{P}_K^d,\mathcal{E}).$$

令 $\mathfrak{d}_{d-q}$ 表示这个满同态的核。那么，$\mathrm{Ind}_{P_{d-q}}^{\mathrm{la}\ G}\big(N'_{d-q} \otimes v_{Q_{d-q}}^{P_{d-q}}\big)^{\mathfrak{d}_{d-q}}$，表示局部解析诱导中被 $\mathfrak{d}_{d-q}$ 消去的那些函数所构成的子空间，参见 [56, 第 607] 页。特别地，(3.13) 的右端不依赖于 N_{d-q} 的选择。

然而，当 K 为正特征时，通常 $\widetilde{H}^q_{\mathbb{P}_K^{d-q}}(\mathbb{P}_K^d,\mathcal{E})$ 不再是有限生成的，即使我们将 $U(\mathfrak{g})$ 替换为 G 的代数分布代数 Dist(G) $\cong$ hy(G)，参见 [50, 第 2 章.3]。我们通过采用 $\mathrm{Ind}_{P_{d-q}}^{\mathrm{la}\ G}\big(N'_{d-q} \otimes v_{Q_{d-q}}^{P_{d-q}}\big)^{\mathfrak{d}_{d-q}}$, 的另一种描述来解决这个问题，该描述是通过 Orlik 和 Strauch 在 [58] 中定义的函子 $\mathcal{F}_P^G$ 给出的。随后，在第 3.4 节中，我们比较 Orlik 的描述与我们对 p-进域情形的描述。

3.2. $H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})'_b$的子商作为局部解析 $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)$-表示。现在我们要分析在 (3.12) 中作为 $\big({}^{\mathrm{v}}E^{-q+1}_{,\ 2}{}^{\ q}\big)'_b$ 的商出现的 G-表示。我们将记号改为固定 $r := d-q \in \{0,\dots,d-1\}$，并将 $\mathsf{P} := \mathsf{P}^{\ }_{d-q}$ 以及 $\mathsf{Q} := \mathsf{Q}_{d-q}$。对于 $n\in\mathbb{N}$，我们在命题 2.6.1 的证明中已经看到，

$$V_n := \widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_n)^-}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})' \otimes_K v_{Q^n}^{P^n}(K) \tag{3.14}$$

是一个局部解析的 P^n-表示，其底层局部凸向量空间是一个 K-巴拿赫空间。

引理 3.2.1. 过渡同态 $V_n \to V_{n+1}$ 是单射且紧的，即

$$V := \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} V_n$$

以这种方式属于紧型。特别地，通过 V_n 上的 P^n-作用，V 成为一个局部解析的 $(\mathsf{hy}(G)\ P_0)$-模（定义 1.6.18 的意义下）。

证明. 我们在命题 2.5.2 中已经看到，过渡映射

$$\widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_{n+1})^-}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}) \longrightarrow \widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_n)^-}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$$

是紧的且像稠密。因此，根据引理 16.4]，它们的转置是单射且紧的。进一步，由限制映射 $\mathsf{Ind}_{Q^n}^{P^n}(K) \to \mathsf{Ind}_{Q^{n+1}}^{P^{n+1}}(K)\ f\mapsto f|_{P^{n+1}}$所诱导的同态 $v_{Q^n}^{P^n} \to v_{Q^{n+1}}^{P^{n+1}}$ 也是单射。因此，由 [27, Cor. 1.1.27] 可知，这些映射的张量积 $V_n \to V_{n+1}$ 是单射。根据引理 16.4]，作为有限维 K-向量空间之间的同态，$v_{Q^n}^{P^n} \to v_{Q^{n+1}}^{P^{n+1}}$ 是紧的。因此，引理 18.12] 表明 $V_n \to V_{n+1}$ 也紧。

最后，由于 $P^n \subset G$ 是一个开子群，我们有 $\mathsf{hy}(P^n) = \mathsf{hy}(G)$。因此，根据注 1.6.19，每个 V_n都是一个局部解析的 $(\mathsf{hy}(G)\ P^n)$-模，特别地，它也是一个局部解析的 $(\mathsf{hy}(G)\ P_0)$-模。由此可知，V同样是一个局部解析的 $(\mathsf{hy}(G)\ P_0)$-模。□

注 3.2.2。事实上，V 甚至是一个局部解析的 P-表示。固定 $p\in P$，我们可以找到足够大的 $n\geq m$，使得对于所有 $j=1,\dots,s_n$，都有 $h_jP^n/Q \subset pg_{\sigma_g(j)}P^m/Q$，这与注 3.1.4 中的情况类似。考察在 $G/Q \to G/P$下的像，由 $1\in p^{-1}P^n/P$可得$P^n/P \subset pP^m/P$。这表明 $\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_n)^- \subset p\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)^-$，并且我们得到一个同态

$$\varphi_p^t\colon \widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_m)^-}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})' \longrightarrow \widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}^r_K(\varepsilon_n)^-}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})'.$$

此外，我们有连续同态 $\psi_p\colon v_{Q^m}^{P^m} \to v_{Q^n}^{P^n}$，它由

$$\mathrm{Ind}_{Q^m}^{P^m}(K) \longrightarrow \mathrm{Ind}_{Q^n}^{P^n}(K), \quad f\longmapsto f(p^{-1}\,_).$$

这些张量积给出连续同态 $\tau_p = (\varphi_p^t\otimes\psi_p)\colon V_m \to V_n$。与之前一样，对所有 $m\in\mathbb{N}$，这些 τ_p 的集合给出 p 在 V 上的作用。这个 P-作用扩展了 P_0 的作用，并由此使 V 成为局部解析的（$\mathsf{hy}(G)\ P$）-模。□

引理 3.2.3.存在局部解析 $(\mathsf{hy}(G)\ P)$- 模之间的典范拓扑同构

$$V \cong \widetilde{H}^{d-r}_{(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})'_b \mathbin{\widehat{\otimes}}_K v_{B_{d-r}}^{\mathrm{GL}_{d-r}(K)}.$$

这里，$\mathsf{GL}_{d-r,K}$ 被视为标准 Levi 因子 $\mathsf{L} \cong \mathsf{GL}_{r+1,K}\times_K \mathsf{GL}_{d-r,K}$（属于 $\mathsf{P} = \mathsf{P}^{\Delta\setminus\{\alpha_r\}}$）的子群，而 B_{d-r} 表示 $\mathsf{GL}_{d-r,K}$的标准（下）博雷尔子群。在$v^{\mathrm{GL}_{d-r}(K)\ B_{d-r}}$ 上，群 P 通过膨胀作用，$\mathsf{hy}(G)$作用平凡，并且赋予其最细局部凸拓扑。

证明。首先注意到我们有一个同构

$$\mathrm{Ind}_{Q^n}^{P^n}(K) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ind}_{B_{d-r}^n}^{\mathrm{GL}_{d-r}(\mathcal{O}_K)}(K), \quad f \longmapsto f|_{\mathrm{GL}_{d-r}(\mathcal{O}_K)},$$

因为 $P^n/Q^n \cong \mathbf{GL}_{d-r}(\mathcal{O}_K)/B_{d-r}^n$。这里我们将 $\mathbf{GL}_{d-r}(\mathcal{O}_K) \subset P_0$ 视为一个子群。这给出了同构 $v_{Q^n}^{P^n} \cong v_{B_{d-r}^n}^{\mathrm{GL}_{d-r}(\mathcal{O}_K)}$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。对这些同构取归纳极限，并将引理 3.1.3应用于 $B_{d-r} \subset \mathbf{GL}_{d-r}(K)$ 的情形，我们得到一个局部凸 K-向量空间的同构 $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} v_{Q^n}^{P^n} \cong v_{B_{d-r}}^{\mathrm{GL}_{d-r}(K)}$。此外，可以计算得出，当 $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} v_{Q^n}^{P^n}$ 带有备注3.2.2中的 P-作用，且 $v^{\mathrm{GL}_{d-r}(K)\ B_{d-r}}$ 带有膨胀作用时，该同构是 P-等变的。

我们回顾命题 2.6.1 (ii)：$\widetilde{H}^{d-r}{}_{(\mathbb{P}_K^r)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})_b' \cong \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}_K^r\ (\varepsilon_n)\text{-}}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})'$。由[27, 命题 1.1.32]，我们进而得到一个 P-等变的拓扑同构

$$V = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \left(\widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}_K^r(\varepsilon_n)-}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})' \otimes_K v_{Q^n}^{P^n} \right) \cong \widetilde{H}^{d-r}_{(\mathbb{P}_K^r)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})_b' \mathbin{\widehat{\otimes}_K} v_{B_{d-r}}^{\mathrm{GL}_{d-r}(K)}. \tag{3.15}$$

最后注意，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$\mathbf{hy}(G)$ 在 $v_{Q^n}^{P^n}$ 上的作用都是平凡的，因为 $Q^n \subset P^n$ 是一个开子群。在 $\widetilde{H}^{d-r}{}_{(\mathbb{P}_K^r)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})_b'$ 上，$\mathbf{hy}(G)$-作用由其在 $\widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}_K^r\ (\varepsilon_n)\text{-}}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})'$ 上的作用诱导。因此，(3.15) 是 $\mathbf{hy}(G)$-等变的。□

我们回到 (3.12) 中的局部解析 G-表示 $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ind}_{P^n}^{G_0}(W_n)$，其中 $W_n := \widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}_K^r\ (\varepsilon_n)\text{-}}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})_b' \otimes_K v_{Q^n}^{P^n}(K)$。$K$-巴拿赫空间 V_n 使我们能够将其表示为一个紧型局部凸 K-向量空间。

引理 3.2.4. 存在局部解析 G-表示的典范拓扑同构

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ind}_{P^n}^{G_0}(W_n) \cong \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n). \tag{3.16}$$

这里，G-作用在 $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n)$ 上的定义方式类似于注记 3.1.4。此外，右端的过渡映射 $\mathrm{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n) \to \mathrm{Ind}_{P^{n+1}}^{G_0}(V_{n+1})$ 是紧且单射的，因此上述 G-表示的底层局部凸 K-向量空间是紧型的。

证明。鉴于命题 2.6.1 对 $n \in \mathbb{N}$ 的归纳极限描述，同- 态

$$\widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}_K^r(\varepsilon_n)-}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})_b' \longrightarrow \widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}_K^r(\varepsilon_{n+1})}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})_b'$$

在 $\widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}_K^r\ (\varepsilon_n)\text{-}}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})'$ 上分解。因此，我们得到一个局部解析 P^{n+1}-表示的交换图

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}_K^r(\varepsilon_{n-1})-}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})' & \longrightarrow & \widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}_K^r(\varepsilon_n)-}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})' \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}_K^r(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})_b' & \longrightarrow & \widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}_K^r(\varepsilon_{n+1})}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})_b'. \end{array}$$

结合规范同态 $v_{Q^n}^{P^n} \to v_{Q^{n+1}}^{P^{n+1}}$，这给出了（3.16）中两个归纳极限的过渡映射的分解。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ind}_{P^{n-1}}^{G_0}\left(\widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}_K^r(\varepsilon_{n-1})-}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})' \otimes_K v_{Q^{n-1}}^{P^{n-1}} \right) & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_{P^n}^{G_0}\left(\widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}_K^r(\varepsilon_n)-}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})' \otimes_K v_{Q^n}^{P^n} \right) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \mathrm{Ind}_{P^n}^{G_0}\left(\widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}_K^r(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})_b' \otimes_K v_{Q^n}^{P^n} \right) & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_{P^{n+1}}^{G_0}\left(\widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}_K^r(\varepsilon_{n+1})}(\mathbb{P}_K^d, \mathcal{E})_b' \otimes_K v_{Q^{n+1}}^{P^{n+1}} \right). \end{array}$$

我们得出结论，这两个归纳极限彼此拓扑同构。

现在，考虑 $n \in \mathbb{N}$ 的陪集代表元 h_1、……、$h_{s_{n+1}}$，以及 G_0/P^{n+1} 和 g_1、……、g_{s_n}，其中 G_0/P^n 在 $G_0/P^{n+1} \to G_0/P^n$ 下映射为 $g_{i(j)}$。那么，$\mathrm{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n) \to \mathrm{Ind}_{P^{n+1}}^{G_0}(V_{n+1})$ 的过渡映射由下式给出。

$$\bigoplus_{i=1}^{s_n} g_i \bullet V_n \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{s_{n+1}} h_j \bullet V_{n+1}\,, \quad \sum_{i=1}^{s_n} g_i \bullet v_i \longmapsto \sum_{j=1}^{s_{n+1}} h_j \bullet v_{i(j)}.$$

因此，根据引理A.3 (iii)，它是单射的，并且作为紧同态的有限直和，它是紧的。□

我们的下一个目标是将 $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n)$ 解释为 $C^{\mathrm{la}}(G_0, V)$ 的一个子空间。根据命题 1.5.4，我们知道 $\mathrm{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n) \cong \mathrm{Ind}_{P^n}^{\mathrm{la}\,G_0,}(V_n)$。由于每个 V_n 都是 V 的 BH-子空间，因此我们进而得到对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立的单射连续同态：

$$\begin{aligned} \iota_n \colon \mathrm{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n) &\longrightarrow C^{\mathrm{la}}(G_0, V_n) \longrightarrow C^{\mathrm{la}}(G_0, V), \\ \sum_{i=1}^{s_n} g_i \bullet v_i &\longmapsto \big[g \mapsto p^{-1}.v_i \text{ , for } g = g_i p \text{ with } p \in P^n\big], \end{aligned}$$

给定 $f \in C^{\mathrm{la}}(G_0, V)$、$g \in G_0$ 和 $p \in P_0$，我们用 $f(g_p)$ 表示局部解析函数。 n

$$f(g_p) \colon G_0 \longrightarrow V\,, \quad h \longmapsto f(ghp).$$

我们令 $\mu(f)$ 表示将 $\mu \in \mathrm{hy}(G)$ 通过配对 (1.26)应用于函数 $f \in C^{\mathrm{la}}(G_0, V)$所得到的结果。$V$上的$\mathrm{hy}(G)$-模作用记作 $\mu * v$，其中 $v \in V$。另请回忆，$\dot{\mu}$ 表示来自引理 1.6.10 的对合。

引理 3.2.5。该同态

$$\iota \colon \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n) \longrightarrow C^{\mathrm{la}}(G_0, V)$$

由 ι_n 诱导的映射是一个闭嵌入，具有、】【

$$\mathrm{Im}(\iota) = \big\{ f \in C^{\mathrm{la}}(G_0, V) \,\big|\, \forall g \in G_0, p \in P_0, \mu \in \mathrm{hy}(G) : \mu\big(f(g_p)\big) = p^{-1}.\dot{\mu} * f(g) \big\}\,.$$

证明。只需证明关于像(ι)的陈述。事实上，那么像(ι)就是交集 n
连续同态的核

$$C^{\mathrm{la}}(G_0, V) \longrightarrow V\,, \quad f \longmapsto \mu\big(f(g_p)\big) - p^{-1}.\dot{\mu} * f(g), \tag{3.17}$$

对于 $g \in G_0, p \in P_0, \mu \in \mathrm{hy}(G)$）。由于 V是豪斯多夫的，这些核是闭子空间，因而Im(ι)也是闭子空间。由于 $C^{\mathrm{la}}(G_0, V)$ 根据命题 1.2.15 (iii)是紧型的，利用命题 A.4 可知，Im(ι) 也是紧型的。此外，诱导的同态 ι 是到其像上的连续双射。由于 $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n)$ 是 K-巴拿赫空间的归纳极限，我们可以应用开映射定理的一个版本 [11, II. §4.6 Cor.]，从而得出 ι 是严格的。

剩下的工作是证明关于 Im(ι) 的陈述。令 $\rho_n \colon P^n \to \mathrm{GL}(V_n)$ 表示表示 (3.14)，并令 $\rho_{n,v} \colon P^n \to V_n$ 表示其对应于 $v \in V_n$ 的局部解析轨道映射。首先，考虑 $f \in \mathrm{Im}(\iota)$。于是存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $f \in \mathrm{Im}(\iota_n)$，即对所有 $g \in G_0, p \in P^n$，有 $f \in C^{\mathrm{la}}(G_0, V_n)$ 和 $f(gp) = p^{-1}.f(g)$。令 $D_n \coloneqq 1 + \pi^n M_{d+1}(\mathcal{O}_K)$，并注意到$P^n = D_n \cdot P_0$。由此可得

$$f(gxp) = (xp)^{-1}.f(g) = (\rho_{n,f(g)} \circ \mathrm{inv})(xp), \tag{3.18}$$

对所有 $g \in G_0, x \in D_n, p \in P_0$ 均成立。暂且固定 $g \in G_0$ 和 $p \in P_0$，并将 (3.18) 视为 D_n 上关于 x 的局部解析函数恒等式。同态

$$V_n \longrightarrow C^{\mathrm{la}}(P^n, V_n)\,, \quad v \longmapsto (\rho_{n,v} \circ \mathrm{inv})(_p),$$

关于 $C^{\mathrm{la}}(P^n, V_n)$ 上的左正则表示，具有 P^n-等变性。因此，它对于 $\mathrm{hy}(G)$-作用同样具有等变性，并且对于 $v = f(g)$，我们得到

$$(\rho_{n,\mu * f(g)} \circ \mathrm{inv})(_p) = \mu * \big((\rho_{n,f(g)} \circ \mathrm{inv})(_p)\big), \tag{3.19}$$

对于所有 $\mu \in \mathrm{hy}(G)$。最后，我们将 $\mu \in \mathrm{hy}(G)$ 应用于 (3.18)，并计算限制在 D_n 上的函数：

$$\begin{aligned}\mu\big(f(g_p)\big) &= \mu\big((\rho_{n,f(g)} \circ \mathrm{inv})(_p)\big) \\ &= \big(\dot{\mu} * \big((\rho_{n,f(g)} \circ \mathrm{inv})(_p)\big)\big)(1) \qquad \text{, by Proposition 1.6.14} \\ &= \big((\rho_{n,\dot{\mu}*f(g)} \circ \mathrm{inv})(_p)\big)(1) \qquad \text{, by (3.19)} \\ &= p^{-1}.\dot{\mu} * f(g).\end{aligned} \tag{3.20}$$

另一方面，令 $f \in C^{\mathrm{la}}(G_0, V)$使得 $\mu\big(f(g_p)\big) = p^{-1}.\dot{\mu} * f(g)$，对所有 $g \in G_0$、$p \in P_0$，并且 $\mu \in \mathrm{hy}(G)$。由于 G_0 是紧的，存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 f 在 V的BH空间 V_n 上分解。此外，我们找到 $m \geq n$ 使得 f 相对于有限覆盖

$$G_0 = \bigcup_{u \in G_0/P^m} \bigcup_{p \in P^m/D_m} upD_m, \tag{3.21}$$

即 $f|_{upD_m}$ 对所有陪集 upD_m都是解析的。根据命题 1.3.10，ρ_n 是局部 K-解析流形之间的局部 K-解析映射。因而，在增大 m之后，我们可以假设$\rho_n \circ \mathrm{inv}$ 在 (3.21) 的每个陪集上也都是解析的。特别地，对所有陪集 upD_m 以及所有 $v \in V_n$，$(\rho_{n,\ v} \circ \mathrm{inv})|_{upD_m}$都是解析的。

为证明 $f \in \mathrm{Im}(\iota_m)$，我们固定 $g \in G_0$ 和 $p \in P^m$，并对 $x \in D_m$、$p_0 \in P_0$ 写作 $p = xp_0$。于是，对于所有 $v \in V_n$，$f(g_p_0)|_{D_m}$ 以及 $(\rho_{n,v} \circ \mathrm{inv})(\ p_0)|_{D_m}$ 都是解析的。事实上，令 $u'p'D_m$ 为包含 gp_0 的 (3.21) 的陪集。由于 f 在 $u'p'D_m$ 上是解析的，$f(g_p_0)$ 在 $g^{-1}u'p'D_m p_0^{-1}$ 上是解析的。但利用 D_m 是 G_0 中的正规子群，且为约化同态的核，我们看到这个最后的集合等于 D_m。类似地，$(\rho_{n,v} \circ \mathrm{inv})$ 在陪集 $g^{-1}u'p'D_m$ 上是解析的，因此 $(\rho_{n,v} \circ \mathrm{inv})(\ \ p_0)$ 在 D_m 上是解析的。若我们将 $\mu \in \mathrm{hy}(G)$ 应用于解析函数 $(\rho_{n,v} \circ \mathrm{inv})(\ \ p_0)|_{D_m}$，便可仿照 (3.20) 计算得到

$$p_0^{-1}.\dot{\mu} * f(g) = \mu\big((\rho_{n,f(g)} \circ \mathrm{inv})(_p_0)\big).$$

结合假设 $\mu\big(f(g_p)\big) = p^{-1}.\dot{\mu} * f(g)$，我们可知，$D_m$ 上的函数满足

$$\mu\big(f(g_p_0)\big) = \mu\big((\rho_{n,f(g)} \circ \mathrm{inv})(_p_0)\big),$$

对所有 $\mu \in \mathrm{hy}(G)$ 均成立。由命题 1.6.12 可知，这意味着 $f(g_p_0)$ 和 $(\rho_{n,\ f(g)} \circ \mathrm{inv})(\ \ p_0)$ 在 1 处的局部解析芽相同。由于这两个函数在整个 D_m 上都是解析的，我们得出它们在该处处处相同，因此对所有 $g \in G_0$, $p = xp_0 \in D_m \cdot P_0 = P^m$，有：

$$f(gp) = f(gxp_0) = (\rho_{n,f(g)} \circ \mathrm{inv})(xp_0) = (xp_0)^{-1}.f(g) = p^{-1}.f(g).$$

□

由于 V 是紧型的，由命题 1.2.15 (iii) 可知，存在由 $f \otimes v \mapsto f(\ )\ v$ 诱导的拓扑同构 $C^{\mathrm{la}}(G_0, K)\ \widehat{\otimes}_K V \cong C^{\mathrm{la}}(G_0, V)$。在此同一识别下，同态 (3.17)由下式给出

$$C^{\mathrm{la}}(G_0, K)\ \widehat{\otimes}_K V \longrightarrow V\,, \quad f \otimes v \longmapsto \mu\big(f(g_p)\big)\, v - f(g)\, p^{-1}.\dot{\mu} * v.$$

因此，ι 属于连续同态序列

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n) \xrightarrow{\ \iota\ } C^{\mathrm{la}}(G_0, K)\ \widehat{\otimes}_K V \xrightarrow{\ \psi\ } &\prod_{g \in G_0, p \in P_0, \mu \in \mathrm{hy}(G)} V \\ &f \otimes v \longmapsto \Big(\mu\big(f(g_p)\big)\, v - f(g)\, p^{-1}.\dot{\mu} * v\Big)_{g,p,\mu}\end{aligned} \tag{3.22}$$

其在代数上是正合的，且 ι 是严格的。

我们想要考虑该序列 (3.22)的强对偶。注意，根据 [67, 注. 16.1(ii)], , 该对偶化序列的同态再次是连续的。根据 [67, 命题 9.11]

存在一个拓扑同构

$$\bigoplus_{\substack{g\in G_0\\ p\in P_0\\ \mu\in \mathrm{hy}(G)}} V_b' \xrightarrow{\cong} \Bigg(\prod_{\substack{g\in G_0\\ p\in P_0\\ \mu\in \mathrm{hy}(G)}} V\Bigg)_b', \quad \sum \ell_{g,p,\mu} \longmapsto \Big[(v_{g,p,\mu}) \mapsto \sum \ell_{g,p,\mu}(v_{g,p,\mu})\Big].$$

在此同构下， ψ 的转置由

$$\begin{aligned}\psi^t\colon \bigoplus_{g\in G_0, p\in P_0, \mu\in \mathrm{hy}(G)} V_b' &\longrightarrow \big(C^{\mathrm{la}}(G_0,K)\mathbin{\widehat{\otimes}}_K V\big)_b'\\ \sum \ell_{g,p,\mu} &\longmapsto \Big[f\otimes v \mapsto \sum \mu\big(f(g_p)\big)\,\ell_{g,p,\mu}(v) - f(g)\,\ell_{g,p,\mu}(p^{-1}.\dot\mu * v)\Big].\end{aligned}$$

通过在不同点应用推论 1.4.5，我们得到

$$\begin{aligned}\mu\big(f(g_p)\big) &= \mu\big[h_1 \mapsto f(gh_1p)\big]\\ &= \mu\big[h_1 \mapsto \delta_g\big[h_2 \mapsto \delta_p\big[h_3 \mapsto f(h_2h_1h_3)\big]\big]\big]\\ &= \delta_g\big[h_2 \mapsto \mu\big[h_1 \mapsto \delta_p\big[h_3 \mapsto f(h_2h_1h_3)\big]\big]\big]\\ &= (\delta_g * \mu * \delta_p)(f).\end{aligned}$$

此外，根据 P_0 和 $\mathrm{hy}(G)$ 在 V_b' 上的逆变作用的定义：

$$\ell_{g,p,\mu}(p^{-1}.\dot\mu * v) = (p.\ell_{g,p,\mu})(\dot\mu * v) = (\mu * p.\ell_{g,p,\mu})(v).$$

此外， V 和 $C^{\mathrm{la}}(G_0,K)$ 都是自反的，且其强对偶是自反 Fr´echet 空间。因此，由 [67, Prop. 20.13] 和 [67, Cor. 20.14], ，我们得到一个拓扑同构

$$D(G_0)\mathbin{\widehat{\otimes}}_K V_b' \xrightarrow{\cong} \big(C^{\mathrm{la}}(G_0,K)\mathbin{\widehat{\otimes}}_K V\big)_b', \quad \delta\otimes\ell \longmapsto \big[f\otimes v \mapsto \delta(f)\,\ell(v)\big].$$

总而言之，我们看到，(3.22) 的强对偶是该复形

$$\begin{aligned}\bigoplus_{g\in G_0, p\in P_0, \mu\in \mathrm{hy}(G)} V_b' \xrightarrow{\psi^t} D(G_0)\mathbin{\widehat{\otimes}}_K V_b' \xrightarrow{\iota^t} \Big(\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n)\Big)_b' \longrightarrow 0\\ \sum \ell_{g,p,\mu} \longmapsto \sum \delta_g * \mu * \delta_p \otimes \ell_{g,p,\mu} - \delta_g\otimes \mu * p.\ell_{g,p,\mu}.\end{aligned} \tag{3.23}$$

由于 ι 是闭嵌入，哈恩–巴拿赫定理 [67, 推论 9.4] 表明 ι^t是满射。由开映射定理 [67, 命题 8.6]可知， ι^t 是严格的。此外，根据 [11, IV. §4.1 命题 2] ，我们有 $\mathrm{Ker}(\iota^t) = \mathrm{Im}(\iota)^\perp$ ，其中

$$\mathrm{Im}(\iota)^\perp := \big\{\ell \in D(G_0)\mathbin{\widehat{\otimes}}_K V_b' \,\big|\, \forall v\in \mathrm{Im}(\iota) : \ell(v) = 0\big\}.$$

由于 (3.22) 代数正合性给出 $\mathrm{Im}(\iota)^\perp = \mathrm{Ker}(\psi)^\perp$ ，引理 A.11 表明 $\mathrm{Ker}(\iota^t) = \mathrm{Ker}(\psi)^\perp \subset \mathrm{Im}(\psi^t)$。又由于 $\mathrm{Im}(\psi^t) \subset \mathrm{Ker}(\iota^t)$ 且 $\mathrm{Ker}(\iota^t)$ 是闭的，我们得出 $\mathrm{Ker}(\iota^t) = \overline{\mathrm{Im}(\psi^t)}$。

在命题 1.4.10 (ii) 的等价下，同态 ι^t 变为一个 $D(G_0)$-模之间的同态，其中 $D(G_0)\mathbin{\widehat{\otimes}}_K V_b'$ 在第一个因子上通过左乘法承载 $D(G_0)$-模结构。因此，我们得到一个 $D(G_0)$-模之间的拓扑同构

$$\Big(\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n)\Big)_b' \cong \big(D(G_0)\mathbin{\widehat{\otimes}}_K V_b'\big)/\mathrm{Ker}(\iota^t) \cong \big(D(G_0)\mathbin{\widehat{\otimes}}_K V_b'\big)/\overline{\mathrm{Im}(\psi^t)}.$$

子模 $\mathrm{Im}(\psi^t)$ 又由以下元素生成

$$\delta_g * \mu * \delta_p \otimes \ell - \delta_g \otimes \mu * p.\ell \quad \text{, for } g\in G_0,\ \mu\in \mathrm{hy}(G),\ p\in P_0,\ \ell\in V_b'.$$

回忆命题 1.6.16， $D(\mathfrak{g}, P_0)$ 由形如 $\mu * \lambda$ 的元素生成，其中 $\mu \in \mathrm{hy}(G)$， $\lambda \in D(P_0)$。结合狄拉克分布的稠密性，可知 $\mathrm{Im}(\psi^t)$ 等于由向量生成的 $D(G_0)$-子模的闭包

$$\delta * \nu \otimes \ell - \delta \otimes \nu * \ell \quad \text{, for } \delta\in D(G_0),\ \nu\in D(\mathfrak{g}, P_0),\ \ell\in V_b',$$

其中 V_b' 是由推论 1.6.20 给出的分别连续的 $D(\mathfrak{g}, P_0)$-模。利用注 1.5.9，我们得出如下结论：

命题 3.2.6。存在一个 $D(G_0)$-模的典范拓扑同构

$$\left(\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n)\right)_b' \cong D(G_0)\,\widehat{\otimes}_{D(\mathfrak{g},P_0)}\, V_b'.$$

3.3. $H^0(\mathcal{X},\mathcal{E})_b'$ 的子商作为局部解析 $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$-表示。就局部解析 G_0-表示而言，上述命题 3.2.6 已经描述了

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ind}_{P^n}^{G_0}\left(\widetilde{H}^q_{\mathbb{P}_K^{d-q}(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}_K^d,\mathcal{E})_b' \otimes_K v_{Q^n}^{P^n}\right)$$

定理 3.1.5 中出现的项。不过，我们希望将其扩展为局部解析 G-表示的描述，或者等价地，描述为 $D(G)$-模。

引理 3.3.1。(i) 存在一个 $D(G_0)$-$D(P)$-双模的拓扑同构

$$D(G_0)\otimes_{D(P_0),\iota} D(P) \xrightarrow{\cong} D(G)\,,\quad \mu\otimes\nu\longmapsto \mu*\nu,$$

（参见 *[73,* 引理 6.1 (i)*]*，其中给出了代数层面的表述。）

(ii) 对于分别连续的 $D(\mathfrak{g},P)$-模 M，自然嵌入 $D(G_0)\hookrightarrow D(G)$ 诱导出一个拓扑同构

$$D(G_0)\,\widehat{\otimes}_{D(\mathfrak{g},P_0),\iota} M \xrightarrow{\cong} D(G)\,\widehat{\otimes}_{D(\mathfrak{g},P),\iota} M\,,\quad \delta\otimes\ell\mapsto\delta\otimes\ell, \tag{3.24}$$

$D(G_0)$-模之间的同构。

证明。对于 (i)，证明代数性陈述时，基本上可沿用 [73, 引理 6.1 (i)] 的证明：岩泽分解 $G=G_0P$，其中 $G_0\cap P=P_0$ （见 [16, §3.5]），给出了由紧开子集组成的不交覆盖 $G=\bigcup_{p\in P_0\backslash P} G_0p$。根据命题 1.4.2 (iii)，这得到一个拓扑同构

$$D(G)\cong\bigoplus_{p\in P_0\backslash P} D(G_0)*\delta_p$$

$D(G_0)$-$D(P)$-双模之间的同构，以及 $D(P_0)$-$D(P)$-双模之间的同构

$$D(P)\cong\bigoplus_{p\in P_0\backslash P} D(P_0)*\delta_p.$$

此外，存在一个拓扑同构 [46, 引理 1.2.13]

$$D(G_0)\otimes_{K,\iota}\left(\bigoplus_{p\in P_0\backslash P} D(P_0)*\delta_p\right)\cong\bigoplus_{p\in P_0\backslash P} D(G_0)\otimes_{K,\iota} D(P_0)*\delta_p$$

$D(G_0)$-$D(P)$-双模之间的同构。取商后，我们得到拓扑同构

$$\begin{aligned} D(G_0)\otimes_{D(P_0),\iota} D(P) &\cong D(G_0)\otimes_{D(P_0),\iota}\left(\bigoplus_{p\in P_0\backslash P} D(P_0)*\delta_p\right)\\ &\cong\bigoplus_{p\in P_0\backslash P} D(G_0)\otimes_{D(P_0),\iota} D(P_0)*\delta_p\\ &\cong\bigoplus_{p\in P_0\backslash P} D(G_0)*\delta_p\cong D(G). \end{aligned}$$

$D(G_0)$-$D(P)$-双模的。

对于 (ii)，显然，连续同态 $D(G_0)\otimes_{K,\iota} M\to D(G)\otimes_{K,\iota} M$ 通过商之间的同态诱导出连续同态 (3.24)

$$D(G_0)\otimes_{D(\mathfrak{g},P_0),\iota} M\longrightarrow D(G)\otimes_{D(\mathfrak{g},P),\iota} M$$

并完成。此外，利用(i)的陈述和引理1.5.11 (ii)，我们有一个 $D(G_0)$-模的拓扑同构

$$D(G)\otimes_{K,\iota} M \cong \big(D(G_0)\otimes_{D(P_0),\iota} D(P)\big)\otimes_{K,\iota} M \cong D(G_0)\otimes_{D(P_0),\iota}\big(D(P)\otimes_{K,\iota} M\big).$$

结合良定义的连续同态 $D(G_0)$-模

$$D(G_0)\otimes_{D(P_0),\iota}\big(D(P)\otimes_{K,\iota} M\big)\longrightarrow D(G_0)\otimes_{D(\mathfrak{g},P_0),\iota} M,$$
$$\delta\otimes\lambda\otimes\ell\longmapsto\delta\otimes\lambda.\ell.$$

我们得到 $D(G)\otimes_{K,\iota} M \to D(G_0)\otimes_{D(\mathfrak{g},P_0)\,\iota} M$。该同态可通过商因子分解为 o-
商为

$$D(G)\otimes_{D(\mathfrak{g},P),\iota} M\longrightarrow D(G_0)\otimes_{D(\mathfrak{g},P_0),\iota} M,$$

并且可以验证，后一个同态的完备化是 (3.24) 的逆映射。 □

定理 3.3.2. 设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathbb{P}^d_K$ 上的 G-等变向量丛。对于定理 3.1.5 中子商描述右侧出现的各项，存在 $D(G)$-模之间的拓扑同构

$$\Big(\varinjlim_{n\in\mathbb{N}}\operatorname{Ind}_{P^n_{d-q}}^{G_0}\Big(\widetilde{H}^q_{\mathbb{P}^{d-q}_K(\varepsilon_n)}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})'_b\otimes_K v_{Q^n_{d-q}}^{P^n_{d-q}}\Big)\Big)'_b$$
$$\cong D(G)\,\widehat{\otimes}_{D(\mathfrak{g},P_{d-q}),\iota}\left(\widetilde{H}^q_{(\mathbb{P}^{d-q}_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})\,\widehat{\otimes}_K\left(v_{B_q}^{\mathrm{GL}_q(K)}\right)'_b\right),$$

对于 $q=1$、.. .、 d。这里， P_{d-q}通过其标准 Levi 因子的子群 GL$_q(K)$ 的膨胀作用于 L_{d-q} 在 $v^{\mathrm{GL}_q(K)\ B_q(K)}$ 上，而 hy(G) 在那里平凡作用 [10]。

证明。我们保留 $r=d-q\in\{0,\dots,d-1\}$ 固定时的简化记号，并记P := P$_{d-q}$、Q :=Q$_{d-q}$。结合拓扑同构

$$\Big(\varinjlim_{n\in\mathbb{N}}\operatorname{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n)\Big)'_b\cong D(G_0)\,\widehat{\otimes}_{D(\mathfrak{g},P_0)}\,V'_b$$

由命题 3.2.6（通过拓扑嵌入得到）

$$\iota\colon\ \varinjlim_{n\in\mathbb{N}}\operatorname{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n)\hookrightarrow C^{\mathrm{la}}(G_0,K)\,\widehat{\otimes}_K\,V$$

结合引理 3.3.1 (ii) 的表述，已经给出了 $D(G_0)$-模的拓扑同构

$$\omega\colon\ \Big(\varinjlim_{n\in\mathbb{N}}\operatorname{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n)\Big)'_b\xrightarrow{\cong}D(G)\,\widehat{\otimes}_{D(\mathfrak{g},P),\iota}\,V'_b.$$

还需证明 ω 是 $D(G)$-线性的。

为此，我们首先构造一个 G-等变同态

$$\tilde{\iota}\colon\ \varinjlim_{n\in\mathbb{N}}\operatorname{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n)\longrightarrow C^{\mathrm{la}}(G,V)$$

它与 ι 及限制映射相容

$$(_)|_{G_0}\colon C^{\mathrm{la}}(G,V)\longrightarrow C^{\mathrm{la}}(G_0,V),\quad f\longmapsto f|_{G_0},$$

其意义为 $(\ )|_{G_0}\circ\tilde{\iota}=\iota$。令 $f\in\operatorname{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n)$ 对应于局部解析函数$f\colon G_0\to V_n$，使得对所有 $g\in G_0$, $p\in P^n$，均有 $f(gp)=p^{-1}.f(g)$。我们定义如下关联函数 $\tilde{f}\in C^{\mathrm{la}}(G,V)$。对于具有岩泽分解 $g=g_0p$ 的 $g\in G$，其中$g_0\in G_0$, $p\in P$，我们令

$$\tilde{f}(g)=p^{-1}.f(g_0)\in V$$

[10]由于 $v^{\mathrm{GL}_q(K)\ B_q}$ 带有最细局部凸拓扑， $\left(v^{\mathrm{GL}_q(\quad K}_{B_q}\right)'\ )^{B_q}$ 等于代数对偶。 $v^{\mathrm{GL}_q(K)\ B_q}$ 的光滑对偶是其一个 K-子空间，但这种嵌入一般不是等式。

其中 p^{-1} 作用于 $f(g_0) \in V$，如注释 3.2.2 中所述。这给出了一个良定义的函数$\tilde{f}\colon G \to V$，因为对于另一个分解 $g = g_0'p'$（其中 $g_0' = g_0p_0^{-1}$、 $p' = p_0p$），存在某个 $p_0 \in P_0$，使得 we have

$$\tilde{f}(g_0'p') = (p')^{-1}.f(g_0') = p^{-1}.p_0^{-1}.f(g_0p_0^{-1}) = p^{-1}.f(g_0) = \tilde{f}(g)$$

作为 $p_0 \in P^n$。

˜函数 f 是局部解析的：对于满足 $g \in G_0$、 $p \in P$ 的固定 $g = g_0p$，我们考虑 g 的开邻域 G_0p。在其中， $\tilde{f}|_{G_0p}\colon\ hp \mapsto \tilde{f}(hp) = p^{-1}.f(h)$由于 f 是局部解析的，根据命题1.2.14 (i) 也是局部解析的。总之，我们得到了所寻求的同态

$$\tilde{\iota}\colon \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n) \longrightarrow C^{\mathrm{la}}(G,V)\,, \quad f \longmapsto \tilde{f},$$

与 $(\,)|_{G_0} \circ \tilde{\iota} = \iota$。

接下来我们想证明， $\tilde{\iota}$ 关于左正则 G-作用[11] 在$C^{\mathrm{la}}(G,V)$上的作用是 G-等变的。为此，设 $f \in \operatorname{Ind}_{P^m}^{G_0}(V_m)$ 由$\sum_{i=1}^{s_m} g_i \bullet v_i$给出，使得 $f(g_ip) = p^{-1}.v_i$， 对于 $p \in P^m$。按照惯例， g_1、 $\ldots$、 g_{s_m}表示 G_0/P^m的陪集代表元。

固定 $g \in G$，并希望证明 $\tilde{\iota}(g.f) = g.\tilde{\iota}(f)$。令 $n \geq m$ 如注记 3.1.4 中所述，使得 $P^n/Q \subset p_{g,\ j}P^m/Q$，其中 $p_{g,\ j} := h_j^{-1}gg_{\sigma_g(j)}$。那么我们已经看到

$$g.f = g.\Big(\sum_{i=1}^{s_m} g_i \bullet v_i\Big) = \sum_{j=1}^{s_n} h_j \bullet \tau_{p_{g,j}}(v_{\sigma_g(j)}) \in \operatorname{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n).$$

现在考虑 $h \in G$，并令 $j \in \{1,\ldots,s_n\}$ 满足 $h \in h_jP^n/P$，即 $h = h_jp_{(n)}p$，其中 $p_{(n)} \in P^n$、 $p \in P$。我们计算得

$$\begin{aligned}\big(\tilde{\iota}(g.f)\big)(h) &= \big(\tilde{\iota}(g.f)\big)(h_jp_{(n)}p) = p^{-1}.\big((g.f)(h_jp_{(n)})\big)\\ &= p^{-1}.p_{(n)}^{-1}.\tau_{p_{g,j}}(v_{\sigma_g(j)}) = (\tau_{p^{-1}} \circ \tau_{p_{(n)}^{-1}} \circ \tau_{p_{g,j}})(v_{\sigma_g(j)}).\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$g^{-1}h = (g_{\sigma_g(j)}p_{g,j}^{-1}h_j^{-1})(h_jp_{(n)}p) = g_{\sigma_g(j)}p_{g,j}^{-1}p_{(n)}p.$$

因此

$$\begin{aligned}\big(g.\tilde{\iota}(f)\big)(h) &= \tilde{\iota}(f)(g^{-1}h) = \tilde{\iota}(f)(g_{\sigma_g(j)}p_{g,j}^{-1}p_{(n)}p)\\ &= \big(p_{g,j}^{-1}p_{(n)}p\big)^{-1}.f(g_{\sigma_g(j)}) = (\tau_{p^{-1}} \circ \tau_{p_{(n)}^{-1}} \circ \tau_{p_{g,j}})(v_{\sigma_g(j)})\end{aligned}$$

这表明 $\tilde{\iota}$ 确实是 G-等变的。

现在我们使用命题 1.4.7 中的单射连续积分同态 (i)
连同 [67, 推论 18.8]，得到

$$C^{\mathrm{la}}(G,V) \longrightarrow \mathcal{L}_b(D(G),V) \cong D(G)_b' \mathbin{\widehat{\otimes}_{K,\pi}} V.$$

由于 $C^{\mathrm{la}}(G,V)$ 根据推论 1.2.16 是自反的，因此得到一个单射连续同态

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ind}_{P^n}^{G_0}(V_n) \xrightarrow{\tilde{\iota}} C^{\mathrm{la}}(G,V) \longrightarrow C^{\mathrm{la}}(G,K) \mathbin{\widehat{\otimes}_{K,\pi}} V$$

我们仍将其称为 $\tilde{\iota}$。

此外，设 $G = \bigcup_{i\in I} g_iG_0$ 是一个不交覆盖，其陪集代表元为 g_i （属于 G/G_0），使得 $C^{\mathrm{la}}(G,K) \cong \prod_{i\in I} C^{\mathrm{la}}(g_iG_0,K)$ 且 $D(G) \cong \bigoplus_{i\in I} D(g_iG_0,K)$。那么存在

[11] 由于 G 不是紧的，左正则 G-表示并非局部解析，但它仍然连续 ev-
。

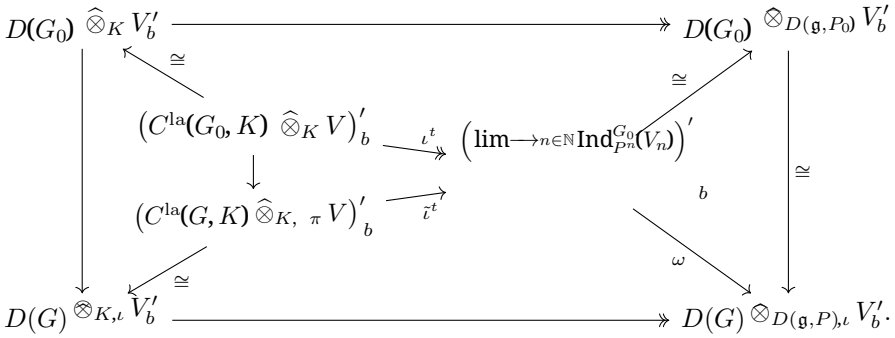
拓扑同构

$$\begin{aligned}
\big(C^{\mathrm{la}}(G,K)\,\widehat{\otimes}_{K,\pi}\,V\big)'_b &\cong \Big(\prod_{i\in I} C^{\mathrm{la}}(g_iG_0,K)\,\widehat{\otimes}_K\,V\Big)'_b && \text{, by [13, Lemma 2.1 (iii)]}\\
&\cong \bigoplus_{i\in I}\big(C^{\mathrm{la}}(g_iG_0,K)\,\widehat{\otimes}_K\,V\big)'_b && \text{, by [67, Prop. 9.11]}\\
&\cong \bigoplus_{i\in I} D(g_iG_0,K)\,\widehat{\otimes}_K\,V'_b && \text{, by [27, Prop. 1.1.32 (ii)]}\\
&\cong D(G)\,\widehat{\otimes}_{K,\iota}\,V'_b. && \text{, by [46, Cor. 1.2.14]}
\end{aligned}$$

由此得到的 G-等变同构可嵌入交换方阵

$$\begin{array}{ccc}
\big(C^{\mathrm{la}}(G_0,K)\,\widehat{\otimes}_K\,V\big)'_b & \longrightarrow & \big(C^{\mathrm{la}}(G,K)\,\widehat{\otimes}_{K,\pi}\,V\big)'_b\\
\cong\downarrow & & \downarrow\cong\\
D(G_0)\,\widehat{\otimes}_K\,V'_b & \longrightarrow & D(G)\,\widehat{\otimes}_{K,\iota}\,V'_b
\end{array}$$

其中，顶部的水平同态是 $(\,)|_{G_0}$ 的转置，底部的水平同态则由嵌入 $D(G_0)\hookrightarrow D(G)$ 诱导。最终我们得到交换图



由于 ι^t 是满射，因此 $\tilde{\iota}^t$也是满射。由此可知，诱导的拓扑同构 ω 是 G-等变的，因为下方“方形”中的所有其他同态都是如此。利用狄拉克分布在 $D(G)$中的稠密性，我们得出 ω 是 $D(G)$-线性的。□

3.4. Orlik–Strauch 的函子 $\mathcal{F}_P^G$。本节旨在将我们在定理 3.3.2 中的描述与 Orlik 和 Strauch 在 [58] 中引入的函子 $\mathcal{F}_P^G$ 联系起来。为此，我们假设非阿基米德局部域 K 是混合特征的，即 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张。我们先回顾函子 $\mathcal{F}_P^G$ 的定义，但为简便起见，仅假设定义域 L 与系数域 K 一致。我们将 K 的绝对值归一化，使得 $|p|=p^{-1}$。

设 G 是 K 上的连通分裂约化群。我们固定一个分裂极大环面和一个博雷尔子群 $\mathbf{T}\subset\mathbf{B}\subset\mathbf{G}$，以及一个标准抛物子群 $\mathbf{P}\supset\mathbf{B}$，其 Levi 分解为 $\mathbf{P}=\mathbf{L_P}\mathbf{U_P}$，且 $\mathbf{T}\subset\mathbf{L_P}$。我们假设 G 及上述子群均已定义在 $\mathcal{O}_K$ 上。令 $G=\mathbf{G}(K)$、$P=\mathbf{P}(K)$ 等表示相应的局部K-解析李群，并滥用记号将其记为 $G_0=\mathbf{G}(\mathcal{O}_K)$、$P_0=\mathbf{P}(\mathcal{O}_K)$ 等。此外，令 $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$、$\mathfrak{p}=\mathrm{Lie}(\mathbf{P})$ 等表示相应的李代数。我们考虑泛包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 的模的以下子范畴。

定义 3.4.1（[58, §2.5]）。（i）令 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 为 $U(\mathfrak{g})$-模 M 的满子范畴，满足

(1) M 作为一个 $U(\mathfrak{g})$-模是有限生成的，(2) 视为一个 $\mathfrak{l}_{\mathbf{P}}$-模，$M$ 是有限维简单模的直和，

(3) $\mathfrak{u}_{\mathbf{P}}$ 对 M 的作用是局部有限的，也就是说，对于每个 $m \in M$， K-向量子空间$U(\mathfrak{u}_{\mathbf{P}})$ $m \subset M$ 都是有限维的。

(ii) 令 $\mathrm{Irr}(\mathfrak{l}_{\mathbf{P}})^{\mathrm{fd}}$ 为有限维不可约 $\mathfrak{l}_{\mathbf{P}}$表示的同构类集合。我们将 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 代数 定义为 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 的满子范畴，其对象是满足下述条件的 $U(\mathfrak{g})$-模 M： 对于如下分解

$$M = \bigoplus_{\mathfrak{a} \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{l}_{\mathbf{P}})^{\mathrm{fd}}} M_{\mathfrak{a}}$$

按 (2) 所示分解为 $\mathfrak{a}$-等型分量后，我们有：若 $M_{\mathfrak{a}} \neq (0)$，则 $\mathfrak{a}$ 是由有限维代数 $\mathbf{L_P}$-表示诱导的李代数表示。

注意，对于 $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$, $\mathcal{O} := \mathcal{O}^{\mathfrak{b}}$ 是经典范畴 $\mathcal{O}$ 的推广；该范畴由 Bernstein、Gelfand 和 Gelfand 为复数域上的半单李代数引入。

函子 $\mathcal{F}_P^G$ 从 [58, §3,4] 定义如下：令 $M \in \mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 代数，并设 V 是 Levi 子群 $L_{\mathbf{P}} \subset P$ 在 K-向量空间上的光滑容许表示。我们通过膨胀将 V 视为光滑 P-表示，并赋予它最细的局部凸拓扑，使其成为紧型的局部解析 P-表示，参见[75, §2]。根据对 $M \in \mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$的条件，存在一个有限维的 $U(\mathfrak{p})$-子模$W \subset M$，它生成作为 $U(\mathfrak{g})$-模的 M，也就是说，存在一个 $U(\mathfrak{g})$-模的短正合列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{d} \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} W \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

那么，该 $\mathfrak{p}$表示 W 唯一地提升为 W [58, 上的代数 P-表示结构。引理 3.2]。存在一个配对（参见 [58, (3.2.2)]）

$$\langle _, _ \rangle_{C^{\mathrm{la}}(G,V)} \colon D(G) \otimes_{D(P)} W \times \mathrm{Ind}_P^G(W' \otimes_K V) \longrightarrow C^{\mathrm{la}}(G, V),$$
$$(\delta \otimes w, f) \longmapsto \big[g \mapsto \big(\delta *_r (\mathrm{ev}_w \circ f)\big)(g) \big].$$

这里我们使用来自 [67, Cor. 18.8] 的 $W' \otimes_K V \cong \mathcal{L}_b(W, V)$ 这一识别，并将求值同态记作 $\mathrm{ev}_w \colon \mathcal{L}_b(W, V) \to V$, $h \mapsto h(w)$。此外，“$*_r$”表示由 G 的右正则作用诱导的、在 $C^{\mathrm{la}}(G, V)$ 上的 $D(G)$- 模作用（见例 1.3.7 (ii) ）。通过单射时时彩官网

$$U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} W \hookrightarrow D(G) \otimes_{D(P)} W$$

可以考虑 $\mathrm{Ind}_P^G(W' \otimes_K V)$中被 $\mathfrak{d}$ 湮灭的子空间并定义 [58, (4.4.1)]

$$\mathcal{F}_P^G(M, V) := \mathrm{Ind}_P^G(W' \otimes_K V)^{\mathfrak{d}} = \big\{ f \in \mathrm{Ind}_P^G(W' \otimes_K V) \,\big|\, \forall \mathfrak{z} \in \mathfrak{d} : \langle \mathfrak{z}, f \rangle_{C^{\mathrm{la}}(G,V)} = 0 \big\}.$$

所得的 $\mathcal{F}_P^G(M, V)$ 是一个容许的[12] 局部解析 G-表示，若 V 具有有限长度 [58, ，则它甚至是强容许的[13] （命题 4.8]）。此构造给出一个正合双函子

$$\mathcal{F}_P^G \colon \mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}} \times \mathrm{Rep}_K^{\mathrm{sm,adm}}(L_{\mathbf{P}}) \longrightarrow \mathrm{Rep}_K^{\mathrm{la,adm}}(G), \quad (M, V) \longmapsto \mathcal{F}_P^G(M, V),$$

关于 M 反变、关于 V 协变，见 [58, 命题 4.7]。

当 $V = K$ 是平凡表示时， $M \in \mathcal{O}^{\mathfrak{p}}{}_{\mathrm{alg}}$ 的 $\mathcal{F}_P^G(M) = \mathcal{F}_P^G(M, K)$ 还有另一种描述。由于 M 是有限维 $U(\mathfrak{p})$-子模的并，通过将每个子模提升为一个代数 P-表示，可在 M 上得到一个 $D(P)$-模结构，参见 [58, §3.4]。这给出了 M 上唯一的 $D(\mathfrak{g}, P)$-模结构，使得 $U(\mathfrak{p})$ 的两种作用一致，并且狄拉克分布 $\delta_p \in D(P)$ 的作用如同群元素 $p \in P$ 在 M ([58, 推论 3.6]) 上的作用。于是有 [58, 命题 3.7] 中的 $D(G)$-模同构，以及 $D(G_0)$-模同构。

$$\mathcal{F}_P^G(M)' \cong D(G) \otimes_{D(\mathfrak{g},P)} M \cong D(G_0) \otimes_{D(\mathfrak{g},P_0)} M. \tag{3.25}$$

根据 [71, 定理5.1] ，局部解析分布代数 $D(G_0)$是弗雷 ′歇–施泰因代数，因为 G_0 是紧的。由此可知， $D(G) \otimes_{D(\mathfrak{g},P)} M$是一个余容许的 $D(G)$-模 [58, 命题。

[12]按照 [71,§6].[13] 的意义。也就是说，作为任意（等价地，某个）紧开子群 $H \subset G$ 的表示，它在 [74, §3], 的意义下是强容许的，即其强对偶作为 $D(H)$-模是有限生成的。

3.7]. 回顾一下，任何余容许模都可以赋予一个规范的 Fr´echet–Stein 代数上的 Fr´echet 拓扑 [71, §3]。我们注意到，关于此拓扑，(3.25) 是一个拓扑同构。

注记 3.4.2。预期对于非平凡情形，类似于 (3.25) 的描述同样成立 of 也如此。事实上，在 [1] Agrawal 和 Strauch 考虑了由下式定义的函子

$$\check{\mathcal{F}}_P^G(M,V) := D(G)\otimes_{D(\mathfrak{g},P)} \big(\mathrm{Lift}(M,\log)\otimes_K V'\big)$$

将 $\mathcal{F}_P^G$ 推广到 M 为扩张闭包 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p},\infty}{}_{\mathrm{alg}}$ of $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}{}_{\mathrm{alg}}$ 的元素的情形。他们证明，由此得到的 $D(G)$-模 $\check{}\mathcal{F}_P^G(M,V)$ 是余容许的，见 [1, 定理 4.2.3]。

现在回到 $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_{d+1,K}$ 的具体情形。如第 3.1 节末尾所述，Orlik 在 [56, 引理 1.2.1] 中证明，$U(\mathfrak{g})$-模 $\widetilde{H}^q_{\mathbb{P}^{d-q}_K}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$ 包含于 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_{d-q}}{}_{\mathrm{alg}}$ 中。此外，令 $\mathbf{B}_q = \mathbf{B}\cap\mathbf{GL}_{q,K}\,\mathbf{LP}_{d-q}$ 表示 $\mathbf{GL}_{q,K}\hookrightarrow\mathbf{LP}_{d-q}$ 的诱导博雷尔子群。那么，Steinberg 表示 $v^{\mathrm{GL}_q(K)\ B_q}$ 是 $\mathbf{GL}_q(K)$ 的不可约光滑表示（[17, 定理 2 (a)]），因此也是 P_{d-q} 的不可约光滑表示。随后，Orlik 得到局部解析 G-表示 (3.13) 的如下同构描述

$$\mathcal{F}^G_{P_{d-q}}\Big(\widetilde{H}^q_{\mathbb{P}^{d-q}_K}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E}), v^{\mathrm{GL}_q(K)}_{B_q}\Big). \tag{3.26}$$

扩张（3.12）的另一项 $H^q(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})'\otimes_K v^G_{Q_{d-q}}$ 也是一个强容许的局部解析 G 表示，参见引理 2.4] 的证明 [58, 。因此，这两项之间的扩张 $(V^q/V^{q-1})'_b$ 是强容许的。由于 Orlik 的描述中这些（强）容许表示之间的同态必然是严格的（见 [71, 命题 6.4 (ii)]），我们可以得出，（3.26）与.....的强对偶之间存在一个拓扑同构。

$$D(G)\,\widehat{\otimes}_{D(\mathfrak{g},P_{d-q}),\iota}\left(\widetilde{H}^q_{(\mathbb{P}^{d-q}_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})\,\widehat{\otimes}_K\left(v^{\mathrm{GL}_q(K)}_{B_q}\right)'_b\right) \tag{3.27}$$

根据我们在定理 3.3.2 中的描述，由商的唯一性。

我们从推论 2.5.5 得知 $H^q(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$ 是其子空间 $\widetilde{H}^q_{\mathbb{P}^{d-q}_K}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$ 的完备化。因此 (3.27) 只不过是其豪斯多夫完备化。

$$D(G)\otimes_{D(\mathfrak{g},P_{d-q}),\iota}\left(\widetilde{H}^q_{\mathbb{P}^{d-q}_K}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})\otimes_{K,\pi}\left(v^{\mathrm{GL}_q(K)}_{B_q}\right)'_b\right). \tag{3.28}$$

因此，自然会问：当赋予后者以其典范的 Fr´echet 拓扑时，这个豪斯多夫完备化与作为 (3.28) 基础的余容许 abstract $D(G)$-模之间有何关系。我们在推论 3.4.9 中回答了这一问题，证明二者一致，即 (3.28) 本身已经是完备的，并且其局部凸拓扑与典范的 Fr´echet 拓扑相同。

为此使用的第一个要素，我们回到本节开头所考虑的连通分裂约化群 $\mathbf{G}$ 的一般设置。在 $U(\mathfrak{g})\subset D(G)$ 上赋予子空间拓扑，并对 $U(\mathfrak{g})$ 的所有子代数也作同样处理。由于 $U(\mathfrak{g})$ 已包含在 $D(G_0)$ 中，而后者是一个 K-Fr´echet 代数，因此 $U(\mathfrak{g})$ 及其子代数由此成为（联合连续的）局部凸 K-代数。

我们希望对 $U(\mathfrak{g})$ 的这一拓扑给出具体描述。令 $\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_s$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个 K-基，并且 $\varepsilon>0$。通过由 $\mathfrak{x}_1^{k_1}\cdots\mathfrak{x}_s^{k_s}$（其中 $\underline{k}\in\mathbb{N}_0^s$）组成的 $U(\mathfrak{g})$ 的相应 PBW 基，我们定义范数

$$\Big|\sum_{\underline{k}\in\mathbb{N}_0^s} a_{\underline{k}}\mathfrak{x}_1^{k_1}\cdots\mathfrak{x}_s^{k_s}\Big|_\varepsilon := \sup_{\underline{k}\in\mathbb{N}_0^s}|a_{\underline{k}}|\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{|\underline{k}|} \tag{3.29}$$

在 $U(\mathfrak{g})$ 上，其中 $|\underline{k}| := k_1+\ldots+k_s$。

引理 3.4.3. 由范数族 $|_|_\varepsilon$（$0<\varepsilon<1$）在 $U(\mathfrak{g})$ 上规定的拓扑，等于将 $U(\mathfrak{g})$ 视为 $D(G)$ 的子空间所定义的拓扑。

证明。根据 [74, 引理2.4]，$U(\mathfrak{g})\subset D_e(G)\subset D(G)$ 的子空间拓扑由范数族定义

$$\left\|\sum_{\underline{k}\in\mathbb{N}_0^s} a_{\underline{k}}\,\mathfrak{x}_1^{k_1}\cdots\mathfrak{x}_s^{k_s}\right\|_\varepsilon := \sup_{\underline{k}\in\mathbb{N}_0^s}|a_{\underline{k}}\,\underline{k}!|\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{|\underline{k}|},$$

对于 $\varepsilon>0$，其中 $\underline{k}!:=(k_1!)\cdots(k_s!)$。这里 $\|_\|_\varepsilon$ 给出的拓扑比 $\|_\|_{\varepsilon'}$ 的拓扑更精细，对于 $\varepsilon\le\varepsilon'$。我们立即得到 $\|_\|_\varepsilon\le|_|_\varepsilon$，因为 $|\underline{k}!|\le 1$。

另一方面，根据勒让德公式，对于 $n!$ 的 p-进赋值，我们得到 $v_p(n!)\le\frac{n}{p-1}$，对于 $n\in\mathbb{N}$。因此

$$|\underline{k}!|=p^{-v_p(\underline{k}!)}\ge\left(p^{\frac{1}{p-1}}\right)^{-|\underline{k}|}.$$

由此得到 $\|_\|_\varepsilon\ge|_|_{p^{\frac{1}{p-1}}\varepsilon}$，从而我们得出，由族 $(|_|_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ 定义的拓扑等于由族 $(\|_\|_\varepsilon)_{0<\varepsilon}$ 定义的拓扑。 □

注 3.4.4。在 [63, 定理 2.1] 中，Schmidt 证明了：对于 $0<\varepsilon<1$，$U(\mathfrak{g})$ 关于范数族 $\lvert_\rvert_\varepsilon$ 的完备化，与 $U(\mathfrak{g})$ 的 Arens–Michael 包络之间存在一个自然的拓扑 K- 代数同构。后者定义为 $U(\mathfrak{g})$ 关于 $U(\mathfrak{g})$ 上所有次乘性半范数的豪斯多夫完备化。利用 $U(\mathfrak{g})\subset D(G)$ 关于子空间拓扑的完备化就是它在 $D(G)$ 中的闭包 $D_e(G)$（见推论 1.6.13），可得拓扑 K-代数 $U(\mathfrak{g})\cong D_e(G)$ 之间也存在一个自然同构 $\widehat{\ }$。

回顾一下，我们在 $U(\mathfrak{g})\subset D(G)$ 上固定了子空间拓扑，现在考虑一个有限生成的 $U(\mathfrak{g})$-模 M（例如 $M\in\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}{}_{\mathrm{alg}}$）。根据假设，我们于是得到某个 $n\in\mathbb{N}$ 以及一个从 $U(\mathfrak{g})$-模

$$U(\mathfrak{g})^{\oplus n}\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow M. \tag{3.30}$$

引理3.4.5. (i)当 M 通过(3.30)赋予商拓扑时，它成为一个局部凸的 $U(\mathfrak{g})$-模。其豪斯多夫完备化是一个核的 K-弗雷 ´歇空间。(ii) 任意同态 $f\colon M\to M'$，其中 $M\to M'$ 是有限生成的 $U(\mathfrak{g})$-模，在 M 和 M' 赋予如上某个满同态所诱导的商拓扑时，都是连续且严格的。特别地，M 上的这个拓扑不依赖于满同态 (3.30) 的选择。

证明。对于 (i)，由于 M 上的商拓扑是局部凸的，我们只需证明乘法 $U(\mathfrak{g})\times M\to M$ 是连续的。为此，我们考虑交换图。

$$\begin{array}{ccc} U(\mathfrak{g})\times U(\mathfrak{g})^{\oplus n} & \longrightarrow & U(\mathfrak{g})^{\oplus n} \\ \downarrow\!\!\!\downarrow & & \downarrow\!\!\!\downarrow \\ U(\mathfrak{g})\times M & \longrightarrow & M \end{array}$$

其中，竖直映射由于我们在 M 上选择的拓扑而是开映射。但有限自由 $U(\mathfrak{g})$-模 $U(\mathfrak{g})^{\oplus n}$ 的乘法映射是连续的，这意味着 M 的乘法映射也连续。

$U(\mathfrak{g})$ 的豪斯多夫完备化是其在 $D(G)$ 中的闭包 $D_e(G)$，后者是核的 K-Fr´échet 空间。特别地，$D_e(G)$ 是遗传完备的，参见 [27, Def. 1.1.39] 之后的讨论。因此，严格满同态 (3.30) 诱导出一个严格满同态

$$D_e(G)^{\oplus n}\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow\widehat{M}$$

映到 M 的豪斯多夫完备化上，依据 [13, Cor. 2.2]。作为核的 K-Fr´échet$\widehat{\ }$ 空间 M 的商，它本身也是核的，参见 [67, Prop. 8.3] 和 [67, Prop. 19.4 (ii)]。

对于 (ii)，我们以与 [7, 3.7.3 命题 2]类似的方式进行论证。考虑一个满同态 $\varphi\colon U(\mathfrak{g})^{\oplus n}\twoheadrightarrow M$，其为 $U(\mathfrak{g})$- 模赋予 M 拓扑。然后，同态 $\varphi':=f\circ\varphi$ 是

由于局部凸 $U(\mathfrak{g})$-模M'的加法映射和乘法映射是连续的。根据定义， φ是开映射，因此 f 是连续的。此外， $M/\mathrm{Ker}(f)$ 和 $\mathrm{Im}(f)$ 作为抽象的 $U(\mathfrak{g})$-模同构。实现这一同构的、这些有限生成 $U(\mathfrak{g})$-模之间的同态都是连续的。因此，$M/\mathrm{Ker}(f)$ 和 $\mathrm{Im}(f)$ 拓扑同构，即 f 是严格的。□

引理 3.4.6. 乘法映射 $U(\mathfrak{g}) \times D(P_0) \to D(G_0), (\mu, \delta) \mapsto \mu * \delta$ 诱导出一个拓扑同构

$$U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}),\pi} D(P_0) \xrightarrow{\cong} D(\mathfrak{g}, P_0)$$

$U(\mathfrak{g})$-$D(P_0)$-双模。

证明. 由于卷积乘积在此处是联合连续的，它诱导出一个连续同态 $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}),\pi} D(P_0) \to D(G_0)$，其为 $U(\mathfrak{g})$-$D(P_0)$-双模的同态。根据 [65, 引理 4.1]该同态是单射，且其像恰为 $D(\mathfrak{g}, P_0)$。

另一方面，令 $\mathfrak{u}^-$ 表示 P 的对立幺零根基 U^- 的李代数。于是直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^- \oplus \mathfrak{p}$ 给出一个同构 $U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{u}^-) \otimes_K U(\mathfrak{p})$。如注 3.4.4 所述，关于子空间拓扑 $\widehat{}$的 $U(\mathfrak{g})$ 的完备化 $U(\mathfrak{g}) \subset D(G)$，与 $U(\mathfrak{g})$ 的 Arens–Michael 包络 $U(\mathfrak{g})$ 拓扑同构，其中后者是在 [64, §3.2] 中考察的。因此我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \widehat{U}(\mathfrak{u}^-) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{K,\pi} \widehat{U}(\mathfrak{p}) & \xrightarrow{\cong} & \widehat{U}(\mathfrak{g}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ U(\mathfrak{u}^-) \otimes_{K,\pi} U(\mathfrak{p}) & \longrightarrow & U(\mathfrak{g}) \end{array}$$

其中竖直映射是典范嵌入，而上方的映射由 [64, 引理 3.2.4] 是拓扑同构。由 [49, 引理 2] 可知，双射连续同态 $U(\mathfrak{u}^-) \otimes_{K,\pi} U(\mathfrak{p}) \to U(\mathfrak{g})$ 是严格的，因此是拓扑同构。

利用这个拓扑同构、引理 1.5.11 (ii) 以及射影张量积的正合性（见 [13, 引理 2.1 (ii)]），我们得到拓扑嵌入

$$U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}),\pi} D(P_0) \cong U(\mathfrak{u}^-) \otimes_{K,\pi} D(P_0) \hookrightarrow D(U_0^-) \otimes_{K,\pi} D(P_0) \hookrightarrow D(U_0^-) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{K,\pi} D(P_0).$$

群乘法诱导出一个同构 $U_0^- \times P_0 \cong G_0$，由此得到一个拓扑同构

$$D(U_0^-) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{K,\pi} D(P_0) \cong D(U_0^- \times P_0) \cong D(G_0).$$

这个同构由 $D(G_0)$ 中的乘法给出，如 con 的定义中所示 vo-
卷积积的证明中所示，见命题 1.4.3。因此我们得到交换方 e

$$\begin{array}{ccc} D(U_0^-) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{K,\pi} D(P_0) & \xrightarrow{\cong} & D(G_0) \\ \uparrow & & \uparrow \\ U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}),\pi} D(P_0) & \longrightarrow & D(\mathfrak{g}, P_0) \end{array}$$

其中垂直映射都是严格单态射。再次，由 [49, 引理 2] 可知，$U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}),\pi} D(P_0) \to D(\mathfrak{g}, P_0)$ 也是严格的，因此它是一个拓扑同构，正如所述。□

命题 3.4.7. 设 $M \in \mathcal{O}^{\mathfrak{p}}{}_{\mathrm{alg}}$ 赋予由满同态 (3.30) 诱导的拓扑。此外，设 V 是一个强容许光滑 P-表示，赋予最细局部凸拓扑，并视为 P的局部解析表示。则存在一个分别连续的 $D(G)$-模的拓扑同构

$$D(G) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{D(\mathfrak{g},P),\iota} \left(M \mathbin{\widehat{\otimes}}_{K,\pi} V_b'\right) \cong D(G) \otimes_{D(\mathfrak{g},P)} \left(M \otimes_K V'\right) \tag{3.31}$$

其含义是 $D(G) \otimes_{D(\mathfrak{g},P),\iota} (M \otimes_{K,\pi} V_b')$ 按照定义 1.5.8 定义的对象是完备的，且其拓扑与由其底层（抽象） $D(G)$-模为余容许模所诱导的典范 Fr ´échet 拓扑一致。

证明。根据关于 $M \in \mathcal{O}^{\mathfrak{p}}{}_{\mathrm{alg}}$ 的假设，我们可以找到一个有限维 $U(\mathfrak{p})$-模W和一个满同态 φ: $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} W \twoheadrightarrow M$ 的 $U(\mathfrak{g})$- 模。由于 $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}),\pi} W \cong U(\mathfrak{g})^{\oplus \dim_K(W)}$ 是 $U(\mathfrak{g}) \otimes_{K,\pi} W$ 的商，复合

$$U(\mathfrak{g}) \otimes_{K,\pi} W \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}),\pi} W \xrightarrow{\varphi} M$$

根据引理 3.4.5 (i)，这是一个严格满同态。因此由 [49, 引理 2 (3)] 可知， φ也是一个严格满同态。

利用引理 3.4.6 和引理 1.5.11，存在一个拓扑同构

$$\begin{aligned} D(\mathfrak{g}, P_0) \otimes_{D(P_0),\pi} W &\cong \left(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}),\pi} D(P_0)\right) \otimes_{D(P_0),\pi} W \\ &\cong U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}),\pi} \left(D(P_0) \otimes_{D(P_0),\pi} W\right) \\ &\cong U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}),\pi} W \end{aligned}$$

它将 $\mu * \delta \otimes w$映射到 $\mu \otimes \delta * w$，其中 $\mu \in U(\mathfrak{g})$、 $\delta \in D(P_0)$、 $w \in W$。因此， φ诱导出一个严格满同态

$$D(\mathfrak{g}, P_0) \otimes_{D(P_0),\pi} W \longrightarrow M$$

利用命题 1.6.16 的证明方法，可以验证它是 $D(\mathfrak{g}, P_0)$-线性的。

由于取射影张量积是正合的（见 [13, 引理 2.1 (ii)]），我们得到一个$D(\mathfrak{g}, P_0)$-线性的严格满同态

$$D(\mathfrak{g}, P_0) \otimes_{D(P_0),\pi} \left(W \otimes_{K,\pi} V_b'\right) \cong \left(D(\mathfrak{g}, P_0) \otimes_{D(P_0),\pi} W\right) \otimes_{K,\pi} V_b' \longrightarrow M \otimes_{K,\pi} V_b'$$

再次使用引理1.5.11(ii)。这里我们将 V_b' 上的平凡 $U(\mathfrak{p})$-作用（回顾一下， V 是一个光滑表示）扩展为平凡的 $U(\mathfrak{g})$-作用。我们注意到，该扩展作用与给定的 V 上的 P-作用一起满足定义 1.6.18 的条件 (2)。

此外，局部凸 $D(P_0)$-模$W \otimes_{K,\ \pi} V_b'$作为抽象$D(P_0)$-模是有限生成的，参见 [1, 命题 4.1.5] 和 [1, 命题 6.4.1]。由开映射定理[67, 命题 8.6] ，这样的满同态$D(P_0)^{\oplus n} \twoheadrightarrow W \otimes_{K,\ \pi} V_b'$对于某个 $n \in \mathbb{N}$必然是严格的，因为$W \otimes_{K,\ \pi} V_b'$是一个 K-Fr´echet 空间。因此我们得到一个交换图。

$$\begin{array}{ccc} D(\mathfrak{g}, P_0) \otimes_{K,\pi} D(P_0)^{\oplus n} & \twoheadrightarrow & D(\mathfrak{g}, P_0) \otimes_{K,\pi} \left(W \otimes_{K,\pi} V_b'\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D(\mathfrak{g}, P_0)^{\oplus n} & \longrightarrow & D(\mathfrak{g}, P_0) \otimes_{D(P_0),\pi} \left(W \otimes_{K,\pi} V_b'\right) \end{array}$$

其中，上方的同态根据 [13, 引理 2.1 (ii)]是严格满同态。由[49, 引理 2] 可知，下方的满同态也同样是严格的。

综上，我们得到一个严格满同态（关于抽象模是有限呈示的这一结论，参见 [1, 命题 4.1.5] ）

$$\psi \colon D(\mathfrak{g}, P_0)^{\oplus n} \twoheadrightarrow M \otimes_{K,\pi} V_b'.$$

再次利用射影张量积的正合性，我们得到如下交换图

$$\begin{array}{ccc} D(G_0) \otimes_{K,\pi} D(\mathfrak{g}, P_0)^{\oplus n} & \twoheadrightarrow & D(G_0) \otimes_{K,\pi} \left(M \otimes_{K,\pi} V_b'\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D(G_0)^{\oplus n} & \xrightarrow{\overline{\psi}} & D(G_0) \otimes_{D(\mathfrak{g},P_0),\pi} \left(M \otimes_{K,\pi} V_b'\right) \end{array}$$

其中除最下面的映射外，其余映射显然都是严格满同态。与之前类似，可以证明满同态 $\overline{\psi}$ 是严格的。另一方面，抽象的 $D(G_0)$-模 $D(G_0) \otimes_{D(\mathfrak{g},P_0)} \left(M \otimes_K V_b'\right)$ 由 [1, 定理 4.2.3]可知是余容许的。因此，当 $D(G_0) \otimes_{D(\mathfrak{g},P_0)} \left(M \otimes_K V_b'\right)$ 赋予其典范的 Fr´echet 拓扑（见 [71, §3]）时， $\overline{\psi}$也是严格的。由商的唯一性可知，这个 Fr´echet 拓扑与

定义 1.5.8 中 $D(G_0)\otimes_{D(\mathfrak{g},P_0)\,\pi}(M\otimes_{K,\pi}V_b')$ 上的拓扑一致。特别地，后者已经是完备的，因此取豪斯多夫完备化是多余的：

$$D(G_0)\,\widehat{\otimes}_{D(\mathfrak{g},P_0)}\left(M\,\widehat{\otimes}_{K,\pi}V_b'\right)=D(G_0)\otimes_{D(\mathfrak{g},P_0),\pi}\left(M\otimes_{K,\pi}V_b'\right).$$

注意，由于 $\widehat{M}$ 是一个 K-Fr´echet 空间，根据引理 3.4.5 (i)，$M\,\widehat{\otimes}_{K,\,\pi}V_b'\cong\widehat{M}\,\widehat{\otimes}_{K,\,\pi}V_b'$ 也具有这一性质，这是由 [67, 引理 19.10 (i)] 以及 [67, 命题 17.6] 之后的讨论得到的。因此，$D(G_0)$ 和 $M\,\widehat{\otimes}_{K,\,\pi}V_b'$ 在 $D(\mathfrak{g},P_0)$ 上的射影张量积和归纳张量积一致。最后，岩泽分解给出了同构

$$D(G)\otimes_{D(\mathfrak{g},P)}\left(M\otimes_K V'\right)\cong D(G_0)\otimes_{D(\mathfrak{g},P_0)}\left(M\otimes_K V'\right)$$

的 $D(G_0)$-模（参见 [1, §4.2.2]），且引理 3.3.1 (ii) 给出了拓扑同构

$$D(G)\,\widehat{\otimes}_{D(\mathfrak{g},P),\iota}\left(M\,\widehat{\otimes}_{K,\pi}V_b'\right)\cong D(G_0)\,\widehat{\otimes}_{D(\mathfrak{g},P_0)}\left(M\,\widehat{\otimes}_{K,\pi}V_b'\right)$$

的分别连续 $D(G_0)$-模。它们共同给出了分别连续 $D(G)$-模的拓扑同构 (3.31)。□

我们回到定理 3.3.2 中的具体情形：$\mathsf{G}=\mathrm{GL}_{d+1,K}$ 和抛物子群 $\mathsf{P}=\mathsf{P}_r$，其中 $r\in\{0,\dots,d-1\}$。我们希望应用命题 3.4.7 来证明 (3.28) 是完备的，且其局部凸拓扑与典范的 Fr´echet 拓扑一致。

设 $I\subset\{0,\dots,d\}$ 是一个非空子集，并令 $U_I\subset\mathbb{P}^d_K$ 表示第 2.4 节中所讨论的相应主开子集的交。通过这个可数容许覆盖

$$U_I^{\mathrm{rig}}=\bigcup_{\substack{0<\varepsilon\leq 1\\ \varepsilon\in|\overline{K}|}}U_{I,\varepsilon},$$

以及引理 2.4.1，我们将 $\mathcal{E}(U_I)$ 视为 $\mathcal{E}(U_{\mathrm{rig}\,I})=\varprojlim_{\varepsilon\searrow 0}\mathcal{E}(U_{I,\,\varepsilon})$ 的子空间。于是，$\mathcal{E}(U_I)$ 的拓扑由范数族 $|_|_\varepsilon$ 诱导，其中 $0<\varepsilon<1$ 定义于 (2.19) 中。

命题 3.4.8。对于每个非空子集 $I\subset\{0,\dots,d\}$，存在 $m\in\mathbb{N}$ 以及一个 $U(\mathfrak{g})$-模的满射同态

$$\varphi\colon U(\mathfrak{g})^{\oplus m}\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow\,\mathcal{E}(U_I)$$

使得当 $U(\mathfrak{g})\subset D(G)$ 和 $\mathcal{E}(U_I)\subset\mathcal{E}(U_{\text{刚性}\,I})$ 都赋予各自的子空间拓扑时，φ 是连续且严格的。

推论 3.4.9. $U(\mathfrak{g})$-模 $\widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$ 是有限生成的，并且它通过 (3.30) 由一个有限自由 $U(\mathfrak{g})$-模的满同态诱导的局部凸拓扑，与推论 2.5.5 中的子空间拓扑 $\widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})\subset\widetilde{H}^{d-r}{}_{(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$ 一致。因此，分别连续的 $D(G)$-模 (3.28) 已经是完备的，其拓扑与典范的 Fr´echet 拓扑一致。

推论 3.4.9 的证明。回顾一下，我们为覆盖 $\mathcal{U}$ 定义了 Čech 复形 $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{E})$，该覆盖由以下对象给出。

$$\mathbb{P}^d_K\setminus\mathbb{P}^r_K=\bigcup_{i=r+1}^{d}U_i.$$

我们在 $C^q(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 上，为 $q\geq 0$ 固定如下局部凸拓扑：由所有非空 $I\subset\{r+1,\dots,d\}$ 的 $\mathcal{E}(U_I)\subset\mathcal{E}(U_{\mathrm{rig}\,I})$ 的子空间拓扑所给出的拓扑。于是我们在推论 2.5.5 （或者说命题 2.5.2 的证明）中看到，由此诱导在 $\widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$ 上的拓扑，与后者作为 $\widetilde{H}^{d-r}{}_{(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$ 子空间所具有的拓扑一致。

另一方面，命题3.4.8中从 $U(\mathfrak{g})$-模到 $\mathcal{E}$ 的满同态给出 $m_q\in\mathbb{N}$ 和满同态

$$\varphi_q\colon U(\mathfrak{g})^{\oplus m_q}\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow\,C^q(\mathcal{U},\mathcal{E})\quad,\text{for all }q\geq 0,\tag{3.32}$$

其相对于 $U(\mathfrak{g}) \subset D(G)$ 和 $\mathcal{E}(U_I$刚性$I)$ 的子空间拓扑是严格的。因此，根据商的唯一性，我们在上面固定的 $C^q(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 上的拓扑与通过 (3.32) 诱导的拓扑一致。

由于 $U(\mathfrak{g})$是诺特的，且 $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{E})$的微分是 $U(\mathfrak{g})$-线性的，因此 Čech 上循环（Čechcocycles）的子空间$Z^q(\mathcal{U},\mathcal{E}) \subset C^q(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 是有限生成的 $U(\mathfrak{g})$-模。引理 3.4.5 (ii)表明，其由某个有限自由 $U(\mathfrak{g})$-模上的满同态诱导的拓扑，与其作为 $C^q(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 的子空间所具有的拓扑一致。由此我们得出，$H^q(\mathbb{P}^d_K \setminus \mathbb{P}^r_K, \mathcal{E})$ 作为 $U(\mathfrak{g})$-模是有限生成的，并且其通过从有限自由$U(\mathfrak{g})$-模出发的满同态所得到的拓扑，与其作为 $C^q(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 的子商所具有的拓扑一致。对 $\widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$ 作类似论证，我们发现，其通过某个从有限自由$U(\mathfrak{g})$-模出发的满同态所诱导的拓扑，与其作为 $\widetilde{H}^{d-r}(\mathbb{P}^r_K)^{\mathrm{rig}}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$ 的子空间所具有的拓扑一致。

将命题 3.4.7 应用于 $M = \widetilde{H}^{d-r}_{\mathbb{P}^r_K}(\mathbb{P}^d_K,\mathcal{E})$和 $V = v^{\mathrm{GL}_{d-r}(K)\ B_{d-r}}$，即可得到最后一个陈述。□

命题 3.4.8 的证明。我们首先固定 $\mathfrak{g}$ 的一个合适的 K-基。对于 $\alpha_{u,v} \in \Phi$，其中 $(u,v) \in \{0,\dots,d\}^2$，$u \neq v$，令 $L_{(u,v)}$ 为根空间 $\mathfrak{g}_{\alpha_{u,v}}$ 的标准生成元。此外，令 $L_0,\dots,L_d$ 为 $\mathfrak{t}$ 的标准基。于是，$L_{(u,v)}$ 与 L_i 一起构成 $\mathfrak{g}$ 的一个 K-基。$U(\mathfrak{g})$ 在 $\mathcal{O}(U_I)$ 上的作用由 [56, (1.5)] 给出.

$$L^k_{(u,v)}.X^{\underline{\mu}} = \frac{\mu_v!}{(\mu_v-k)!}\, X^{\underline{\mu}+k\alpha_{u,v}},$$
$$L^k_j.X^{\underline{\mu}} = \mu_j^k\, X^{\underline{\mu}},$$

对于 $k \in \mathbb{N}_0$，其中我们采用约定：$\frac{\mu_v!}{(\mu_v-k)!} := \mu_v(\mu_v-1)\cdots(\mu_v-k+1)$。

设固定子集 $I \subset \{0,\dots,d\}$ 为 $I = \{i_1,\dots,i_r\}$，且 i_j 两两不同。设 E 为有限生成的分次 $K[X_0,\dots,X_d]$-模，且 $\mathcal{E}$ 与 E 相关联，例如。

$$E = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0} \Gamma\big(\mathbb{P}^d_K, \mathcal{E}(k)\big),$$

参见 [77, 标签 0BXD]。由于 $\mathcal{E}(U_I)$ 是齐次局部化 $(E_{X_{i_1}\cdots X_{i_r}})^0$，且它是有限生成的 $\mathcal{O}(U_I)$-模，因此我们找到齐次元素 $v_1,\dots,v_n \in E$ 和 $l_1,\dots,l_n \in \mathbb{N}_0$，满足 $\deg(v_k) = rl_k$，使得 $\mathcal{E}(U_I)$ 由以下元素生成 白小姐

$$\frac{v_k}{(X_{i_1}\cdots X_{i_r})^{l_k}} \quad \text{, for } k = 1,\dots,n,$$

作为一个 $\mathcal{O}(U_I)$-模。对于 $N := \max_{k=1}^n l_k$，我们设 $E' := \bigoplus_{l=0}^N E_{rl}$，并且可以假设 v_1、...、v_n 是 E' 的一个 K-基。由于 G 通过齐次端同态作用于 E，参见 [50, §2.3.1],，$\mathfrak{g}$ 也如此，而 E' 是 E 的一个 $U(\mathfrak{g})$-子模。此外，对于足够小的 $\varepsilon > 0$，我们可以假设该估计。

$$\big\|L_{(u,v)}.v_k\big\|_{E'} \le \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{, for all } (u,v) \in \{0,\dots,d\}^2 \text{ with } u \neq v, \text{ and } k = 1,\dots,n, \tag{3.33}$$

关于基 v_1，...，v_n 的 E' 上的最大范数，...成立。

我们回顾以下记号

$$\Lambda_I := \left\{ \underline{\mu} \in \mathbb{Z}^{d+1} \,\middle|\, \sum_{j=0}^d \mu_j = 0, \forall j \in \{0,\dots,d\}\setminus I : \mu_j \ge 0 \right\},$$
$$\Delta_d := \left\{ \underline{\mu} \in \mathbb{Z}^{d+1} \,\middle|\, \forall j = 0,\dots,d : |\mu_j| \le d \right\}.$$

作为所寻求的 $U(\mathfrak{g})$-线性满同态 φ 的候选，我们考虑

$$\varphi\colon U(\mathfrak{g})^{(I)} := \bigoplus_{\substack{\underline{\nu}\in\Lambda_I\cap\Delta_d \\ k=1,\dots,n}} U(\mathfrak{g})\, e_{\underline{\nu},k} \longrightarrow \mathcal{E}(U_I), \quad \mathfrak{X}_{\underline{\nu},k}\, e_{\underline{\nu},k} \longmapsto \mathfrak{X}_{\underline{\nu},k}.\left(X^{\underline{\nu}} \frac{v_k}{(X_{i_1}\cdots X_{i_r})^{l_k}} \right).$$

令 $|_|_\varepsilon$ 表示 $U(\mathfrak{g})$上的范数，该范数是根据证明开始时选取的 $\mathfrak{g}$ 的 K-基在(3.29)中定义的。由引理3.4.3可知，局部凸直和 $U(\mathfrak{g})^{(I)}$ 上的拓扑由范数族诱导

$$\left|\sum_{\substack{\underline{\nu}\in\Lambda_I\cap\Delta_d\\ k=1,\dots,n}} \mathfrak{X}_{\underline{\nu},k}\, e_{\underline{\nu},k}\right|_\varepsilon := \max_{\substack{\underline{\nu}\in\Lambda_I\cap\Delta_d\\ k=1,\dots,n}} |\mathfrak{X}_{\underline{\nu},k}|_\varepsilon \quad \text{, for } 0<\varepsilon<1.$$

引理 3.4.10。映射 φ 是局部凸 K-向量空间之间的连续同态。

证明。只需证明，对于所有 $v\in\mathcal{E}(U_I)$，映射 $U(\mathfrak{g})\to\mathcal{E}(U_I)$，$\mathfrak{X}\mapsto\mathfrak{X}.v$, 是连续的。一旦我们看到，对于所有 $v\in\mathcal{E}(U_I)$ 和 $0<\varepsilon<1$，存在 $0<\delta<1$ 使得

$$|\mathfrak{X}.v|_\varepsilon \le |\mathfrak{X}|_\delta |v|_\varepsilon \quad \text{, for all } \mathfrak{X}\in U(\mathfrak{g}). \tag{3.34}$$

我们将此前固定的 $\mathfrak{g}$ 的 K基元素记为

$$\{\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_s\} := \{L_{(u,v)} \,|\, \alpha_{u,v}\in\Phi\}\cup\{L_0,\dots,L_d\}.$$

此外，设 w_1、...、w_m 是 $\mathcal{E}(U_I)$的一个 $\mathcal{O}(U_I)$-基，它按 (2.19) 定义了范数族 $|_|_\varepsilon$。对于给定的 $0<\varepsilon<1$，我们选择充分小的 $\delta>0$，使得 $\delta\le\varepsilon$ 并且

$$|\mathfrak{x}_j w_l|_\varepsilon \le \frac{1}{\delta} \quad \text{, for all } j=1,\dots,s \text{ and } l=1,\dots,m.$$

我们首先要证明的是

$$|\mathfrak{x}.f|_\varepsilon \le \frac{1}{\varepsilon}\,|f|_\varepsilon \quad \text{, for all } \mathfrak{x}\in\{\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_s\} \text{ and } f\in\mathcal{O}(U_I). \tag{3.35}$$

为此，只需考虑单项式 $f=X^{\underline{\mu}}$，其中 $\underline{\mu}\in\Lambda_I$。对于 $\mathfrak{x}=L_j$，我们有

$$|L_j.X^{\underline{\mu}}|_\varepsilon = |\mu_j\, X^{\underline{\mu}}|_\varepsilon = |\mu_j||X^{\underline{\mu}}|_\varepsilon \le |X^{\underline{\mu}}|_\varepsilon \le \frac{1}{\varepsilon}\,|X^{\underline{\mu}}|_\varepsilon.$$

此外，对于 $\mathfrak{x}=L_{(u,v)}$，我们计算得

$$|L_{(u,v)}.X^{\underline{\mu}}|_\varepsilon = |\mu_v\, X^{\underline{\mu}+\alpha_{u,v}}|_\varepsilon = |\mu_v|\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{|\max(0,\underline{\mu}+\alpha_{u,v})|} \le \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{|\max(0,\underline{\mu}+\alpha_{u,v})|}.$$

所需的不等式 $|L_{(u,v)}.X^{\underline{\mu}}|_\varepsilon \le \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1+|\max(0,\underline{\mu})|} = \frac{1}{\varepsilon}|X^{\underline{\mu}}|_\varepsilon$ 随即由下式推出

$$\max(0,\mu_u+1)+\max(0,\mu_v-1) \le 1+\max(0,\mu_u)+\max(0,\mu_v).$$

现在，我们转而讨论 $\mathcal{E}(U_I)\cong\mathcal{O}(U_I)\otimes_K\mathcal{E}(x_i)$。为了证明 (3.34)，只需证明 $U(\mathfrak{g})$ 的 PBW 基满足以下不等式：

$$\left|(\mathfrak{x}_1^{k_1}\cdots\mathfrak{x}_s^{k_s}).\left(\sum_{l=1}^m f_l\, w_l\right)\right|_\varepsilon \le \left(\frac{1}{\delta}\right)^{|\underline{k}|}\max_{l=1}^m |f_l|_\varepsilon = |\mathfrak{x}_1^{k_1}\cdots\mathfrak{x}_s^{k_s}|_\delta \left|\sum_{l=1}^m f_l\, w_l\right|_\varepsilon,$$

对所有 $\underline{k}\in\mathbb{N}_0^s$ 和 $\sum_{l=1}^m f_l\, w_l\in\mathcal{E}(U_I)$。我们通过对 $|\underline{k}|$进行归纳法来完成。基础情形显然，令 $\underline{k}\in\mathbb{N}_0^s$ 满足 $|\underline{k}|>0$，且 $\sum_{l=1}^m f_l\, w_l\in\mathcal{E}(U_I)$。令 $j\in\{1,\dots,s\}$ 为满足 $k_j>0$ 和 $k_{j'}=0$的最大者，对所有 $j'>j$均如此。根据莱布尼茨乘积法则，我们有

$$\begin{aligned}\left|\mathfrak{x}_j.\left(\sum_{l=1}^m f_l\, w_l\right)\right|_\varepsilon &= \left|\sum_{l=1}^m(\mathfrak{x}_j.f_l)\, w_l + f_l\,(\mathfrak{x}_j.w_l)\right|_\varepsilon \le \max_{l=1}^m \max\left(\,|\mathfrak{x}_j.f_l|_\varepsilon\,,\,|f_l|_\varepsilon\,|\mathfrak{x}_j.w_l|_\varepsilon\right)\\ &\le \max_{l=1}^m \max\left(\frac{1}{\varepsilon}\,|f_l|_\varepsilon\,,\,|f_l|_\varepsilon\,\frac{1}{\delta}\right) \le \frac{1}{\delta}\max_{l=1}^m |f_l|_\varepsilon.\end{aligned}$$

这里我们还使用了（3.35）、 $\delta \le \varepsilon$，以及对于所有 $l = 1$、.....、m， $|\mathfrak{x}_j.w_l|_\varepsilon \le \frac{1}{\delta}$。结合归纳法假设，我们于是得出

$$\left|(\mathfrak{x}_1^{k_1}\cdots\mathfrak{x}_s^{k_s}).\Big(\sum_{l=1}^m f_l\,w_l\Big)\right|_\varepsilon = \left|(\mathfrak{x}_1^{k_1}\cdots\mathfrak{x}_j^{k_j-1}).\Big(\mathfrak{x}_j.\Big(\sum_{l=1}^m f_l\,w_l\Big)\Big)\right|_\varepsilon$$
$$\le |\mathfrak{x}_1^{k_1}\cdots\mathfrak{x}_j^{k_j-1}|_\delta \left|\mathfrak{x}_j.\Big(\sum_{l=1}^m f_l\,w_l\Big)\right|_\varepsilon \le \Big(\frac{1}{\delta}\Big)^{|\underline{k}|}\max_{l=1}^m |f_l|_\varepsilon.$$

□

对于 $\underline{\mu}\in\Lambda_I$，我们还引入辅助常数

$$A(\underline{\mu}) := \prod_{k=0}^N\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\in I}}^d \frac{1}{|\min(0,\mu_j+1-k)!|}\cdot\prod_{\substack{j=0\\ j\notin I}}^d\frac{1}{|\min(0,\mu_j+1)!|}\right).$$

此处及下文中，我们采用以下约定

$$(-n)! := (-n)(-n+1)\cdots(-1) = (-1)^n n! \quad \text{, for } n\in\mathbb{N}_0, \text{ and}$$
$$\max(0,\underline{\mu}) := \big(\max(0,\mu_0),\dots,\max(0,\mu_d)\big).$$

引理 3.4.11. (i) 对所有 $l = 0$、…、N、 $\underline{\mu}\in\Lambda_I$，以及在 $u\neq v$、 $\mu_u > 1$、$\mu_v < -1$ 条件下的 u、$v\in\{0,\dots,d\}$，都有】【:

$$\frac{1}{|\mu_v+1-l|}A(\underline{\mu}-\alpha_{u,v}) \le A(\underline{\mu}).$$

(ii) 存在常数 $C>0, a\ge 1$，使得对所有 $\underline{\mu}\in\Lambda_I$，均有 $A(\underline{\mu}) \le Ca^{|\max(0,\underline{\mu})|}$。

证明。于(i)的情形下写作 $\underline{\mu'}:=\underline{\mu}-\alpha_{u,v}$，只需证明有理数 er

$$\frac{1}{\mu_v+1-l}\prod_{k=0}^N\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\in I}}^d\frac{\min(0,\mu_j+1-k)!}{\min(0,\mu'_j+1-k)!}\cdot\prod_{\substack{j=0\\ j\notin I}}^d\frac{\min(0,\mu_j+1)!}{\min(0,\mu'_j+1)!}\right)$$

事实上是一个整数。我们可以关注乘积中关于 $j=u$ 和 $j=v$ 的项。但利用 $\mu_u>1$ 和 $\mu_v<-1$，我们确实发现

$$\frac{1}{\mu_v+1-l}\prod_{k=0}^N\frac{\min(0,\mu_v+1-k)!}{\min(0,\mu'_v+1-k)!}\cdot\frac{\min(0,\mu_u+1)!}{\min(0,\mu'_u+1)!}$$
$$=\frac{1}{\mu_v+1-l}\prod_{k=0}^N\frac{(\mu_v+1-k)!}{(\mu_v+2-k)!}\cdot\frac{0!}{0!} = \prod_{\substack{k=0\\ k\neq l}}^N(\mu_v+1-k)\in\mathbb{Z}.$$

对于 (ii)，我们再次使用关于 p-进赋值的估计 $v_p(n!) \le \frac{n}{p-1}$，其中 $n\in\mathbb{N}_0$。这对 $j\in I$ 给出，

$$v_p\big(\min(0,\mu_j+1-k)!\big) \le \frac{-\min(0,\mu_j+1-k)}{p-1} \le \frac{-\min(0,\mu_j)+k}{p-1}.$$

由对 $j\notin I$ 的类似估计以及由 $\sum_{j=0}^d\mu_j = 0$ 可知

$$v_p\left(\prod_{k=0}^N\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\in I}}^d\min(0,\mu_j+1-k)!\cdot\prod_{\substack{j=0\\ j\notin I}}^d\min(0,\mu_j+1)!\right)\right)$$
$$\le\frac{1}{p-1}\sum_{k=0}^N\left(rk-\sum_{j=0}^d\min(0,\mu_j)\right) = \frac{1}{p-1}\left(r\,\frac{N(N+1)}{2}+(N+1)|\max(0,\underline{\mu})|\right).$$

因此我们得出结论：

$$A(\underline{\mu}) \leq p^{\frac{1}{p-1}\left(r\frac{N(N+1)}{2}+(N+1)|\max(0,\underline{\mu})|\right)}$$

这表明该结论对常数 $C = p^{\frac{rN(N+1)}{2}\frac{}{p-1}()}$ 和 $a = p^{\frac{N+1}{p-1}}$ 成立。 □

引理 3.4.12. 设 $0 < \varepsilon < 1$ 足够小，使其满足条件 (3.33)。那么，对于所有 $\underline{\mu} \in \Lambda_I$ 和 $k \in \{1, \ldots, n\}$，存在 $\mathfrak{Y}_{\underline{\mu},k} \in U(\mathfrak{g})^{(I)}$，使得

(1) $\varphi(\mathfrak{Y}_{\underline{\mu},k}) = X^{\underline{\mu}} \dfrac{v_k}{(X_{i_1} \cdots X_{i_r})^{l_k}}$,

(2) $\left|\mathfrak{Y}_{\underline{\mu},k}\right|_\varepsilon \leq A(\underline{\mu}) \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{|\max(0,\underline{\mu})|}$.

证明。我们对 $\|\underline{\mu}\| := \sum_{j=0}^{d} |\mu_j|$ 使用归纳法。对于 $\underline{\mu} \in \Delta_d$，我们可以取 $\mathfrak{Y}_{\underline{\mu},k} := 1\, e_{\underline{\mu},k}$，此时结论显然成立。因此，我们可以假设存在 $u \in \{0, \ldots, d\}$，使得 $|\mu_u| > d$。如果 $\mu_u > 0$，则可由

$$0 = \sum_{j=0}^{d} \mu_j = \mu_u + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq u}}^{d} \mu_j$$

得到 $\sum_{j=0, j\neq u}^{d} \mu_j < -d$，从而存在 $v \in I$、$v \neq u$，使得 $\mu_v < -1$。同理，对于 $\mu_u < 0$ 的情形，我们可以假设存在 $u \in \{0, \ldots, d\}$、$v \in I$、$u \neq v$，使得 $\mu_u > 1$、$\mu_v < -1$。

现在令 $\underline{\mu}' := \underline{\mu} - \alpha_{u,\ v} = \underline{\mu} - \epsilon_u + \epsilon_v$ 使得 $\|\underline{\mu}'\| = \|\underline{\mu}\| - 2$。对于 $k \in \{1, \ldots, n\}$，我们将 $L_{(u,v)}.v_k$ 表示为 E' 的 K-基 $v_1, \ldots, v_n$：

$$L_{(u,v)}.v_k = \sum_{k'=1}^{n} a_{k'} v_{k'} \quad \text{, for } a_1, \ldots, a_n \in K,$$

从而利用 (3.33) 可得 $\max_{k'=1}^{n} |a_{k'}| = \|L_{(u,v)}.v_k\|_{E'} \leq \frac{1}{\varepsilon}$。注意，对于这些齐次元素的次数，我们有 $l_{k'} = l_k$；对所有满足 $a_{k'} \neq 0$ 的 $k' \in \{1, \ldots, n\}$ 均如此，因为 $\mathfrak{g}$ 通过齐次端同态作用于 E'。此外，根据关于 $\underline{\mu}'$ 的归纳假设，对所有 $k' = 1, \ldots, n$，存在 $\mathfrak{Y}_{\underline{\mu}',\ k'} \in U(\mathfrak{g})^{(I)}$，如引理陈述所规定。令

$$\mathfrak{Y}_{\underline{\mu},k} := \frac{1}{\mu_v + 1 - l_k} \left(L_{(u,v)} \mathfrak{Y}_{\underline{\mu}',k} - \sum_{k'=1}^{n} a_{k'} \mathfrak{Y}_{\underline{\mu}',k'} \right).$$

应用莱布尼茨乘积法则可得

$$\begin{aligned} L_{(u,v)} \cdot \left(X^{\underline{\mu}'} \frac{v_k}{(X_{i_1} \cdots X_{i_r})^{l_k}} \right) &= \left(L_{(u,v)} \cdot \frac{X^{\underline{\mu}'}}{(X_{i_1} \cdots X_{i_r})^{l_k}} \right) v_k + \frac{X^{\underline{\mu}'}}{(X_{i_1} \cdots X_{i_r})^{l_k}} \left(L_{(u,v)}.v_k \right) \\ &= (\mu_v + 1 - l_k) \frac{X^{\underline{\mu}}}{(X_{i_1} \cdots X_{i_r})^{l_k}} v_k + \sum_{k'=1}^{n} a_{k'} X^{\underline{\mu}'} \frac{v_{k'}}{(X_{i_1} \cdots X_{i_r})^{l_{k'}}}. \end{aligned}$$

由此可得

$$\varphi(\mathfrak{Y}_{\underline{\mu},k}) = \frac{X^{\underline{\mu}}}{(X_{i_1} \cdots X_{i_r})^{l_k}} v_k.$$

此外，归纳假设给出的估计表明$\mathfrak{Y}_{\underline{\mu}',\ k'}$

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{Y}_{\underline{\mu},k}|_\varepsilon &\leq \frac{1}{|\mu_v+1-l_k|}\max\left(|L_{(u,v)}\mathfrak{Y}_{\underline{\mu}',k}|_\varepsilon\,,\ \max_{k'=1}^{n}|a_{k'}||\mathfrak{Y}_{\underline{\mu}',k'}|_\varepsilon\right)\\
&\leq \frac{1}{|\mu_v+1-l_k|}\max\left(A(\underline{\mu}')\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{|\max(0,\underline{\mu}')|+1},\left(\max_{k'=1}^{n}|a_{k'}|\right)A(\underline{\mu}')\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{|\max(0,\underline{\mu}')|}\right)\\
&\leq \frac{1}{|\mu_v+1-l_k|}A(\underline{\mu}')\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{|\max(0,\underline{\mu}')|+1}\\
&\leq A(\underline{\mu})\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{|\max(0,\underline{\mu})|}.
\end{aligned}$$

在最后一步中，我们还使用了引理 3.4.11 (i) 以及 $|\max(0,\underline{\mu}')| = |\max(0,\underline{\mu})|-1$。 □

经过这些准备后，我们现在证明满同态 φ 是严格的。只需证明 φ 是开映射。因此，设 $U \subset U(\mathfrak{g})^{(I)}$ 是 0 的一个开邻域，我们要证明 $\varphi(U)$ 是 0 的一个开邻域。根据 [59, 定理 3.3.6]，存在 $0<\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_t<1$，对于某个 $t\in\mathbb{N}$，以及 $R>0$，使得

$$\left\{\mathfrak{X}\in U(\mathfrak{g})^{(I)}\middle|\max_{i=1}^{t}|\mathfrak{X}|_{\varepsilon_i}<R\right\}\subset U.$$

不妨设 $\varepsilon := \varepsilon_1 \leq \ldots \leq \varepsilon_t$，从而前一个集合等于

$$B_R^{(|\text{-}|_\varepsilon),-}(0) := \left\{\mathfrak{X}\in U(\mathfrak{g})^{(I)}\,\middle|\,|\mathfrak{X}|_\varepsilon<R\right\}$$

因为 $|\text{-}|_{\varepsilon'}\leq|\text{-}|_\varepsilon$，对于 $\varepsilon\leq\varepsilon'$。由此可得 $\varphi\big(B^{(|\text{-}|_\varepsilon)}{}_R{}^{-}(0)\big)\subset\varphi(U)$。此外，我们还可以假设 $\varepsilon>0$ 足够小，如 (3.33) 中所述。

接着令 $\delta := a^{-1}\varepsilon$，其中 $a\geq 1$ 是引理 3.4.11 (ii) 中的常数。令 $\|\text{-}\|_\delta$ 表示 $\mathcal{E}(U_I)$ 上由

$$\bigoplus_{k=1}^{n}\mathcal{O}(U_I)\,e_k \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{E}(U_I)\,,\quad X^{\underline{\mu}}e_k\longmapsto X^{\underline{\mu}}\frac{v_k}{(X_{i_1}\cdots X_{i_r})^{l_k}},$$

赋予 $\mathcal{O}(U_I)\subset\mathcal{O}(U_{I,\delta})$ 高斯范数 $|\text{-}|_\delta$，参见注 2.4.2。注意，$\mathcal{E}(U_I)$ 上的范数 $|\text{-}|_\delta$（即如 (2.19) 中所述，由一个固定的 $\mathcal{O}(U_I)$-基给出的范数）与 $\|\text{-}\|_\delta$ 由[7, 3等价。7.3 命题 3]。因此，要证明该命题，只需证明

$$B_{C^{-1}R}^{(\|\text{-}\|_\delta),-}(0)\subset\varphi\big(B_R^{(|\text{-}|_\varepsilon),-}(0)\big) \tag{3.36}$$

其中 $C>0$ 是引理 3.4.11 (ii) 中的常数。事实上，此时 $B^{(\|\text{-}\|_\delta)}{}_{C^{-1}R}{}^{-}(0)\subset\varphi(U)$ 是关于 $\mathcal{E}(U_I)$ 上的 $|\text{-}|_\delta$ 的一个包含 0 的开邻域，因而也是关于 $\mathcal{E}(U_I)\subset\mathcal{E}(U_I^{\mathrm{rig}})$ 的子空间拓扑的一个开邻域。

为证明 (3.36)，令 $v\in\mathcal{E}(U_I)$ 满足 $\|v\|_\delta<\frac{R}{C}$。根据商范数 $\|\text{-}\|_\delta$ 的定义，存在 $a_{\underline{\mu},\ k}\in K$ 使得

$$v=\sum_{\substack{\underline{\mu}\in\Lambda_I\\k=1,\dots,n}}a_{\underline{\mu},k}\,X^{\underline{\mu}}\frac{v_k}{(X_{i_1}\cdots X_{i_r})^{l_k}}\qquad\text{and}\qquad\sup_{\substack{\underline{\mu}\in\Lambda_I\\k=1,\dots,n}}|a_{\underline{\mu},k}|\left(\frac{1}{\delta}\right)^{|\max(0,\underline{\mu})|}<\frac{R}{C}.$$

对于所有 $\underline{\mu}\in\Lambda_I$ 和 $k=1$、…、n，我们按照引理 3.4.12 中的规定得到 $\mathfrak{Y}_{\underline{\mu},k}\in U(\mathfrak{g})^{(I)}$。然后

$$\mathfrak{Y}:=\sum_{\substack{\underline{\mu}\in\Lambda_I\\k=1,\dots,n}}a_{\underline{\mu},k}\,\mathfrak{Y}_{\underline{\mu},k}\in U(\mathfrak{g})^{(I)}$$

满足 $\varphi(\mathfrak{Y}) = v$。此外，由引理 3.4.11 (ii) 可得，

$$\begin{aligned}|\mathfrak{Y}|_\varepsilon &\leq \sup_{\substack{\underline{\mu}\in\Lambda_I\\ k=1,\dots,n}} |a_{\underline{\mu},k}|\,|\mathfrak{Y}_{\underline{\mu},k}|_\varepsilon \\ &\leq \sup_{\substack{\underline{\mu}\in\Lambda_I\\ k=1,\dots,n}} |a_{\underline{\mu},k}| A(\underline{\mu}) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{|\max(0,\underline{\mu})|} \leq C \sup_{\substack{\underline{\mu}\in\Lambda_I\\ k=1,\dots,n}} |a_{\underline{\mu},k}| \left(\frac{1}{\delta}\right)^{|\max(0,\underline{\mu})|} < R\end{aligned}$$

表明 $v \in \varphi\big(B^{(|\text{-}|_\varepsilon)}{}_R{}^{-}(0)\big)$。 □

最后，我们允许 K 为任意特征的非阿基米德局部域的有限扩张，并回到本节开头所考虑的情形，即在 L 上的连通分裂约化群 G。设 P 为 G 的一个标准抛物子群。上述讨论以及 Agrawal和Strauch [1] 在 p-进情形下对函子 $\mathcal{F}_P^G$ 的推广促成了以下定义。

定义 3.4.13（参见 [1, 定义4.2.1]）。对于一个分别连续的 $D(\mathfrak{g}, P, K)$-模 M以及一个在赋予最细局部凸拓扑的 K-向量空间上的可容许光滑 $L_{\mathbf{P}}$-表示 V，我们定义函子

$$\widetilde{\mathcal{F}}_P^G(M,V) := D(G,K)\,\widehat{\otimes}_{D(\mathfrak{g},P,K),\iota}\left(M\,\widehat{\otimes}_{K,\pi} V_b'\right)$$

其取值于分别连续 $D(G,K)$-模的范畴中。

如前所述， V_b' K-Fr´echet 空间是核的；对于这样的可容许光滑 $L_{\mathbf{P}}$-表示$\widehat{\ }$ V，若 M 的豪斯多夫完备化 M 也是核的 K-Fr´echet 空间，则根据 [67, 命题 17.6] 之后的讨论以及 [67, 命题 19.11、命题 20.4]，可知$M\,\widehat{\otimes}_{K,\ \pi} V_b' = \widehat{M}\,\widehat{\otimes}_{K,\ \pi} V_b'$也是核的 K-Fr´echet 空间。由于引理 3.3.1 (ii) 给出了一个拓扑同构

$$D(G)\,\widehat{\otimes}_{D(\mathfrak{g},P),\iota}\left(M\,\widehat{\otimes}_{K,\pi} V_b'\right) \cong D(G_0)\,\widehat{\otimes}_{D(\mathfrak{g},P_0)}\left(M\,\widehat{\otimes}_{K,\pi} V_b'\right),$$

由 [67, 命题 19.4 (ii)] 可知， $\widetilde{\mathcal{F}}_P^G(M,V)$ 是核的 K-Fr´echet 空间。因此在这种情况下，根据命题 1.4.10，强对偶 $\widetilde{\mathcal{F}}_P^G(M,V)_b'$ 是紧型的局部解析 G-表示。

注 3.4.14. 设 M 是（代数）分布代数 Dist(G) $\otimes_L K$ = hy(G) 的一个抽象模。一个显而易见的问题是，模 M 上满足哪些代数条件（例如在 p-进情形下满足 $M \in \mathcal{O}^{\mathfrak{p}}{}_{\mathrm{alg}}$），才能将其提升为 M 上分别连续的 $D(\mathfrak{g}, P)$-模结构。这里，特征为 char(K) > 0 的情形下 BGG 范畴 $\mathcal{O}$ 的类似物应当发挥作用。关于这些类似物的最新进展，参见 [2, 3, 31, 55]。

Appendix A. Non-Archimedean Functional Analysis

这里汇集了一些非阿基米德泛函分析的结果。它们都是（略微推广的）文献中可以找到的论述，或是从阿基米德情形改编而来的论述。设 K 为一个球完备的非阿基米德域，其整数环为 $\mathcal{O}_K = \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$。

我们回顾局部凸K向量空间之间的紧连续同态的定义 [59, 第 8.8 章第 334] 页：

定义 A.1. (i) 若豪斯多夫局部凸 K-向量空间之间的连续同态 $f\colon V \to W$ 存在一个完备紧致型子集 $X \subset W$（参见 [59, 定义 3.8.1]），使得 $f^{-1}(X) \subset V$ 是 V 中 0 的一个邻域，则称其为紧。

(ii)如果存在一个紧致型巴拿赫圆盘 $B \subset W$ (参见 [59, 第 414]页)，使得 $f^{-1}(B) \subset V$是 V 中 0的邻域，则 Hausdorff 局部凸 K-向量空间之间的连续同态 $f\colon V \to W$ 被称为半紧。

注记 A.2.(i)如果 f 是紧的，那么 f 是半紧的。如果 W 是拟完备的，那么反之亦然 [59, 第 8.8 章，第 334] 页。
(ii) 此定义与 [67, §16] 中的定义等价。在那里，如果存在一个开格 $L \subset V$，使得闭包 $f(L) \subset W$ 有界且 c- 紧，则称 f 为紧。

(ii) 的证明。对于一个开格 $L \subset V$，根据 [67, 命题 12.7] f，L 有界且 c-紧，当且仅当它是紧致型且完备的。因此，$X := f(L)$ 给出一个完备紧致型子集，使得 $f^{-1}(X) \supset L$ 是 V 中 0 的一个邻域。

另一方面，给定一个完备紧致型 $X \subset W$，使得 $f^{-1}(X)$ 是 V 中 0 的一个邻域，也就是说，$f^{-1}(X)$ 包含一个开格 $L \subset V$，由此可得 $f(L) \subset \overline{X}$。但这意味着，根据 [59, 定理 3.8，$f(L)$ 本身是紧致型的；并且根据 [67,注 7.1 (iv), (v)]，它是完备的。□

引理 A.3. (i) 考虑以下豪斯多夫局部凸 K-向量空间的交换方块：

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle g'} \\ V' & \xrightarrow{f'} & W'. \end{array} \tag{A.1}$$

如果 g' 是紧的，且 f' 是严格单态射，那么 g 是紧的。
(ii) 在交换方块 (A.1) 中，如果 g 是紧的，且 f 是严格满同态，那么 g' *is* 紧。
(iii) 紧同态的有限乘积是紧的。

证明。对于 (i)，由 [67, Rmk. 16.7 (i)] 可知，若 g' 是紧的，则 $f' \circ g = g' \circ f$ 也是紧的。由于 $\mathrm{Im}(f') \cong V'$，[67, Rmk. 16.7 (ii)] 表明 g 是紧的。

在 (ii) 的情形下，我们再次由 [67, Rem. 16.7 (i)] 知道 $g' \circ f = f' \circ g$ 是紧的。根据定义，存在一个开格 $L \subset V$，使得 $(g' \circ f)(L)$ 有界且 c-紧。但由于 f 是严格满同态，$f(L)$ 是 W 中的一个开格，这表明 g' 是紧的。

对于 (iii)，考虑紧同态 $f\colon V \to W$ 和 $f'\colon V' \to W'$，以及开格 $L \subset V, L' \subset V'$，使得 $f(L)$ 在 W 中有界且 c-紧，并且 $f'(L')$ 在 W' 中也满足同样的条件。于是，$L \times L'$ 是 $V \times V'$ 中的一个开格，且 $(f \times f')(L \times L') = f(L) \times f'(L')$ 在 $W \times W'$ 中有界。此外，根据 [67, Prop. 12.2]，$f(L) \times f'(L')$ 是 c-紧的。□

命题 A.4 ([74, 命题 1.2 (i)])。设 V 是紧型局部凸 K-向量空间。若 $U \subset V$ 是闭子空间，则 U 和 V/U 也具有紧型。

证明。设 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是由 K-巴拿赫空间组成的归纳序列，其过渡映射是单射且紧，并满足 $V \cong \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} V_n$。根据 [23, 定理 3.1.16]，带有其子空间拓扑的 U 与序列 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的归纳极限拓扑同构，其中 $U_n := U \cap V_n$。于是，$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的过渡映射也都是紧映射 [67, 注 16.7]。因此，U 具有紧型。

此外，根据引理 A.3 (ii)，诱导映射 $V_n/U_n \to V_{n+1}/U_{n+1}$ 是单射且紧。因此 $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} V_n/U_n$ 具有紧型。此外，对短严格正合列 $0 \to U_n \to V_n \to V_n/U_n \to 0$ 取归纳极限，我们得到以下连续同态序列

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} V_n/U_n \longrightarrow 0$$

这是一个正合的 K-向量空间序列。由开映射定理[11, II. §4.6 Cor.] 可知，连续满射 $V \to \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} V_n/U_n$ 是严格的。因此 $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} V_n/U_n \to V/U$ 是一个拓扑同构。□

命题 A.5（[74, 定理 1.3]）。局部凸 K-向量空间的强对偶若为紧型，则是核的 Fr´echet 空间；而核的 K-Fr´echet 空间的强对偶则是紧型。

证明：若 V 是一个紧型局部凸 K-向量空间，则由 [23, 定理 3.1.7 (vii),(viii)] 可知，V_b' 是一个核的 K-Fr´echet 空间。

反之，设 V 是一个核的 K-Fr´echet 空间。对于由格组成的 0 的递减邻域基 $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$，可得到一个归纳序列 $(V'_{L_n^\circ})_{n\in\mathbb{N}}$，其元素是某些$K$-巴拿赫空间 $V'_{L_n^\circ}$，且满足 $V' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V'_{L_n^\circ}$，参见 [23, 定义 2.5。2]。然后 [23, 命题 3.1。13]说明该序列是半紧的；根据备注 A.2 (ii)，甚至是紧的。注意，若 K 是球完备的，则每个局部凸 K-向量空间都是极性的，参见 [59, 定理 4.4.3 (i)]。

此外，由 [59, 推论 8.5.3], V 特别是自反的，因此由 [59, 定理 7.4.11 (i)]可知 V_b' 是桶状的。（如果 K 是球完备的，那么桶状与极性桶状等价 [59, 定理 7.1.9 (ii)]。）现在，[23, 推论 2.5.9] 表明，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V'_{L_n^\circ}$ 上的归纳极限拓扑与 V'的强拓扑一致。因此，V_b'是紧型的。□

引理 A.6. 设 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是局部凸 K-向量空间的一个射影序列，W是一个赋范 K-向量空间。那么典范连续同态

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_b(V_n, W) \longrightarrow \mathcal{L}_b\left(\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} V_n, W\right) \tag{A.2}$$

是满射。如果所有投影 $\mathrm{pr}_n\colon \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} V_n \to V_n$ 的像都是稠密的，或者所有 V_n 都是豪斯多夫的，且过渡同态 $V_{n+1} \to V_n$ 都是紧的，那么 (A.2) 甚至是双射。

证明。首先考虑 $f \in \mathcal{L}\big(\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} V_n, W\big)$，并令 $B_W := \{w \in W \mid \|w\|_W \le 1\}$ 表示 W的单位球，使得 $f^{-1}(B_W) \subset \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} V_n$是开集。根据 $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} V_n$的始拓扑的定义，存在整数 $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ 以及开格 $L_{n_i} \subset V_{n_i}$, $i = 1, \dots, r$，使得

$$\mathrm{pr}_{n_1}^{-1}(L_{n_1}) \cap \ldots \cap \mathrm{pr}_{n_r}^{-1}(L_{n_r}) \subset f^{-1}(B_W).$$

令 $m \ge n_1, \dots, n_r$，并注意到 $\ker(\mathrm{pr}_m) \subset \ker(\mathrm{pr}_{n_i}) \subset \mathrm{pr}_{n_i}^{-1}(L_{n_i})$，其中 $i = 1, \dots, r$。因此我们发现 $\ker(\mathrm{pr}_m) \subset f^{-1}(B_W)$。由于 $\ker(\mathrm{pr}_m)$ 是一个 K-子向量空间，故 $\ker(\mathrm{pr}_m) \subset \ker(f)$。因此 f 可经由 pr_m 通过 V_m 分解。这表明 (A.2) 是满射。

如果所有投影 pr_n 都有稠密像，那么这些同态

$$\mathcal{L}(V_n, W) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} V_n, W\right), \quad f \longmapsto f \circ \mathrm{pr}_n,$$

是单射，因为 W 是豪斯多夫的。由于 (A.2) 是这些同态的归纳极限 s, 由此可得其单射性。

如果所有 V_n 都是豪斯多夫的，并且过渡映射是紧的，那么存在一个投影系统 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} V_n$ 与$\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} U_n$ 拓扑同构，且后者的典范投影具有稠密像 [67, p。 93] 此外，根据函子性，我们有 $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_b(V_n, W) \cong \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_b(U_n, W)$，并可利用前一种情形得出结论。□

命题 A.7（[74, 命题 1.5]）。设 V 是一个紧型局部凸 K-向量空间，表示为 $V = $ 极限 $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} V_n$，其中 K-巴拿赫空间 V_n 的序列具有紧且单射的过渡映射。此外，设 W 是一个 K-巴拿赫空间。那么典范连续同态

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \left(V_n \mathbin{\widehat{\otimes}_K} W\right) \longrightarrow V \mathbin{\widehat{\otimes}_K} W$$

是双射。

证明。为简化记号，我们将局部凸 K向量空间 U 的强对偶简称为 U'。利用 [67, 推论 18.8] 以及 V 是自反的这一事实，我们得到一个拓扑同构。

$$V \mathbin{\widehat{\otimes}_K} W \xrightarrow{\cong} V'' \mathbin{\widehat{\otimes}_K} W \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}_b(V', W)\,, \quad v \otimes w \longmapsto \big[\ell \mapsto \ell(v)\, w\big].$$

对于每个 V_n，对偶映射和 [67, 引理 18.1] 至少给出了一个连续同态

$$V_n \mathbin{\widehat{\otimes}_K} W \longrightarrow V_n'' \mathbin{\widehat{\otimes}_K} W \longrightarrow \mathcal{L}_b(V_n', W)\,, \quad v \otimes w \longmapsto \big[\ell \mapsto \ell(v)\, w\big],$$

从而得到一个由连续同态构成的交换图

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} (V_n \mathbin{\widehat{\otimes}_K} W) & \longrightarrow & V \mathbin{\widehat{\otimes}_K} W \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \cong \\ \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_b(V_n', W) & \longrightarrow & \mathcal{L}_b(V', W). \end{array} \tag{A.3}$$

由 [67, 引理 16.4 (ii)] 可知，射影系统 $(V_n')_{n\in\mathbb{N}}$ 是紧的，因此根据引理 A.6，(A.3) 中的下方映射是双射。

因此，只要证明左边的同态是同构，该断言便得证。但根据 [67, 引理 16.4 (iii)], , 过渡映射 $V_n'' \to V_{n+1}''$ 经由 $V_{n+1} \subset V_{n+1}''$ 分解，这便得到

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} (V_n \mathbin{\widehat{\otimes}_K} W) \xrightarrow{\cong} \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \big(V_n'' \mathbin{\widehat{\otimes}_K} W\big).$$

此外，$V_n'' \mathbin{\widehat{\otimes}_K} W$在 $\mathcal{L}_b(V_n', W)$中的像恰好是紧同态 $\mathcal{C}(V_n', W)$的子空间，依据 [67, 命题18.11]。由 [67, 注16.7(i)] 可知，过渡映射 $\mathcal{L}_b(V_n', W) \to \mathcal{L}_b(V_{n+1}', W)$经由 $\mathcal{C}(V_{n+1}', W) \subset \mathcal{L}_b(V_{n+1}', W)$ 分解，因为它们由与紧映射 $V_{n+1}' \to V_n'$的复合给出。因此

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \big(V_n'' \mathbin{\widehat{\otimes}_K} W\big) \cong \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}(V_n', W) \xrightarrow{\cong} \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_b(V_n', W)$$

也是一个拓扑同构。 □

引理 A.8（参见 [70,引理 1.3]）。设 X 是一个局部紧拓扑空间。设 V 和W 是局部凸的 K-向量空间，并假设 V是桶状的。若 $\beta\colon X \times V \to W$ 是一个分别连续映射，且对每个 $x \in X$，$\beta(x,)\colon V \to W$ 是 K-线性的，则 β 是联合连续的。

证明。由 $\beta(x,)$ 的线性性，只需证明对每个 $x \in X$，β 在 $(x, 0)$ 处连续。固定 $x_0 \in X$，并设 $U \subset X$ 是 x_0 的一个紧邻域。我们断言 $H := \{\beta(x,) \mid x \in U\} \subset \mathcal{L}_s(V, W)$ 有界。暂且假设这一断言成立，由 Banach–Steinhaus 定理 [67, 命题 6.15]可知，H 是等连续的。因此，对任意开格 $M \subset W$，存在一个开格 $L \subset V$使得 $\beta(U, L) \subset M$。这表明 β 在 $(x_0, 0)$ 处连续。

为证明该断言，回忆一下，$\mathcal{L}_s(V, W)$的半范数为$q_{v,p}$，其中 $v \in V$且 p是 W的一个连续半范数，并由 $q_{v,p}(f) := p(f(v))$定义，对于 $f \in \mathcal{L}_s(V, W)$ [67,6.后的示例 16]。对于这样的半范数，我们有

$$\sup_{f\in H} q_{v,p}(f) = \sup_{x\in U} p(\beta(x, v)) < \infty$$

因为紧子集 U在连续映射 $p \circ \beta(\quad v)$下的像是有界的。因此，$H \subset \mathcal{L}_s(V, W)$是有界的。□

引理A.9. 设 $(V_i)_{i\in I}$ 和 W 是局部凸的 K-向量空间。那么存在一个自然的拓扑同构

$$\mathcal{L}_b\Big(\bigoplus_{i\in I} V_i, W\Big) \xrightarrow{\cong} \prod_{i\in I} \mathcal{L}_b(V_i, W)\,, \quad f \longmapsto (f|_{V_i})_{i\in I}.$$

（关于 $W = K$ 的情形，参见 *[67,* 命题 9.*10]*）

证明。令 $\iota_i\colon V_i \to V := \bigoplus_{i\in I} V_i$ 表示典范嵌入，并令 $\mathrm{pr}_i\colon V \to V_i$ 表示典范投影。根据 [11, III. §3 练习 5，第 III.41] 页，有一个自然的拓扑同构

$$\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(V,W) \xrightarrow{\cong} \prod_{i\in I} \mathcal{L}_b(V_i,W)\,, \quad f \longmapsto (f|_{V_i})_{i\in I},$$

其中 $\mathcal{B}$ 是族 $\{\iota_i(B_i)\,|\,i\in I, B_i\subset V_i \text{ 有界}\}$ 的 V 的有界集。我们要证明，$\mathcal{B}$-拓扑与 $\mathcal{L}(V,W)$ 上的强拓扑一致。根据 [67, 引理 6.5], ，只需证明：对于给定的有界子集 $B\subset V$，存在 $\iota_{i_1}(B_1)\ldots,\iota_{i_m}(B_m)\in\mathcal{B}$，使得 B 包含于由 $\iota_{i_1}(B_1)\cup\ldots\cup\iota_{i_m}(B_m)$ 生成的 $\mathcal{O}_K$-模的闭包中。

为此，我们采用与 [67, 命题 9.10], 的证明类似的方法，并固定一个有界子集 $B\subset V$。根据 [59, 定理 3.6.4 (ii)], ，所有 $\mathrm{pr}_i(B)\subset V_i$ 都是有界的，并且存在一个有限子集 $J\subset I$，使得对所有 $i\in I\setminus J$，都有 $\mathrm{pr}_i(B)\subset\overline{\{0\}}$。我们定义有界子集 $B_j := \mathrm{pr}_j(B)$，其中 $j\in J$。对于给定的 $v\in B$，记 $v=\sum_{i\in I}\iota_i(v_i)$，其中 $v_i\in V_i$。于是有 $\sum_{j\in J}\iota_j(v_j)\in\sum_{j\in J}\iota_j(B_j)$。

为处理 $\sum_{i\in I\setminus J}\iota_i(v_i)$，令 q 为 V 的一个连续半范数。根据 [67, 引理 5.1 (ii)]，$q\circ\iota_i$ 是 V_i 的一个连续半范数。因此

$$q(\iota_i(v_i)) = (q\circ\iota_i)(\mathrm{pr}_i(v)) = 0,$$

对所有 $i\in I\setminus J$ 均成立，因为对于那些 i，$\mathrm{pr}_i(B)\subset\overline{\{0\}}$。由此，对于 $i\in I\setminus J$，

$$\iota_i(v_i)\in\bigcap_q \mathrm{Ker}(q) = \overline{\{0\}}$$

其中交集取遍 V 的所有连续半范数 q。这表明 v 包含于 $\sum_{j\in J}\iota_j(B_j)$ 在 V 中的闭包内。
□

命题 A.10（参见 [14, 命题 1]）。设 K 为一个带绝对值 $|_|$ 的完备域。设 $U\subset K^n$ 为开集，并设 $f\colon U\longrightarrow E$ 为取值于一个 K-巴拿赫空间 E 中的函数。设 V 和 W 为 K-巴拿赫空间，并令

$$E\times V\longrightarrow W\,, \quad (u,v)\longmapsto\langle u,v\rangle, \tag{A.4}$$

为一个连续的 K-双线性映射，它将 E 等距嵌入到 K 中 - 巴拿赫空间 $\mathcal{L}_b(V,W)$，即对于所有 $u\in E$，

$$|u| = \|\langle u,_\rangle\|_{\mathcal{L}_b(V,W)} := \sup_{v\in V\setminus\{0\}}\frac{|\langle u,v\rangle|}{|v|}\,.$$

那么，对于 $z_0\in U$，以下各项等价：
（1）函数 f 在 z_0 的某个开邻域内是解析的。
(2) 对于所有 $v\in V$，都存在一个 z_0 的开邻域，使得该函数

$$f_v\colon U\longrightarrow W\,, \quad z\longmapsto\langle f(z),v\rangle,$$

在此处是解析的。

证明。首先假设存在 $r\in\mathbb{R}_{>0}$，使得 f 由幂级数给出

$$f(z) = \sum_{\underline{i}\in\mathbb{N}_0^n} a_{\underline{i}}\,(z-z_0)^{\underline{i}} \quad \text{, for } x\in B_r^n(z_0),$$

对于某些 $a_{\underline{i}}\in E$。对于 $v\in V$，由 (A.4) 的连续性可知，

$$f_v(z) = \langle f(z),v\rangle = \sum_{\underline{i}\in\mathbb{N}_0^n}\langle a_{\underline{i}},v\rangle\,(z-z_0)^{\underline{i}} \quad \text{, for all } z\in B_r^n(z_0).$$

这表明 (i) 蕴含 (ii)。

反过来，对于所有 $v \in V$，设 f_v 在 z_0 的某个邻域内解析。这意味着存在半径 $r^{(v)} \in \mathbb{R}_{>0}$，使得 f_v 由收敛幂级数给出。

$$f_v(z) = \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}_0^n} a_{\underline{i}}^{(v)} (z - z_0)^{\underline{i}} \quad \text{, for all } z \in B^n_{r^{(v)}}(z_0),$$

对于某些 $a_{\underline{i}}^{(v)} \in W$。因此存在一个常数 $C^{(v)} > 0$，使得

$$|a_{\underline{i}}^{(v)}| \leq C^{(v)} \left(\frac{1}{r^{(v)}}\right)^{|\underline{i}|}, \tag{A.5}$$

对于所有 $\underline{i} \in \mathbb{N}_0^n$。作为中间步骤，我们要证明：

断言：存在 $r > 0$ 和 $C > 0$，使得对于所有 $\underline{j} \in \mathbb{N}_0^n$，映射

$$b_{\underline{j}} \colon V \longrightarrow W, \quad v \longmapsto a_{\underline{j}}^{(v)},$$

是 K-线性的且连续，并且

$$\|b_{\underline{j}}\|_{\mathcal{L}_b(V,W)} \leq C \left(\frac{1}{r}\right)^{|\underline{j}|}. \tag{A.6}$$

断言的证明。$\langle _, _ \rangle$ 的双线性意味着

$$V \longrightarrow \mathrm{Map}(U, W), \quad v \longmapsto f_v,$$

是 K-线性的。由系数的恒等定理，$b_{\underline{j}}$ 的线性性随即成立。 of 收敛幂级数 [12, 3.2.1 分别为 4.2.1]。

为证明连续性及界 (A.6)，我们在 $\mathbb{N}_0^n$ 上赋予字典序，即当且仅当对于最小的 $k \in \{1, \ldots, n\}$，$\underline{i} < \underline{j}$ 时有 $i_k < j_k$。我们按照此序对 $\underline{j} \in \mathbb{N}_0^n$ 进行归纳。

固定 $\underline{j} \in \mathbb{N}_0^n$，并假设该结论对所有 $\underline{i} < \underline{j}$ 均成立（若 $\underline{j} = (0, \ldots, 0)$，则此假设为空泛假设）。因此存在 $r_{\underline{j}} > 0$ 和 $C_{\underline{j}} > 0$，使得

$$|a_{\underline{i}}^{(v)}| \leq C_{\underline{i}} \left(\frac{1}{r_{\underline{j}}}\right)^{|\underline{i}|} |v| \quad \text{, for all } v \in V \text{ and all } \underline{i} < \underline{j}.$$

因此，对于所有 $(h_1, \ldots, h_n) \in B^n_{r_{\underline{j}}}(0)$ 及所有 $v \in V$，幂级数 $\sum_{\underline{i} < \underline{j}} a_{\underline{i}}^{(v)} h_1^{i_1} \cdots h_n^{i_n}$ 收敛。此外，对于任意 $z \in U$，线性映射 $V \to W$, $v \mapsto f_v(z) = \langle f(z)\ v \rangle$ 连续。因此，对于任意满足 $z_0 + h \in B^n_{r_{\underline{j}}}(z_0) \cap U$ 的 $h \in K^n$，算子

$$T_h \colon V \longrightarrow W, \quad v \longmapsto \frac{1}{h_1^{j_1} \cdots h_n^{j_n}} \left(f_v(z_0 + h) - \sum_{\underline{i} < \underline{j}} a_{\underline{i}}^{(v)} h^{\underline{i}} \right),$$

也是 K-线性的，并且连续。对于固定的 $v \in V$，我们可以假设 $h \in B^n_{r^{(v)}}(0)$，并计算：

$$\begin{aligned}
\lim_{h_n \to 0} \cdots \lim_{h_1 \to 0} T_h(v) &= \lim_{h_n \to 0} \cdots \lim_{h_1 \to 0} \frac{1}{h_1^{j_1} \cdots h_n^{j_n}} \left(\sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}_0^n} a_{\underline{i}}^{(v)} h^{\underline{i}} - \sum_{\underline{i} < \underline{j}} a_{\underline{i}}^{(v)} h^{\underline{i}} \right) \\
&= \lim_{h_n \to 0} \cdots \lim_{h_1 \to 0} \sum_{\underline{i} \geq \underline{j}} a_{\underline{i}}^{(v)} h_1^{i_1 - j_1} \cdots h_n^{i_n - j_n} \\
&= \lim_{h_n \to 0} \cdots \lim_{h_2 \to 0} \sum_{\substack{\underline{i} \geq \underline{j} \\ i_1 = j_1}} a_{\underline{i}}^{(v)} h_2^{i_2 - j_2} \cdots h_n^{i_n - j_n} \\
&\ \ \vdots \\
&= a_{\underline{j}}^{(v)} = b_{\underline{j}}(v).
\end{aligned}$$

由巴拿赫–施泰因豪斯定理 [11, III. §4.2 Cor. 2]，我们得出 $b_{\underline{j}}$ 是算子 T_h 的逐点极限，因此是连续的。

接下来只需证明对所有 $\underline{i} \le \underline{j}$，界 (A.6) 都成立。对于 k，定义 $l \in \mathbb{N}$，

$$B_{\underline{j}}^{k,l} = \big\{ v \in V \,\big|\, \forall \underline{i} \le \underline{j} \colon |a_{\underline{i}}^{(v)}| \le k\, l^{|\underline{i}|} \big\}.$$

由 $b_{\underline{i}}$ 的连续性可知，对于 $\underline{i} \le \underline{j}$，每个 $B^{k}{}_{,\underline{j}}{}^{l}$ 都是 V 中的闭集。根据逐点界（A.5），我们有 $V = \bigcup_{k,l\in\mathbb{N}} B^{k}{}_{,\underline{j}}{}^{l}$。因此，由巴拿赫定理 [9, Ch. IX. §5.3 Thm.1] 可知，存在某个 $B^{k}{}_{,\underline{j}}{}^{l}$，其中包含一个半径为 $\varepsilon > 0$ 、以某个 $v_0 \in B^{k}{}_{,\underline{j}}{}^{l}$ 为中心的开球 $B_\varepsilon(v_0)$。于是，对所有满足 $|v| < \varepsilon$ 的 $v \in V$ 以及所有 $\underline{i} \le \underline{j}$，我们有

$$|a_{\underline{i}}^{(v)}| = |a_{\underline{i}}^{(v+v_0)} - a_{\underline{i}}^{(v_0)}| \le |a_{\underline{i}}^{(v+v_0)}| + |a_{\underline{i}}^{(v_0)}| \le 2k\, l^{|\underline{i}|}\,.$$

我们固定一个满足 $0 < |\varpi| < 1$ 的 $\varpi \in K$。对于任意固定的 $v \in V \setminus \{0\}$，令 $m \in \mathbb{Z}$ 使得 $|\varpi|^m < \frac{\varepsilon}{|v|} \le |\varpi|^{m-1}$。那么

$$|a_{\underline{i}}^{(v)}| = \frac{|a_{\underline{i}}^{(\varpi^m v)}|}{|\varpi^m|} \le \frac{2k}{\varepsilon\,|\varpi|} l^{|\underline{i}|}\,|v|$$

这意味着

$$\big\|b_{\underline{i}}\big\|_{\mathcal{L}_b(V,W)} = \sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{|a_{\underline{i}}^{(v)}|}{|v|} \le \frac{2k}{\varepsilon\,|\varpi|} l^{|\underline{i}|}\,,$$

对所有 $\underline{i} \le \underline{j}$。 □

由该断言可知，幂级数 $\sum_{\underline{j}\in\mathbb{N}_0^n} b_{\underline{j}}(z-z_0)^{\underline{j}}$ 在 z_0 的某个开邻域 $U' \subset U$ 上定义了一个取值于 $\mathcal{L}_b(V,W)$ 的解析函数。在 U' 上，该幂级数与视为映射的 f 一致

$$f\colon U' \longrightarrow \mathcal{L}_b(V,W)\,, \quad z \longmapsto \langle f(z), _ \rangle.$$

事实上，对于 $z \in U'$ 和 $v \in V$：

$$\Big(\sum_{\underline{j}\in\mathbb{N}_0^n} b_{\underline{j}}\,(z-z_0)^{\underline{j}} \Big)(v) = \sum_{\underline{j}\in\mathbb{N}_0^n} b_{\underline{j}}(v)\,(z-z_0)^{\underline{j}} = \sum_{\underline{j}\in\mathbb{N}_0^n} a_{\underline{j}}^{(v)}(z-z_0)^{\underline{j}} = f_v(z) = \langle f(z), v\rangle.$$

因此 $f(z) = \sum_{\underline{j}\in\mathbb{N}_0^n} b_{\underline{j}}(z-z_0)^{\underline{j}}$ 在 U' 上作为到 $\mathcal{L}_b(V,W)$ 的映射是解析的。

最后，根据假设，E 可以被识别为 $\mathcal{L}_b(V,W)$ 的闭子空间。按照证明该断言时的相同推理，f 的系数 $b_{\underline{j}}$ 可以计算为 E 中序列的极限。因此，对于所有 $\underline{j} \in \mathbb{N}_0^n$，以及 $f\colon U' \to E$ 由收敛幂级数给出。□

引理 A.11. 设 $f\colon V \to W$ 是局部凸 K-向量空间之间的连续同态，并假设 V 是豪斯多夫的。那么在 V' 中我们有等式

$$\overline{\mathrm{Im}(f^t)}^{s} = \mathrm{Ker}(f)^\perp := \big\{ \ell \in V' \,\big|\, \forall v \in \mathrm{Ker}(f) : \ell(v) = 0 \big\}$$

其中，~~$\mathrm{Im}(f^t)$~~ ^{s} 表示转置 $f^t\colon W' \to V'$ 在 V'_s 中的像的闭包。

此外，如果 V 是半自反的，那么核$(f)^\perp \subset$ 像(f^t) 在 V'_b 中。

证明。进行两次转置

$$\mathcal{L}(V,W) \longrightarrow \mathcal{L}(W'_s, V'_s) \longrightarrow \mathcal{L}\big((V'_s)'_s, (W'_s)'_s\big),$$

我们看到，当 V 和 W 分别赋予弱拓扑 $V_s = (V'_s)'_s$ 和 $W_s = (W'_s)'_s$ 时，f 仍定义一个连续同态。于是，$\mathrm{Ker}(f)^\perp = \mathrm{Im}(f^t)^{s}$ 这一结论是 [11, II. §6.4 Cor. 2] 的一部分。

这是哈恩–巴拿赫定理的一个推论：闭子空间像$(f^t) \subset V'_b$ 也是弱闭的 [59, 定理 5.2.1]。如果我们假设 V 是半自反的，即对偶同态 $V \to (V'_b)'$ 是双射的，那么弱对偶 V 上的拓扑与强对偶的弱拓扑一致：$V'_s = (V'_b)_s$，参见 [23, 定理 7.4.9]。由于像(f^t) 现在是 V'_s ~~的一个~~ 闭子集，其中包含像(f^t)，因此可推出像$(f^t)^{s} \subset$ 像(f^t)。□

引理 A.12。设 V 是一个局部凸 K-向量空间，且 $f\colon\ V \to W$ 是 K-向量空间的同态。如果 W 赋予关于 f 的局部凸终拓扑，则 f 是严格的。

证明。注意， f 作为局部凸 K-向量空间之间的同态是连续的，当且仅当所诱导的代数同构$\overline{f}$: $V/$核$(f)\ \to$像(f) 关于商拓扑和子空间拓扑分别是连续的。

我们反设，当 W 赋予关于 f 的局部凸终拓扑时， $\overline{f}$ 不是同胚。在这种情况下，我们找到一个开格 $L \subset V$，使得 $\overline{f}(L +$核$(f))$ 是像(f) 中的一个不开放的格。通过扩张，我们得到一个格 $M \subset W$，使得 $M \cap$像$(f) = \overline{f}(L +$核$(f))$。但是， $f^{-1}(M) = L +$核(f) 是 V 的一个开格。因此，根据 W 上拓扑的定义， M 必须是一个开格。这就产生了矛盾。□

引理 A.13（拟阿贝尔范畴中的蛇引理 [49][14] ）。考虑如下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

局部凸 K 向量空间之间的连续同态的严格正合行 *s.*
于是得到诱导的核–余核序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha) \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{Ker}(\beta) \xrightarrow{\zeta} \mathrm{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(\alpha) \xrightarrow{\tau} \mathrm{Coker}(\beta) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Coker}(\gamma) \longrightarrow 0 \tag{A.7}$$

连续同态的序列在核(α)、核(β)、余核(β)和余核(γ)处是正合的。此外， ε 和 θ 是严格的。我们还得到:
(1) 如果 β 是严格的，那么 (A.7) 在 Ker(γ) 和 Coker(α) 中正合，且 δ 是严格的。
(2) 如果 α 是严格的，则 (A.7) 在 Ker(β) 和 Ker(γ) 中是正合的，并且 ζ 是严格的。
(3) 若 γ 是严格的，则 (A.7) 在 Coker(α) 和 Coker(β) 中正合，且 τ 是严格的。
特别是，若 α、 β 和 γ 都是严格的，则 (A.7) 是一个严格正合序列。

Appendix B. Continuous and Locally Analytic Characters

在本附录中，我们考察正特征非阿基米德局部域的乘法群的连续与局部解析特征，即一维表示。

不过，我们先回顾一下 p-进域的情形，即 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张 K 。令 $\mathbb{C}_p$ 为 $\mathbb{Q}_p$ 的代数闭包的完备化。取整数环 $\mathcal{O}_K$ 中的一个素元 π ，则存在一个拓扑群同构 [54, II. 定理 5.3]

$$K^\times \cong \pi^{\mathbb{Z}} \times \mu_{q-1} \times U_K^{(1)}. \tag{B.1}$$

这里 μ_{q-1} 表示 K 中 $(q-1)$ 次单位根构成的群，其中 q 是剩余域 $\mathcal{O}_K/(\pi)$ 的元素个数，并且

$$U_K^{(n)} := \left\{ x \in \mathcal{O}_K \,\middle|\, x \equiv 1 \bmod (\pi^n) \right\} \subset \mathcal{O}_K^\times \quad , \text{for } n \in \mathbb{N}.$$

由于 μ_{q-1} 和 $\pi^{\mathbb{Z}}$ 都是离散群，在考虑取值于 $\mathbb{C}_p^\times$ 的 $K^\times$ 的连续特征时，只需关注 $U_K^{(1)}$ 。对于 $n > \frac{e}{p-1}$ ，其中 e 是 $K/\mathbb{Q}_p$的分歧指数，对数和指数函数给出了 $U_K^{(n)}$ 与 $\mathcal{O}_K$ [54, II 中的加法子群（π^n）之间的拓扑群同构。定理 5.5]。此外，每个 $U_K^{(n)}$ 在 $U_{(1)K}$ 中都是有限指数。

[14]请注意， [49] 中使用的“半阿贝尔”范畴概念与 [76], cf. [49, 第 511] 页中的“拟阿贝尔”范畴概念一致。

由马勒定理 [72, 定理 13.1] 可知，每个连续加法特征$\psi\colon (\pi) \to \mathbb{C}_p^\times$都具有如下形式： $\psi(a) = z_1^{a_1} \cdots z_d^{a_d}$，其中 $z_i \in \mathbb{C}_p$ 满足 $|z_i - 1| < 1$。这里我们记$d := [K\colon \mathbb{Q}_p]$ 以及 $a = a_1 e_1 + \ldots + a_d e_d$，它们是在某个 $\mathbb{Z}_p$-基 $e_1, \ldots, e_d$ 下的 $\mathcal{O}_K$ [72, 例 16.2]。根据阿米斯定理 [72, 定理 13.2]，这样的特征 ψ 是局部 $\mathbb{Q}_p$解析的，也就是说，当其源群被视为局部 $\mathbb{Q}_p$解析李群时，它是一个局部解析函数。此外，当且仅当其微分 $d_0\psi\colon K \to \mathbb{C}_p$ 不仅是$\mathbb{Q}_p$-线性的，甚至是 K-线性的 [72, 命题 16.3]时，它才是局部 K解析的。

由于对数和指数函数都是局部 K-解析的，因此每个连续特征 $\chi\colon K^\times \to \mathbb{C}_p^\times$都是局部 $\mathbb{Q}_p$-解析的；若微分 $d_1\chi$ 是 K-线性的，则它甚至是局部 K-解析的。此外，在后一种情况下，存在 $c \in \mathbb{C}_p$ 使得$\chi(z) = z^c := \exp\big(c\log(z)\big)$在 $U_K^{(n)}$上成立，其中 $n > \frac{e}{p-1}$。

B.1. 连续特征。现在我们转向正特征的局部非阿基米德域 K p的情形 $K = \mathbb{F}_q((t))$，其中 $q = p^r$。当然，取值于等特征域 p中的 K 或其子群的加法特征只有平凡特征。对于 $K^\times$ 的连续乘法特征，同样有分解式 (B.1)，因此问题再次归结为研究 $U_K^{(1)}$ 的连续特征。

为此，更一般地考虑阿贝尔度量群 G 和 H，其中 G 局部紧且第二可数。于是，连续群同态的集合$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(G, H)$ 可赋予紧开拓扑，其开集由下式给出

$$\mathcal{U}(C, U) := \big\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(G, H) \,\big|\, f(C) \subset U \big\} \quad \text{, for } C \subset G \text{ compact and } U \subset H \text{ open.}$$

配备逐点群运算$(f + f')(g) := f(g) + f'(g)$后，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(G, H)$本身成为一个可度量化拓扑群 [53, 命题 6.5.2]。此外，若 G 是紧的，则该拓扑与一致收敛的拓扑重合，且一个度量由 [53, p. 238] 给出。

$$d(f, f') := \sup_{g \in G} d_H\big(f(g), f'(g)\big) \quad \text{, for } f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(G, H).$$

在下文中，我们始终以这种方式将 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(G, H)$ 视为一个度量群。

设 $K \subset L$ 是带有绝对值 $|_|$ 的有限域扩张，该绝对值延拓了 K 上的绝对值。设 f 和 e 分别为 L 对 K 的惯性次数和分歧指数，即 $L \cong \mathbb{F}_{q^f}\big((t^{\frac{1}{e}})\big)$。那么 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}\big(U_K^{(1)}, U_{(1)_L}\big)$ 上的度量由下式给出。

$$d(\chi, \chi') := \sup_{z \in U_K^{(1)}} |\chi(z) - \chi'(z)| \quad \text{, for } \chi, \chi' \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}\big(U_K^{(1)}, U_L^{(1)}\big).$$

我们需要以下描述 [54, II. 命题 5.7 (ii)]（这又复现了 [40, 命题 2.8]）：设 $\omega_1, \ldots, \omega_r$为 $\mathbb{F}_q$ 的一个 $\mathbb{F}_p$-基，并定义

$$E_K := \prod_{p \nmid m} \prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}_p$$

其中，第一个乘积遍历所有 m 不能被 p整除的正整数。则映射

$$E_K \xrightarrow{\cong} U_K^{(1)}, \quad \big(a_{(m,i)}\big)_{(m,i)} \longmapsto \prod_{p \nmid m} \prod_{i=1}^{r} (1 + \omega_i t^m)^{a_{(m,i)}}, \tag{B.2}$$

是拓扑群之间的良定义同构。

此外，考虑一个 $\mathbb{F}_p$-基 $\omega_{1,\ 1}$、...、$\omega_{r,\ f}$，其属于 $\mathbb{F}_{q^f}$，满足 $\omega_{i,\ 1} = \omega_i$，对所有 $i = 1$、...、r 均成立。类似地，我们有同构

$$E_L := \prod_{p \nmid n} \prod_{j,k=1}^{r,f} \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\cong} U_L^{(1)}, \quad \big(b_{(n,j,k)}\big) \longmapsto \prod_{p \nmid n} \prod_{j,k=1}^{r,f} \big(1 + \omega_{j,k} t^{\frac{n}{e}}\big)^{b_{(n,j,k)}}$$

拓扑群的同构。令 s、$e' \in \mathbb{N}$ 满足 $e = p^s e'$ 和 $p \nmid e'$。在上述同构下，规范嵌入 $U(1) \hookrightarrow U_L^{(1)}$ 对应于嵌入

$$E_K \hookrightarrow E_L\,, \quad \big(a_{(m,i)}\big) \longmapsto \big(b_{(n,j,k)}\big) \quad \text{, where } b_{(n,j,k)} = \begin{cases} p^s a_{(m,j)} & \text{,if } n = e'm \text{ and } k = 1, \\ 0 & \text{,else.} \end{cases}$$

命题 B.1.1. 存在一个拓扑群的同构。

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}\big(U_K^{(1)}, U_L^{(1)}\big) \xrightarrow{\cong} \prod_{p\nmid n} \prod_{j,k=1}^{r,f} c_0(\mathbb{N}_{p'}, \mathbb{Z}_p^r)\,, \quad \chi \longmapsto \Big(\underline{a}_{(n,j,k)} = \big(a_{(n,j,k)}^{(m,i)}\big)\Big), \tag{B.3}$$

由.....给出

$$\chi(1+\omega_i t^m) = \prod_{p\nmid n} \prod_{j,k=1}^{r,f} (1+\omega_{j,k} t^{\frac{n}{e}})^{a_{(n,j,k)}^{(m,i)}}.$$

Here

$$c_0(\mathbb{N}_{p'}, \mathbb{Z}_p^r) := \Big\{ \underline{a} = \big(a^{(m,1)}, \ldots, a^{(m,r)}\big)_{p\nmid m} \subset \mathbb{Z}_p^r \,\Big|\, \max_{i=1}^{r} \big|a^{(m,i)}\big| \to 0 \ \textit{as}\ m \to \infty \Big\}.$$

通过序列加法和上确界范数，它具有度量群的结构。

证明。首先，我们利用将 $U_L^{(1)}$ 描述为 $\mathbb{Z}_p$ 的可数乘积这一性质，将问题化简为确定 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}\big(U_K^{(1)}, \mathbb{Z}_p\big)$。这可通过下面这个可能广为人知、但我们未能在文献中找到出处的引理来完成。

引理 B.1.2.令 G 为一个局部紧、第二可数的阿贝尔度量群，并令H_i、 $i \in I$为阿贝尔度量群，指标集 I为可数集。则映射

$$\begin{aligned} \alpha\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}\Big(G, \prod_{i\in I} H_i\Big) &\longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(G, H_i) \\ \chi &\longmapsto (\mathrm{pr}_i \circ \chi)_{i\in I} \end{aligned}$$

是拓扑群的同构。

证明。考虑群同态

$$\alpha_j\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}\Big(G, \prod_{i\in I} H_i\Big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(G, H_j)\,, \quad \chi \longmapsto \mathrm{pr}_j \circ \chi,$$

对于 $j \in I$。对于 $C \subset G$ 紧且 $U_j \subset H_j$ 开，我们有

$$\alpha_j^{-1}\big(\mathcal{U}(C, U_j)\big) = \mathcal{U}\Big(C, U_j \times \prod_{i\in I\setminus\{j\}} H_i\Big).$$

因此， α_j 是连续的。由于 α 是由乘积的泛性质从 α_j 诱导出的， α 是一个连续的群同态。

在群同态层面上， α 的逆映射 β 可定义为：将同态的集合（$\chi_i\colon\ G \to H_i$）$_{i\in I}$映射到同态 $\prod_{i\in I} \chi_i\colon\ G \to \prod_{i\in I} H_i$，该同态由乘积的泛性质诱导而来。此外，这个逆映射是连续的：设 $C \subset G$紧，并设 $U_i \subset H_i$ 开且对于几乎所有 $i \in I$都有 $U_i = H_i$。则我们有

$$\beta^{-1}\Big(\mathcal{U}\Big(C, \prod_{i\in I} U_i\Big)\Big) = \prod_{i\in I} \mathcal{U}(C, U_i).$$

□

对于带有 $p \nmid m$ 和 $i \in \{1, \ldots, r\}$ 的 $m \in \mathbb{N}$，令 $\mathbb{I}^{(m,\ i)} \in E_K$ 表示具有以下性质的元素

$$\mathrm{pr}_{(n,j)}\big(\mathbb{I}^{(m,i)}\big) = \begin{cases} 1 & \text{,if } m = n \text{ and } i = j, \\ 0 & \text{,else.} \end{cases}$$

通过拓扑同构 (B.2)，以下对 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(E_K,\mathbb{Z}_p)$ 的描述完成了命题 B.1.1 的证明。

引理 B.1.3. 存在一个拓扑群同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(E_K,\mathbb{Z}_p) &\xrightarrow{\cong} c_0(\mathbb{N}_{p'},\mathbb{Z}_p^r) \qquad (B.4)\\ \chi &\longmapsto \Big(\chi\big(\mathbb{I}^{(m,1)}\big),\dots,\chi\big(\mathbb{I}^{(m,r)}\big)\Big)_{p\nmid m}\\ \Big[a=\big(a_{(m,i)}\big)\mapsto\sum_{p\nmid m}\sum_{i=1}^{r}a_{(m,i)}\lambda^{(m,i)}\Big] &\longmapsto \Big(\lambda^{(m,1)},\dots,\lambda^{(m,r)}\Big)_{p\nmid m},\end{aligned}$$

(参见 *[22,* 命题 3.5 和 3.*6]*，其中上述映射被证明为双射)。证明。对于 $N\geq 0$，令

$$E_{K,N}:=\prod_{\substack{p\nmid m\\ m<N}}p^N\mathbb{Z}_p^r\times\prod_{\substack{p\nmid m\\ m\geq N}}\mathbb{Z}_p^r.$$

子集 $E_{K,N}$ 构成 $0\in E_K$的基本开邻域系，并满足$\mathbb{I}^{(m)}:=(\mathbb{1}^{(m,1)},\dots,\mathbb{1}^{(m,r)})\in E_{K,N}$，对所有 $m\geq N$均成立。因此，对于 $\chi\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(E_K,\mathbb{Z}_p)$，$\chi$的连续性意味着，当 $m\to\infty$时，序列 $\big(\chi(\mathbb{I}^{(m)})\big)_{p\nmid m}=\big(\chi(\mathbb{I}^{(m,1)})\dots,\chi(\mathbb{I}^{(m,r)})\big)_{p\nmid m}$在 $\mathbb{Z}_p^r$中趋于 0。

另一方面，对于右侧的零序列 $\big(\lambda^{(m)}\big)_{p\nmid m}:=\big(\lambda^{(m,1)},..,\lambda^{(m,r)}\big)_{p\nmid m}$，显然 $a_{(m,i)}\lambda^{(m,i)}$对于 $a_{(m,i)}\in\mathbb{Z}_p$ 是可求和的。因此，(B.4) 是（抽象）群的同构。

仍需证明 (B.4) 是一个同胚。为此，我们考虑 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(E_K,\mathbb{Z}_p)$ 中的一个序列 $(\chi_k)_{k\in\mathbb{N}}$。那么 $(\chi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛到 0 等价于

$$\sup_{a\in E_K}|\chi_k(a)|\longrightarrow 0\quad\text{as } k\to\infty.$$

在这种情况下，显然可得，

$$\sup_{p\nmid m}\big|\chi_k\big(\mathbb{I}^{(m)}\big)\big|\longrightarrow 0\quad\text{as } k\to\infty,$$

也就是说，$\Big(\big(\chi_k(\mathbb{I}^{(m)})\big)_{p\nmid m}\Big)_{k\in\mathbb{N}}$在 $c_0(\mathbb{N}_{p'},\mathbb{Z}_p^r)$中收敛到 0。

反过来，设 $\big(\lambda_k^{(m)}\big)_{p\nmid m}$ 是右侧中对应于 χ_k、满足 $k\in\mathbb{N}$ 的元素零序列，并假设 $\big(\lambda_k^{(m)}\big)_{p\nmid m}$ 在 $c_0(\mathbb{N}_{p'},\mathbb{Z}_p)$ 中收敛到 0。那么

$$\begin{aligned}\sup_{a\in E_K}|\chi_k(a)| &= \sup_{a\in E_K}\Big|\sum_{p\nmid m}\sum_{i=1}^{r}a_{(m,i)}\lambda_k^{(m,i)}\Big|\\ &\leq \sup_{a\in E_K}\sup_{\substack{p\nmid m\\ i=1,\dots,r}}|a_{(m,i)}|\big|\lambda_k^{(m,i)}\big|\leq\sup_{p\nmid m}\big|\lambda_k^{(m)}\big|\longrightarrow 0\quad\text{as } k\to\infty.\end{aligned}$$

因此，$(\chi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(E_K,\mathbb{Z}_p)$ 中收敛到 0。 □

□

B.2. 局部解析特征。与 p-进域的情形相比，对于正特征局部域，以合理的方式比较时，局部解析特征的数量远少于连续特征。此外，这些局部解析特征比其 p-进对应物表现得更为僵化。其原因在于 K 上存在弗罗贝尼乌斯自同态 $z\mapsto z^p$。

设 A 是一个交换含幺 K-巴拿赫代数，且它是一个整环。现在我们考虑取值于 $A^\times$ 的 $U_K^{(1)}$ 的局部 K-解析特征，即群同态$\chi\colon U^{(1)}{}_K\to A^\times$，使得 $U^{(1}{}_K\xrightarrow{\chi}A^\times\hookrightarrow A)$ 按照定义 1.1.13 (i) 的意义是局部 K-解析的。我们回顾如下结论（例如参见 [42] ）：

引理 B.2.1（卢卡斯定理）。令 m 和 n 为非负整数， p 为素数。则

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} \bmod (p),$$

其中， $m = \sum_{i=0}^{k} m_i p^i$ 和 $n = \sum_{i=0}^{k} n_i p^i$ 是 p-进展开，并且我们约定：当 $a < b$时，$\binom{a}{b} = 0$ ，其中 a、 $b \in \mathbb{N}_0$。

特别地，我们可以通过.....将二项式系数模 p 的定义规范地扩展到 $c \in \mathbb{Z}_p$ 和 $n \in \mathbb{Z}$ 】 $\binom{c}{n}$ 【。

$$\binom{c}{n} := \binom{c_0}{n_0} \cdots \binom{c_k}{n_k} \bmod (p)$$

其中， $c = \sum_{i=0}^{\infty} c_i p^i$ 和 $n = \sum_{i=0}^{k} n_i p^i$ 是 p-进展开。

此外，我们将使用最初由 Hasse 和 Teichm¨uller 引入的超导数，其性质汇总于 [42, §2]: 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$是一个取值于 A 、以某个 $z_0 \in K$为中心的形式幂级数。那么， f 的第 k 个超导数定义为形式幂级数

$$D^{(k)} f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (z - z_0)^{n-k}.$$

如果 f 在某个 $r > 0$ 上于 $B_r^1(z_0) \subset K$ 严格收敛，那么 $D^{(k)} f$ 在 z_0 附近也以相同的收敛半径严格收敛。取 k 阶超导数是 K-线性的。对于取值于 K 的幂级数，我们还将使用链式法则 [42, §2] （或 [37]）的一个特殊情形:

$$D^{(1)}(f \circ g) = \big((D^{(1)} f) \circ g\big) \cdot D^{(1)} g.$$

定理 B.2.2. 设 $\chi\colon U^{(1)}{}_K \to A^\times$ 是一个局部 K-解析特征。那么 χ 经嵌入 $U_K^{(1)} \hookrightarrow A^\times$ 分解，并且存在 $c \in \mathbb{Z}_p$ ，使得 $\chi = \chi_c$ ，其中

$$\chi_c(z) = z^c := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{c}{n} (z-1)^n \quad , \textit{for all } z \in U_K^{(1)}. \tag{B.5}$$

此外， χ 的所有 p^i 阶超导数在 1 处的取值实际上都包含于 $\mathbb{F}_p \subset A$ ，并且 c 由 $c_i \equiv D^{(p^i)} \chi(1)$ 模 (p) 唯一确定，其中 $c = \sum_{i=0}^{\infty} c_i p^i$ 是 p-进展开。

证明。首先注意到，(B.5)中的每个函数 χ_c 都定义了一个从 $U_K^{(1)}$ 到其自身的（局部） K-解析特征。事实上，对于 $c \in \mathbb{N}$，方程 $\chi_c(zw) = \chi_c(z)\chi_c(w)$ 由 $\mathbb{Z}[\![z, w]\!]$ 中的形式幂级数恒等式推出。随后对 $c \in \mathbb{Z}_p$ 的逼近得到

$$\chi_c(zw) \equiv \chi_c(z)\chi_c(w) \bmod (t^n) \quad , \text{for all } n \in \mathbb{N},\ z, w \in U_K^{(1)},$$

其中， t 是 $\mathcal{O}_K = \mathbb{F}_q[\![t]\!]$ 的素元。这证明了所求的函数方程。

现在，设 $\chi\colon U_{(1)K} \to A^\times$是一个局部 K-解析特征。设 $N \geq 1$使得在 $U_K^{(N)} = 1 + t^N \mathcal{O}_K$上，特征 χ由严格收敛幂级数给出

$$\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n \quad , \text{with } a_n \in A.$$

由 $\chi(z^p) = \chi(z)^p$ 可得，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^p - 1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^p (z^p - 1)^n \quad , \text{for all } z \in U_K^{(N)}.$$

因此，根据恒等定理 1.1.1，我们有 $a_n = a_n^p$。由于根据假设， A 是一个整环，这意味着 a_n 已经包含在 $\mathbb{F}_p \subset A$ 中。由于 $|a_n| = 1$，对于所有 $n \geq 0$,

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n$ 在整个 $U_{(1)K}$ 上严格收敛。对于 $z \in U_K^{(1)}$，令$j \geq 0$ 使得 $z^{p^j} \in U_K^{(N)}$。然后

$$\chi(z)^{p^j} = \chi(z^{p^j}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^{p^j}-1)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n\right)^{p^j}.$$

因此，对于所有 $z \in U_K^{(1)}$，利用 A 是特征为 p 的整环这一事实，可得 $\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n$。

现在考虑对所有 $w \in U_K^{(1)}$，将链式法则应用于关于 z 的超导数:

$$\chi(w)\, D^{(1)}\chi(z) = D^{(1)}\big(\chi(w)\chi(z)\big) = D^{(1)}\chi(wz) = D^{(1)}\big(\chi \circ (w_)\big)(z) = D^{(1)}\chi(wz)\cdot w.$$

令 $z=1$，并注意到 $D^{(1)}\chi(1) = a_1$，我们得出结论:

$$\chi(w)\, a_1 = w\, D^{(1)}\chi(w) = (w-1)D^{(1)}\chi(w) + D^{(1)}\chi(w)\,.$$

由幂级数恒等定理 1.1.1 可知，由于 $w \in U_K^{(1)}$ 是任意的，这就是一个幂级数恒等式。因此，对于所有 $n \geq 1$,

$$a_1 a_n = \binom{n+1}{1} a_{n+1} + \binom{n}{1} a_n. \tag{B.6}$$

对于所有 $l \geq 0$，我们想通过对 j 的归纳法证明

$$a_{lp+j} = \binom{a_1}{j} a_{lp} \quad \text{, for } j = 0, \ldots, p-1, \tag{B.7}$$

其中，我们将 $a_1 \in \mathbb{F}_p$ 与其在 $\{0,\ldots,p-1\} \subset \mathbb{Z}$ 中的代表元等同。对于 $j=0$，(B.7) 显然成立，因为 $\binom{a_1}{0} = 1$。现在假设 (B.7) 对 $j \in \{0,\ldots,p-2\}$ 成立。那么，对于 $n = lp+j$，由 (B.6) 和归纳假设可得

$$(j+1)a_{lp+j+1} = \binom{lp+j+1}{1} a_{lp+j+1} = \left(a_1 - \binom{lp+j}{1}\right) a_{lp+j} = (a_1 - j)\binom{a_1}{j} a_{lp}\,.$$

因此

$$a_{lp+j+1} = \frac{a_1 - j}{j+1}\binom{a_1}{j} a_{lp} = \binom{a_1}{j+1} a_{lp}$$

这表明 (B.7) 对 $j+1$ 成立。

注意

$$z^{a_1} = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{a_1}{j} (z-1)^j,$$

因此

$$\begin{aligned}\chi(z) &= \sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{p-1} a_{lp+j}(z-1)^j\right)(z-1)^{lp} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{p-1}\binom{a_1}{j}(z-1)^j\right) a_{lp}(z-1)^{lp} = z^{a_1}\sum_{l=0}^{\infty} a_{lp}(z^p-1)^l.\end{aligned}$$

我们定义，对于 $z \in U_K^{(1)}$ 和 $i \geq 0$,

$$\chi^{(i)}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)}(z-1)^n \quad \text{, where } a_n^{(i)} := a_{np^i}.$$

然后 $\chi(z) = z^{a_1}\chi^{(1)}(z^p)$。利用弗罗贝尼乌斯自同态的单射性，这意味着 $\chi^{(1)}$ 也是 $U_K^{(1)}$ 上的局部 K-解析特征。递归地可得 $\chi^{(i)}$ 是一个

在 $U_K^{(1)}$ 上局部 K-解析的特征，对所有 $i \geq 0$。此外，将 (B.7) 应用于 $\chi^{(i)}$ 可得，对所有 $l \geq 0$,

$$a_{lp^{i+1}+jp^i} = a_{lp+j}^{(i)} = \binom{a_1^{(i)}}{j} a_{lp}^{(i)} = \binom{a_{p^i}}{j} a_{lp^{i+1}} \quad , \text{for } j = 0, \ldots, p-1. \tag{B.8}$$

为完成证明，我们证明对于所有 $n \geq 0$、$a_n = \prod_{i=0}^k \binom{a_{p^i}}{n_i}$，其中 $n = \sum_{i=0}^k n_i p^i$ 是 n 的 p-进展开。事实上，固定一个具有此类 p-进展开的 $n \in \mathbb{N}$。于是，对于 $i = 0$、……、k，(B.8) 给出

$$\begin{aligned} a_n &= a_{(\sum_{i=1}^k n_i p^{i-1})p+n_0} = \binom{a_1}{n_0} a_{\sum_{i=1}^k n_i p^i} \\ &= \binom{a_1}{n_0} a_{(\sum_{i=2}^k n_i p^{i-2})p^2+n_1 p} = \binom{a_1}{n_0}\binom{a_p}{n_1} a_{\sum_{i=2}^k n_i p^i} \\ &= \ldots = \binom{a_1}{n_0} \cdots \binom{a_{p^k}}{n_k}. \end{aligned}$$

最后注意到，对于所有 $i \geq 0$，$a_{p^i} = D^{(p^i)}\chi(1)$。 □

推论 B.2.3。局部解析特征 $\mathrm{End}_{\mathrm{la}}\big(U_K^{(1)}\big) \subset \mathrm{End}_{\mathrm{cts}}\big(U_K^{(1)}\big)$ 构成一个闭子环，其乘法由复合给出。此外，赋予其诱导的子空间拓扑后，(B.5) 中的描述给出一个同构

$$\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\cong} \mathrm{End}_{\mathrm{la}}\big(U_K^{(1)}\big), \quad c \longmapsto \chi_c,$$

拓扑环的同构，并且上述嵌入 $\mathrm{End}_{\mathrm{la}}\big(U_K^{(1)}\big) \subset \mathrm{End}_{\mathrm{cts}}\big(U_K^{(1)}\big)$ 对应于

$$\mathrm{diag}\colon \mathbb{Z}_p \longrightarrow \prod_{p \nmid n} \prod_{j=1}^{r} c_0(\mathbb{N}_{p'}, \mathbb{Z}_p^r), \quad c \longmapsto \mathrm{diag}(c) := \Big(\underline{c}_{(n,j)} = \big(c_{(n,j)}^{(m,i)}\big)\Big), \tag{B.9}$$

$$\text{where } c_{(n,j)}^{(m,i)} := \begin{cases} c & \text{, if } m = n \text{ and } i = j, \\ 0 & \text{, else,} \end{cases}$$

在此同构以及标识（B.3）下。

证明。容易计算得出，像 $\mathrm{diag}(\mathbb{Z}_p)$ 是一个闭子群。为证明加法群的单射同态（B.9）是拓扑嵌入，我们证明序列 $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}_p$ 收敛到 0，当且仅当 $\big(\mathrm{diag}(c_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛到 0。事实上，后者等价于 $\big((\underline{c_k})_{(n,j)}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $c_0(\mathbb{N}_{p'}, \mathbb{Z}_p)$ 中收敛到 0，其中对所有满足 $p \nmid n$ 的 $n \in \mathbb{N}$ 以及 $j = 1, \ldots, r$ 均成立。但对于 $c_0(\mathbb{N}_{p'}, \mathbb{Z}_p)$ 的上确界范数 $|_|_\infty$，我们计算得

$$|(\underline{c_k})_{(n,j)}|_\infty := \sup_{p \nmid m} \big|(\underline{c_k})_{(n,j)}^{(m,i)}\big| = |c_k|.$$

剩下唯一需要验证的是，同构 $\mathrm{End}_{\mathrm{la}}\big(U_K^{(1)}\big) \cong \mathbb{Z}_p$ 与乘法相容，即对于 $c, d \in \mathbb{Z}_p$，有 $\chi_c \circ \chi_d = \chi_{cd}$。对于 $c, d \in \mathbb{N}$，这是成立的，因为在此情形下，$\chi_c(z)$ 就是通常的 z^c 次幂运算。一般情形则由逼近和连续性推出。□

References

[1] S. Agrawal和 M. Strauch.

From category $\mathcal{O}^\infty$ to locally analytic representations *J. Algebra*. 载于: 0, **592** 2022 169 232 DOI 10 1016 2021 09 032 第– 页。 : 。 /j.jalgebra。。。[2] H.H.Andersen。 *BGG categories in prime characteristics*。载于: *Math. Z.* **301**。2（2022年），第 1481– 1505 页。 DOI: 10.1007/s00209-021-02962-w。[3] H. H. Andersen。 *Character formulas in Category $\mathcal{O}_p$*。2022年9月预印本。arXiv: 2209.02261v2。[4] C.B˘anic˘a 和O.St˘an˘a,sil˘a。 *Algebraic methods in the global theory of complex spaces*。译自罗马尼亚语。Editura Academiei，布加勒斯特；John Wiley & Sons，伦敦-纽约-悉尼，1976年。

[5] V.G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*。第 33卷。数学调查与专著。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1990 年。 DOI: 10.1090/surv/033。[6] S. Bosch。 *Lectures on formal and rigid geometry*。第 2105卷。数学讲义。Springer，Cham，2014年。 DOI: 10.1007/978-3-319-04417-0。[7] S. Bosch、U.G¨untzer 和R.Remmert。 *Non-Archimedean analysis*。第261 卷。数学科学基础丛书 [数学科学基础]。刚性解析几何的系统方法。施普林格出版社，柏林，1984年。 DOI: 10.1007/978-3-642-52229-1。[8] N. Bourbaki。 *Elements of mathematics. General topology. Part 1*。Hermann，巴黎；Addison-WesleyPublishing Co.，雷丁，马萨诸塞州—伦敦—唐米尔斯，安大略省，1966 年。[9] N. Bourbaki。 *Elements of mathematics. General topology. Part 2*。Hermann，巴黎；Addison-WesleyPublishing Co.，雷丁，马萨诸塞州—伦敦—唐米尔斯，安大略省，1966 年。[10] N.Bourbaki。 *Lie groups and Lie algebras. Chapters 1–3*。《数学原本》（柏林版）。译自法文，1975年版本重印。施普林格出版社，柏林，1989 年。 ISBN: 3-540-50218-1。[11] N.Bourbaki。 *Topological vector spaces. Chapters 1–5*。《数学原本》（柏林版）。H.G. Eggleston和 S.Madan 从法文翻译。施普林格出版社，柏林，1987年。DOI: 10.1007/978-3-642-61715-7。[12] N. Bourbaki。 *Variétés différentielles et analytiques. Fascicule de résultats*。Masson，巴黎，1967 年首次出版。施普林格出版社，柏林、海德堡，2007年。′: 978-3-540- 34396-7。 ISBNC. Breuil 和F. Herzig。[13] GL 。载于: （），第 – 页。 : 。/ imrn/rnz。 *Towards the finite slope part for n Int. Math. Res. Not. IMRN* F. 24 2020 10495 10552 DOI 10 1093 053 E.Browder。[14] 。载于: *Analyticity and partial differential equations. I*（1962 年），第666–710 页。 *Amer. J. Math.* **84**： 10.2307/2372872。 DOIH. Carayol。[15] 。载于: ，，，。数学视野。Academic Press，波士顿，马萨诸塞州，1990 年，第15–39 页。 *Nonabelian Lubin-Tate theory Automorphic forms Shimura varieties and L-* P. Cartier。[16] 。载于: ，， *functions Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988)* **11** *Representations of p-adic groups: a survey Automorphic forms representations* 。纯粹数学专题讨论会 *and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977)* 论文集，XXXIII。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，第– 页。 *Part 1* 1979, 111 155 W. Casselman。[17] 。 载于: *On a p-adic vanishing theorem of Garland*（1974 年），第1001–1004页。 *Bull. Amer. Math. Soc.* **80**： 10.1090/S0002-9904-1974-13611-6。 DOIA. Chambert-Loir。[18] 。载于: （），第 – 页。: 。 /CRELLE。 。 。 *Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich J. Reine* P. Colmez、 *Angew. Math.* **595** 2006 215 235 DOI 10 1515 2006 049 G.Dospinescu 和 W. Nizio l。[19] 。载于: （） ，第 页。 : /jams/ *Cohomologie p-adique de la tour de Drinfeld: le cas de la dimension 1 J. Amer. Math. Soc.* **33** 2 2020 311 362 DOI 10 1090 935 P. Colmez、 G.Dospinescu 和 W. Nizio l。[20] 。载于: 。（），第 –页。 : 。/s -- -z。 *Cohomology of p-adic Stein spaces Invent. Math.* J. F.Dat。[21] 。载于: 。 **219** 3 2020 873 985 DOI 10 1007 00222 019 00923 （），第– 页。 : 。/j.ansens。 。 。 。 *Espaces symétriques de Drinfeld et correspondance de Langlands locale Ann.* C. Davis 和D.Wan。 *Sci. École Norm. Sup. (4)* **39** 1 2006 1 74 DOI 10 1016 2005 11 002 [22] 。载于: *L-functions of p-adic characters*（2014 年），第77–104页。 *Nagoya Math. J.* **213**： 10.1215/00277630-2379114。 DOIN. DeGrande-De Kimpe 等。[23] 。载于: 。。纯粹与应用数学讲义。Dekker，纽约，1997 年，第159–222页。 *p-adic locally convex inductive limits p-adic functional* V.G. Drinfel'd。[24] 。 *analysis (Nijmegen, 1996)* **192** 载于: *Coverings of p-adic symmetric regions*（1976 年）。英文译文，第 107–115页。 *Funct. Anal. its Appl.* **10**： 10.1007/BF01077936。 DOID.Eisenbud。[25] 。第150 卷。数学研究生教材。施普林格出版社，纽约，1995年。 *Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry*: 10.1007/978-1-4612-5350-1。 DOIM. Emerton。[26] 。 10 月草稿。即将发表于《朱西尼数学研究所杂志》 *Jacquet modules of locally analytic◦representations of p-adic reductive groups II. The relation to parabolic induction* 2007 : http://www.math.uchicago.edu/ URLemerton/pdffiles/jacquet-two.pdf。~M.Emerton。[27] 。载于: *Locally analytic vectors in representations of locally p-adic analytic groups*。1175（2017年）。 *Mem. Amer. Math. Soc.* **248**: 10.1090/memo/1175。 DOIG. Faltings。[28] 。载于: *The trace formula and Drinfel'd's upper halfplane*。2（1994 年），第 467–481 页。 *Duke Math. J.* **76**: 10 . 1215/S0012-7094-94-07616-3.

[29] C. T. F´eaux de Lacroix. *p-adische Distributionen*。毕业论文。科隆大学，1992 年。[30] C. T. F´eaux de Lacroix. *Einige Resultate über die topologischen Darstellungen p-adischer Liegruppen auf unendlich dimensionalen Vektorräumen über einem p-adischen Körper* **23**。载于：。数学研究所丛书，明斯特大学，第 3 辑。明斯特大学数学研究所，明斯特，1999 年。[31] P. Fiebig. *Periodicity of irreducible modular and quantum characters*。预印本，2021 年 2 月。arXiv: 2102.09865v1。[32] P. Gr¨af. *Boundary Distributions for* GL$_3$ *over a Local Field and Symmetric Power Coefficients*。博士论文。海德堡大学，2020 年。[33] A. Grothendieck. *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux SGA* 2（）。附有 Michele Raynaud 撰写的讲义，布瓦-马里代数几何研讨班，1962 年，高等纯粹数学研究，第 2 卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹；Masson 出版社，巴黎，1968 年。[34] A. Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des fais-ceaux cohérents. I*。载于：*Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 11（1961），第 349–511 页。DOI: 10.1007/bf02684274。[35] M. Harris. *Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfel'd upper half spaces; elaboration of Carayol's program* *Invent. Math.* **129** 1 1997 75 119 DOI 。载于：。（），第 – 页。：10.1007/s002220050159。[36] M. Harris 和 R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*。第 151 卷。数学年刊研究。附录由 Vladimir G. Berkovich 撰写。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2001 年。ISBN: 0-691-09090-4。[37] H. Hasse. *Theorie der höheren Differentiale in einem algebraischen Funktionenkörper mit vol-lkommenem Konstantenkörper bei beliebiger Charakteristik* *J. Reine Angew. Math.* **175** 。载于：（1936），第 50–54 页。DOI: 10.1515/crll.1936.175.50。[38] R. Huber. *A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties*。载于：*Math. Z.* **217**.4（1994），第 513–551 页。DOI: 10.1007/BF02571959。[39] R. Huber. *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*。第 E30 卷。数学视角。Friedr. Vieweg & Sohn 出版社，布伦瑞克，1996 年。DOI: 10.1007/978-3-663-09991-8。[40] K. Iwasawa. *Local class field theory*。牛津科学出版物。牛津数学专著。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1986 年。ISBN: 0-19-504030-9。[41] J. C. Jantzen. *Representations of algebraic groups*。第 2 版。第 107 卷。数学调查与专著。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003 年。ISBN: 0-8218-3527-0。[42] S. Jeong. *Calculus in positive characteristic p*。载于：*J. Number Theory* **131**.6（2011），第 1089–1104 页。DOI: 10.1016/j.jnt.2010.12.006。[43] J. de Jong 和 M. van der Put. *Étale cohomology of rigid analytic spaces*。载于：*Doc. Math.* **1**（1996），第 01 期，1–56。ISSN: 1431-0635。[44] G. Kempf. *The Grothendieck–Cousin complex of an induced representation* *Adv. in Math.* 。载于：。（），**29** 3 1978 310 396 DOI 10 1016 0001 8708 78 90021 第 – 页。：./ - ( ) -X。[45] R. Kiehl. *Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie* *Invent.* 。载于：（），*Math.* **2** 1967 256 273 DOI 10 1007 01425404 第 – 页。：./BF 。[46] J. Kohlhaase. *Invariant distributions on p-adic analytic groups*。博士论文。明斯特大学，2005 年。[47] J. Kohlhaase. *The cohomology of locally analytic representations* *J. Reine Angew. Math.* 。载于：（），**651** 2011 187 240 DOI 10 1515 2011 013 第 – 页。：./CRELLE. .[48] U. K¨ *Über eigentliche Familien algebraischer Varietäten über affinoiden Räumen* *Schr.* opf. 。载于：第 *Math. Inst. Univ. Münster (2)* 7 1974 ISSN 0077 1961（）。：-。[49] Y. Kopylov 和 V. I. Kuz'minov. *On the* 核-余核*-sequence in a semiabelian category*。载于：*Siberian Mathematical Journal* **41**（2000），第 509–517 页。[50] M. Kuschkowitz. *Equivariant Vector Bundles and Rigid Cohomology on Drinfeld's Upper Half Space over a Finite Field* 2016 URL 。博士论文。伍珀塔尔大学，。：https://d-nb.info/112004460X/34。[51] A. Lyubinin. *Modules and comodules over nonarchimedean Hopf algebras*。博士论文。堪萨斯州立大学，2010 年。ISBN: 978-1124-19634-3。URL: https://krex.k-state.edu/dspace/handle/2097/4639。[52] A. Lyubinin. *Nonarchimedean coalgebras and coadmissible modules* *p-Adic Numbers Ultra-* 。载于：。（），*metric Anal. Appl.* **6** 2 2014 105 134 DOI 10 1134 2070046614020022 第 – 页。：./S 。[53] N. G. Markley. *Topological Groups. An Introduction*。约翰·威立父子公司，新泽西州霍博肯

, 2010 年。ISBN: 978 0 470 62451 7.

[54]J. Neukirch。《*Algebraische Zahlentheorie*》。施普林格出版社，柏林，1992年。DOI: 10.1007/978-3-540-37663-7。[55] S. Orlik。《*Equivariant vector bundles on Drinfeld's halfspace over a finite field*》。2021年12月预印本。arXiv: 2112.00687v1。[56] S. Orlik。《*Equivariant vector bundles on Drinfeld's upper half space*》。载于: *Invent. Math.* **172**。3（2008），第585–656页。DOI: 10.1007/s00222-008-0112-3。[57] S. Orlik。《*The cohomology of period domains for reductive groups over local fields Invent.*》。载于: 。（），*Math.* **162** 3 2005 523 549 DOI 10 1007 00222 005 0452 1 第–页。: 。/s---。[58] S. Orlik和M. Strauch。《*On Jordan–Hölder series of some locally analytic representations*》。载于: *J. Amer. Math. Soc.* **28**。1（2015），第99–157页。DOI: 10.1090/S0894-0347-2014-00803-1。[59] C. Perez-Garcia和W. H. Schikhof。《*Locally convex spaces over non-Archimedean valued fields*》。第119卷。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2010年。DOI: 10.1017/CBO9780511729959。[60] K. Pohlkamp。《*Randwerte holomorpher Funktionen auf p-adischen symmetrischen Räumen*》。毕业论文。Universit¨at M¨unster，2002年。[61] M. van der Put。《*Serre duality for rigid analytic spaces*》。载于: *Indag. Math. (N.S.)* **3**。2（1992），第219–235页。DOI: 10.1016/0019-3577(92)90011-9。[62] R. A. Ryan。《*Introduction to tensor products of Banach spaces*》。施普林格数学专著。施普林格出版社伦敦有限公司，伦敦，2002年。DOI: 10.1007/978-1-4471-3903-4。[63] T. Schmidt。《*Stable flatness of nonarchimedean hyperenveloping algebras*》。载于: *J. Algebra* **323**。3（2010），第757–765页。DOI: 10.1016/j.jalgebra.2009.11.018。[64] T. Schmidt。《*Verma modules over p-adic Arens-Michael envelopes of reductive Lie algebras*》。载于: *J. Algebra* **390**（2013），第160–180页。DOI: 10.1016/j.jalgebra.2013.04.038。[65] T. Schmidt和M. Strauch。《*Dimensions of some locally analytic representations Represent.*》。载于: （），*Theory* **20** 2016 14 38 DOI 10 1090 475 第–页。: 。/ert/。[66] P. Schneider。《*p-adic Lie groups*》。第344卷。数学科学基础丛书[数学科学基本原理]。Springer，海德堡，2011年。DOI: 10.1007/978-3-642-21147-8。[67] P. Schneider。《*Nonarchimedean functional analysis*》。施普林格数学专著。施普林格出版社，柏林，2002年。DOI: 10.1007/978-3-662-04728-6。[68] P. Schneider。《*The cohomology of local systems on p-adically uniformized varieties Math.*》。载于: 。（），*Ann.* **293** 4 1992 623 650 DOI 10 1007 01444738 第–页。: 。/BF。[69] P. Schneider和U. Stuhler。《*The cohomology of p-adic symmetric spaces Invent. Math.*》。载于: 。（），**105** 1 1991 47 122 DOI 10 1007 01232257 第–页。: 。/BF。[70] P. Schneider和J. Teitelbaum。《*p-adic boundary values*》。载于: *Astérisque* **278**（2002）。*p*进制上同调与算术应用，I，第51–125页。ISSN: 0303-1179。[71] P. Schneider和J. Teitelbaum。《*Algebras of p-adic distributions and admissible representations*》。载于: *Invent. Math.* **153**。1（2003），第145–196页。DOI: 10.1007/s00222-002-0284-1。[72] P. Schneider和J. Teitelbaum。《*Continuous and Locally Analytic Representation Theory* 2004 URL》。杭州讲义。8月。: https://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/pschnei/publ/lectnotes/hangzhou.pdf。[73] P. Schneider和J. Teitelbaum。《*Duality for admissible locally analytic representations*》。载于: *Represent. Theory* **9**（2005），第297–326页。DOI: 10.1090/S1088-4165-05-00277-3。[74] P. Schneider和J. Teitelbaum。《*Locally analytic distributions and p-adic representation theory with applications to* 2 *J. Amer. Math. Soc.* **15** 2 2002 443 468 DOI》，GL。载于: 。（），第–页。: 10.1090/S0894-0347-01-00377-0。[75] P. Schneider、J. Teitelbaum和D. Prasad。《$\mathfrak{g}$》*-finite locally analytic representations*。载于: *Represent. Theory* **5**（2001）。附有Dipendra Prasad撰写的附录，第111–128页。DOI: 10.1090/S1088-4165-01-00109-1。[76] J.-P. Schneiders。《*Quasi-abelian categories and sheaves*》。载于: *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* 76（1999）。ISSN: 0249-633X。[77] Stacks Project 作者。《*Stacks Project*》。https://stacks.math.columbia.edu。2022年。