arXiv:2304.03176v1 [quant-ph] 2 Apr 2023

圆上的量子力学：具有有限个 α 均匀分布点的情形

Won Sang Chung[1], Ilyas Haouam[2,†] 以及 Hassan Hassanabadi[3]

[1]*Department of Physics and Research Institute of Natural Science, College of Natural Science,Gyeongsang National University, Jinju 660-701, Korea*
[2] *Laboratoire de Physique Mathematique et de Physique Subatomique (LPMPS), Universite Freres Mentouri, 25000, Constantine, Algeria*[3] *Faculty of physics, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran*

电子邮箱： † ilyashaouam@live.fr（通讯作者。）

摘要

本文讨论了具有有限个 α-均匀分布点的圆上的量子力学。定义了角算符和平移算符。利用了离散角表象，构造了具有 d α-分布离散角的圆上的两类离散角动量算符和厄米哈密顿量。计算了圆上自由粒子的能级，其中波函数定义在 d α-分布的离散角上。

2023年4月7日

1 引言

圆上的量子力学以测量角度的位置算符和在圆上起平移作用的角动量算符为特征圆 [1-8]。角度为实数值，并且由于周期性特征，它被限制在 $[0, 2\pi)$ 中。

Schwinger [9] 提出了一个非常有趣的模型，其中位置空间和动量空间都由有限数量的点组成，并且具有周期性。这被称为有限希尔伯特空间中的量子力学 [9-12]。

有限希尔伯特空间的思想被用于构建具有有限个点的圆上的量子力学 [1-8]，其中引入了离散角来描述粒子在圆上的位置，且这些点在圆上均匀分布。因此，角动量由关于离散角的有限差分给出。取连续极限后，圆上的有限量子力学便成为圆上的连续量子力学。在这一极限下，关于离散角的有限差分也变为关于连续角的导数。

Bonatsos 等 [13] 研究了 q-变形振子的坐标和动量算符，其中 q 为单位根。他们证明，该振子的相空间具有晶格结构，是一个非均匀分布网格。

在本文中，我们考虑另一种非均匀分布网格，其中离散角用 α-加法 [14]来描述。利用这些离散角，我们构造了一个具有有限个 α-均匀分布点的圆上的量子力学。

圆上的2　α-均匀分布角度

现在让我们来考虑具有有限个点的圆上的量子力学。我们考虑 d 个点的情形。

$$\{\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{d-1}\} \tag{1}$$

圆上允许存在这些点，且它们并非均匀分布。在这里我们设定 $\theta_0 = 0$ 并且

$$\theta_d \equiv \theta_0 \quad (mod\ 2\pi) \tag{2}$$

and

$$\theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{d-1} < 2\pi \tag{3}$$

在本文中，我们将离散角表示为通过变形加法（称为α-加法）给出，

$$\theta_{n+1} \ominus_\alpha \theta_n = \sigma, \quad or \quad \theta_{n+1} = \theta_n \oplus_\alpha \sigma, \quad \sigma > 0, \tag{4}$$

其中 α加法和 α减法 [6] 定义为

$$a \oplus_\alpha b = |a|a|^{\alpha-1} + b|b|^{\alpha-1}|^{1/\alpha-1}(a|a|^{\alpha-1} + b|b|^{\alpha-1}) \tag{5}$$

$$a \ominus_\alpha b = |a|a|^{\alpha-1} - b|b|^{\alpha-1}|^{1/\alpha-1}(a|a|^{\alpha-1} - b|b|^{\alpha-1}), \tag{6}$$

满足 $a \otimes_\alpha b = a\, b$ 且 $a \oslash_\alpha b = \frac{a}{b}$ (α-乘积与 α-除法）。求解方程（4），可得

$$\theta_n = n^{\frac{1}{\alpha}}\sigma, \quad n = 0, 1, \cdots, d-1 \tag{7}$$

若要求第 d 个位置与第 0 个位置相同，则有

$$\theta_d = d^{\frac{1}{\alpha}}\sigma = 2\pi, \tag{8}$$

由此可得

$$\sigma = \frac{2\pi}{d^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{9}$$

因此，关系式 (4) 被替换为

$$\theta_{n+1} \ominus_\alpha \theta_n = \frac{2\pi}{d^{\frac{1}{\alpha}}}, \tag{10}$$

and

$$\theta_n = 2\pi \left(\frac{n}{d}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{11}$$

在极限 $d \to \infty$ 下，晶格 $\{\theta_n | n = 0, 1, \cdots, d-1\}$ 变为半开区间$0 \leq \theta < 2\pi$。

3 角算符、平移算符和离散角表示

现在让我们讨论圆上具有 d α-均匀分布的离散角的有限量子力学。厄米角算符 Θ 作用于记为 $|n\rangle, n = 0, 1, 2, \cdots, d-1$ 的角本征向量，使得

$$\Theta|n\rangle = \theta_n|n\rangle = 2\pi \left(\frac{n}{d}\right)^{\frac{1}{\alpha}} |n\rangle \tag{12}$$

我们知道，式(12)定义不明确，因为算符 Θ 是模 2π 定义的。因此，我们引入一个定义为

$$V = e_\alpha(i\xi\Theta), \tag{13}$$

其中 $\xi > 0$ 为实数，稍后将确定其取值； α 指数函数 [15] 定义为

$$e_\alpha(z) = e^{|z|^{\alpha-1}z}, \tag{14}$$

与 $-\infty < z < +\infty$。该 α-指数函数满足 [15]

$$e_\alpha(z \oplus_\alpha w) = e_\alpha(z)e_\alpha(w) \tag{15}$$

$$e_\alpha(z \ominus_\alpha w) = e_\alpha(z) \oslash_\alpha e_\alpha(w)$$

对算符 V 作用于 $|n\rangle$，我们得到

$$V|n\rangle = e_\alpha(i\xi\theta_n)|n\rangle = e^{i\xi^\alpha\theta_n^\alpha}|n\rangle = e^{i\xi^\alpha(2\pi)^\alpha\frac{n}{d}}|n\rangle \tag{16}$$

由 $V|0\rangle = |0\rangle$ 和 $|d\rangle \equiv |0\rangle$，我们得到

$$e^{i\xi^\alpha(2\pi)^\alpha} = 1, \tag{17}$$

从而得到

$$\xi = (2\pi)^{\frac{1}{\alpha}-1} \tag{18}$$

因此，算符 V 写作

$$V = e_\alpha\left[i(2\pi)^{\frac{1}{\alpha}-1}\Theta\right], \tag{19}$$

其中

$$V^\dagger = V^{-1} \tag{20}$$

and

$$V^d = I \tag{21}$$

现在引入酉平移算符 U 及其厄米共轭算符:

$$U|n\rangle = |n-1\rangle, \tag{22}$$

and

$$U^\dagger|n\rangle = |n+1\rangle, \tag{23}$$

其中我们假设

$$|n+d\rangle := |n\rangle \tag{24}$$

作用于 $U^\dagger|n\rangle$ 上的 V，我们得到

$$V(U^\dagger|n\rangle) = V|n+1\rangle = e_\alpha\left[i(2\pi)^{\frac{1}{\alpha}-1}\theta_{n+1}\right]|n+1\rangle \tag{25}$$

作用于 V 上的 $U^\dagger|n\rangle$，我们得到

$$U^\dagger(V|n\rangle) = e_\alpha\left[i(2\pi)^{\frac{1}{\alpha}-1}\theta_n\right]U^\dagger|n\rangle = e_\alpha\left[i(2\pi)^{\frac{1}{\alpha}-1}\theta_n\right]|n+1\rangle \tag{26}$$

利用式(10)，我们有

$$VU^\dagger = qU^\dagger V, \tag{27}$$

其中

$$q = e_\alpha\left[i(2\pi)^{\frac{1}{\alpha}-1}\sigma\right] = e^{\frac{2\pi i}{d}} \tag{28}$$

同样，我们有

$$VU = q^{-1}UV \tag{29}$$

and

$$U^d = (U^\dagger)^d = 1 \tag{30}$$

角算符与酉平移算符之间的对易关系为

$$\Theta U \ominus_\alpha U\Theta = -\sigma U \tag{31}$$

and

$$\Theta U^\dagger \ominus_\alpha U^\dagger\Theta = \sigma U^\dagger \tag{32}$$

此外，对于 $r > 0$，我们有

$$\Theta(U^\dagger)^r = (U^\dagger)^r(X \oplus_\alpha r^{1/\alpha}\sigma) \tag{33}$$

and

$$\Theta U^r = U^r(X \ominus_\alpha r^{1/\alpha}\sigma) \tag{34}$$

现在让我们使用量子态 $|\psi\rangle$ 的离散角表象

$$\langle n|\psi\rangle = \psi(\theta_n) \tag{35}$$

考虑方程（22）以及 U 的幺正性，我们得到

$$\langle n|U^{-1} = \langle n-1| \tag{36}$$

从右侧乘以 $|\psi\rangle$，得到

$$\langle n|U^{-1}|\psi\rangle = \langle n-1|\psi\rangle, \tag{37}$$

这给出

$$U^{-1}\psi(\theta_n) = \psi(\theta_{n-1}) = \psi(\theta_n \ominus_\alpha \sigma) \tag{38}$$

同理，我们有

$$U\psi(\theta_n) = \psi(\theta_{n+1}) = \psi(\theta_n \oplus_\alpha \sigma) \tag{39}$$

一般而言，对于 $r > 0$，我们有

$$(U^{-1})^r\psi(\theta_n) = \psi(\theta_{n-r}) = \psi(\theta_n \ominus_\alpha r^{1/\alpha}\sigma) \tag{40}$$

$$U^r\psi(\theta_n) = \psi(\theta_{n+r}) = \psi(\theta_n \oplus_\alpha r^{1/\alpha}\sigma). \tag{41}$$

4 离散角动量算符与厄米哈密顿量

现在让我们介绍离散角动量算符。在离散理论中，我们有两类离散角动量算符,

$$L_+ = \frac{\hbar}{i}\left(\frac{U-I}{\sigma^\alpha}\right) \tag{42}$$

and

$$L_- = \frac{\hbar}{i}\left(\frac{I-U^{-1}}{\sigma^\alpha}\right) \tag{43}$$

因此，在离散角表象中，将式 (38) 和 (39) 代入式 (42)，可得

$$\begin{aligned} L_+\psi(\theta_n) &= \frac{\hbar}{i}\left(\frac{U}{\sigma^\alpha}\right)\psi(\theta_n) - \frac{\hbar}{i}\left(\frac{I}{\sigma^\alpha}\right)\psi(\theta_n) \\ &= \frac{\hbar}{i}\left(\frac{1}{\sigma^\alpha}\right)\psi(\theta_{n+1}) - \frac{\hbar}{i}\left(\frac{1}{\sigma^\alpha}\right)\psi(\theta_n) \\ &= \frac{\hbar}{i\sigma^\alpha}\left(\psi(\theta_{n+1}) - \psi(\theta_n)\right) \end{aligned} \tag{44}$$

并由离散角表象中的公式（38-39）和（43），得到

$$\begin{aligned} L_-\psi(\theta_n) &= \frac{\hbar}{i}\left(\frac{I}{\sigma^\alpha}\right)\psi(\theta_n) - \frac{\hbar}{i}\left(\frac{U^{-1}}{\sigma^\alpha}\right)\psi(\theta_n) \\ &= \frac{\hbar}{i}\left(\frac{1}{\sigma^\alpha}\right)\psi(\theta_n) - \frac{\hbar}{i}\left(\frac{1}{\sigma^\alpha}\right)\psi(\theta_{n-1}) \\ &= \frac{\hbar}{i\sigma^\alpha}\left(\psi(\theta_n) - \psi(\theta_{n-1})\right) \end{aligned} \tag{45}$$

H这里，我们知道， L_+ 和 L_- 都不是厄米的。相反，我们有

$$L_+^\dagger = L_- \tag{46}$$

由非厄米离散角动量算符及其共轭，我们可以构造如下形式的厄米哈密顿量。

$$H = \frac{1}{2mR^2} L_+ L_- + V(\Theta), \tag{47}$$

其中 mR^2 表示一个转动惯量，其中 R 是圆的半径。此外，由方程和（43）可得， (42)
L_+L_- 可引入如下形式

$$\begin{aligned} L_+L_- &= \left[\frac{\hbar}{i}\left(\frac{U-I}{\sigma^\alpha}\right)\right]\left[\frac{\hbar}{i}\left(\frac{I-U^{-1}}{\sigma^\alpha}\right)\right] \\ &= -\frac{\hbar^2}{\sigma^{2\alpha}}\left(U+U^{-1}-2I\right) \end{aligned} \tag{48}$$

现在我们来考虑圆上的一个自由粒子，其哈密顿量利用式（47）和（48）可表示为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2mR^2\sigma^{2\alpha}}(U+U^{-1}-2I) \tag{49}$$

对于时间无关的薛定谔方程，通过在离散角表象中应用平移算符 U 和 U^{-1}，可以求得哈密顿量（49）的波函数:

$$-\frac{\hbar^2}{2mR^2\sigma^{2\alpha}}[\psi(\theta_{n+1})+\psi(\theta_{n-1})-2\psi(\theta_n)] = E\psi(\theta_n) \tag{50}$$

因此，由式（50）可得以下形式，适用于 ($n = 2, 3, 4, ...$):

$$\begin{aligned} \psi(\theta_2) &= \left(2-\frac{2mR^2\sigma^{2\alpha}E}{\hbar^2}\right)\psi(\theta_1)-\psi(\theta_0) \\ \psi(\theta_3) &= \left[\left(2-\frac{2mR^2\sigma^{2\alpha}E}{\hbar^2}\right)^2-1\right]\psi(\theta_1)-\left(2-\frac{2mR^2\sigma^{2\alpha}E}{\hbar^2}\right)\psi(\theta_0) \\ \psi(\theta_4) &= \left(2-\frac{2mR^2\sigma^{2\alpha}E}{\hbar^2}\right)\left[\left(2-\frac{2mR^2\sigma^{2\alpha}E}{\hbar^2}\right)^2-2\right]\psi(\theta_1)-\left[\left(2-\frac{2mR^2\sigma^{2\alpha}E}{\hbar^2}\right)^2-1\right]\psi(\theta_0) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{51}$$

其中， $\psi(\theta_0)$和 $\psi(\theta_1)$ 是初始条件。然后，通过选择以下变量变换

$$\cos\xi = \left(1-\frac{mR^2\sigma^{2\alpha}E}{\hbar^2}\right) \quad , \quad \sin\xi = \sqrt{1-\left(1-\frac{mR^2\sigma^{2\alpha}E}{\hbar^2}\right)^2} \tag{52}$$

代入方程（51），可得

$$\psi(\theta_n) = \frac{1}{\sin\xi}\left[\psi(\theta_1)\sin(n\xi)-\psi(\theta_0)\sin((n-1)\xi)\right], \tag{53}$$

or

$$\psi(\theta_n) = \left(\frac{\psi(\theta_1) - \psi(\theta_0)\cos\xi}{\sin\xi}\right)\sin(n\xi) + \psi(\theta_0)\cos(n\xi), \tag{54}$$

由方程（52）可得

$$\xi = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1-\left(1-\frac{mR^2\sigma^{2\alpha}E}{\hbar^2}\right)^2}}{1-\frac{mR^2\sigma^{2\alpha}E}{\hbar^2}}\right]. \tag{55}$$

因此，能量为

$$E = \frac{(\hbar d)^2}{mR^2(2\pi)^{2\alpha}}(1-\cos\xi), \tag{56}$$

这给出了能量界，

$$0 \le E \le \frac{2\hbar^2}{mR^2\sigma^{2\alpha}} = \frac{2(\hbar d)^2}{mR^2(2\pi)^{2\alpha}} \tag{57}$$

因此，离散理论中的能量有上界。在连续极限下，能量没有上界。根据循环性质 $\psi(\theta_0) = \psi(\theta_d)$，我们得到

$$(\psi(\theta_1) - \psi(\theta_0)\cos\xi)\sin(d\xi) + \psi(\theta_0)\sin\xi\cos(d\xi) = \psi(\theta_0)\sin\xi \tag{58}$$

量子化规则取决于 $d\xi$的值。

4.1 $d\xi = 2N\pi$，$N \in \mathbb{Z}$ 的情形

在这种情况下，我们有能级

$$E_N = \frac{\hbar^2 d^2}{mR^2(2\pi)^{2\alpha}}\left(1-\cos\frac{2N\pi}{d}\right), \quad N \in \mathbb{Z} \tag{59}$$

且相应的波函数为

$$\psi_N(\theta_n) = \left(\frac{\psi(\theta_1) - \psi(\theta_0)\cos\left(\frac{2N\pi}{d}\right)}{\sin\left(\frac{2N\pi}{d}\right)}\right)\sin\left(\frac{2Nn\pi}{d}\right) + \psi(\theta_0)\cos\left(\frac{2Nn\pi}{d}\right). \tag{60}$$

4.2 $d\xi = 2N\pi + \frac{\pi}{2}$、 $N \in \mathbb{Z}$ 的情形

在这种情况下，我们有

$$\psi(\theta_1) = \psi(\theta_0)(\cos\xi + \sin\xi) \tag{61}$$

于是，我们得到能级

$$E_N = \frac{\hbar^2 d^2}{mR^2(2\pi)^{2\alpha}}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{d}\left(2N+\frac{1}{2}\right)\right)\right],\ N \in \mathbb{Z} \tag{62}$$

且相应的波函数为

$$\psi_N(\theta_n) = \sqrt{2}\psi(\theta_0)\sin\left[\frac{n\pi}{d}\left(2N+\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\right]. \tag{63}$$

4.3 $d\xi = 2N\pi + \pi$、 $N \in \mathbb{Z}$的情形

在这种情况下，我们有 $\psi(\theta_0) = 0$。于是，能级为

$$E_N = \frac{\hbar^2 d^2}{mR^2(2\pi)^{2\alpha}} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{d}(2N+1)\right)\right],\ N \in \mathbb{Z} \tag{64}$$

相应的波函数为

$$\psi_N(\theta_n) = \psi(\theta_0) \left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{d}(2N+1)\right)}{\sin\frac{\pi}{d}(2N+1)}\right]. \tag{65}$$

4.4 $d\xi = 2N\pi + \frac{3}{2}\pi$, $N \in \mathbb{Z}$ 的情况

在这种情况下，我们有

$$\psi(\theta_1) = \psi(\theta_0)(\cos\xi - \sin\xi) \tag{66}$$

于是，能级为

$$E_N = \frac{\hbar^2 d^2}{mR^2(2\pi)^{2\alpha}} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{d}\left(2N + \frac{3}{2}\right)\right)\right],\ N \in \mathbb{Z} \tag{67}$$

相应的波函数为

$$\psi_N(\theta_n) = \sqrt{2}\psi(\theta_0)\cos\left[\frac{n\pi}{d}\left(2N + \frac{3}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\right]. \tag{68}$$

5 结论

本文研究了非均匀（更准确地说，是 α-均匀）分布的网格，其中离散角以 α-加法来描述。这里，假设离散角 θ_n 满足以下条件：相邻两个离散角之间的 α-差为常数。基于这些离散角，我们定义了角算符和平移算符，并讨论了波函数的离散角表象。利用这些算符和表象，我们构造了两种离散角动量算符，以及一个定义在具有 d α-分布离散角的圆上的厄米哈密顿量。作为示例，我们计算了圆上自由粒子的能级，其中波函数定义在 $d\alpha$-分布的离散角上。我们发现，在离散理论中，能量有上界。

参考文献

[1] K. Kowalski，和 J. Rembieli´nski。 Journal of Physics A:Mathematicaland General 35，第 6 期（2002）：1405。

ˇ ˇ[2] J. Reh´aˇcek, Z. Bouchal, R. Celechovsk´y,Z. Hradil, and L.L. S´anchez-Soto。《物理评论A》77，第3期（2008）：032110。[3]K. Kowalski, and J. Rembielinski。arXiv预印本 quant-ph/0412150（2004）。[4] T. Brzezi´nski, J. Rembieli´nski,and K. A. Smoli´nski。《现代物理学快报A》8，第05期（1993）：409-416。[5] B. Bahr, andK. Liegener。arXiv预印本arXiv:2101.02676（2021）。[6] K.Kowalski, and K. Lawniczak。《物理学A辑：数学与理论》54，第27期（2021）：275302。[7] B. Bahr, and H. J.Korsch。《物理学A辑：数学与理论》40，第14期（2007）：3959。[8] H. A.Kastrup，《物理评论A》73(5)，052104（2006）。[9]J.Schwinger，《美国国家科学院院刊》46，570（1960）。[10] A.Vourdas。《物理学进展报告》67，267（2004）。[11] T. Santhanam and A. Tekumalla，《物理学基础》6，583（1976）。[12]M.Arikand M.Ildes，《理论与实验物理进展》2016，041A01（2016）。[13]D.Bonatsos, C.Daskaloyannis,D.Ellinas and A.Faessler，《物理快报B》331，150（1994）。[14] W.Chung andH.Hassanabadi，《现代物理学快报B》33（2019）1950368。[15] W.Chung and H.Hassanabadi，《欧洲物理学杂志Plus》135，文章编号：19（2020）。