arXiv:2304.03186v1 [math.AG] 6 Apr 2023

# 关于同时华林可辨识性猜想的一个反例

ELENA ANGELINI

Abstract. AGMO [中出现了新的可辨识情形，同时还分析了近期在 [BG], 中提出的三元形式对的同时可辨识性。这些研究促使人们提出以下猜想，以期完整分类所有同时 Waring 可辨识的情形：对于任意 $d \geq 2$，由 $d-1$ 个次数为 $d$ 的三元形式和一个次数为 $d+1$的三元形式组成的通用多项式向量，其秩为 $\frac{d^2+d+2}{2}$，在 $\mathbb{C}$上是可辨识的。

本文借助一种受 [AGMO], 所述方法启发的计算机辅助程序，得出情形 $d = 4$ 与上述猜想相矛盾：它至少允许 36 个复数同时 Waring 分解（长度为 11），而非 1 个。

*Keywords.* Waring 分解，复数可辨识性，数值代数几何。

*Mathematics Subject Classification (2020):* 14N07, 15A69, 14N05, 13P05, 65H10, 15A72, 14Q20.

## 1. Introduction

本文的主要目的是为完整分类所有同时 Waring 可识别情形作出贡献。具体而言，我们关注一般多项式向量，即由一般齐次多项式（为简便起见，称为形式）$f_j \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_{d_j}$构成的向量 $f = (f_1, \ldots, f_r)$，其次数为 $d_1 \leq \ldots \leq d_r$；我们希望探究如何将所有 $f_i$ 表示为同一组线性形式 $\ell_i \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_1$ 的幂的线性组合（之所以使用“华林”一词，是为了纪念数论中于 1770 年确立的同名命题）。因此，这类表示称为同时 Waring 分解。在此背景下，自然会产生两个问题：

Q1 表示 $f_1$，……，$f_r$ 至少需要多少个线性形式？Q2 假设我们知道 Q1 中所述的数值，该数值称为 $f = (f_1, \ldots, f_r)$ 的同时华林秩（或简称秩），记作 $k$，那么 $f$ 是否存在唯一的、含有 $k$ 个求和项的同时华林分解？

如果 Q2 的答案是肯定的，那么 $f$ 就称为具有同时华林可辨识性。可辨识性在张量这一更一般的背景下是一项极其重要的性质，齐次多项式也属于张量的范畴，并且这一性质在许多不同领域都有应用。例如，在信号处理中，解决所谓的鸡尾酒会问题至关重要：在一个房间里，有些人在交谈，设置了多个接收器来录下混杂在一起的所有谈话，目标是还原每个人的声音。化学领域也研究类似的情形：凡是需要将溶液中的不同化学物质分离开来的时候，都会遇到这种问题。

关于其他详细应用，请参阅 [Lan] 一书。

到目前为止引入的所有概念，都是从单个一般多项式的情形推广而来的。在这一情形下，Q1 和 Q2 均已得到完整解决：秩的计算归功于 Alexander-Hirschowitz，相关内容可见于[AH], ；而所有可辨识情形的列表始于 Sylvester（[Sy]）和 Hilbert（[Hi]），最近已由 [GM]补全。

关于 $r > 1$这一情形，据我所知，Q1 仍未解决，而针对 Q2 已有一些部分结果。特别是，目前已知的同时华林可辨识情形列于下表：

| $\mathbf{n}$ | $\mathbf{r}$ | $\mathbf{d_1}, \dots, \mathbf{d_r}$ | $\mathbf{k}$ | **Ref.** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\forall$ | $d_1 + 1 \geq k$ | $\left\lceil \frac{1}{1+r} \sum_{j=1}^{r} \binom{1+d_j}{d_j} \right\rceil$ | [CR] |
| $\forall$ | 2 | $2, 2$ | $n+1$ | [We] |
| 2 | 2 | $2, 3$ | 4 | [Ro] |
| 2 | 3 | $3, 3, 4$ | 7 | [AGMO] |
| 2 | 4 | $2, 2, 2, 2$ | 4 | Veronese |

然而，上述列表是否完备，目前尚不得而知。本文旨在处理这一分类问题，首先从$n = 2$这一情形入手。更具体地说，我们来关注前表中的三个核心行。在最近的一篇论文 [BG] 中，作者证明，在三元形式对（即 $n = r = 2$）的设定下，唯一可辨识的例子是两个二次型的情形，以及一个二次型与一个三次型的情形。这些情形早已为人所知：前者可追溯至 Weierstrass（[We]），后者则可追溯至 Roberts（[Ro]）。值得注意的是，一个一般二次型有无穷多个由 $n+1$个求和项构成的分解，而秩为 4 的一般三元三次型不可辨识；因此，在同时分解的要求下，即使经典可辨识性不成立，也能提供另一种有用的恢复方法。在这一方向上，加入 $d_2 - d_1 = 1$这一假设后，Roberts 的例子是唯一可辨识例子的结论已在 [AGMO] 中得到证明。在三元形式三元组的背景下， [AGMO] 的作者证明，一个由两个三次型和一个四次型构成、秩为 7 的一般多项式向量是可辨识的。Roberts 的例子以及[AGMO] 中提出的新情形，强烈启发了以下猜想，以期找到更多同时华林可辨识的情形：

猜想 1.1. 对于任意 $d \geq 2$，由 $d-1$ 个次数为 $d$ 的三元形式和一个次数为 $d+1$ 的三元形式组成的一般复多项式向量，都存在唯一的同时华林分解，且包含 $\frac{d^2+d+2}{2}$ 个求和项。

这个猜想源于围绕应用代数几何研讨会年度系列开展的一些富有成果的讨论。该研讨会每年九月至次年六月举行，大约每三周一次，地点交替位于佛罗伦萨和博洛尼亚，许多代数几何学家都参与其中，例如 Alessandra Bernardi、LucaChiantini、Alessandro Gimigliano、MassimilianoMella、GiorgioOttaviani，以及对这一主题感兴趣的意大利和外国研究人员、博士后和博士生。从这个意义上说，论文 [AGMO] 也是最初几期聚焦于数值代数几何的研讨会系列所产出的研究成果之一。

在本文中，我们证明猜想 1.1 并不成立，并给出如下所述的反例：

定理 1.2. 一般的复多项式向量 $f=(f_1,f_2,f_3,f_4)$，当 $j\in\{1,2,3\}$ 和 $f_4\in\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2]_5$ 时，对于 $j\in\{1,2,3\}$，具有至少 36 个含 11 个求和项的同时 Waring 分解。

定理 1.2 中描述的不可辨识性是通过在 Bertini 中实现的算法（[Be]，[BHSW]）以计算方式获得的，该算法基于同伦延拓和单值化环路（[HOOS]），其思想源自[AGMO] 和 [A]。

本文的组织如下。在介绍研究主题之后，第 2节中我们为同时 Waring 问题确定主要的记号和定义，并介绍几何视角。最后，第 3节专门讨论计算过程，该过程使我们能够证明定理 1.2，进而发现猜想 1.1 的反例。

辅助文件 decompositions.pdf（其中包含 36 个分解的详细信息）完成了本文。

## 2. Basics

本节回顾同时华林问题的基本定义和已知结果，以及通过割簇对该问题所作的几何诠释。

### 2.1. 同时华林问题背景。

本文在复数域 $\mathbb{C}$ 上进行研究。设 $(n,r)\in\mathbb{N}^2-\{\underline{0}\}$，且 $(d_1,\dots,d_r)\in\mathbb{N}^r-\{\underline{0}\}$ 按升序排列。

定义 2.1. 多项式向量 $f=(f_1,..,f_r)$ 是一个由 $r$ 个复形式组成的向量，这些形式关于 $n+1$ 个变量 $x_0,\dots,x_n$ 的次数分别为 $d_1,..,d_r$，即 $f_j\in\mathbb{C}[x_0,\dots,x_n]_{d_j}$，其中 $j\in\{1,\dots,r\}$。

定义 2.2. $f=(f_1,\dots,f_r)$ 的复数同时 Waring 分解由 $\ell_1,\dots,\ell_k\in\mathbb{C}[x_0,\dots,x_n]_1$ 个线性形式和 $(\lambda_1^j,\dots,\lambda_k^j)$ 个 $\in\mathbb{C}^k-\{\underline{0}\}$ 系数组成，使得

$$f=\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i^1\ell_i^{d_1},\dots,\lambda_i^r\ell_i^{d_r}\right). \tag{2.1}$$

定义 2.3. 多项式向量$f=(f_1,\dots,f_r)$的复数同时华林秩，是出现在 (2.1) 中的最小正整数 $k$。

注意，定义 2.3 中引入的概念给出了多项式向量 $f$ 复杂度的一种度量。特别是，每个 $\left(\lambda_i^1\ell_i^{d_1},\dots,\lambda_i^r\ell_i^{d_r}\right)$ 的秩均为 1，是最简单的多项式向量。

定义 2.4. 一个复秩-$k$ 多项式向量 $f=(f_1,\dots,f_r)$，如果表达式 (2.1) 除了重新排列求和项和重新缩放系数外是唯一的，则称其具有同时华林可辨识性。

2.2. 射影丛的割线簇。

设 $\mathbb{G}(k,N)$为 $\mathbb{P}^{N-1}$中 $k-1$-线性空间的格拉斯曼流形，设 $X\subset\mathbb{P}^{N-1}$ 为一个不可约簇，并令

$$\Gamma_k(X)=\overline{\{((x_1,\dots,x_k),L)\in\underbrace{X\times\ldots\times X}_{\text{k}}\times\mathbb{G}(k,N)\,|\,L=\langle x_1,\dots,x_k\rangle\}}.$$

根据构造， $\Gamma_k(X)$ 是不可约的，且 $\dim\Gamma_k(X)=k\dim X$。考虑到最后一个因子的投影 $\pi_2\colon \underbrace{X\times\ldots\times X}_{\text{k}}\times\mathbb{G}(k,N)\to\mathbb{G}(k,N)$，并记 $\pi_2(\Gamma_k(X))$ 记作 $S_k(X)$: $S_k(X)$ 是不可约的，且 $\dim S_k(X)=\dim\Gamma_k(X)=k\dim X$。采用上述记号，我们给出如下定义：

定义 2.5。 $X$ 的抽象 $k^{th}$-割线簇为

$$sec_k(X)=\overline{\{(p,L)\in\mathbb{P}^{N-1}\times\mathbb{G}(k,N)\,|\,p\in L,L\in S_k(X)\}}$$

以及 $k^{th}$-割线簇的 $X$ 是

$$\sigma_k(X)=\tilde{\pi}_1(sec_k(X))$$

其中 $\tilde{\pi}_1$ 是投影 $\mathbb{P}^{N-1}\times\mathbb{G}(k,N)\to\mathbb{P}^{N-1}$到 $sec_k(X)$ 的限制。$X$ 是 $k$-亏缺的，当且仅当

$$\dim\sigma_k(X)<\min\{\dim sec_k(X),N-1\}=\min\{k\dim X+k-1,N-1\}.$$

研究割线簇的一项基本工具如下：

定理2.6（Terracini 引理 [Te][CC]）。令 $X\subset\mathbb{P}^{N-1}$ 是一个不可约簇，并令 $z\in\sigma_k(X)$ 是一般光滑点。 $\sigma_k(X)$ 在 $z$ 处的射影切空间为

$$\mathbb{T}_z\sigma_k(X)=\langle\mathbb{T}_{x_1}X,\dots,\mathbb{T}_{x_k}X\rangle,$$

其中 $x_1,\dots,x_k$ 是 $X$ 中的一般光滑点，满足 $z\in\langle x_1,\dots,x_k\rangle$，且 $\mathbb{T}_{x_i}X$ 表示 $X$ 在 $x_i$ 处的射影切空间。

注 2.7. 注意，如果

$$\dim sec_k(X)=N-1, \tag{2.2}$$

那么映射 $\tilde{\pi}_1$ 的纤维预期是 0 维的，这意味着一般点 $p\in\mathbb{P}^{N-1}$ 属于有限多个线性空间，而这些线性空间与 $X$ 相交于 $k$ 个点。本文始终假设 $X$ 不是 $k$-亏格的，因此 $\tilde{\pi}_1$ 的纤维非空。因此，条件 (2.2) 意味着

$$k\dim X+k=N, \tag{2.3}$$

这称为完美情形。等价地说， $\sigma_k(X)$ 填满了环境空间 $\mathbb{P}^{N-1}$。

在同时华林问题的设定中，迄今引入的所有几何工具都应用于射影丛 $X=\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1)\oplus\ldots\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_r))\subset\mathbb{P}^{N-1}=\mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1))\oplus\ldots,\oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_r)))$, 其中 $N=\sum_{i=1}^r\binom{n+d_i}{d_i}$。为简便起见，本文始终将所研究的射影丛记作 $X^n_{d_1,\dots,d_r}$。关于 $X^n_{d_1,\dots,d_r}$ 的更多细节，请参阅 [AGMO], ，其中对这些簇进行了详细研究。特别是，关于 (2.1)， $X^n_{d_1,\dots,d_r}$ 参数化了秩为 1 的多项式向量簇 $\left(\lambda_i^1\ell_i^{d_1},\dots,\lambda_i^r\ell_i^{d_r}\right)$，而 $f=$

$(f_1, \ldots, f_r)$ 属于 $\sigma_k(X^n_{d_1,\ldots,d_r})$。此外，注意到 $\dim X^n_{d_1,\ldots,d_r} = n+r-1$，因此处于完美情形——这构成了本文的第二个假设——意味着

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{r} \binom{n+d_i}{d_i}}{n+r}. \tag{2.4}$$

因此，在假设 $X^n_{d_1,\ldots,d_r}$ 不是 $k$-缺陷的，且其 $k$-割簇充满环境空间的条件下，一般多项式向量 $f = (f_1, \ldots, f_r)$ 的复同时华林秩由式 (2.4) 给出。这在上述两个假设下回答了 §1 中提出的问题 Q1。更一般地，由于同时情形下的缺陷性问题仍未解决，针对问题 Q1，下面给出一个猜想，其方向与 [AH] 中的主要结果一致：

猜想 2.8. 一般多项式向量 $f = (f_1, \ldots, f_r)$ 的复同时华林秩，其中参数 $\{n, r, d_1, \ldots, d_r\}$ 如定义 2.1 所述，为

$$k = \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^{r} \binom{n+d_i}{d_i}}{n+r} \right\rceil,$$

其中 $\lceil\ \rceil$ 表示该比值的上取整。

注释2.9。就本文而言，即为了处理 Q2 和猜想 1.1，我们聚焦于射影丛 $X^2_{\underbrace{d\ \cdots\ d}_{d-1}\ d+1}$，与 $d \geq 2$。在这种情况下，满足 (2.4) 的正整数 $k$ 是

$$\frac{(d-1)\binom{2+d}{d} + \binom{3+d}{d+1}}{2+d} = \frac{(d-1)(d+1)+(d+3)}{2} = \frac{d^2+d+2}{2}.$$

特别地，如果 $d = 2$，就得到 Roberts 的例子；而如果 $d = 3$，则属于 [AGMO] 中发现的可识别情形。因此，为了检验猜想 1.1 是否成立，我们从考虑情形 $d = 4$ （以及 $k = 11$）开始。

## 3. Non-identifiability via Numerical Algebraic Geometry

本节证明本文的主要结果。具体而言，我们将给出定理 1.2 的计算证明。

定理 1.2 的证明

第一步是验证射影丛 $X^2_{4,4,4,5}$ 不是 11-缺陷的，并且 $\dim \sigma_{11}(X^2_{4,4,4,5}) = 65$；按照定理 2.6 的思路，可以通过计算 11 个（有理）随机点处 $X^2_{4,4,4,5}$ 的仿射切空间所张成的空间的维数，再利用半连续性来完成验证。下面给出用 Macaulay2 软件实现的概率算法脚本 [M2], ，该算法可用于检验所需假设是否成立：

```
R = QQ[a_0,a_1,a_2,x,y,z]; aa = 矩阵{{a_0,a_1,a_2}}; a
4 = symmetricPower(4,aa); a5 =
symmetricPower(5,aa); j = diff(transpose basis(1,R),a4|
x*a4|y*a4|z*a5); j1 = sub(j,random(R^{1:0},R^{6:0})); --
矩阵 6*66
```

对于 i 从 2 到 11，执行 j1 = j1| |sub(j,random(R~{1:0},R~{6:0})) -- 矩阵 66*66 秩 j1 -- 66

然后，我们使用数值代数几何软件 Bertini [Be],求解多项式系统 (2.1)，其中 $n = 2, r = 4, d_1 = d_2 = d_3 = 4, d_4 = 5, k = 11$:

$$(3.1) \qquad \begin{cases} f_1 - \lambda_1^1 \ell_1^4 - \ldots - \lambda_{11}^1 \ell_{11}^4 = 0 \\ f_2 - \lambda_1^2 \ell_1^4 - \ldots - \lambda_{11}^2 \ell_{11}^4 = 0 \\ f_3 - \lambda_1^3 \ell_1^4 - \ldots - \lambda_{11}^3 \ell_{11}^4 = 0 \\ f_4 - \lambda_1^4 \ell_1^5 - \ldots - \lambda_{11}^4 \ell_{11}^5 = 0 \end{cases}.$$

注意， $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_4$ 和 $f_4 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_5$ 是已知量，而 $\ell_i = x_0 + l_1^i x_1 + l_2^i x_2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_1$ 和 $\lambda_i^j \in \mathbb{C}$ 是未知量，对于 $i \in \{1, \ldots, 11\}$ 和 $j \in \{1, 2, 3, 4\}$。通过展开计算，(3.1) 的前三个方程各提供 15 个条件，而第四个方程提供 21 个条件。因此，(3.1) 等价于一个包含 66 个方程和未知量的非线性系统，通常记为 $F_{(f_1,f_2,f_3,f_4)}\left(\left[l_1^1, l_2^1, \lambda_1^1, \lambda_1^2, \lambda_1^3, \lambda_1^4\right], \ldots, \left[l_1^{11}, l_2^{11}, \lambda_{11}^1, \lambda_{11}^2, \lambda_{11}^3, \lambda_{11}^4\right]\right)$，用以给出参数和未知量的证据。比如，可以通过 Macaulay2 构造 (3.1) 的方程，具体可使用以下脚本:

```
k = ZZ/101; S = k[v_0..v_65,x_0,x_1,x_2]; xx = 矩阵{{x_0,x_1,x_2}}; f1 =
diff(symmetricPower(4,xx),sum(11,i->v_(6*i+2)*(矩阵{{1,v_(6*i), v_(6*i+1)}}
*transpose xx)^4)) -- 15 分量 f2 = diff(symmetricPower(4,xx),sum(11,i->v_
(6*i+3)*(矩阵{{1,v_(6*i), v_(6*i+1)}}*transpose xx)^4)) -- 15 分量 f3 =
diff(symmetricPower(4,xx),sum(11,i->v_(6*i+4)*(矩阵{{1,v_(6*i), v_(6*i+1)}}
*transpose xx)^4)) -- 15 分量 f4 = diff(symmetricPower(5,xx),sum(11,i->v_
(6*i+5)*(矩阵{{1,v_(6*i), v_(6*i+1)}}*transpose xx)^5)) -- 21 分量
```

将 $F_{(f_1,f_2,f_3,f_4)}\left(\left[l_1^1, l_2^1, \lambda_1^1, \lambda_1^2, \lambda_1^3, \lambda_1^4\right], \ldots, \left[l_1^{11}, l_2^{11}, \lambda_{11}^1, \lambda_{11}^2, \lambda_{11}^3, \lambda_{11}^4\right]\right)$ 的解视为具有 66 个分量的向量，它们给出了多项式向量 $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ 的长度为 11 的复数同时华林分解。我们的目标是证明，对于一般的 $f$，不同解的数量是 36，而非 1。从现在起，该过程的所有脚本都收录在附属文件夹 ternarie 4445 中。

由于 $f$ 需要是一般的，我们首先为未知量的向量赋予随机复数项，从而得到 $\left(\left[\overline{l}_1^1, \overline{l}_2^1, \overline{\lambda}_1^1, \overline{\lambda}_1^2, \overline{\lambda}_1^3, \overline{\lambda}_1^4\right], \ldots, \left[\overline{l}_1^{11}, \overline{l}_2^{11}, \overline{\lambda}_{11}^1, \overline{\lambda}_{11}^2, \overline{\lambda}_{11}^3, \overline{\lambda}_{11}^4\right]\right)$，即该过程的起始点。通过将这些值代入 $F_{(f_1,f_2,f_3,f_4)}$ 的未知量中，我们得到一般的多项式向量 $\overline{f} = (\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3, \overline{f}_4)$，其 66个系数就是我们过程的起始参数。这是通过使用 Eval 子文件夹中出现的脚本 inputeval 和 startgood 完成的，其中后一个文件包含起始点，前一个文件包含需要在起始点的坐标处进行求值的 66 个方程（特别地，在input eval 中，$v_0, \ldots, v_{65}$ 是需要赋予随机项的变量，而 $f_0, \ldots, f_{65}$ 表示多项式系统的方程；input eval 内的 TrackType配置为 $-4$，因为在此步骤中Bertini会在给定点处对输入系统求值）。起始参数通过这次求值得到，并包含在 Monodromy子文件夹的文件 start parameters good 中。我们的目标是证明，除了所给出的一个分解之外，$\overline{f}$ 还有另外 35 个分解。

由起始点决定。
我们通过以下随机生成的起始点构造了反例：

$$\begin{aligned}\left[\overline{l}_1^1, \overline{l}_2^1, \overline{\lambda}_1^1, \overline{\lambda}_1^2, \overline{\lambda}_1^3, \overline{\lambda}_1^4\right] = \big[&-9.178673081212201 \cdot 10^{-2} - i\,5.245599426621500 \cdot 10^{-2},\\ &-8.825275325577600 \cdot 10^{-2} - i\,2.155292826256500 \cdot 10^{-2},\\ &8.022566436298600 \cdot 10^{-1} + i\,9.927688077008801 \cdot 10^{-2},\\ &7.524729028260101 \cdot 10^{-2} + i\,8.367569801775700 \cdot 10^{-2},\\ &-1.250209354876000 \cdot 10^{-3} - i\,6.530239085633700 \cdot 10^{-2},\\ &4.999653700389400 \cdot 10^{-2} + i\,9.303029998119500 \cdot 10^{-2}\big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\overline{l}_1^2, \overline{l}_2^2, \overline{\lambda}_2^1, \overline{\lambda}_2^2, \overline{\lambda}_2^3, \overline{\lambda}_2^4\right] = \big[&1.195416802244310 \cdot 10^{-2} - i\,2.225934180354000 \cdot 10^{-3},\\ &-6.560577710833700 \cdot 10^{-1} - i\,9.891546819700110 \cdot 10^{-2},\\ &-4.115491104918700 \cdot 10^{-2} + i\,4.092292289326200 \cdot 10^{-2},\\ &-2.570701095199700 \cdot 10^{-2} - i\,8.005816221966300 \cdot 10^{-2},\\ &2.941914008262100 \cdot 10^{-2} - i\,7.332772392640199 \cdot 10^{-2},\\ &-7.507007824205600 \cdot 10^{-2} + i\,2.699645975995900 \cdot 10^{-2}\big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\overline{l}_1^3, \overline{l}_2^3, \overline{\lambda}_3^1, \overline{\lambda}_3^2, \overline{\lambda}_3^3, \overline{\lambda}_3^4\right] = \big[&8.306470571337600 \cdot 10^{-2} + i\,6.925123923475100 \cdot 10^{-2},\\ &-2.631866554121000 \cdot 10^{-3} + i\,6.450055333951101 \cdot 10^{-2},\\ &-2.520169416138000 \cdot 10^{-2} + i\,7.947572402054000 \cdot 10^{-2},\\ &6.628901260347200 \cdot 10^{-2} - i\,9.954313791954100 \cdot 10^{-2},\\ &-4.986358377275200 \cdot 10^{-2} - i\,6.159247708199100 \cdot 10^{-2},\\ &-4.363786207688800 \cdot 10^{-2} + i\,6.858262771755810 \cdot 10^{-2}\big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\overline{l}_1^4, \overline{l}_2^4, \overline{\lambda}_4^1, \overline{\lambda}_4^2, \overline{\lambda}_4^3, \overline{\lambda}_4^4\right] = \big[&-3.777699832746000 \cdot 10^{-2} - i\,9.873023399290000 \cdot 10^{-2},\\ &2.251959174854600 \cdot 10^{-2} - i\,9.135044625682701 \cdot 10^{-2},\\ &3.669676250951100 \cdot 10^{-2} + i\,7.622324724014400 \cdot 10^{-2},\\ &3.634917018379500 \cdot 10^{-2} - i\,5.107012333167600 \cdot 10^{-2},\\ &-7.505713542195000 \cdot 10^{-3} + i\,5.154623436746600 \cdot 10^{-2},\\ &-5.543948948927200 \cdot 10^{-2} + i\,9.026674172056499 \cdot 10^{-2}\big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\overline{l}_1^5, \overline{l}_2^5, \overline{\lambda}_5^1, \overline{\lambda}_5^2, \overline{\lambda}_5^3, \overline{\lambda}_5^4\right] = \big[&9.015391063311000 \cdot 10^{-2} + i\,2.074965436740300 \cdot 10^{-2},\\ &2.113776820185300 \cdot 10^{-2} + i\,4.703248826760600 \cdot 10^{-2},\\ &6.374079255711100 \cdot 10^{-2} + i\,8.650339728394700 \cdot 10^{-2},\\ &4.048211909924600 \cdot 10^{-2} - i\,7.207606064662800 \cdot 10^{-2},\\ &-8.151521021270800 \cdot 10^{-2} - i\,2.388618850411100 \cdot 10^{-2},\\ &-4.363786207688800 \cdot 10^{-2} + i\,6.858262771755810 \cdot 10^{-2}\big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\overline{l}_1^6, \overline{l}_2^6, \overline{\lambda}_6^1, \overline{\lambda}_6^2, \overline{\lambda}_6^3, \overline{\lambda}_6^4\right] = \big[&-3.777699832746000 \cdot 10^{-2} - i\,9.873023399290000 \cdot 10^{-2},\\ &2.251959174854600 \cdot 10^{-2} - i\,1.135044625682700 \cdot 10^{-2},\end{aligned}$$

$$3.669676250951100 \cdot 10^{-2} + i\, 3.622324724014400 \cdot 10^{-2},$$
$$3.634917018379500 \cdot 10^{-2} - i\, 5.107012333167600 \cdot 10^{-2},$$
$$-7.505713542195000 \cdot 10^{-3} + i\, 1.154623436746600 \cdot 10^{-2},$$
$$-5.543948948927200 \cdot 10^{-2} + i\, 9.026674172056499 \cdot 10^{-2}\big]$$

$$\Big[\overline{l}_1^7, \overline{l}_2^7, \overline{\lambda}_7^1, \overline{\lambda}_7^2, \overline{\lambda}_7^3, \overline{\lambda}_7^4\Big] = \big[9.015391063311000 \cdot 10^{-2} + i\, 2.074965436740300 \cdot 10^{-2},$$
$$1.137768201853000 \cdot 10^{-3} + i\, 4.703248826760600 \cdot 10^{-2},$$
$$6.374079255711100 \cdot 10^{-2} + i\, 8.650339728394700 \cdot 10^{-2},$$
$$4.948211909924600 \cdot 10^{-2} - i\, 7.207606064662800 \cdot 10^{-2},$$
$$-8.151521021270800 \cdot 10^{-2} - i\, 2.388618850411100 \cdot 10^{-2},$$
$$4.177457890165700 \cdot 10^{-2} - i\, 6.689333670048300 \cdot 10^{-2}\big]$$

$$\Big[\overline{l}_1^8、\ \overline{l}_2^8、\ \overline{\lambda}_8^1、\ \overline{\lambda}_8^2、\ \overline{\lambda}_8^3、\ \overline{\lambda}_8^4\Big] = \big[-2.952938879084900 \cdot 10^{-2} - i\, 4.829159279506610 \cdot 10^{-2},$$
$$-6.105800366706000 \cdot 10^{-3} - i\, 9.111150804119310 \cdot 10^{-2}、$$
$$-4.424765849460100 \cdot 10^{-3} - i\, 5.448494845808000 \cdot 10^{-3}、$$
$$-8.459618609850000 \cdot 10^{-4} + i\, 9.105717695359500 \cdot 10^{-2}、$$
$$9.212993622611000 \cdot 10^{-3} + i\, 7.622100043006000 \cdot 10^{-3}、$$
$$4.814038260778000 \cdot 10^{-2} + i\, 3.339139584718200 \cdot 10^{-2}\big]$$

$$\Big[\overline{l}_1^9, \overline{l}_2^9, \overline{\lambda}_9^1, \overline{\lambda}_9^2, \overline{\lambda}_9^3, \overline{\lambda}_9^4\Big] = \big[3.333163313138000 \cdot 10^{-2} + i\, 8.987872802854000 \cdot 10^{-2},$$
$$4.924941240444200 \cdot 10^{-2} + i\, 4.884444793924100 \cdot 10^{-2},$$
$$-4.344354377175200 \cdot 10^{-2} - i\, 2.259235703299100 \cdot 10^{-2},$$
$$-7.463782067688800 \cdot 10^{-2} + i\, 7.758622222255809 \cdot 10^{-2},$$
$$-7.994595436034500 \cdot 10^{-2} + i\, 5.510716975355500 \cdot 10^{-2},$$
$$8.955399362261099 \cdot 10^{-1} + i\, 9.456553464300600 \cdot 10^{-2}\big]$$

$$\Big[\overline{l}_1^{10}, \overline{l}_2^{10}, \overline{\lambda}_{10}^1, \overline{\lambda}_{10}^2, \overline{\lambda}_{10}^3, \overline{\lambda}_{10}^4\Big] = \big[-5.32316331313800 \cdot 10^{-2} + i\, 3.337872802854000 \cdot 10^{-2},$$
$$3.334941240444200 \cdot 10^{-2} + i\, 4.444444793924100 \cdot 10^{-2},$$
$$-4.333354377175200 \cdot 10^{-2} - i\, -2.259235703299100 \cdot 10^{-2},$$
$$-9.763782067688800 \cdot 10^{-2} + i\, 6.586222222558100 \cdot 10^{-3},$$
$$-4.445954360345000 \cdot 10^{-3} + i\, 9.510716975355500 \cdot 10^{-2},$$
$$8.034399362261100 \cdot 10^{-1} + i\, 9.056213464300600 \cdot 10^{-2}\big]$$

$$\Big[\overline{l}_1^{11}, \overline{l}_2^{11}, \overline{\lambda}_{11}^1, \overline{\lambda}_{11}^2, \overline{\lambda}_{11}^3, \overline{\lambda}_{11}^4\Big] = \big[5.978211909924600 \cdot 10^{-2} + i\, 1.237606064662800 \cdot 10^{-2},$$
$$8.961521021270801 \cdot 10^{-2} + i\, 3.277618850411100 \cdot 10^{-2},$$
$$-4.377457890165700 \cdot 10^{-2} + i\, 5.579333670048300 \cdot 10^{-2},$$
$$9.252938879084900 \cdot 10^{-2} - i\, 4.845159279506610 \cdot 10^{-2},$$
$$3.610580036670600 \cdot 10^{-2} + i\, 1.922150804119310 \cdot 10^{-2},$$
$$5.177457890165700 \cdot 10^{-2} + i\, 5.571333670048300 \cdot 10^{-2}\big].$$

因此，我们考虑多项式系统 $F(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3,\overline{f}_4)$，我们已知其一个解 $\left(\left[\overline{l}_1^1,\overline{l}_2^1,\overline{\lambda}_1^1,\overline{\lambda}_1^2,\overline{\lambda}_1^3,\overline{\lambda}_1^4\right],\ldots,\left[\overline{l}_1^{11},\overline{l}_2^{11},\overline{\lambda}_{11}^1,\overline{\lambda}_{11}^2,\overline{\lambda}_{11}^3,\overline{\lambda}_{11}^4\right]\right)$，并开始一个分为 3 个线性步骤的单值环。

在第一步中，我们用随机复数（最终参数）改变 $F(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3,\overline{f}_4)$ 的起始参数，从而得到一个不同的多项式系统 $F_1$，其仍然由 66个方程和未知量组成。通过线段同伦 $H_0:\mathbb{C}^{66}\times[0,1]\to\mathbb{C}^{66}$，连接 $F(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3,\overline{f}_4)$ 与 $F_1$，我们因此将起始点 $\left(\left[\overline{l}_1^1,\overline{l}_2^1,\overline{\lambda}_1^1,\overline{\lambda}_1^2,\overline{\lambda}_1^3,\overline{\lambda}_1^4\right],\ldots,\left[\overline{l}_1^{11},\overline{l}_2^{11},\overline{\lambda}_{11}^1,\overline{\lambda}_{11}^2,\overline{\lambda}_{11}^3,\overline{\lambda}_{11}^4\right]\right)$ 连接到 $F_1$ 的一个解（终点）。然后，我们用 $F_1$ 替换 $F(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3,\overline{f}_4)$、$\left(\left[\overline{l}_1^1,\overline{l}_2^1,\overline{\lambda}_1^1,\overline{\lambda}_1^2,\overline{\lambda}_1^3,\overline{\lambda}_1^4\right],\ldots,\left[\overline{l}_1^{11},\overline{l}_2^{11},\overline{\lambda}_{11}^1,\overline{\lambda}_{11}^2,\overline{\lambda}_{11}^3,\overline{\lambda}_{11}^4\right]\right)$以及$(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3,\overline{f}_4)$，其中 $F_1$ 为终点和最终参数，并迭代第一步的过程。这样，我们得到一个多项式系统 $F_2$ 和一个线段同伦 $H_1:\mathbb{C}^{66}\times[0,1]\to\mathbb{C}^{66}$，它将 $F_1$ 的一个解（第一步的输出）连接到 $F_2$ 的一个解。

最后，我们通过线段同伦 $H_2$ 闭合环路：$\mathbb{C}^{66}\times[0,1]\to\mathbb{C}^{66}$它将 $F_2$ 的一个解（第二步的输出）映射为 $F_{(\overline{f}_1,\ \overline{f}_2,\ \overline{f}_3,\ \overline{f}_4)}$。W

e p请注意，方程 $F_1$、$F_2$ 和 $F$（$\overline{f}_1,\ \overline{f}_2,\ \overline{f}_3,\ \overline{f}_4$）（视为三角形环路的三个顶点）是通过在 input move 文件（位于 Monodromy 子文件夹中）里将参数 $p_0$、……、$p_{65}$ 替换为随机值而得到的；线段同伦 $H_0$、$H_1$、$H_2$ 由 Bertini 构造（这也解释了为什么 input move 中的指令 ParameterHomotopy 的值设为 2）。借助 input Newton 文件（位于 Monodromy 子文件夹中），Bertini 执行牛顿法（这也解释了为什么 TrackType 的值设为 $-2$），以便对三角形环路结束时得到的解进行精化。

由于循环的输出不是 $\left(\left[\overline{l}_1^1,\overline{l}_2^1,\overline{\lambda}_1^1,\overline{\lambda}_1^2,\overline{\lambda}_1^3,\overline{\lambda}_1^4\right],\ldots,\left[\overline{l}_1^6,\overline{l}_2^6,\overline{\lambda}_6^1,\overline{\lambda}_6^2,\overline{\lambda}_6^3,\overline{\lambda}_6^4\right]\right)$，因此 $\overline{f}=(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3,\overline{f}_4)$ 为猜想 1.1 提供了一个反例。特别是，通过多次迭代该过程，我们得到 $F(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3,\overline{f}_4)$ 的不同解的数量稳定为 36，从而完成了定理1.2的证明。

关于这36个分解的更多细节，请参阅辅助文件 decompositions.pdf。

致谢。我要感谢匿名审稿人提出的宝贵建议和有益意见，这些建议和意见有助于改进本文。

## References

[AH] J. Alexander, A. Hirschowitz, *Polynomial interpolation in several variables*, J. AlgebraicGeom. 4(2) (1995), 201-222. [A] E. Angelini, *Warning decompositions and identifiability via Bertini and Macaulay2 software* 2019 200 212 , J. SymbolicComput., 91, ( ), - . [AGMO] E. Angelini, F.Galuppi,M. Mella, G. Ottaviani, *On the number of Waring decompositions for a generic polynomial vector* **222**, 2018 950 965 , J. PureAppl.Algebra, ( ), –. [Be] D. J. Bates,J.D.Hauenstein,A. J. Sommese,C.W. Wampler, *Bertini: Software for numerical algebraic geometry* bertini.nd.edu ,可见于 .[BG] V. Beorchia, F. Galuppi, *Generic identifiability of pairs of ternary forms*, Collect. Math., DOI:10.1007/s13348-022-00363-8 (2022)。

[BHSW] D. J. Bates、J. D. Hauenstein、A. J. Sommese、C. W. Wampler, *Numerically Solving Polynomial Systems with Bertini* 2013 , SIAM, 费城（）。

[CC] L. Chiantini、C. Ciliberto, *Weakly defective varieties*, 《美国数学会汇刊》, 354（2002年）, 第1期, 151–178。[CR] C. Ciliberto、F. Russo, *Varieties with minimal secant degree and linear systems of maximal dimension on surfaces* **200** 2006 1 50 , 《数学进展》, （）, –。[GM] F. Galuppi、M. Mella, *Identifiability of homogeneous polynomials and Cremona Transformations* **757** 2019 279 308 , 《纯粹与应用数学杂志》, （）, –。[M2] D. Grayson、M. Stillman, *Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry* `www.math.uiuc.edu/Macaulay2` , 可获取于 Hi D. Hilbert, , 《全集》第II卷, 148–153。[HOOS] J. D. Hauenstein、L. Oeding、G. Ottaviani、A. J. Sommese, *tensor decomposition and perfect identifiability* **753** 2019 , 《纯粹与应用数学杂志》, （）, 1–22。[Lan] J. M. Landsberg, *Tensors: geometry and applications*, 《数学研究生教材》第128卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, （2012年）。[Ro] R.A. Roberts, *Note on the plane cubic and a conic*, 《伦敦数学会学报》, （1）21（1889年）, 62–69。[Sy] J.J. Sylvester, *Collected Works*, 剑桥大学出版社, 1904年。[Te] A. Terracini, *Sulle $V_k$ per cui la varietà degli $S_h$ $(h+1)$-seganti ha dimensione minore dell'ordinario* **31** 1911 392 396 , 《巴勒莫数学学报》, （）, –。[We] K. Weierstrass, *Zur theorie der bilinearen and quadratischen Formen*, 《柏林科学院月报》, （1867年）, 310–338。*Email address*: `elena.angelini@unisi.it`