arXiv:2304.03189v1 [cs.LG] 6 Apr 2023

前向-前向学习的概念在多输出感知器中的应用

K. F. Karlsson *[1]

[1]Saab Dynamics，瑞典 Link¨oping，邮编 SE-581 88

2023年4月6日

摘要

本文将近期提出的、面向全连接人工神经网络的前向-前向学习算法应用于单个多输出感知机进行分类。系统参数通过针对正确（错误）标记的输入样本提高（降低）“优度”来训练。基本数值测试表明，训练后的感知机能够有效处理具有非线性决策边界的数据集。此外，其整体性能与更复杂的含隐藏层的神经网络相当。本文所述方法的优点在于只涉及一次矩阵乘法。

感知机是一种人工神经网络，由心理学家弗兰克·罗森布拉特于 20 世纪 50 年代末提出，用作生物神经元的模型 [1]。它是一种单层前馈神经网络，通过调整连接权重，从示例中学习如何对输入模式进行分类。感知机因其简单高效，广泛应用于模式识别和机器学习领域。

尽管感知机早期取得了成功，但它有一个主要局限：只能学习区分线性可分模式 [2]。这意味着，它只能对那些能在输入空间中由超平面分隔的模式进行分类。对于无法线性分离的模式，例如布尔异或（XOR）函数，单个感知机无法学习。

为克服这一局限，人们开发了多层神经网络，例如多层感知器（MLP）。它由若干层互连神经元组成，其中，中间隐藏层的输入由前一层的输出提供。这些网络能够学习将不同模式分开的非线性决策边界；研究表明，只要隐藏层中的神经元数量足够多，这类网络就能以任意精度近似几乎任何函数[3]。

*联系邮箱：fredrik.karlsson3@saabgroup.com

如今，神经网络的监督训练通常通过反向传播实现。这是一种学习算法，根据实际输出与期望输出之间的误差来调整连接权重。反向传播通过逐层将误差沿网络向后传递，使网络中的所有权重都能得到调整，从而将误差降至最低 [4]。

对于一个典型的多类分类问题，感知机的输入维度由输入信号的维度决定，而输出向量的维度等于类别数量。对于给定的输入，每个维度的输出值都可以通过 softmax 函数解释为该输入信号属于相应类别的概率。

最近，G. Hinton提出了前向-前向（FF）算法，该算法不是最小化网络输出端的最终误差，而是分别优化网络中每一层的“优度” [5]。因此，该算法在学习过程中不依赖将信息反向传播至前面的层。层的优度是输出向量长度的一种度量，可以定义为其各元素平方和。其目标是：良好 或不良 的输入数据应分别产生高 或低 优度（Hinton 将其称为真实 数据和负 数据）。在此背景下，分类器的监督学习过程是：向输入提供训练信号的同时，还提供实际类别标签。如果涉及两个以上的类别，则采用独热编码。因此，输入向量会针对每个类别额外扩展一个维度。标签正确的输入数据对应良好数据，而标签错误的输入数据对应不良数据。

在上述出版物中，据报道，一个包含四个隐藏层且每层有 2000 个神经元的网络，其性能可与采用反向传播 [5] 进行常规训练的最先进网络相媲美。只有最后三个隐藏层的活动向量会被组合起来，以提取一个集体优度值，而第一层的优度则被忽略。排除第一层后，据报道整体性能有所提升。

本文研究了在 FF 框架内训练和使用的单个感知机。训练采用 Adam 变体的随机梯度下降法[6], ，以最小化作用于优度值减去阈值后的逻辑损失。首先将说明，单个前馈感知机可以训练为模拟异或函数。在这种情况下，训练至少需要三个输入：两个异或输入和类别标签。训练后，只有当两个异或输入值与正确的标签相对应（该标签也作为输入提供）时，感知机才应产生较高的优度；否则，优度应较低。因此，这种感知机构成了一个二元分类器，其类别为输入标签正确 和错误 。由于这两个类别在三维输入空间中并非线性可分，单个输出无法达到预期的优度。然而，通过使用多个输出，优度值由所有输出的整体属性决定，从而能够形成非线性决策边界。因此，经过 FF 训练且具有多个输出的单个感知机可以执行异或分类（不同输出数量和激活函数的一些示例见图 1）。由此，为该感知机添加输出，类似于为传统多层感知机的隐藏层添加神经元。

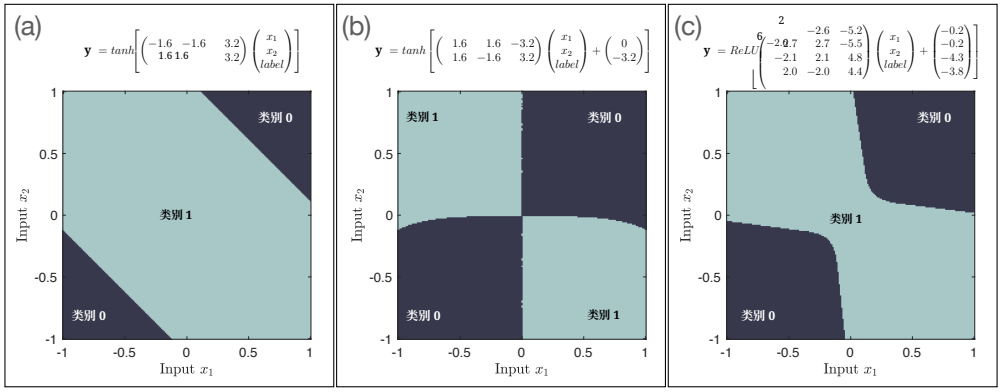

图 1：经训练用于模拟异或函数的感知机分类图，具有两个（a 和 b）或四个（c）输出。布尔值 true 和 false 分别由两个输入 x_1 和 x_2 取值接近 -1 或接近 +1 表示。输入相同时标记为 0，输入不同时标记为 1，以此标记两个类别。给定 x_1 和 x_2，分类依据优度最高的标签；优度定义为输出向量元素 **y** 的平方和。每幅图上方是对应的感知机数学表达式，其中包括训练所得的参数值。

一个稍复杂的二维示例是对沿两条蓝色和红色螺旋曲线散布的含噪输入点进行分类（x_1，x_2），如图 2a 所示。不同颜色的点属于不同类别。除了 x_1 和 x_2 之外，还应将类别标签作为输入提供。此处通过单个输入给出标签：蓝色为 0，红色为 1，因此输入维度增至三维。使用 32 个经泄漏 $ReLU$ 激活的输出时，该感知机有 128 个可训练参数（包括 32 个偏置）。训练后，它能正确分类超过 99 % 的随机测试点（见图 2b）。

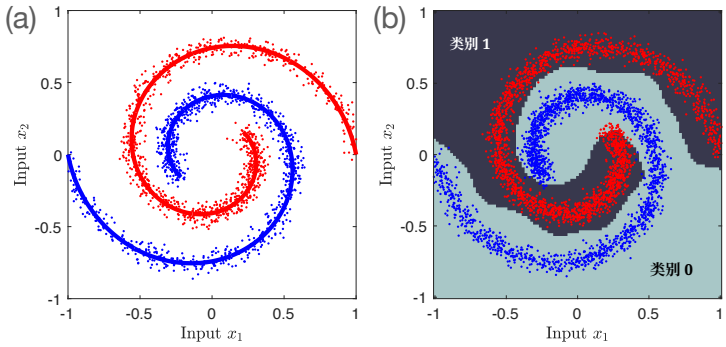

图 2：散布在螺旋曲线周围的训练数据：(a) 分别属于标记为 0 和 1 的两个类别的蓝色和红色点；(b) 具有 3 个输入和 32 个输出的经训练感知机所得到的分类图。经训练的感知机能够正确分类超过 99% 的随机测试点。

前面的示例清楚地表明，在 FF 框架下训练和使用的单个多输出感知机，能够处理具有复杂

决策边界的数据集。此外，只需增加输出数量，就可以任意增大参数数量；预期参数越多，性能也会越好。作为最后一个基础示例，我们使用维度显著更高的输入和输出空间，训练具有 $ReLU$ 激活输出的感知机，利用著名的 MNIST 数据集 [7] 对手写数字图像进行分类。训练使用了 60000 张图像，另用 10000 张不同的图像评估训练好的感知机。训练集被拆分为大小为 10 的小批量；训练时，先将 10 张训练图像连同正确标签（独热编码）作为良好数据输入，随后将相同图像连同随机生成的错误标签作为不良数据输入。每个小批量处理完毕后都会计算梯度并更新权重。更多详情请参阅代码 [8]。

表1总结了部分选定输出数量下获得的结果：当输出数量达到或超过2000时，测试误差低于1.7%。通过将图像沿任意方向随机抖动最多两个像素来扩充训练数据，输出数量为8000的感知机的测试误差降至1.0%以下。

在许多方面，这里研究的单个前馈感知机的行为类似于传统的两层感知机，即包含一个隐藏层。不过，它的训练速度要慢得多，而且与传统的多层感知机相比，它对训练数据的适应准确度似乎较低。这一特性可能会使前馈感知机不易发生过拟合。

未来，模拟神经网络有望发挥重要作用，这主要归功于其预期的高速和低能耗。计算感知机输出时所涉及的单次矩阵乘法，加上层间无需反向传播误差，使模拟矩阵计算的硬件架构大为简化。事实上，集成忆阻器芯片上已经实现了可训练的单个感知机 [9], ，不过其输入和输出数量仍然很少。因此，像本文所研究的这种高性能单个感知机，未来或可用于模拟硬件，实现快速且节能的实时信号分类。

人工神经网络通常被视为黑箱系统。由于缺乏可解释性，这在医疗或军事应用等关键领域可能会带来问题。然而，使用单个矩阵进行输入输出映射的感知机，在输入与输出之间建立了透明的联系，从而增强了网络的可理解性和可解释性。这种透明性使人们更容易

输出	数据增强	测试误差 $\lesssim$ (%)	训练轮次
125	none	2.6	80
500	none	1.9	80
2000	none	1.7	150
8000	none	1.6	150
125	抖动	2.2	180
500	抖动	1.4	260
2000	抖动	1.1	340
8000	抖动	1.0	340

表1：对具有不同输出数量的单个感知机进行 FF 训练后，在 MNIST 验证数据分类任务上取得的结果。经过所列训练轮次后，测试误差未观察到显著改善。使用的学习率为 0.0003，优度计算为输出元素平方的均值，逻辑函数中的阈值设为 10 [8]。

直观呈现并理解影响网络输出的因素。

总之，研究已证明，前向-前向学习过程能够训练单层感知机，使其模拟异或函数，并处理更复杂的非线性决策边界。在著名的手写数字 MNIST 数据集上进行的基础测试中，其性能可与含隐藏层的传统神经网络相媲美，分类测试误差低于 1%。单次矩阵乘法结构简单，有助于提高可解释性；再加上无需反向传播，这为更简单的模拟计算硬件开辟了道路。

致谢

作者感谢 C. Larsson 向其介绍最近提出的前向-前向算法，也感谢 A.G¨allstr¨om 就这一主题进行了有益的讨论。

参考文献

[1]Rosenblatt, F. 感知机：一种关于大脑中信息存储与组织的概率模型。*Psychological Review*。**65**, 386-408 (1958年), http://doi.org/10.1037/h0042519[2] Minsky, M. & Papert, S. Perceptrons. (MIT Press,1969年)[3] Cybenko, G. S形函数叠加的逼近。控制、信号与系统数学（*MCSS*）。**2**, 303-314 (1989年,12), http://doi.org/10.1007/BF02551274[4] Rumelhart, D., Hinton, G. & Williams, R. 通过反向传播误差学习表征。*Nature*。**323**, 533-536 (1986年), http://doi.org/10.1038/323533a0[5] Hinton, G. 前向-前向算法：一些初步研究。*arXiv:2212.13345*(2022年), http://doi.org/10.48550/arXiv.2212.13345[6] Kingma, D. & Ba, J. Adam：一种随机优化方法。第*3*届国际学习表征会议（*ICLR 2015*），美国加利福尼亚州圣迭戈，*2015*年*5*月*7*日至*9*日，会议论文集。(2015年)[7] Deng, L. 用于机器学习研究的手写数字图像 MNIST 数据库。*IEEE Signal Processing Magazine*。**29**, 141-142 (2012年)[8] K. F. Karlsson，感知机的前向-前向学习。*GitHub* 仓库。(2023年), http://github.com/KFKarlsson/FFPerceptron[9]Cai, F., Correll, J., Lee, S., Lim, Y., Bothra, V., Zhang, Z., Flynn, M. & Lu, W. 用于高效乘累加运算的全集成可重编程忆阻器-CMOS系统。*NatureElectronics*。**2** 页 1 (2019年,7), http://doi.org/10.1038/s41928-019-0270-x