arXiv:2304.03194v1 [physics.flu-dyn] 6 Apr 2023

残差滤波和解滤波的小尺度抑制特性*

Ayaboe K. Edoh† Timothy P. Gallagher‡ Venkateswaran Sankaran*

†*Jacobs Engineering, Inc. – Air Force Research Laboratory, Edwards, California*

‡*Aerospace Systems Directorate – Air Force Research Laboratory, Edwards, California*

* *Aerospace Systems Directorate – Air Force Research Laboratory, Wright-Patterson, Ohio*

摘要

本文研究了残差滤波和解滤波过程对抑制小尺度（即高波数）成分累积的作用。通过以“等效残差方程”为标准评估每种方法，揭示了它们行为上的根本差异，例如如何将底层解约束在目标滤波宽度内。研究表明，残差滤波（RF）方法与耗散性滤波核结合后，可通过色散效应限制流体方程中的尺度生成；与此同时，解滤波（SF）以及由此延伸出的人工耗散（AD）则通过耗散机制发挥作用，并主动衰减高波数成分。本文还从响应特性以及与RF和SF方法结合时对降低小尺度活动的相关影响等方面，分析了离散滤波器（即Top-hat和隐式正切格式）。研究表明，线性理论评估（例如冯·诺依曼分析）能够成功刻画这些方法在非线性情形下的基本行为，这一点可通过基于一维黏性Burgers方程、二维欧拉方程和三维纳维–斯托克斯方程的典型测试案例观察到。

1 引言

滤波方法用于减少信号中的不需要信息，包括：底层系统中的偏差、由于数据流的采集或生成而可能产生的噪声，或原始来源的随机性。这些一般性用途都旨在移除有问题的内容，并且在计算流体力学（计算流体力学）背景下有相应的类比。

1.信号偏差：将连续方程离散化会由于有限精度而产生数值误差，并且其对精度的影响会随着尺度减小而增加 [1]。2. 数据生成中的噪声：由于方程中的非线性，在有限网格上生成更精细尺度可能会产生混叠误差，从而影响精度和稳定性[2, 3, 4]。3. 随机性：在没有正则化的情况下，非线性作用下数值误差的耦合效应进一步增加了获得收敛结果和易处理的流动表征的难度（例如，在湍流中 [5, 6]）。

对缓解此类问题的需求促使人们在计算流体力学中采用滤波方案。相应的流动方程具有能量的主动谱再分配特性，但在处理数值场中可能出现的误差时，在欠分辨网格上可能缺乏自然的正则化。典型示例包括纳维–斯托克斯方程的高雷诺数大涡模拟，这类仿真通常需要基于模型的阻尼来维持稳定性和精度。

滤波器通常用于衰减解中的高频（即小时间尺度）或高波数（即小空间尺度）分量。然而，作为计算的一部分，滤波的实施方式对于影响精度和鲁棒性的数值性质

*本研究已获准公开发布（美国空军研究实验室公共事务审查编号 AFRL-2022-1521）。

†通讯作者：ayaboe.edoh@jacobs.com

具有重要作用。本研究旨在分析流体方程两种主要滤波方法的细微差异：残差滤波和解滤波实现。

残差滤波（RF）方法论涉及在时间推进过程中对空间导数和源项应用滤波算子。RF 的用途包括增大显式时间积分器的稳定时间步长，以及加速迭代方法的收敛。例如，Jameson 和 Baker [7] 提出对残差进行平滑（即滤波），以适应任意大的时间步长，并将稳定性的提高归因于有效差分算子具有更大的支撑范围。与此同时，Haelterman *et al.* [8]针对 RK-多重网格框架优化显式和隐式残差平滑器，以加速迭代性能；作者指出，相对于 RK-多重网格方法的阻尼特性，对高频模态进行聚集十分重要。尽管 RF 的各种应用背景通常被分别考察，但从微分预条件的角度来看，对方程时间导数（即残差）进行滤波这一概念可以得到最一般的描述[9]。更具体地说，对解的时间增量施加空间衰减不仅会改变其时间推进方式（无论是在物理时间中还是在迭代伪时间设置下），还会引入波数相关偏差，从而能够调节不同尺度的演化。因此，可以根据控制方程以及信号的谱内容调节滤波器，从而为提高显式积分器的稳定性极限提供必要的灵活性（例如，相对于给定的时间步长，人为缩小半离散系统的特征值），并加速稳态收敛（例如，使迭代过程聚焦于仍需进一步收敛的尺度）。

除了对残差应用滤波外，还可以将其直接应用于解变量，作为中间后处理步骤。这被称为解滤波（SF），最初由 Shuman [10] 提出，用于平滑气象计算中的错误高波数分量。同时，Phillips [11] 指出，在欠分辨网格上进行非线性问题计算时，混叠误差是数值不稳定性的主要来源，这进一步推动了解滤波的应用。定期去除解中低于预定截止波数的谱内容，有助于消除结果中的混叠，并提高解的非线性鲁棒性。此后，解滤波的应用不断扩展。Visbal 和 Gaitonde [12, 13] 采用高阶解滤波，以提升曲线网格上用于气动声学的高阶数值方法的解质量和鲁棒性。同时，Kennedy 和 Carpenter [14] 展示了采用高阶解滤波来抑制高阶显式格式产生的高波数噪声。这种滤波方法被用于湍流燃烧的直接数值模拟 [15], , 因为由于问题中的非线性，高波数内容与所有波数都存在强耦合。解滤波与人工耗散（AD）方法之间的基本联系 [16, 17, 18, 19] ——其中，SF 可以被视为后者的一种预测-校正实现——进一步拓展了其在其他场景中的适用性，例如激波捕捉 [20, 21]。

理解残差滤波和解滤波方法应用背后的基本机制，对于正确使用这些方法至关重要。Bogey 和 Bailly [22] 以及 Ranocha *et al.* [23] 比较了残差滤波与解滤波在线性平流方程中的性能，并指出其在色散和耗散特性方面存在根本差异。在本研究中，我们结合理论分析和数值实例，进一步确定残差滤波和解滤波方法应用于复杂度不断增加的非线性方程时间演化时的特征（即一维黏性Burgers方程、二维欧拉方程和三维纳维–斯托克斯方程）。我们表明，这两种方法都能有效减轻系统中不良内容的存在；然而，残差滤波与解滤波改变这些内容的机制并不相同。例如，残差滤波作用于解的时间导数，可以认为它对原始动力学施加了与尺度相关的平滑化；因此，该技术不会直接提供耗散，以主动移除可能随时间累积的不需要内容（例如，数值误差）。另一方面，解滤波通过直接对解进行正则化来移除不需要内容；然而，根据滤波算子的选择，它容易引入过多的数值阻尼。这些根本差异可能会影响残差滤波和解滤波在求解非线性问题时各自的应用，包括对湍流计算和显式滤波大涡模拟 [24]的影响。人工耗散（AD）——可视为解滤波的一种特殊形式 [18] ——也在本文中有所涉及。

本文结构安排如下：第2 节通过将残差滤波和解滤波方法应用于典型的线性标量对流-扩散方程，从理论上进行评估；文中辨识了各自表述所产生的数值耗散项和色散项，并采用冯·诺依曼分析进一步研究整体格式的影响；第3 节随后给出非线性数值计算，以展示并验证前述线性分析所得的各种结论；最后，第4 节对显式滤波作总结性评述

具体实现，并提出了未来研究方向。

2 方法论

相对于以残差形式写出的一般演化方程，本文考察残差滤波和解滤波方法，

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \mathcal{R}(Q) \ , \tag{1}$$

其中， $\mathcal{R}(Q)$ 是由解变量 Q 的空间导数和源项构成的残差算子。为便于本节的理论分析，本文以标量 u 的一维线性平流-扩散方程作为目标 Navier-Stokes 方程组的典型示例：

$$\mathcal{R}(u) = -a\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ . \tag{2}$$

所讨论的滤波核是纯耗散性的，可用空间上的保留算子和衰减算子表示，

$$\mathcal{G}_{\text{fil}} = \mathcal{I} + \mathcal{D}_{\text{fil}} = 1 + \sum_{k\geq 1} \epsilon_{2k} (\Delta x)^{2k} \delta_x^{2k} \ , \tag{3}$$

其中， δ_x^m 是沿 x 方向的离散 m 阶导数。这里，我们进一步假设 $(\delta_x^2)^k = \delta_x^{2k} = \partial_x^{2k} + O(\Delta x)^2$；注意，为方便起见，未除差分 $\delta^{2k} = (\Delta x^{2k})\delta_x^{2k}$ 可互换使用。与滤波器相关的特定模板决定了系数 ϵ_{2k}。本文从理论上研究了这些模板对不同方法的影响，而这一线性视角有助于深入理解这些方法的非线性行为。

2.1 滤波实现概述

本文研究的滤波技术并列展示于表 1 中，以便进行比较。除 RF 和 SF 外，本文还研究了人工耗散（AD）。每种方法都分为三个基本步骤：形成残差、应用滤波器以及对系统进行时间积分。根据所用方法的不同，这些步骤的执行顺序也有所变化。

这里用上横线表示滤波量， $\bar{\phi} = \mathcal{G}\{\phi\}$。一般而言，残差滤波和解滤波都作为对输入量 ϕ 的后处理，其中残差滤波取 $\phi = \mathcal{R}_{\text{o}}(Q)$，解滤波则取 $\phi = Q^{n+1,\ *}$。滤波操作还可以重新表述为一个时间校正步骤，

$$\bar{\phi} = \phi + \sum_k \epsilon_{2k} (\Delta x)^{2k} \delta_x^{2k} \phi = \phi + (\Delta t) \cdot \sum_k \epsilon_{2k} |\lambda'| (\Delta x)^{2k-1} \delta_x^{2k} \phi \ , \tag{4}$$

其中 λ' 是一个以速度为单位的参数。

正如先前研究 [18], 所提出的，通过按与库朗数相关的参数重新缩放原始滤波系数，可以实现方程 4 中的时间一致性，$\epsilon'_{2k} = \mu\epsilon_{2k}$ 其中 $\mu = \min\{CFL, 1\}$[1] 且 $CFL = |\lambda|\Delta t/\Delta x$。这意味着，当库朗数低于 1 时，$\lambda' = \min\{\Delta x/\Delta t, a\}$ 与物理速度尺度相关，这与人工耗散方法的常见做法一致。另一方面，省略这种重新缩放，则意味着采用基于离散的速度尺度 $\lambda' = (\Delta x/\Delta t)$。对于解滤波，这种纯粹基于网格的定义会随着 $(\Delta t) \to 0$而增加施加于解的数值耗散量。基于库朗数重新缩放解滤波，通过规定基于物理量的阻尼频率，避免了确定解滤波频率时的歧义。除非另有说明，以下解滤波均采用这种时间一致的重新缩放形式，并称为 SF-r。

为评估残差滤波与解滤波之间的差异，我们将它们应用于离散化的线性对流扩散方程（见公式 2）。为简便起见，假设采用前向欧拉积分格式，然后按照表 1 中列出的步骤构造这些方法，可得

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = -a\delta_x u + \nu\delta_x^2 u^n + \mathcal{R}_{\text{addi}}(u^n) \ , \tag{5}$$

[1]或者，Lamballais*et al* [25] 提出了一种基于黏性动力学的标度，其中 $\mu = 1 - e^{-\text{VNN}}$ 以及 $\text{VNN} = \nu\Delta t/(\Delta x^2)$。该技术还恢复了解滤波过程的时间一致性。通过将VNN替换为库朗数，也可以采用这种形式的基于对流的表述，尽管这会失去与传统人工耗散方案的类比。

表1：滤波方法的算法描述。

人工耗散（人工耗散）	残差滤波（残差滤波）	解滤波（解滤波）
1. 形成基础残差， $\mathcal{R}_{\mathrm{o}}(Q)$	1. 形成基础残差， $\mathcal{R}_{\mathrm{o}}(Q)$	1. 构造基础残差， $\mathcal{R}_{\mathrm{o}}(Q)$
2. 构造人工耗散残差： $\mathcal{R}_{\mathrm{AD}}(Q) = \sum_k \epsilon_{2k}\lvert\lambda\rvert(\Delta x)^{2k-1}\delta_x^{2k}Q$	2. 对基础残差进行滤波： $\mathcal{G}\{\mathcal{R}_{\mathrm{o}}\} = \mathcal{R}_{\mathrm{o}} + \sum_k \epsilon_{2k}(\Delta x)^{2k}\delta_x^{2k}\mathcal{R}_{\mathrm{o}}$	2. 对残差进行时间积分： $\partial_t Q = \mathcal{R}_{\mathrm{o}}(Q) \quad Q^n \rightarrow Q^{n+1,*}$
3. 对组合后的 残差进行时间积分： $\partial_t Q = \mathcal{R}_{\mathrm{o}}(Q) + \mathcal{R}_{\mathrm{AD}}(Q) \quad Q^n \rightarrow Q^{n+1}$	3. 对滤波后的残差进行时间积分： $\partial_t Q = \mathcal{G}_{\mathrm{fil}}\{\mathcal{R}_{\mathrm{o}}\}, \quad Q^n \rightarrow Q^{n+1}$	3. 滤波解： $Q^{n+1} = \mathcal{G}_{\mathrm{fil}}\{Q^{n+1,*}\}$

其中，所产生的空间人工项为

$$\mathcal{R}_{\mathrm{addi,AD}}(u^n) = \underbrace{|\lambda'|\sum_k \epsilon_{2k}(\Delta x)^{2k-1}\delta_x^{2k}u^n}_{I} \tag{6}$$

$$\mathcal{R}_{\mathrm{addi,RF}}(u^n) = \underbrace{-(\Delta t)\cdot a|\lambda'|\sum_k \epsilon_{2k}(\Delta x)^{2k-1}\delta_x^{2k+1}u^n}_{II} + \underbrace{(\Delta t)\cdot \nu|\lambda'|\sum_k \epsilon_{2k}(\Delta x)^{2k-1}\delta_x^{2k+2}u^n}_{III} \tag{7}$$

$$\mathcal{R}_{\mathrm{addi,SF}}(u^n) = \underbrace{|\lambda'|\sum_k \epsilon_{2k}(\Delta x)^{2k-1}\delta_x^{2k}u^n}_{I} \underbrace{-(\Delta t)\cdot a|\lambda'|\sum_k \epsilon_{2k}(\Delta x)^{2k-1}\delta_x^{2k+1}u^n}_{II} + \underbrace{(\Delta t)\cdot \nu|\lambda'|\sum_k \epsilon_{2k}(\Delta x)^{2k-1}\delta_x^{2k+2}u^n}_{III} \tag{8}$$

上述内容代表有助于突出每种滤波方法所隐含的额外机制（即 R_{addi}）的“等效残差方程”（ERE）[2]。

人工耗散的表述将滤波器的耗散部分作为额外贡献项（见方程 6中的项 I），因此具有衰减高波数成分的有效机制。添加的人工项可能与时间推进方法相互作用，从而产生次级色散效应——详情请参见附录 ?? 中提供的修正方程分析。

对于残差滤波，会诱导出两个额外项（见方程 7）。项 II 具有色散性，负责影响解的相位特性。同时，项III 与物理扩散有关，在原始滤波器稳定，即 $|\hat{\mathcal{G}}| \leq 1$[3]的情况下，可以说它是反耗散的。诱导出的数值反扩散究竟只是减弱物理扩散的作用，还是会主动引发数值不稳定性，将取决于具体的滤波器系数。后文将会说明，当对物理扩散项应用残差滤波时，响应中具有负值区域的滤波器（即 $\hat{\mathcal{G}} \in [-1, 1]$），例如 Top-hat 核，将产生不稳定算法。重要的是，方程 7 中的 ERE 不包含任何耗散项，因此 RF 过程没有移除可能引入解中的非期望高波数成分的机制。

与解滤波相关的等效修正方程（见方程 8）展示了所诱导机制的又一种组合。它包含一个人工耗散项I，该项体现了衰减，但还包括来自残差滤波的色散项和反扩散项 II 以及 III。乍看之下，这似乎表明解滤波将诱导色散和反扩散效应；然而，这是具有误导性的。正如先前的工作所解释的 [18], , 方程 II 和 III 中的项 8 是由

[2]等效修正方程得出起作用的整体空间算子。这与修正方程分析（见附录 A）不同，后者以偏微分方程的形式考虑了与时间积分方法隐含的耦合效应。[3]请注意，稳定滤波器的滤波系数 ϵ_{2k} 满足：滤波器衰减部分的傅里叶响应为负半定， $\mathcal{F}\{\sum_k \epsilon_{2k}\delta^{2k}\} \leq 0$。将此总和乘以 δ^2 后，便会自动产生反耗散贡献。

表 2：滤波器定义。

滤波	响应（ $\hat{\mathcal{G}}$）	特征波数（k_Δ）
Top-hat	$\hat{\mathcal{G}}_{\mathrm{TH}}(k) = \mathrm{sinc}(\mu_\Delta \cdot k\Delta x)$ 与 $\mu_\Delta = \frac{\Delta}{(2\Delta x)}$	$k_\Delta = \frac{2\pi}{\Delta}$
正切 [26]	$\hat{\mathcal{G}}_{\mathrm{Tan}}(k) = \left[1 + \mu_\Delta \tan^{2R}\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right]^{-1}$ 与 $\mu_\Delta = \frac{1/\hat{\mathcal{G}}(k_\Delta)-1}{\text{正切}^{2R}\left(\frac{k_\Delta \Delta x}{2}\right)}$	$\hat{\mathcal{G}}(k_\Delta) = 0.99$
谱锐化	$\hat{\mathcal{G}}_{\mathrm{sharp}}(k) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } k \le k_\Delta \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$	$k_\Delta = \frac{2\pi}{\Delta}$

将滤波与时间积分结果耦合起来，它们表示对项 *I*衰减效应所引发的次级效应的抵消。请注意，例如，附录?? 中给出的人工耗散修正方程分析揭示了与方程 *II* 和 *III* 中的项 8类似的贡献，但符号相反。因此，解滤波的影响被证实仅具有耗散性，这与预期一致。

2.2 离散滤波模板的特性

上一节阐述了将一般滤波算子应用于残差或解时的理论行为。进一步明确滤波核的形式，可以揭示这些理论行为可能呈现的具体方式。为此，本节重点讨论 Top-hat 滤波器以及 Raymond 提出的隐式正切滤波器 [26]。其响应见表2，其中 k_Δ 为特征截止波数。这两种滤波方案均可转换为以下形式的离散模板

$$\overbrace{a_o\bar{\phi}_i + \sum_{\ell\geq 1} a_\ell(\bar{\phi}_{i+\ell} + \bar{\phi}_{i-\ell})}^{\left[1+\sum_{\ell\geq 1}\epsilon_{2\ell}(\Delta x)^{2\ell}\delta_x^{2\ell}\right]\{\bar{\phi}\}} = \overbrace{b_o\phi_i + \sum_{r\geq 1} b_r(\phi_{i+r} + \phi_{i-r})}^{\left[1+\sum_{r\geq 1}\epsilon_{2r}(\Delta x)^{2r}\delta_x^{2r}\right]\{\phi\}} . \tag{9}$$

对于顶帽滤波器，相应的离散模板系数 b_r 可通过以下步骤求得：首先将滤波定义为卷积，$\bar{\phi}_i = \frac{1}{\Delta}\int_{x_i-\Delta/2}^{x_i+\Delta/2}[\phi(y)]dy$，然后用求积公式近似积分。为简单起见，以下采用复合梯形公式。顶帽滤波器的特征长度（即滤波宽度， Δ）定义了平均窗口，并产生截止波数 $k_\Delta = (2\pi/\Delta)$。

与此同时，切线滤波器的离散形式最容易用$\epsilon_{2\ell/2r}$ 系数来表示。这些系数可通过先将切线响应改写为 $[\sin^2(k\Delta x/2)]$, 的幂次形式，再利用 $\mathcal{F}\{\delta^{2m}\} = [\cos(k\Delta x) - 2]^m = \left[-4\sin^2(k\Delta x/2)\right]^m$这一事实推导得出。与顶帽滤波器不同，切线滤波器在物理空间中没有明确的特征长度。通常，这类离散滤波器改用谱响应来定义，使得 $\hat{\mathcal{G}}(k_\Delta) = 0.5$ [27]。不过，这里我们选择定义 $\hat{\mathcal{G}}(k_\Delta) = 0.99$，以便将已解析模态定义为能够被滤波器良好保留的模态。

图 1 展示了针对不同滤波器与网格比（FGR）调节后的滤波器响应，其定义为 a s

$$FGR = \frac{\pi}{(k_\Delta \Delta x)} . \tag{10}$$

图 1(a) 绘制了顶帽滤波器的精确响应（即 sinc 函数）。请注意，第一个零点位于与滤波器增益比相关的截止波数处， $k_\Delta = \frac{\pi}{(FGR\cdot\Delta x)}$，后续交点出现在 k_Δ 的整数次谐波处。当滤波器增益比为 > 1时，响应呈现负值。滤波的负响应会翻转给定信号的原始幅值——对于正弦基而言，这将被解释为使信号完全移出相位。在下一节中，将展示该响应特性会影响残差滤波方法的稳定性和相位特性。图 1(a) 中还包括与

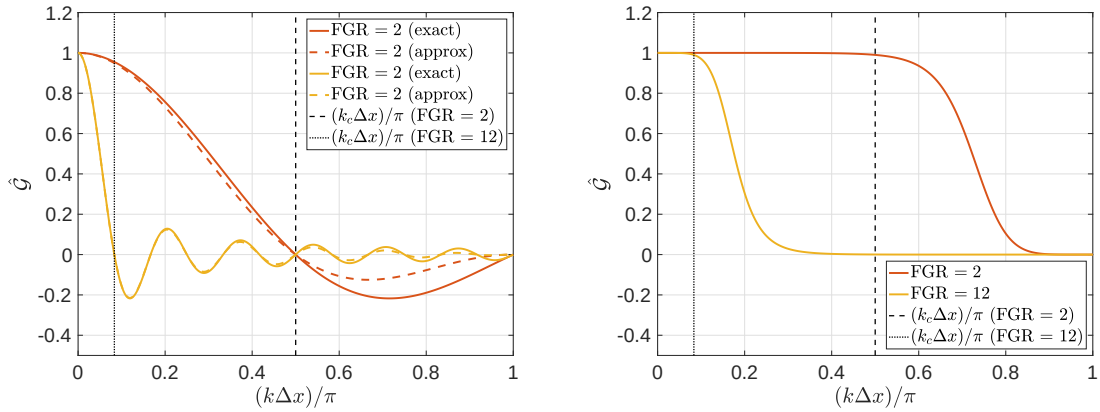


图 1：不同 FGR（记为 k_c）下，增长因子 $\hat{\mathcal{G}}$ 滤波器响应随归一化波数的变化：a）顶帽滤波器；b）六阶正切滤波器。

通过复合梯形求积公式近似顶帽滤波器的卷积积分而得到的离散模板。请注意，该近似在较低波数处复现了精确响应，仅在较高波数处的振幅略有差异；然而，正确的零交叉点得以保留。此后将采用该近似。

与此同时，图1(b) 展示了根据当前 $\hat{\mathcal{G}}(k_\Delta x) = 0.99$ 定义，将六阶正切滤波器调谐至不同 FGR 时的傅里叶响应。与 Top-hat 滤波器相比，我们注意到正切响应是半正定的，且仅在奈奎斯特波数处达到零，($k\Delta x) = \pi$。此外，衰减单调递减，并显示出强烈的尺度分离——这一特性会随模板阶数的提高而增强。

2.3 冯·诺依曼分析

现在根据方程整体离散化的耗散和色散特性，分析滤波器不同实现方式的性能。采用冯·诺依曼分析（VNA），并从半离散常微分方程（ODE）的角度对该过程进行阐释，以突出不同方法之间的基本趋势。

假设解变量采用离散傅里叶表示，

$$u_{i+m} = \sum_k \hat{u}_k \cdot e^{\imath k(x_i+\Delta x_m)} \ , \tag{11}$$

于是，公式2 中的典型线性对流扩散方程被改写为描述每个傅里叶模态演化的半离散形式，

$$\frac{\partial \hat{u}_k}{\partial t} = \underbrace{\left[-a\cdot k_{\text{conv}} + \nu \cdot k_{\text{diff}}\right]}_{\beta_o} \hat{u}_k \ . \tag{12}$$

修正波数 k_{conv} 和 k_{diff}量化了离散差分模板相对于精确微分的影响。例如，对于均匀网格上的对流项和扩散项，显式中心模板得到的修正波数为

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\delta_x u_i = \sum_{r\geq 1} \frac{c_r}{(\Delta x)}(u_{i+r} - u_{i-r})\right\} &\rightarrow \sum_k \hat{u}_k \cdot \overbrace{\left[\sum_{r\geq 1} \imath \cdot \frac{2c_r \sin(rk\Delta x)}{(\Delta x)}\right]}^{k_{\text{conv}}} e^{\imath k x_i} \\
\mathcal{F}\left\{\delta_x^2 u_i = \sum_{r\geq 0} \frac{d_r}{(\Delta x)^2}(u_{i+r} + u_{i-r})\right\} &\rightarrow \sum_k \hat{u}_k \cdot \overbrace{\left[\sum_{r\geq 0} \frac{2d_r \cos(rk\Delta x)}{(\Delta x)^2}\right]}^{k_{\text{diff}}} e^{\imath k x_i}
\end{aligned} \tag{13}$$

and 相对于傅里叶基进行的相应精确解析微分则给出了参考值 es

$$\mathcal{F}\{\partial_x u\} \;\rightarrow\; \sum_k \hat{u}\cdot \overbrace{[\imath\cdot k]}^{k_{\mathrm{conv,ex}}} e^{\imath k x_i} \quad \text{and} \quad \mathcal{F}\{\partial_x^2 u\} \;\rightarrow\; \sum_k \hat{u}\cdot \overbrace{\left[-k^2\right]}^{k_{\mathrm{diff,ex}}} e^{\imath k x_i}\ . \tag{14}$$

考虑方程 12中的半离散化所得到的常微分方程，描述每个模态演化的复值放大因子 $\mathcal{G}(k)$ 为

$$\hat{\mathcal{G}} = |\hat{\mathcal{G}}|e^{\imath\omega} \approx e^{(\beta\Delta t)} \quad \text{such that} \quad \hat{u}^{n+1} = \hat{\mathcal{G}}\cdot\hat{u}^{n}\ . \tag{15}$$

上述结果等价于在系统特征值

β

k + 处求常微分方程特

$\nu\cdot k_{\mathrm{diff}}$ 15 $|\mathcal{G}|$ ω

征多项式的值，而这些特征值又由依赖于波数的参数（例如 $\beta=-a\cdot k_{\mathrm{conv}}()$）确定。在方程 中， 表示该方法的增长因子（即耗散），而 则表征其相位特性（即色散）。假设采用龙格-库塔（RK）时间离散格式，特征多项式定义为 [28]

$$\hat{\mathcal{G}}_{\mathrm{RK}}\left(\beta\Delta t\right) = 1 + (\beta\Delta t)\cdot\mathbf{b}^T\left[I-(\beta\Delta t)\cdot A\right]^{-1}\mathbf{1}\ , \tag{16}$$

其中， $[A,\mathbf{b}]$ 为按 Butcher表形式排列的龙格-库塔系数， $\beta(k)$ 是与半离散系统相关联的特征值。不同滤波实现对应的最终放大因子可简洁地表示为

$$\begin{aligned}
&\underline{\text{Artificial Dissipation (AD)}}: \quad \hat{\mathcal{G}}_{\mathrm{AD}} = \hat{\mathcal{G}}_{\mathrm{RK}}\left(\beta_{\mathrm{o}}\Delta t + \beta_{\mathrm{AD}}\Delta t\right),\ \text{with}\ \beta_{\mathrm{AD}} = \frac{|\lambda'|}{(\Delta x)}\cdot\overbrace{\left[\hat{\mathcal{G}}_{\mathrm{fil}}-1\right]}^{\hat{\mathcal{D}}_{\mathrm{fil}}}\\
&\underline{\text{Residual Filtering (RF)}}: \quad \hat{\mathcal{G}}_{\mathrm{RF}} = \hat{\mathcal{G}}_{\mathrm{RK}}\left(\hat{\mathcal{G}}_{\mathrm{fil}}\cdot(\beta_{\mathrm{o}}\Delta t)\right)\\
&\underline{\text{Solution Filtering (SF)}}: \quad \hat{\mathcal{G}}_{\mathrm{SF}} = \hat{\mathcal{G}}_{\mathrm{fil}}\cdot\hat{\mathcal{G}}_{\mathrm{RK}}\left(\beta_{\mathrm{o}}\Delta t\right)
\end{aligned} \tag{17}$$

请注意，上述表述假定解滤波在每个新的时间步执行一次，而不是在龙格-库塔方法的每个阶段之后执行；后者会更接近人工耗散实现。

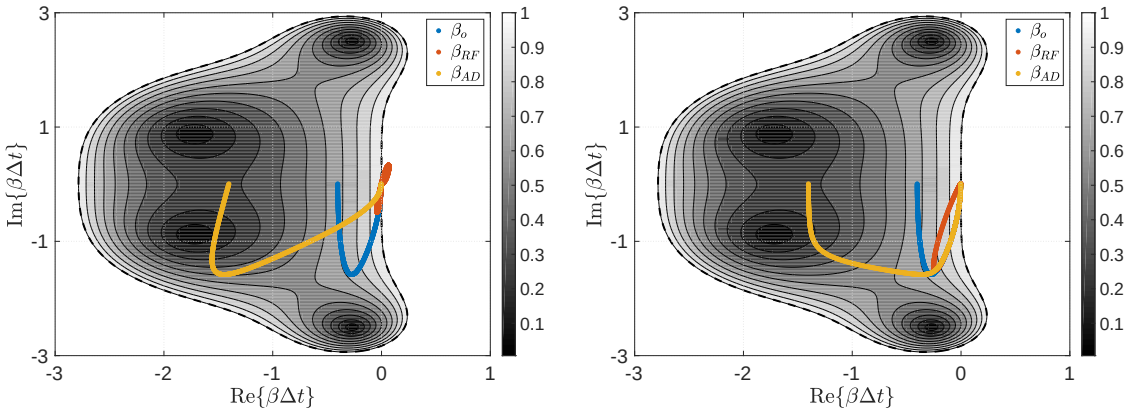


图2：根据不同滤波方法对流-扩散方程进行离散化后得到的半离散特征值散点图。滤波器增益比设为 $=2$（β_o：不进行滤波， β_{RF}：残差滤波，β_{AD}：人工耗散），并绘制在经典四阶龙格-库塔方法的积分方法放大因子幅值（$|\hat{\mathcal{G}}_{RK}|$）上：a）顶帽滤波器；b）六阶正切滤波器。

图 2 展示了线性对流-扩散方程（见公式 12）的傅里叶表示对应的特征值，包括滤波和未滤波两种情况。其中，对对流项采用标准六阶中心离散化，对扩散项采用标准二阶中心模板。中心对流项纯粹具有色散性，因此会使特征值产生虚部；与此同时，扩散项会增加一个稳定的负实部。相对

$\beta_\circ$ 的实部与虚部的大小由数值雷诺数决定——在本例中，该数值雷诺数被设为 $Re_{\Delta x} = (|a|\Delta x)/\nu = 10$ 。与此同时，特征值的谱半径由与 $CFL = (|a|\Delta t)/(\Delta x) = 1$相关联的时间步长表征。考虑了滤波器增益比为 $= 2$ 的 Top-hat 和正切滤波器，并将所得半离散系统的特征值绘制在经典四阶龙格 - 库塔积分方法（$|\mathcal{G}_{\mathrm{RK}}|$）的幅值等值线上，以便更好地突出时间-空间耦合效应。因此，滤波对整体方法的耗散和色散特性的影响得到了充分的语境化——至少对于残差滤波和人工耗散而言（注意：解滤波包含此处未捕捉到的额外后处理效应）。随后，研究由一组复特征值参数化的特征多项式等值线图（即“指纹图”），可进一步深入了解时间步长、离散化方案或滤波方法将如何影响最终的冯·诺依曼分析。

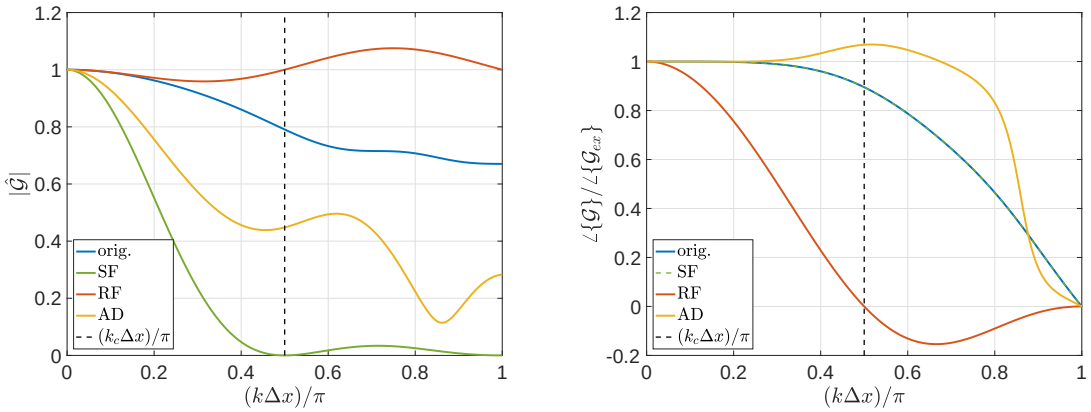
总体而言，人工耗散实现会在原始特征值中加入一个实部，从而增加积分刚性。另一方面，可以看到，残差滤波通常会收缩特征值的分布，这证实了采用残差滤波（也称为残差平滑）来适应更高库朗数上限的做法。同时，由于解滤波具有后处理性质，从这种半离散视角无法对其作出直接评论。

相应滤波函数对特征值的影响也很明显。当前的 Tangent 滤波保留了更多基线特征值，这一特性与以下事实有关：与 Top-hat相比，该特定响应保留了更多内容和特征，并表现出增强的尺度判别阻尼；而 Top-hat会改变原始特征值分布中更大的一部分。同样需要注意的是，使用当前顶帽滤波器进行残差滤波会在系统中引发具有去稳定作用的正实部特征值。这与 Top-hat 滤波器响应函数中的负值部分有关（见图 1(a)），该部分与扩散项相互作用，从而将其转变为反扩散项。

相关的冯·诺依曼分析进一步详细说明了不同整体滤波方法的耗散和色散特性如何随波数变化。稳定性图源自当前半离散特征值与波数之间存在的一一映射（见公式 12）。图 3 和 4分别给出了关于 Top-hat 滤波器和六阶正切滤波器的结果。总体而言，RF 技术会减小阻尼，同时降低相位精度——其程度取决于滤波器响应。与此同时，人工耗散方法会在高波数处增加阻尼，并在一定程度上影响相位行为。后一现象是时空耦合效应导致的，例如，这些效应也会造成中等库朗数下的阻尼呈非单调变化。通过了解滤波如何影响半离散特征值，以及这些特征值如何与积分方法的常微分方程特征相互作用，可以预测 RF 和人工耗散的变化趋势（见图 2）。另一方面，解滤波是一种衰减型后处理方法；可以看到，它保留了基准格式的相位特性，只在基准格式上增加滤波耗散。

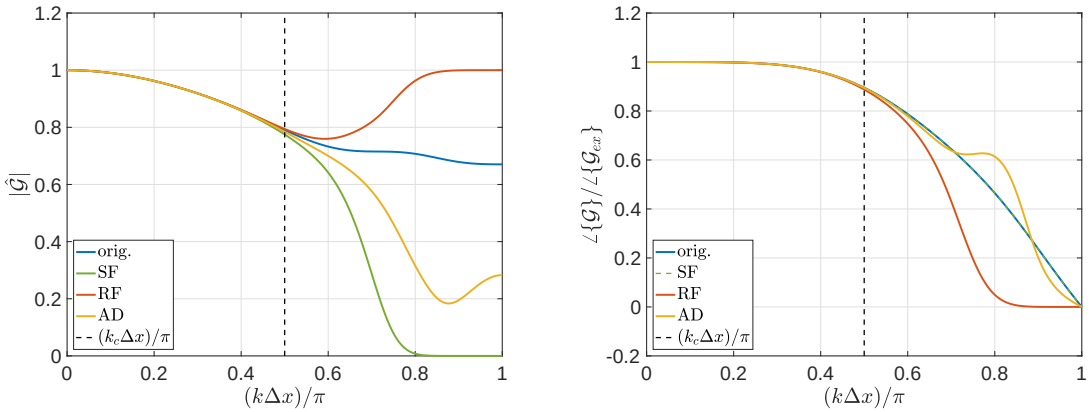
将残差滤波与 Top-hat 滤波器配合使用，会对稳定性和相位精度产生显著影响。当 Top-hat 滤波器采用滤波器增益比 > 1时，其对应的滤波器响应会出现负值（见图 1(a)）。在残差滤波的情况下，这对应于图 β'_{RF} 中的上瓣 2(a)。就耗散而言，可以看到同一模态范围内的增长因子大于 1，因此该方法不稳定（见图 3(a)）。这是因为残差滤波中包含了物理扩散项；因此，一种可能的补救方法是在使用响应为负的滤波器时，将这类项排除在残差滤波程序之外。另一方面，就色散而言，可以看到一系列模态（对应于 Top-hat 滤波器负响应的模态）的相位方向发生了反转（见图 3(b)），这会影响输运精度。此外，零点交叉会在相应波数处导致相位停滞和中性耗散。因此，可以预期谱能量会被困在这些谱位置。Top-hat 滤波器在 k_Δ 及其谐波处存在零点交叉；因此，当滤波器增益比 > 1时，除了奈奎斯特频率之外，多个中间模态处也可能出现谱能量堆积。

总体而言，在滤波器滚降效应显著之前，各种滤波方法的冯·诺伊曼响应都相似；此后，各种实现方式在耗散和色散方面的细微差异便更加明显。这些特性为非线性情形提供了指导，后续章节将通过数值计算对其进行探讨。



(a) (b)

图 3：针对滤波器增益比 $= 2$ （记为 k_c）调优的滤波方案的冯·诺依曼分析，采用顶帽滤波器：a) 增长因子；b) 相位（以精确相位归一化，该精确相位是在假设精确积分且空间上采用傅里叶谱格式的情况下计算的）。



(a) (b)

图 4：针对滤波器增益比 $= 2$ （记为 k_c）调优的滤波方案的冯·诺依曼分析，采用六阶正切滤波器：a) 增长因子；b) 相位（以精确相位归一化，该精确相位是在假设精确积分且空间上采用傅里叶谱格式的情况下计算的）。

3 结果

为了说明不同滤波实现的不同行为，我们在均匀周期域上考虑了若干复杂程度逐渐增加的非线性测试案例。前述线性分析能够恰当地预测滤波实现的行为。通过首先研究一维黏性Burgers方程中的非线性级联，探讨了不同方法的优势与不足。随后，针对二维等熵涡的欧拉计算，进一步关注输运精度和噪声抑制。最后，给出了由三维Navier-Stokes 方程组控制的泰勒–格林涡，以突出耗散和色散特性对瞬态动力学的影响，并研究在滤波器增益比变化时每种滤波方法的表现。在每个案例中，都采用Top-hat 和正切滤波器，以进一步突出其不同响应特性的影响，正如前一节所分析的那样。在以下案例中，AD方法采用 $|\lambda'| = \max\{|u| + c\}$，并在每个新的（$n + 1$）时间步应用 SF过程，同时进行基于CFL 的重新缩放，使得 $|\lambda'| = \min\{\Delta x/\Delta t, \max\{|u| + c\}\}$。

3.1 一维黏性Burgers方程：非线性级联

首先使用一个基于黏性 Burgers 方程的模型问题，突出不同滤波实现之间的一些差异，重点考察它们在实现目标滤波宽度方面的谱特性。Burgers 方程的非线性动力学通过非线性相互作用产生更小的尺度。因此，当前滤波方法旨在将解的谱限制在目标滤波宽度以内，该宽度设定为 FGR $= 12$。

3.1.1 初始化

我们寻求一维黏性 Burgers 方程的解，

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{18}$$

该区域为周期性区域，上述方程采用二阶五级低耗散低色散龙格-库塔（LDDRK）方法进行推进[29, 30]。对流项采用散度形式表示，并使用 Tam 和 Webb 提出的四阶中心七点优化（CD04-7opt）保色散关系（DRP）中心差分格式进行离散[31]。同时，扩散项采用标准四阶中心差分格式。方程以对应于$CFL_{u_o} \approx 0.5$ 的时间步进行积分，从而得到 $\Delta t \approx 5.6 \times 10^{-5}$。初始解通过傅里叶级数指定能量谱 [32]:

$$\begin{aligned} \overbrace{u(t=0,x)}^{u_o} &= 2\sum_{n=0}^{N/2}\left[\Re\{\hat{u}(\kappa_n)\}\cos\left(\frac{2\pi\kappa_n x}{L}\right) + \Im\{\hat{u}(\kappa_n)\}\sin\left(\frac{2\pi\kappa_n x}{L}\right)\right] \\ \text{with} \quad \hat{u}(\kappa) &= \sqrt{2E(\kappa)}e^{\imath 2\pi \mathrm{U}_\kappa},\ E(\kappa) = \left[\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{2\pi\kappa_0}{L}\right)^{-5}\right]\left(\frac{2\pi\kappa}{L}\right)^4 e^{-(\kappa/\kappa_0)^2} \end{aligned} \tag{19}$$

上述内容中，$\kappa = \frac{2L}{2\pi}$ 指的是积分波数。通过从均匀分布中选择 $\mathrm{U}_\kappa \in [0,1]$ 来实现相位随机化。初始条件在波数 $\kappa_0 = 5$处的能谱中出现峰值，这确定了积分长度尺度 $\ell \approx L/\kappa_o$。积分雷诺数设为 $Re_\ell = (L/\kappa_o)$ $\nu \cdot \left(\frac{1}{L}\int u_o^2 dx\right)^{1/2} = 1000$。因此，采用 $N_x = 8192$ 个自由度（DOF）可为黏性尺度提供足够的分辨率，$\eta/\Delta x \approx 4.5$（基于科尔莫哥洛夫湍流标度近似）。然而，所考虑的大滤波器增益比（FGR $= 12$）会产生处于非黏性惯性区间内的分辨率。

3.1.2 结果

图 5 绘制了 $t = 0.0475$时的解谱，该时刻对应于耗散率达到最大值的时刻（即谱处于“最饱满”状态，尚未开始衰减）。因此，可以根据不同滤波方法的阻尼特性对其性能进行比较。总体而言，解滤波的耗散作用最强，其次是人工耗散，最后是残差滤波。不同实现中，这种衰减对滤波尺度以上尺度的影响程度，取决于所用滤波器的尺度判别性。例如，使用 Top-hat 滤波器时，残差滤波、解滤波和人工耗散之间的差异十分显著；而使用具有尺度判别性的 Tangent 滤波器时，这些差异则不那么明显。

滤波器在谱空间中的尺度判别性作用在图 5(c)中得到进一步凸显，该图展示了采用谱锐截止滤波器时的结果。在这种情况下，相关解在目标滤波宽度处的急剧下降方面几乎完全相同，并且仅在亚滤波尺度上表现出轻微差异。残差滤波和不进行CFL重标度的解滤波（SF-nr）与该锐滤波器配对时会产生相同的结果。然而，每种方法仍然各不相同，并且会根据初始条件的选择、噪声的引入、时间步长等因素产生不同的响应。[4]

我们注意到，在使用响应平滑的滤波器时，RF实现往往会允许尺度超过目标截止值 k_Δ。滤波器响应在规定截止值之外具有有限幅度。

[4]为了通过残差滤波与解滤波（SF-nr）获得相同的结果，需要采用一种谱锐化滤波器，并将其滤波宽度设置在方程的混叠极限以下（即强制执行去混叠计算）；此外，初始条件还需要包含在规定的滤波宽度内，并且不应引入其他伪噪声（例如来自边界、混叠等的噪声），因为这些方法对这类误差的响应不同 [33]。

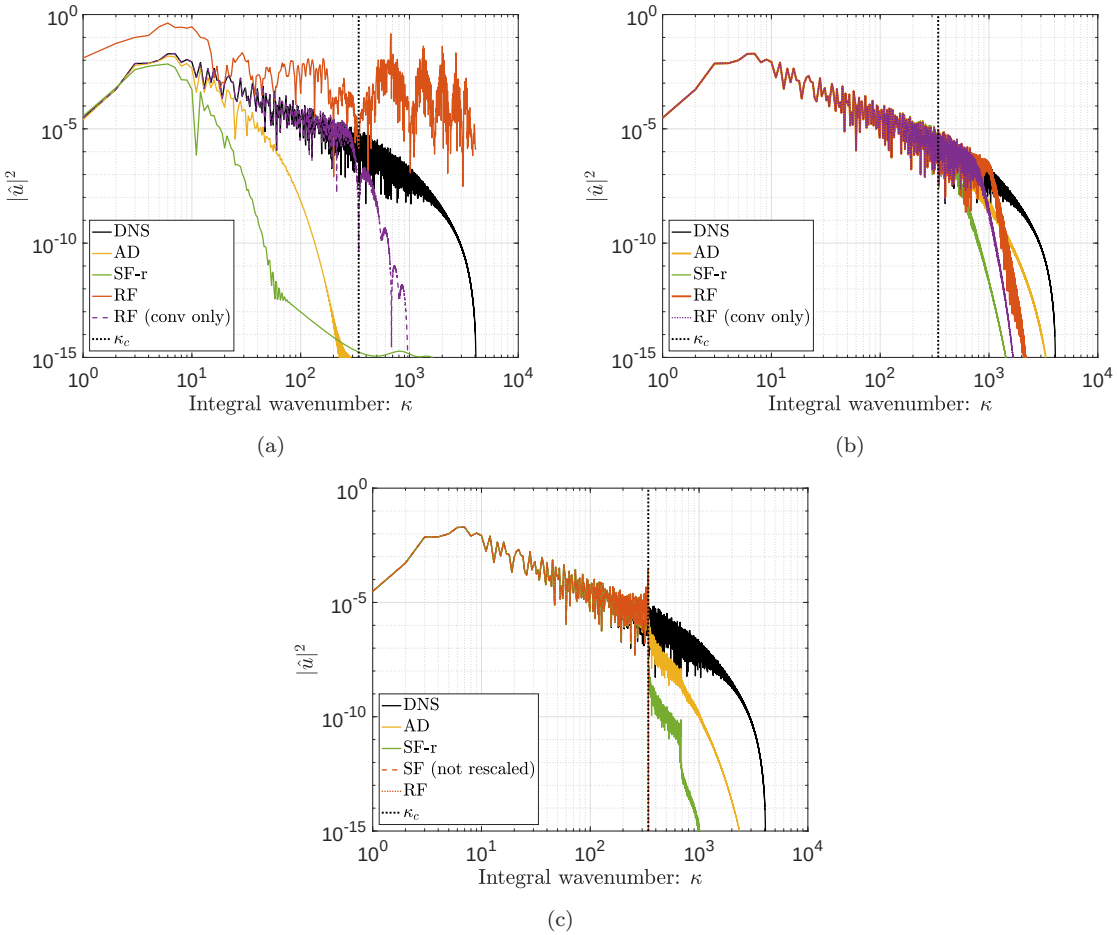


图5：解 $\widehat{|u|^2}$ 的功率谱密度，对应于 $t = 0.0475$（接近耗散率峰值）的“湍流”Burgers测试案例，将针对 FGR $= 12$ （记为κ_c）调谐的不同滤波实现与完整 DNS 分辨率进行比较：a) 顶帽滤波器，b) 六阶正切滤波器，以及 c) 谱锐滤波器。

允许这种小尺度内容。如前所述，残差滤波没有主动耗散机制，因此无法阻尼残留的高波数分量。当黏性项包含在残差滤波中时，物理扩散的影响会进一步减弱，从而允许小尺度内容更多地累积。在Top-hat 滤波器的情况下——该滤波器在一定范围的波数上呈现负响应（见图

3.2 二维欧拉方程：等熵涡旋

接下来，将评估滤波技术在缓解数值误差方面的性能。对于当前以输运为主的等熵涡旋算例，考虑可压缩欧拉方程（见方程20，忽略黏性项，$\mathbf{E}_j^{(v)}$），并假设气体为热完全理想气体。初始密度分布的输运是控制无黏方程的精确解；然而，数值扰动可能触发谱内容的非线性级联，导致涡旋破碎。因此，将考察各滤波公式在缓解此类数值误差效应表现方面的作用，以及维持涡旋相干性和输运能力的表现。

$$\underbrace{\partial_t \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ \rho e_o \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} = -\partial_{x_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \rho u_j \\ \rho u_j u_i \\ \rho u_j e_o \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_j^{(c)}} - \partial_{x_j} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ P\delta_{ij} \\ P u_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_j^{(p)}} + \partial_{x_j} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{ij} \\ \tau_{jk}u_k + q_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_j^{(v)}} = \mathcal{R}_o \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &P = \rho RT, \quad \rho e_o = \tfrac{P}{\gamma - 1} + \tfrac{1}{2}\rho u_i u_i, \quad \tau_{ij} = \overbrace{\mu \cdot \left(\partial_{x_j} u_i + \partial_{x_i} u_j\right)}^{2S_{ij}} - \tfrac{2}{3}\mu\ \delta_{ij} \cdot \partial_{x_k} u_k, \\ &\gamma = c_p/c_v, \quad R = c_p - c_v, \qquad\qquad q_i = \kappa \cdot \partial_{x_i} T \end{aligned} \tag{21}$$

3.2.1 初始化

涡旋通过向均匀背景流施加速度和温度扰动进行初始化，

$$\begin{aligned} \delta u &= -\sqrt{R_\infty T_\infty}\left(\tfrac{\alpha}{2\pi}\right)(y - y_o)e^{\phi(1-r^2)} \\ \delta v &= \sqrt{R_\infty T_\infty}\left(\tfrac{\alpha}{2\pi}\right)(x - x_o)e^{\phi(1-r^2)} \\ \delta T &= -T_\infty \left[\tfrac{\alpha^2(\gamma-1)}{16\phi\gamma\pi^2}\right] e^{2\phi(1-r^2)} \end{aligned} \tag{22}$$

其中，半径 $r^2 = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2$, 是围绕原点 (x_o, y_o) 定义的。此处，涡旋叠加在背景流 Q_∞上初始化，该背景流仅在 x方向上具有速度（即$v_\infty = w_\infty = 0$）：

$$\rho u_\infty = 200.0\ \left[\tfrac{kg}{m^2 \cdot s}\right], \quad \rho_\infty = 1.0\ \left[\tfrac{kg}{m^3}\right], \quad \rho e_{o,\infty} = 305714.3\ \left[\tfrac{kg}{m \cdot s^2}\right] \tag{23}$$

随后，采用等熵关系 $P = P_\infty(T/T_\infty)^{\gamma/(\gamma-1)}$，并结合理想气体定律，以补全热力学参数。考虑一个周期性区域，并在方程 $\alpha = 4$和 $\phi = 1$ 中选取参数 22 ，从而产生 $\sim 45\%$ 的密度扰动，且涡旋直径约为 $2.1\ [m]$ （涡旋直径根据 $\delta T/T_\infty = 0.001$确定）。以下结果采用四阶 DRP 优化模板（CD04-7opt）计算一阶导数，并对密度、动量和总能量中的各输运项采用 Feiereisen 的二次分裂 *et al.* [34] ：

$$\partial_{x_j}\rho u_j \psi \approx \frac{1}{2} \cdot \delta_{x_j}\rho u_j \psi + \frac{1}{2} \cdot \left(\rho u_j \delta_{x_j}\psi + \psi \delta_{x_j}\rho u_j\right)\ . \tag{24}$$

对流分裂减轻了混叠效应[4, 35] ，并满足次级守恒性质[36]。时间积分采用经典四阶龙格–库塔法。在所考虑的所有网格上，各种滤波方法均针对每波 4 个点（PPW）的分辨率进行调节（即 $k_c\Delta x = 0.5\pi$），具体依据 Top-hat 和六阶正切滤波器各自的截止定义。

3.2.2 结果

图 6 展示了不同滤波实现与相应滤波器配对后的收敛图。数据是在周期性区域中传播了两个涡旋宽度后计算的，该区域长度为 $L = 2.1\ [m]$ （即两个涡旋宽度），时间步长为 $\Delta t = 4.2 \times 10^{-6}\ [s]$ ——这对应于 $CFL_{u_\infty,\ 1D} \approx 0.016$在最细网格上，因此对于所考虑的所有分辨率，时间效应都可以忽略，并且可以预期 SF-r 与 AD 结果之间具有一致性（正如所观察到的那样）。对于顶帽核的情况（见图 6(a)），相对于该问题的谱特征，该滤波器的耗散性过强，因此会产生随着网格加密仍持续存在的大误差。与 RF 相比，这一问题在 SF-r/AD 滤波实现中更为普遍。另一方面，图 6(b)显示，采用当前正切模板的滤波通常能够减少数值误差。在这里，SF-r/AD 实现的表现优于 RF 实现，后者会引入更多高波数噪声和相位误差。

图 7 显示了在一个 $L = 21\ [m]$ 点的周期性方形域上经过四十个涡旋宽度传播后，使用切线滤波计算得到的密度解和速度谱 $N = 60^2$ 个点（即涡旋宽度方向上有10 个点）。可以注意到，与未滤波解相比，滤波通常会减弱小尺度的存在。然而，值得注意的是，残差滤波解落后于其预期

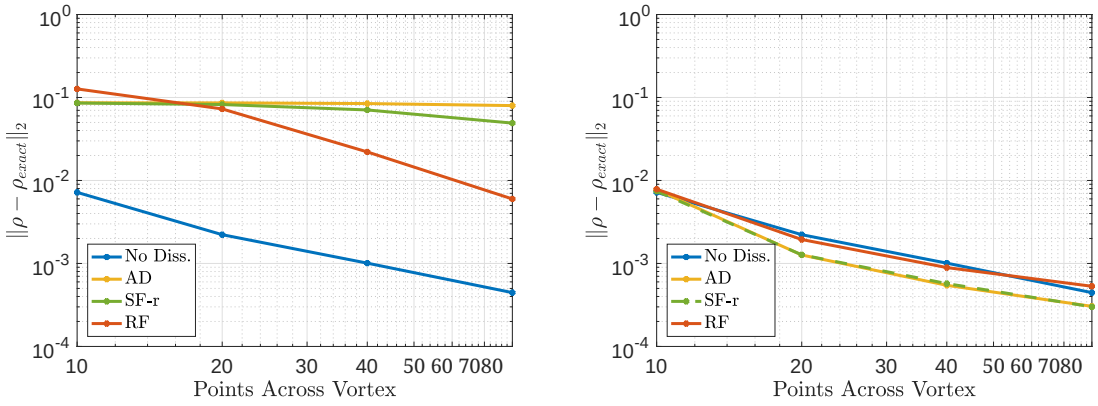


图 6：密度解在传播两个涡旋宽度后，采用针对 $(k_c\Delta x) = 0.5\pi$ 调节的不同滤波方法时的收敛情况：a) 顶帽滤波器；b) 六阶正切滤波器。

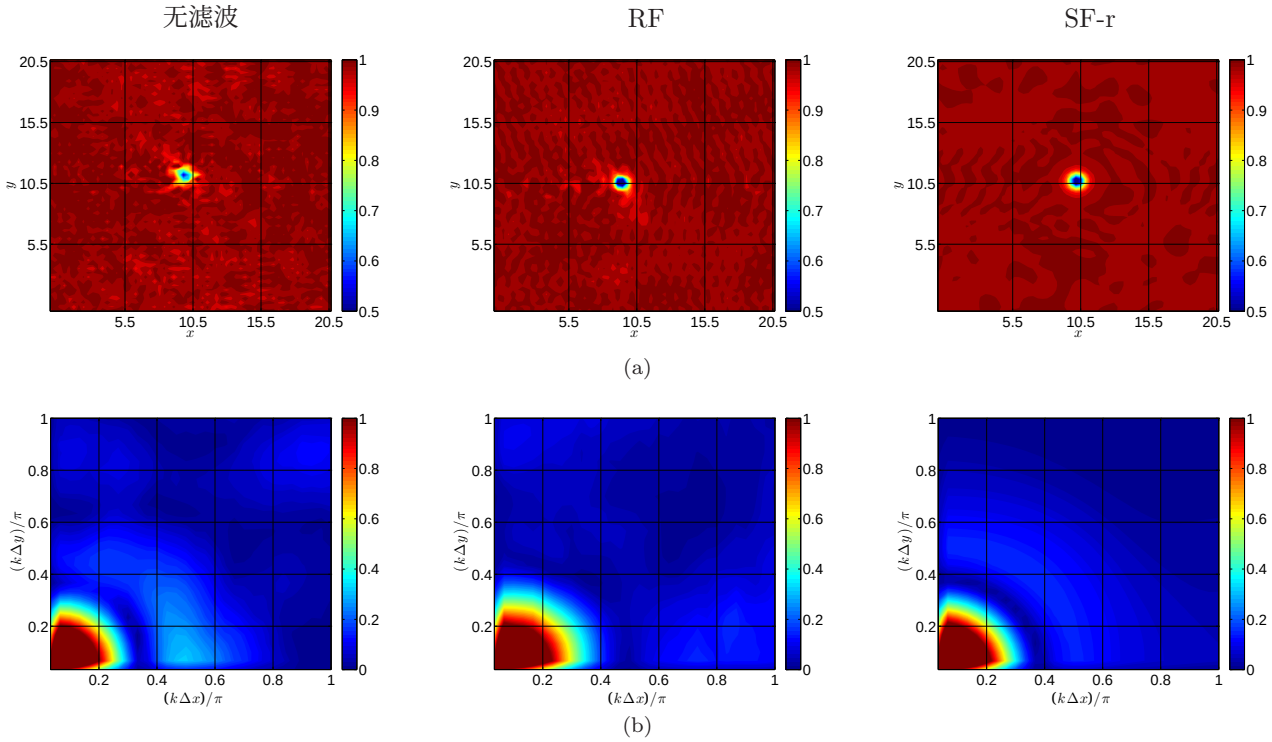


图7：采用六阶正切滤波器及不同滤波方法后，经过四十个涡旋宽度的传播，在正方形 $N = 60^2$ 网格上的解：a）密度解；b）速度扰动的归一化二维能谱。

位置，并已开始积累高波数成分——这是由于其缺乏阻尼机制，以及相对于欧拉系统所表现出的色散特性所导致的。尽管当前观测结果特定于所采用的案例和方法，但它们印证了前几节的理论分析，并突显了滤波器特性（例如尺度判别衰减）相对于不同滤波方法的潜在影响。

3.3 三维纳维–斯托克斯方程：泰勒–格林涡（Re = 1600）

现考虑由三维纳维–斯托克斯方程组控制的三维可压缩泰勒–格林涡（TGV）问题（见公式 20），旨在评估不同滤波方法在细化网格时的有效性。TGV 是一种非定常涡，其特征是大尺度扰动向小尺度结构传递，随后最终衰减。因此，该测试案例可作为此前黏性伯格斯方程示例的更复杂且更具相关性的类比。

通过分析体积平均动能（E_k）、其相对于时间的变化率（ϵ_{E_k}）以及黏性耗散（$\epsilon_{S_{ij}}$），可以对流动进行定量表征：

$$E_k = \frac{1}{\rho_0 \Omega}\int_\Omega \rho \frac{u_i u_i}{2} d\Omega, \quad \epsilon_{E_k} = -d_t E_k, \quad \epsilon_{S_{ij}} = \frac{2\mu}{\rho_0 \Omega}\int_\Omega S_{ij} S_{ij}\ d\Omega \tag{25}$$

尽管 ϵ_{E_k} 表征了总体动能耗散，$\epsilon_{S_{ij}}$ 表示由黏性项引起的耗散，也可作为小尺度活动量的实用度量。在具有足够空间分辨率的情况下（并假设可压缩性效应较小，使得 $\partial_{x_i} u_i \approx 0$），可以得到 $\epsilon_{E_k} \approx \epsilon_{S_{ij}}$这一解析结果，正如动能演化方程所示：

$$\frac{1}{2}\partial_t(\rho u_i u_i) = u_i \partial_t(\rho u_i) - \frac{1}{2}u_i^2 \partial_t \rho = -\frac{1}{2}\partial_{x_j}\rho u_j u_i u_i - u_i \partial_{x_i} P + u_i \partial_{x_j}\tau_{ij}\ . \tag{26}$$

然而，对于欠分辨网格，两种度量之间可能存在差异，这可解释为数值方法所引发的隐含非线性效应 [37]，

$$\epsilon_{\text{num}} = (\epsilon_{E_K} - \epsilon_{S_{ij}})\ . \tag{27}$$

本研究刻画了由离散化主方程推导出的方程离散形式中残留的数值诱导效应 26。

3.3.1 滤波实现对动能耗散率的影响

为更好地理解各滤波方法的行为，可以分别写出 ϵ_{num} 的显式形式。为此，我们将 $\mathcal{R}_{\text{o, ex}}$ 视为由精度最高的高阶方法离散得到的原始残差，该方法相对于可用网格分辨率具有最大精度（即“精确”参考值）。然后，$\mathcal{R}'$ 表示与各滤波方法相关的修正残差。因此，主方程中的数值误差会在动能方程中表现为 ϵ_{num}，其中

$$\epsilon_{\text{num}} = \int_\Omega \left[u_i\left(\mathcal{R}'^{(\rho u_i)} - \mathcal{R}_{\text{o,ex}}^{(\rho u_i)}\right) - \frac{1}{2}u_i^2\left(\mathcal{R}'^{(\rho)} - \mathcal{R}_{\text{o,ex}}^{(\rho)}\right)\right] d\Omega, \quad \text{with} \begin{cases} \mathcal{R}'_{\text{AD}} &= \mathcal{R}_{\text{o}} + \mathcal{D}_{\text{fil}}(Q) \\ \mathcal{R}'_{\text{RF}} &= \mathcal{G}_{\text{fil}}\mathcal{R}_{\text{o}} \end{cases} \tag{28}$$

请注意，为简化本文的阐述，解滤波的修正残差被视为人工耗散的极限情形（即 $\lim_{\Delta t\to 0}\mathcal{R}'_{SF} = \mathcal{R}'_{\text{AD}}$）。将截断误差定义为

$$\mathcal{E}_{\text{trunc}} = \mathcal{R}_{\text{o}} - \mathcal{R}_{\text{o,ex}}\ , \tag{29}$$

那么，各种滤波程序对动能演化的数值贡献可表示为

$$\epsilon_{\text{num,AD}} = \int_\Omega \left[\left(u_i \mathcal{E}_{\text{trunc}}^{(\rho u_i)} - \frac{1}{2}u_i^2 \mathcal{E}_{\text{trunc}}^{(\rho)}\right) + \left(u_i \mathcal{D}_{\text{fil}}\rho u_i - \frac{1}{2}u_i^2 \mathcal{D}_{\text{fil}}\rho\right)\right] d\Omega \tag{30}$$

$$\epsilon_{\text{num,RF}} = \int_\Omega \left[\left(u_i \mathcal{E}_{\text{trunc}}^{(\rho u_i)} - \frac{1}{2}u_i^2 \mathcal{E}_{\text{trunc}}^{(\rho)}\right) + \left(u_i \mathcal{D}_{\text{fil}}\mathcal{R}_{\text{o}}^{(\rho u_i)} - \frac{1}{2}u_i^2 \mathcal{D}_{\text{fil}}\mathcal{R}_{\text{o}}^{(\rho)}\right)\right] d\Omega \tag{31}$$

离散误差 $\mathcal{E}_{\text{trunc}}$会对每种滤波方法的动能平衡产生影响。对于人工耗散（因此，稍作推广也适用于重新缩放的解滤波），与滤波相关的项主要起稳定化汇项的作用，其影响随滤波衰减幅度的增大而增强。与此同时，ϵ_{num} 中残差滤波相关的项则具有很强的不确定性。进一步将恒等式 $\mathcal{R}_o = (\mathcal{R}_{\text{o, ex}} + \mathcal{E}_{\text{trunc}})$ 和 $\mathcal{G}_{\text{fil}} = (I + \mathcal{D}_{\text{fil}})$ 代入方程31 可得

$$\epsilon_{\text{num,RF}} = \int_\Omega \left[\left(u_i \mathcal{G}_{\text{fil}}\mathcal{E}_{\text{trunc}}^{(\rho u_i)} - \frac{1}{2}u_i^2 \mathcal{G}_{\text{fil}}\mathcal{E}_{\text{trunc}}^{(\rho)}\right) + \left(u_i \mathcal{D}_{\text{fil}}\mathcal{R}_{\text{o,ex}}^{(\rho u_i)} - \frac{1}{2}u_i^2 \mathcal{D}_{\text{fil}}\mathcal{R}_{\text{o,ex}}^{(\rho)}\right)\right] d\Omega\ , \tag{32}$$

这为理解残差滤波提供了一些额外见解。这表明，恰当选择滤波器可以恢复 $\mathcal{G}_{\text{fil}}\mathcal{E}_{\text{trunc}} \approx 0$ ，并消除基准方法中数值误差的影响。为此，必须根据离散化方案的分辨率和混叠特性（即数值误差），对滤波器进行适当调节（即调整截止频率和谱锐度）。残留误差随后与残差滤波的色散效应相关，主要取决于滤波器的选择和小尺度内容的多少。上述观察揭示了各滤波方法之间微妙的非线性差异；此处通过纳维–斯托克斯方程的动能演化 [5]来加以表述。

3.3.2 初始化

泰勒-格林涡旋的初始条件以基础流动上的扰动形式给出，该流动位于三重周期性区域中， $-\pi L \leq x, y, x \leq \pi L$:

$$\begin{aligned} \delta u &= V_0 \sin\left(\tfrac{x}{L}\right) \cos\left(\tfrac{y}{L}\right) \cos\left(\tfrac{z}{L}\right) \\ \delta v &= -V_0 \cos\left(\tfrac{x}{L}\right) \sin\left(\tfrac{y}{L}\right) \cos\left(\tfrac{z}{L}\right) \\ \delta P &= \tfrac{\rho_\infty V_0^2}{16} \left[\cos\left(\tfrac{2x}{L}\right) + \cos\left(\tfrac{2y}{L}\right)\right] \left[\cos\left(\tfrac{2z}{L}\right) + 2\right] \end{aligned} \tag{33}$$

该问题进一步由以下无量纲参数规定:

$$Re = (\rho_\infty V_0 L)/\mu = 1600, \quad M_0 = (V_0/c_0) = 0.1, \quad Pr = (\mu c_p)/\kappa = 0.71, \quad \gamma = c_p/c_v = 1.4 \tag{34}$$

以下计算对粘性项采用二阶模板，对流项采用优化格式 CD04-7opt，并按照方程 24进行二次分裂。时间积分采用经典四阶龙格–库塔法，时间步长为 $\Delta t = t_c/10^4$，其中 $t_c = L/V_o$ 为特征时间尺度。相对于参考网格（$N = 512^3$），这得到$CFL_{V_o,\ 1D} \approx 0.01$。因此，时间效应极小，人工耗散与 SF-r 方法之间的差异可以忽略不计，故下文不再报告人工耗散结果。需要注意的是，本文未采用亚滤波尺度闭合建模，当前重点是滤波实现的行为，即如何强制达到目标滤波宽度并减少数值效应。

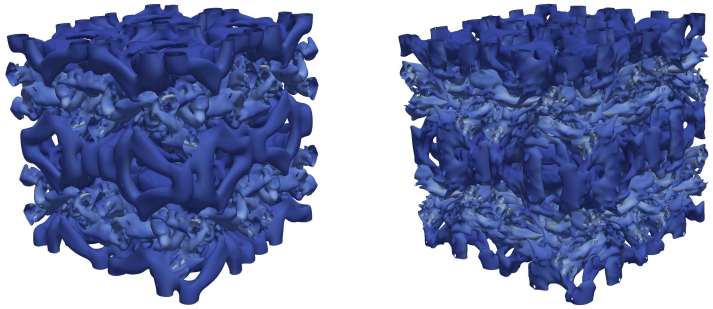
在下文中，采用顶帽滤波器和正切滤波器，并根据各自的截止定义施加有效分辨率 $N = 64^3$ 。然而，对于当前的分辨率和滤波宽度，若与 SF-r/人工耗散结合使用，顶帽滤波器会造成过强的耗散。这会抑制初始扰动（即流动会迅速“层流化”，并弛豫至背景状态）。因此，我们省略了采用 SF-r/人工耗散与顶帽滤波器得到的结果。此外，当前的残差滤波实现中，在顶帽滤波器和正切滤波器两种情况下，均未将扩散项 $\partial_{x_j}\mathrm{E}_j^{(v)}$ 纳入残差滤波。如前所述并已展示，这一修改对于 RF 顶帽方法的数值稳定性是必要的；为使结果保持一致，RF 正切方法也采用了类似的实现。

3.3.3 结果

图 8 和 9 分别展示了Top-hat 和正切滤波器下RF 和SF-r 计算结果的涡量体积图。这些结果与在给定时间瞬间进行滤波的参考解进行了比较。可以看出，与所提供的滤波参考解相比，RF包含了更小的结构，而SF则产生了更粗的有效分辨率。这再次表明，RF往往会低估预期的滤波宽度，而 SF-r/人工耗散则往往会过度补偿该滤波宽度。图 10 进一步证实了相对于各解的速度谱而言的这些趋势。RF 中缺乏主动衰减机制，因此在预期截止之后仍保留了大量内容——与尺度判别的正切滤波器相比，Top-hat 滤波器的这一现象更为明显。与此同时，与目标解相比，SF-r 计算结果表现出过强的耗散性。

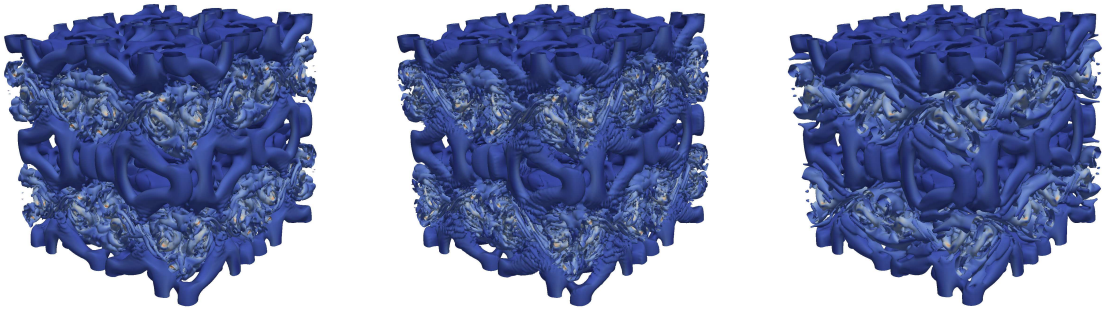
图 11 展示了通过残差滤波应用的顶帽滤波器在有效截止分辨率为 $N = 64^3$时的不同动能耗散指标。图 $\epsilon_{S_{ij}}$ 中的基于应变的指标 11(a)表明了小尺度活动，该指标证实滤波会阻碍高波数成分的生成。残差滤波方法在网格细化时表现一致，同时保持相同的

[5]请注意，当使用动能保持（KEP）格式[38, 36, 39, 40] 例如当前的方程拆分24时，方程 30 和31 中的首项为零，$\int_\Omega \left[\left(u_i \mathcal{E}^{(\rho u_i)}{}_{\text{截断}} - \frac{1}{2}u_i^2 \mathcal{E}^{(\rho)}{}_{\text{截断}}\right)\right] d\Omega$。



(a) 瞬时滤波参考解，Top-hat　　(b) Top-hat +残差滤波

图 8：正 Q判据等值面 [41]（按涡量大小着色），显示于涡结构破碎期间（$t = 9t_c$），对应于 $N = 192^3$ 采用顶帽滤波器且网格分辨率为 $N = 64^3$ 的解：a) 瞬时滤波参考解；b) 残差滤波。注：未显示 Top-hat 解滤波结果，因为其耗散过强，会迅速使流动层流化。

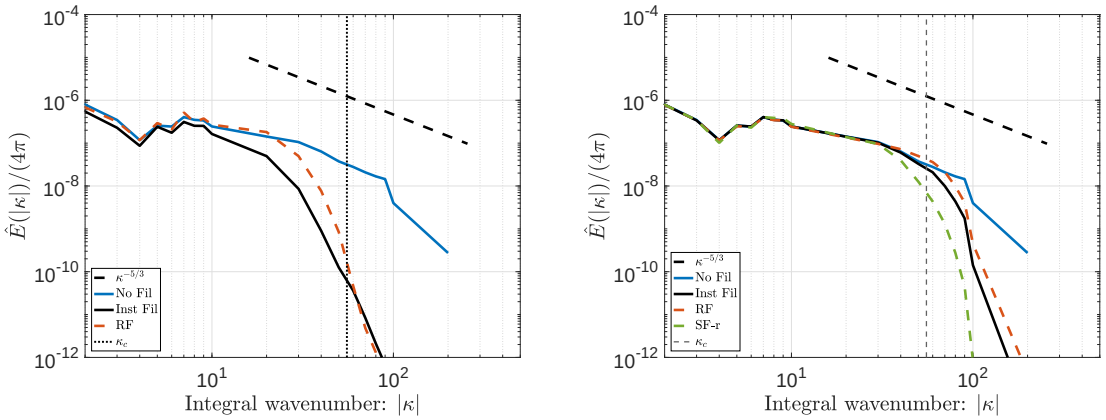


(a) 瞬时滤波参考解，Tan06　　(b) Tan06 + 残差滤波　　(c) Tan06 +SF-r

图 9：涡结构破碎期间（$t = 9t_c$） 192^3 解的正 Q判据等值面 [41]（按涡量大小着色），采用针对 64^3 分辨率调校的六阶正切滤波器：a）瞬时滤波参考解，b）残差滤波，c）时间一致性解滤波。

物理滤波宽度。通过 ϵ_{num} 图 11(b) 中的指标检查数值效应（例如离散误差、滤波诱导贡献）对耗散率的贡献表明，即使进行网格细化，解的动力学仍由低阶 Top-hat 响应主导。换言之，$\epsilon_{num,\ RF}$ 方程 32 中的项仍然相当显著，这归因于 Top-hat 滤波器衰减的形式，$\mathcal{D}_{\text{fil}}$，该衰减在谱空间中非常宽泛，且无法区分尺度。在将大涡模拟闭合模型与此类公式结合时，应将这些特征纳入考虑。总体而言，Top-hat 残差滤波方法强烈地平滑了原始动力学，这是由于滤波器响应会影响很大的尺度范围，正如理论分析所预期的那样。这会导致级联过程减慢。图 11(c) 绘制了总动能耗散率 ϵ_{E_k}，并显示峰值出现轻微延迟，且由于能量向亚滤波尺度传输得更慢，峰值幅度也有所降低。

图 12 给出了与 RF 配合使用的切线滤波器的动能耗散率指标。$\epsilon_{S_{ij}}$ 图 12(a) 中的指标证实，所选调节参数仅轻微降低了相较于参考解的小尺度活动。与此同时，耗散动力学中的数值伪影影响得到有效抑制，并随着网格加密而减弱，如 ϵ_{num} 图 12(b)所示。因此，可以认为衰减经过了适当调节，且具有足够的尺度区分能力，从而确保 $\epsilon_{num,\ RF}$ 在方程 32 中按照离散化的截断误差足够快地减小——这也凸显了将高精度滤波器与高阶方法配合使用的重要性。有趣的是，总耗散率与参考结果吻合良好



(a) 顶帽滤波器　　(b) Tan06

图 10：涡结构破碎过程中 $N = 192^3$ 解的湍流动能谱（$t = 9t_c$），比较未滤波参考结果与瞬时滤波参考结果，并将滤波方法调整至有效分辨率 $N = 64^3$，对应的截止波数为 κ_c：a) 顶帽滤波器；b) 六阶正切滤波器。

解（参见 ϵ_{E_k} 图 12(c)），尽管没有显式的大涡模拟模型。

图 13 包含了采用解滤波的切向滤波器的动能耗散率指标。不同于残差滤波的结果，可以看到，SF-r 方法施加的主动正则化根据 $\epsilon_{S_{ij}}$ 在图 13(a)中所示，减少了小尺度活动。同时，通过 ϵ_{num} 在图 13(b) 检查数值效应导致的耗散率表明，随着网格加密，其影响不断增强。这与动能方程中的滤波器诱导项直接相关（见 $\epsilon_{num,\ AD/SF}$ 在方程 30中），这些项的影响基本上是半定的，并且其幅值随着 $\mathcal{D}_{\text{fil}}$而增加。事实上，正则化衰减的影响会随着网格加密而增强，因为有效滤波器-网格比也随之增加。解滤波的这种表现从根本上不同于残差滤波；然而，可以看到，即使缺乏显式的大涡模拟模型，它仍能在 ϵ_{E_k} 图 12(c)中再现正确的总体耗散率。

3.4 从大涡模拟的角度进行分析

Taylor–Green 涡旋测试案例的非线性类湍流设置，揭示了滤波实现及其滤波器配对之间的重要差异，例如在保持滤波宽度不变的情况下，网格加密时呈现出不同的行为。相对于小尺度活动的存在（通过 $\epsilon_{S_{ij}}$ 表示）以及滤波器引入的项对动能平衡的影响（通过 ϵ_{num} 表示）所观察到的趋势，表明不同滤波方法之间存在根本差异。因此，各种方法可能需要采用不同的显式大涡模拟闭合模型配对策略。

事实上，滤波方法的一个重要应用场景，是通过大涡模拟（LES）研究非定常湍流；与成本高昂的直接数值模拟（DNS）相比，这是一种更易实现的替代方案。由于大涡模拟中网格尺度上的解具有动态活性（即呈现非平凡的谱能量），高波数处更为显著的离散化误差和混叠误差会影响整体计算的精度。例如，数值误差可能会掩盖封闭模型的贡献[3, 2] 并使模型性能产生偏差，而模型性能通常取决于小尺度信息。值得注意的是，在给定网格上直接离散大涡模拟方程，意味着引入了一个数值滤波器 [42] 其性质在实践中无法通过建模直接识别并加以考虑。在这类 *implicitly-filtered* 大涡模拟（IF-LES）方法中，隐式定义的滤波器与封闭模型之间的紧密耦合，可能会导致在给定网格分辨率下出现误差的虚假抵消 [43] 进而阻碍结果稳定地趋近于与网格无关的解，除非采用不切实际的 DNS 分辨率。对大涡模拟控制方程显式施加预先设定的滤波核，试图通过使用已知且独立于网格间距的滤波宽度来分离已解析尺度和未解析尺度，从而解决这些问题。因此，这类 *explicitly-filtered* 大涡模拟（EF-LES）形式引入了用户定义的分辨率尺度，可在网格加密时保持固定，进而能够消除数值近似（例如离散化和混叠）所造成的伪影

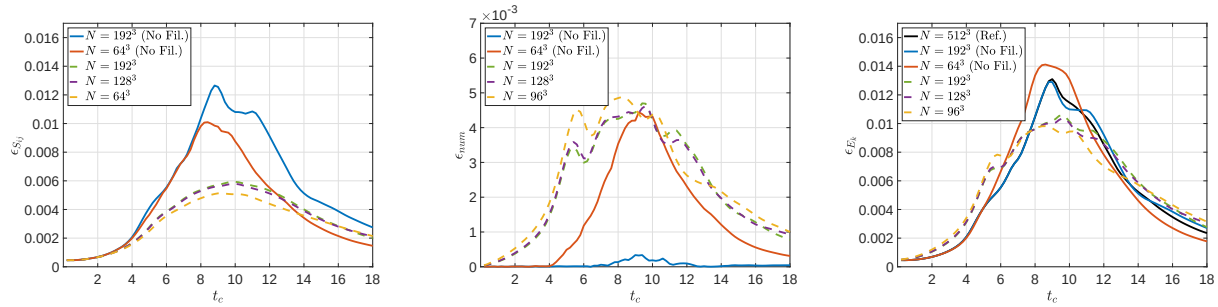


图11：采用调节至a$N = 64^3$截止的残差滤波（残差滤波）的顶帽滤波器的动能耗散率：a) $\epsilon_{S_{ij}}$、b) $|\epsilon_{\text{num}}| = |\epsilon_{E_K} - \epsilon_{S_{ij}}|$和 c) $\epsilon_{E_k} = -d_t E_k$。

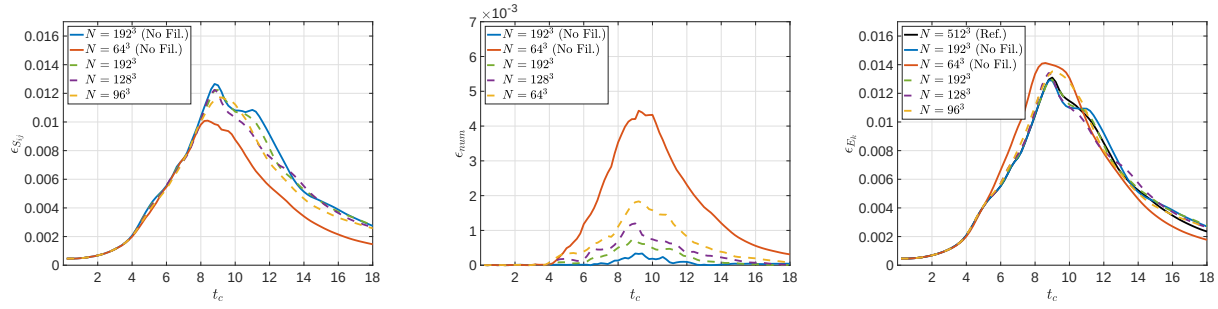


图12：六阶正切滤波器在残差滤波（RF）下的动能耗散率，其调节至 $N = 64^3$截止：a) $\epsilon_{S_{ij}}$，b) $|\epsilon_{\text{num}}| = |\epsilon_{E_K} - \epsilon_{S_{ij}}|$和 c) $\epsilon_{E_k} = -d_t E_k$。

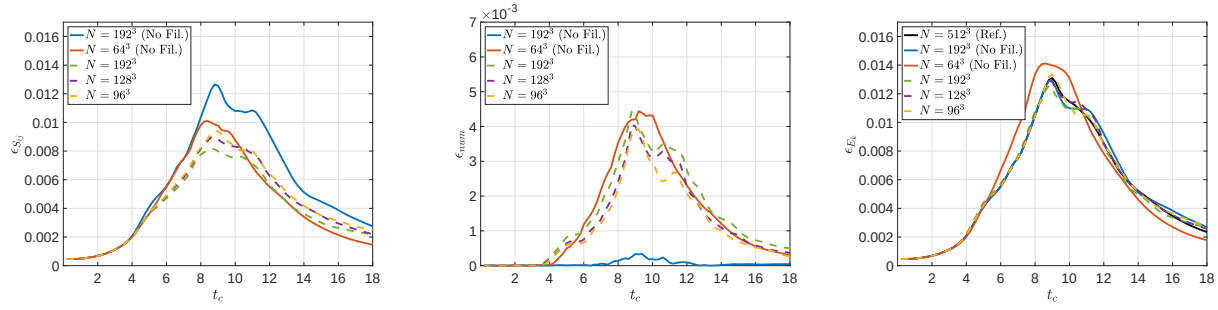


图13：针对 $N = 64^3$ 截止进行调节的六阶正切滤波器在采用时间一致的重缩放解滤波（SF-r）时的动能耗散率：a) $\epsilon_{S_{ij}}$，b) $|\epsilon_{\text{num}}| = |\epsilon_{E_K} - \epsilon_{S_{ij}}|$ 和 c) $\epsilon_{E_k} = -d_t E_k$。

误差），从解中系统地消除[44, 45, 46, 47, 48]。由于数值误差的影响不再与结果混为一谈，这便为开展客观的封闭模型评估提供了适宜的环境。残差滤波和解滤波方法均已应用于显式滤波大涡模拟的实现中——前者（RF）侧重于确保解的谱支撑（即目标滤波宽度分辨率）[49]，，后者（SF）则更常用于模拟传统封闭模型的耗散效应 [50]。

4 结论

滤波可以减弱小尺度内容的存在；然而，实现这一点的方式取决于具体的实现。通过从不同视角（即等效残差方程、半离散视角、冯·诺依曼分析和数值计算）研究残差滤波和解滤波，当前研究突出了各自方法的相关特性。研究表明，对于本文所考虑的非线性情形，线性分析能够恰当地刻画方法的行为。

对原型对流-扩散方程相关等效修正方程的考察表明，残差滤波过程通过引入色散项和反扩散项，使原始动力学过程变得更加平滑；相关的冯·诺依曼分析证实，数值阻尼和相位精度总体上有所降低。残差滤波所增加的色散效应会产生滞后行为，并可能导致结构相对于输运问题出现不相干。然而，残差滤波的色散贡献也会减缓非线性情形下的能量级联——这一理念近期由Yalla 研究 *et al* [51]

了不同格式相关的相位误差。值得注意的是，我们指出，残差滤波并不会主动抑制小尺度成分，而是旨在从一开始就抑制此类成分的累积。由于缺乏用于移除高波数噪声的固有阻尼机制，在长时间计算中强制施加目标滤波宽度的能力，很大程度上取决于所采用滤波格式的谱响应。尺度判别滤波器构造（例如正切滤波器格式）能够减缓高波数成分的生成，同时成功保留预期的已解析尺度。相比之下，具有高度平滑响应的滤波器会允许更多小尺度成分聚集，并且无法在较长时间内保持预期的滤波分辨率。

另一方面，SF 的实现是对解进行耗散性后处理，因此严格来说只会增加正则化，而不会影响基础方法的相位特性。尽管解滤波能够主动去除小尺度成分，但它也对滤波方案十分敏感。例如，采用响应平滑的滤波器可能导致计算结果过度阻尼，从而抑制湍流物理特性。因此，在 SF 中采用经过适当调校、具有尺度判别能力的滤波器，也有助于避免有效滤波宽度在长时间计算中不断增大。类似的结论也适用于人工耗散方法；当时间步长充分细化时，这类方法与 SF 过程十分相似。

尽管残差滤波和解滤波通过不同机制发挥作用，但二者都可用于有效地维持目标滤波宽度并减少小尺度成分。 然而，在大涡模拟的背景下，两种实现方式可能各自对闭合建模有独特要求。例如，RF 可视为一种零阶近似反卷积建模方法 [52] ，因此采用能够重构已解析亚滤波尺度的结构模型或许会有助益。这或许有助于在非锐利滤波器的情况下，为 RF 恢复恰当的非线性能量级联。与此同时，将 SF 自适应地用作模型本身或许更为可取，可将其类比为动态超黏性涡黏性闭合模型 [25]。这类评估构成了未来研究的重要方向，旨在推动滤波在大涡模拟预测性应用中的有效使用，并客观地开发和评估大涡模拟闭合模型。

致谢

财务披露

仿真部分得到了国防部高性能计算现代化计划提供的计算时间资助。本研究获得了空军科学研究办公室（AFOSR）（项目主管：Chiping Li 博士）的资助，以及雅各布斯工程公司根据合同编号 FA9300-20-F-9801 提供的资助和创新科学解决方案公司根据合同编号 FA8650-19- F-2046 提供的资助。

利益冲突

作者声明不存在潜在的利益冲突。本材料中表达的任何观点、研究结果、结论或建议均属于作者本人，并不一定反映美国空军的观点。

A 人工耗散的修正方程分析

以下内容将先前研究中对人工耗散方法的修正方程分析扩展[18] 至典型的对流-扩散方程。此举旨在突出时空耦合所引发的次级效应，并阐明与解滤波相关的等效修正方程。

为简便起见，我们假设对一维对流-扩散方程进行显式欧拉积分，从而得到

$$\underbrace{\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}}_{\partial_t u^n+\frac{1}{2}(\Delta t)\partial_t^2 u+\ldots} = -a\delta_x u + \nu\delta_x^2 u^n + |\lambda'|\sum_k \epsilon_k (\Delta x)^{2k-1}\delta_x^{2k}u^n \ . \tag{35}$$

通过将泰勒展开代入离散导数，推导出修正方程。为了聚焦于积分的影响，我们考察首要时间误差项$\frac{1}{2}(\Delta t)\partial_t^2 u$，并将其用空间导数重新表示：

$$\begin{aligned}
\overbrace{\partial_t^2 u}^{\partial_t\{\partial_t u\}} &= \left[-a\partial_x + \nu\partial_x^2 + |\lambda'|\sum_k \epsilon_k(\Delta x)^{2k-1}\partial_x^{2k}\right]\left\{-a\partial_x u + \nu\partial_x^2 u + |\lambda'|\sum_k \epsilon_k(\Delta x)^{2k-1}\partial_x^{2k}u\right\} \qquad (36)\\
&= a^2\partial_x^2 u + \nu^2\partial_x^4 u + (\lambda')^2\sum_k \epsilon_k(\Delta x)^{4k-2}\partial_x^{4k}u - 2a\nu\partial_x^3 u\\
&\quad - 2a|\lambda'|\sum_k \epsilon_k(\Delta x)^{2k-1}\partial_x^{2k+1}u + 2\nu|\lambda'|\sum_k \epsilon_k(\Delta x)^{2k-1}\partial_x^{2k+2}u
\end{aligned}$$

于是，修正方程为

$$\partial_t u = -a\partial_x u + \nu\partial_x^2 u + |\lambda'|\sum_k \epsilon_k(\Delta x)^{2k-1}\partial_x^{2k}u - \frac{1}{2}(\Delta t)\partial_t^2 u + \ldots \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
&= -a\partial_x u + \nu\partial_x^2 u \qquad (38)\\
&\quad \underbrace{+|\lambda'|\sum_k \epsilon_k(\Delta x)^{2k-1}\partial_x^{2k}u}_{I}\\
&\quad \underbrace{+(\Delta t)\cdot a|\lambda'|\sum_k \epsilon_k(\Delta x)^{2k-1}\partial_x^{2k+1}u}_{II} \underbrace{-(\Delta t)\cdot\nu|\lambda'|\sum_k \epsilon_k(\Delta x)^{2k-1}\partial_x^{2k+2}u}_{III} + \ldots
\end{aligned}$$

其中，上述内容突出显示了一对诱导产生的色散项和扩散项，表明人工耗散会产生次级相位效应和阻尼效应。需要指出的是，II 和 III 实际上与解滤波的等效修正方程（见方程8）中的项相等但符号相反，这进一步证实了解滤波仅将滤波器的耗散作用于输入量，而不会产生其他次级效应。

参考文献

[1] Lele, S. K., 《具有谱分辨率的紧致有限差分格式》, *Journal of Computational Physics* 103, 1992, 16 42 , 第 pp 卷。– 。[2] Kravchenko, A. G. 和 Moin, P., 《湍流大涡模拟中数值误差的影响》, *Journal of Computational Physics*, 第 131 卷, 1997年, 第 310–322 页。[3] Ghosal, S., 《湍流大涡模拟中的数值误差分析》, *Journal of Computational Physics* 125, 88, 1996, 188 206 , 第 No 卷。pp 页。– 。[4] Kennedy, C. A. 和 Gruber, A., 《可压缩流体纳维 – 斯托克斯方程中对流项的减混叠公式》, *Journal of Computational Physics* 227, , 第 2008, 1676 1700 pp 卷。– 。[5] Pope, S., *Turbulent Flows*, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2000 年。[6] Garnier, E., Adams, N. 和 Sagaut, P., *Large Eddy Simulation for Compressible Flows*, 施普林格, 2009年。[7] Jameson, A. 和 Baker, T. J., 《复杂构型欧拉方程的求解》, 美国航空航天学会论文 1983-1929, 1983年7月。[8] Haelterman, R., Vierendeels, J. 和 van Heule, D., 《残差滤波下龙格-库塔迭代的优化》, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 第 234 卷, 2010年, 第 253–271 页。[9] Turkel, E., 《流体动力学预处理方法综述》, *Applied Numerical Mathematics* , 第 12 卷, 1993 年。[10] Shuman, F. G., 《天气预报中的数值方法: II. 平滑与滤波》, *Monthly Weather Review* 85, 11, 1957, 357 361 , 第 No 卷。pp 页。– 。[11] Phillips, N. A., *An Example of Non-Linear Computational Instability*, 《运动中的大气与海洋》, 牛津大学出版社, 1959年。[12] Visbal, M. R. 和 Gaitonde, D. V., 《曲线网格上计算声学的超高阶空间隐式格式》, *Journal of Computational Acoustics*, 第 9 卷, 第 04 期, 2001年, 第 1259–1286 页。[13] Visbal, M. R. 和 Gaitonde, D. V., 《高阶有限差分格式在曲线网格和变形网格上的应用》, *Journal of Computational Physics*, 第 181 卷, 第 1 期, 2002年, 第 155–185 页。[14] Kennedy, C. A. 和 Carpenter, M. H., 《可压缩剪切层仿真的若干新数值方法》, *Applied Numerical Mathematics*, 第 14 卷, 1994年, 第 387–433 页。[15] Chen, J. H., 《湍流燃烧的拍级直接数值模拟——对预测模型的基础性启示》, *Proceedings of the Combustion Institute*, 第 33 卷, 第 1 期, 2011年, 第 99–123 页。[16] Yee, H. C., Sandham, N. D. 和 Djomehri, M. J., 《采用特征变量滤波器的低耗散高阶激波捕捉方法》, *Journal of Computational Physics*, 第 150 卷, 1999年, 第 199–238 页。[17] Asthana, K., Lopez-Morales, M. R. 和 Jameson, A., 《通过傅里叶谱滤波对高阶通量重构格式进行非线性稳定化》, *Journal of Computational Physics* 303, , 第 2015, 269 294 pp 卷。– 。[18] Edoh, A. K., Mundis, N. L., Merkle, C. L., Karagozian, A. R. 和 Sankaran, V., 《时间精确模拟中人工耗散与解滤波稳定化格式的比较》, *Journal of Computational Physics*, 第 375 卷, 2018年, 第 1424–1450 页。[19] Sun, Z. 和 Shu, C., 《通过超黏性确保显式龙格–库塔方法的强稳定性》, *Communications of Applied Mathematics and Computation*, 2021年。[20] Bogey, C., de Cacqueray, N. 和 Bailly, C., 《基于自适应空间滤波的高阶非线性计算激波捕捉方法论》, *Journal of Computational Physics*, 第 228 卷, 2009年, 第 1447–1465 页。[21] Wising, B. W., Jacobs, G. B., Ryan, J. K., Don, W. S. 和 van der Weide, E. T. A., 《采用光滑度提升、精度保持的狄拉克 δ多项式核进行激波正则化》, *Journal of Scientific Computing*, 第 77 卷, 2018年, 第 579–596 页。

[22] Bogey, C. 和 Bailly, C.，《显式空间滤波在修正方程变量或通量中的应用》，
Journal of Computational Physics，第225卷，2007年，第1211–1217页。[23] Ranocha, H.，《使用求和分部算子通量重构格式时人工耗散与模态滤波的稳定性》，*Applied Numerical Mathematics*，第128卷，2018年，第1–23页。[24] Theuerkauf, S. W. 和 Oefelein, J. C.，《反应流大涡模拟显式滤波技术评估》，
AIAA Scitech 2023，2023年，AIAA 2023-0925。[25] Lamballais, E.、Cruz, R. V. 和 Perrin, R.，《直接数值模拟和大涡模拟中的黏性与超黏性滤波》，*Journal of Computational Physics*，第431卷，2021年。[26] Raymond, W. H.，《用于有限面积计算的高阶低通隐式正切滤波器》，*Monthly Weather Review*，第116卷，1988年，第2132–2141页。[27] Lund, T. S.，
On the Use of Discrete Filters for Large Eddy Simulations，《年度研究简报》，湍流研究中心，NASA艾姆斯-斯坦福大学，1997年。[28] Butcher, J. C.，
Numerical Methods for Ordinary Differential Equations，Wiley，2003年。[29] Hu, F. Q.、Hussaini, M. Y. 和 Manthey, J. L.，《计算声学中的低耗散低色散龙格-库塔格式》，
Journal of Computational Physics，第124卷，第52期，1996年，第177–191页。[30] Stanescu 和 Habashi，《计算声学中的2N存储低耗散低色散龙格-库塔格式》，*Journal of Computational Physics*，第143卷，1998年，第674–681页。[31] Tam, C. K. W. 和 Webb, J. C.，《计算声学中的保色散关系有限差分格式》，*Journal of Computational Physics*，第107卷，1993年，第262–281页。[32] San, O.、Staples, A. E. 和 Iliescu, T.，《一维衰减Burgers湍流中用于近似反卷积的低通滤波器分析》，*International Journal of Computational Fluid Dynamics* 30, 1, 2016, 20 37，第 卷，第 期，第 页。[33] Gallagher, T. P.、Edoh, A. K. 和 Sankaran, V.，《显式滤波大涡模拟中的残差与解滤波》，*2019 AIAA Aerospace Sciences Meeting*，AIAA论文2019-1645，2019年1月。[34] Feiereisen, W.、Reynolds, W. 和 Ferziger, J.，《可压缩均匀湍流剪切流的数值模拟》，技术报告TF-13，斯坦福大学机械工程系，1981年。[35] Edoh, A. K.、Mundis, N. L.、Karagozian, A. R. 和 Sankaran, V.，《时间精确模拟中数值耗散、色散和混叠的平衡》，*International Journal for Numerical Methods in Fluids* 92, 2020, 1506 1527，第 卷，第 页。[36] Coppola, G.、Capuano, F.、Pirozzoli, S. 和 de Luca, L.，《湍流可压缩流动对流项的数值稳定公式》，
Journal of Computational Physics 328, ，第 2019, 86 104 卷，第 页。[37] Schranner, F. S.、Domaradzki, J. A.、Hickel, S. 和 Adams, N. A.，《流体流动数值仿真中的数值耗散率与黏性评估》，*Computers and Fluids*，第114卷，2015年，第84–97页。[38] Kuya, Y.、Totani, K. 和 Kawai, S.，《通过分裂对流形式实现可压缩流动的动能与熵守恒格式》，
Journal of Computational Physics，第375卷，2018年，第823–853页。[39] Edoh, A. K.，《基于对流旋转形式的新型动能守恒方法》，*Journal of Computational Physics*，第454卷，2022年。[40] Coppola, G. 和 Veldman, A. E. P.，《可压缩流动模拟中的质量、动量与动能全局及局部守恒》，
Journal of Computational Physics，第475卷，2023年。[41] Haller, G.，《涡旋的客观定义》，
Journal of Fluid Mechanics，第525卷，2005年，第1–26页。[42] Geurts, B. J. 和 van der Bos, F.，《大涡模拟中数值诱导的高通动力学》，*Physics of Fluids*，第17卷，2005年，第1–12页。[43] Klein, M.、Meyers, J. 和 Geurts, B. J.，《使用误差景观方法评估大涡模拟质量指标》，
Quality and Reliability of Large-Eddy Simulations，施普林格，2008年，第131–142页。

[44] Bose, S.、Moin, P. 和 You, D.，《使用显式滤波的网格无关大涡模拟》，*Physics of Fluids*，第22卷，2010年，第1–11页。[45] Radhakrishnan, S. 和 Bellan, J.，《通过显式滤波获得网格间距无关的可压缩单相流大涡模拟》，*Journal of Fluid Mechanics*，第697卷，2012年，第399–435页。[46] Gallagher, T. P. 和 Sankaran, V.，《反应流的经济型显式滤波大涡模拟》，*AIAA Journal*，第57卷，第2期，2019年，第809–823页。[47] Bertels, A.、Kober, B.、Rittler, A. 和 Kempf, A.，《采用高效显式滤波的Sandia火焰D大涡模拟》，*Flow, Turbulence and Combustion*，第102卷，2019年，第887–907页。[48] Berland, J.、Lafon, P.、Daude, F.、Crouzet, F.、Bogey, C. 和 Bailly, C.，《基于松弛滤波的大涡模拟中的滤波器形状依赖性与有效尺度分离》，*Computers and Fluids* 47, 2011, 65 74，第 卷，第 页。[49] Lund, T. S.，《显式滤波器在大涡模拟中的使用》，*Computers and Mathematics with Applications* 46, 2003, 603 616，第 卷，第 页。[50] Aubard, G.、Volpiani, P. S. 和 Gloerfelt, X.，《大涡模拟中亚网格尺度黏性模型与选择性滤波策略的比较》，*Flow Turbulence Combustion* 91, ，第 2013, 497 518 卷，第 页。[51] Yalla, G. R.、Oliver, T. A. 和 Moser, R. D.，《数值色散效应对大涡模拟能量级联的影响》，*Physical Review Fluids*，第6卷，2021年。[52] Stolz, S. 和 Adams, N. A.，《大涡模拟的近似反卷积过程》，*Physics of Fluids*，第11卷，第7期，1999年，第1699–1701页。