arXiv:2304.03196v1 [math.GT] 6 Apr 2023

通过 4-流形三分解构造一族安德鲁斯–柯蒂斯平凡化

伊森·罗马里和亚历山大·祖潘

Abstract. R-链环是一个含有 n个分支的链环 L，位于 S^3 中，并满足对 L 进行戴恩手术后得到 $\#^n(S^1 \times S^2)$。每个 R-链环 L 都会产生一个几何单连通的同伦 4-球面 X_L，进而可用于构造平凡群的平衡群表示。迈耶和祖潘借鉴戈姆夫、沙勒曼和汤普森的工作，构造了一族 R-链环 $L(p, q;\ c/d)$，其中数对 (p, q) 和 (c, d) 互素，且 c为偶数。对于这族链环， $L(3, 2;\ 2n/(2n + 1))$ 导出了那个臭名昭著的平凡群表示$\langle x, y \,|\, xyx = yxy, x^{n+1} = y^n\rangle$；这是一组广为人知的潜在反例，可能推翻适用于 $n \geq 3$的安德鲁斯–柯蒂斯猜想。本文利用 4-流形三分解证明，另一族 $L(3, 2; 4/d)$ 所对应的群表示对所有 d 都是安德鲁斯–柯蒂斯平凡的。

1. Introduction

该 fa mous Andrews-Curtis 猜想 [AC65]断言，任意平衡群表示

$$\langle x_1, \ldots, x_n \,|\, r_1, \ldots, r_n\rangle$$

平凡群的平凡表示可通过有限次以下操作转化为 $\langle x_1, \ldots, x_n \,|\, x_1, \ldots, x_n\rangle$：

(1)将关系词 r_i 替换为 r_i^{-1}；(2) 将关系词 r_i 替换为$r_i r_j$，其中 $i \neq j$；
(3) 将关系词 r_i 替换为 $x_j r_i x_j^{-1}$；以及(4) 添加或删除一个平凡生成元/关系词对 x_{n+1} 和 $r_{n+1} = x_{n+1}$。

称群表示 P 具有这种平凡化的表示为安德鲁–柯蒂斯平凡。尽管该猜想仍未解决，但存在一些有趣的潜在反例族，其中许多源自低维拓扑中的构造。在这一类别中，最著名的族或许是由以下群表示组成的集合

$$P_n = \langle x, y \,|\, xyx = yxy, x^{n+1} = y^n\rangle,$$

源自一组 H_n 四维球面的把手分解，其中每个分解都包含两个 1-把手和两个 2-把手 [AK85，Gom91]。这些群表示 P_n 尚不知是否对于 $n \geq 3$为安德鲁–柯蒂斯平凡，并且人们普遍认为它们很可能是安德鲁–柯蒂斯猜想的反例。

一个相关概念是 R-链环：一种含 n 个分支的链环 $L \subset S^3$，使得对 L 进行某种德恩手术后得到 $\#^n(S^1 \times S^2)$。每个 R-链环 L 都会自然地产生平衡表示 $P(L)$ 来表示平凡群；在 [GST10]，中，作者构造了一族 R-链环L_n，其性质是 $P(L_n) = P_n$，即上文给出的表示。Jeffrey Meier 和第二作者将此构造推广，针对任意互素的 p 和 q，以及满足 c 为偶数的 $c/d \in \mathbb{Q}$，构造出一个 R- 链环 $L(p, q;\ c/d)$。对于这些参数， $L(3, 2;\ 2n/(2n+1))$ 与 Gompf-Scharlemann-Thompson 链环 L_n [MZ22] 稳定等价（定义见下文）。令 $P(p, q;\ c/d)$ 表示表示 $P(L(p, q;\ c/d))$。我们有以下自然的问题：

问题 1.1。哪些群表示 $P(p, q;\ c/d)$ 可以被安德鲁–柯蒂斯平凡化?

在 [GST10], 中，作者证明了链环 $L(3, 2;\ 0/1)$ 与平凡链环把手滑动等价；在即将发表的工作中，第二作者及其合作者证明，对于所有 d，链环 $L(3, 2;\ 2/d)$ 都具有相同性质，由此可知，群表示$P(3, 2;\ 0/d)$ 和 $P(3, 2;\ 2/d)$ 是安德鲁–柯蒂斯平凡的 [HNPZ]。 $c = 4$ 的情形更为复杂，相应的链环 $L(3, 2;\ 4/d)$ 问题仍未解决。然而，在本文中，我们证明

定理 1.2. 任何形如 $P(3, 2;\ 4/d)$ 的群表示都是安德鲁–柯蒂斯平凡的。

证明分为两种情形，分别由命题 3.3（处理情形$d = 4n + 1$）和命题 4.2（处理情形 $d = 4n + 3$）讨论。两个证明中，我们都利用由 R-链环 $L(3, 2;\ 4/d)$ 导出的闭 4-流形 $X_{L(3,2;4/d)}$ 的三分解，来构造群表示 $P(3, 2;\ 4/d)$。

备注1.3。文献中的不同来源对于是否允许操作 (4)存在分歧；在某些情况下，AC-平凡性仅定义为允许操作 (1)–(3)，而这些来源通常使用稳定AC-平凡性来表示同时允许操作 (4)。在本文中，AC-平凡性始终表示允许操作 (1)–(4)。

1.1. 结构安排。我们在第 2 节介绍本文所需的背景知识。第 3 节讨论主定理的第一种情形，第 4 节讨论第二种情形。最后，我们在第 5 节提出若干有待进一步研究的问题。

1.2. 致谢。我们感谢Jeffrey Meier 富有帮助的交流，以及他对本文早期稿件提出的意见。AZ 在完成本工作期间获得了 NSF项目 DMS- 1664578 和 DMS-2005518 的资助。

2. Preliminaries

全文中我们始终在光滑范畴下讨论。

2.1. AC-等价与自同构。如果 P 和 P' 是由上述变换 (1)–(4) 相联系的两个群表示，我们称 P 和 P' 是 AC-等价的，并记作$P \sim P'$。此外，还有一种变换，即变换操作，可以应用于群表示 $P = \langle x_1, \dots, x_n \,|\, r_1, \dots, r_n\rangle$:

(5)对于由 x_1、...、 x_n生成的自由群 F_n 的自同构 ψ，将每个关系式 r_i 替换为其像 $\psi(r_i)$。

允许进行 (1)–(5) 步变换的群表示称为 Q^{**}-等价 [Fer19,Met79,Met85]。据我们所知，Q^{**}-等价是否强于AC-等价仍然是一个悬而未决的问题； [PU19] 的第 3 节中对此进行了详细讨论。然而，以下事实是已知的:

引理 2.1. [BM93,Mia99] 如果一个群表示 P 可以通过变换 (1)-(3) 和 (5) 转化为平凡群表示，那么 P 可以通过变换 (1)-(3) 转化为平凡群表示。

作为推论，我们得到

推论 2.2. 如果群表示 P is Q^{**}-等价于平凡群表示，那么 P 是安德鲁–柯蒂斯平凡的。

证明。假设 $P = \langle x_1, \ldots, x_n \,|\, r_1, \ldots, r_n \rangle$ 可通过一系列变换 (1)-(5) 化为平凡群表示。注意，所有通过变换 (4) 添加生成元的操作都可以先于其他变换进行，因为变换 (5) 中使用的任何自同构 ψ，都可以通过在该自同构本应作用之后添加的生成元上取恒等映射来扩展；而通过变换 (4) 删除生成元的操作则无需进行，因为删除后与平凡群表示等价的任何群表示，在删除前也与一个长度更长的平凡群表示等价。因此可知，对某个 $m \geq n$，群表示

$$P' = \langle x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \ldots, x_m \,|\, r_1, \ldots, r_n, x_{n+1}, \ldots, x_m \rangle$$

由类型(1)-(3)和 (5)的变换可转换为平凡群表示。根据引理 2.1，P' 是安德鲁–柯蒂斯平凡的；由于 P 和 P' 通过类型(4)的变换相关联，因此 P 也是安德鲁–柯蒂斯平凡的。□

2.2. R-链环。如上所述，R-链环是一种具有 n个分支的链环 $L \subset S^3$，满足 L经过德恩手术后得到#$^n(S^1 \times S^2)$。每个R-链环都会产生一个同伦4-球面X_L，它由一个0-柄、 n 2个1-柄、 n 3 个2-柄和一个4-柄构成，其中 L 是2-柄的附着链环，其框架由德恩手术系数给出。将 X_L 的柄分解反转后，可得到一个0-柄、 n 1 个 1-柄、 n 2个2-柄和一个4-柄，这可用于为 $\pi_1(X_L)$（平凡群）构造一个平衡群表示。

一般而言，一个 R-链环 L 并不能唯一确定这样的群表示；例如，反转手柄分解中 1-手柄的余核心的一种选取，决定了群表示 $P(L)$ 中生成元 $x_1, \ldots, x_n$ 的一种选取，而另一种选取则会在自由群 F_n（由 0-手柄与 n 1-手柄之并的基本群）上诱导一个自同构。尽管如此，我们仍可证明以下结论：

引理 2.3. 设 L 为一个 R-链环，并假设 P 和 P' 是由 L诱导的两个不同群表示。那么 P 和 P' 是 Q^{**}-等价的。

证明。假设 $P = \langle x_1, \ldots, x_n \,|\, r_1, \ldots, r_n \rangle$ 和 $P' = \langle y_1, \ldots y_n \,|\, s_1, \ldots, s_n \rangle$ 是由 L诱导的两个群表示。在 AC-变换的语境下，我们假设所有群具有相同的生成集。因此，令 $\iota\colon \langle y_1, \ldots, y_n \rangle \to \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ 为映射 $\iota(y_i) = x_i$，并令 $P'' = \iota(P') = \langle x_1, \ldots, x_n \,|\, \iota(s_1) \ldots, \iota(s_n) \rangle$，于是 P''与 P'相同，只是使用了x_i而非 y_i。

我们需要作出几组选择，才能从 L中提取出 P和 P'：一组是对倒置把手分解中 1-把手的余核心的选择；另一组是为倒置把手分解中 2-把手的附着链 L^* 的每个分支选择基点和方向，因为在使用 L^* 的每个分支读出一个关系子时，我们需要确定起点和方向。不同的方向选择会产生通过类型（1）移动相互关联的关系子。同样，任意两个基点的选择都可以通过对相应关系子作循环置换而相互关联，因此，这些关系子通过类型（3）移动相互关联。由此，我们可以假设， P 和 P' 源自对 L^*采用完全相同的基点和方向选择。

关于 1-柄余核心的选择，0-柄与 1-柄之并的边界上存在一个微分同胚，可将一种选择映到任意其他选择，并诱导出自由群的一个自同构 σ。换言之，每个 x_i 都可以表示为 y_i's 的一个字，并令 $\sigma\colon \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \to \langle y_1, \ldots, y_n \rangle$ 为满足 $\sigma(x_i)$ 是 x_i 作为该字的表达式的同构。注意到两个群表示中的关系子均由固定的附着链环 L^* 及相同的基点和定向所确定，因此（可能在重新编号之后），我们有 $\sigma(r_i) = s_i$。

最后，定义 $\psi = \iota \circ \sigma$。于是我们有

$$\langle x_1, \dots, x_n \,|\, \psi(r_1), \dots \psi(r_n) \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \,|\, \iota(s_1), \dots \iota(s_n) \rangle = P''.$$

我们得出结论， P 和 P'' 可通过一个类型为（5）的操作相互转化，因此任意两个这样的群表示 P 和 P'' 都是 Q^{**}等价的。□

鉴于引理 2.3，由 R-链环 L 诱导的群表示的 Q^{**}-等价类是良定义的，因此我们用 $P(L)$ 表示这个等价类。根据推论 2.2，如果我们能够证明等价类 $P(L)$ 中的某个群表示是 AC-平凡的，那么 $P(L)$ 中的每个群表示都是 AC-平凡的。出于这个原因，并为了证明 AC-平凡性，我们常常模糊这一差别并滥用记号，用 $P(L)$ 表示等价类 $P(L)$ 的任意一个代表元。

还有一些作用于 R-链环 L 的操作不会改变 $P(L)$：如果 L 和 L' 可以通过一系列把手滑动相互得到，我们就称 L 和 L' 把手滑动等价。更一般地，如果 L 和 L' 是 R-链环（分量数可以不同），且 U 和 U' 是平凡链环，并且分裂链环 $L \sqcup U$和 $L' \sqcup U'$ 把手滑动等价，我们就称L 和 L' 稳定等价。下面给出一个众所周知的引理。

引理 2.4. 如果 L 和 L' 稳定等价，那么 $P(L) = P(L')$。

证明。将 L 在 L' 上进行任何一次把手滑动，都会诱导反向把手分解中对偶附着链环 $(L')^*$ 在 L^*上的一次把手滑动。因此，相应的群表示可以通过类型 (2) 的操作（以及可能对应于引理 2.3 证明中所提选择的其他操作）相互转换。如果 L 和 L' 稳定地把手滑动等价，那么存在平凡链环 U和 U'，使得 $L \sqcup U$和 $L' \sqcup U'$把手滑动等价，因此$P(L \sqcup U) = P(L' \sqcup U')$。在这种情况下， $P(L)$和 $P(L \sqcup U)$可以通过类型 (4) 的操作相互转换；因此， $P(L) = P(L \sqcup U)$。同理，$P(L') = P(L' \sqcup U')$，证明完毕。□

广义性质 R 猜想（GPRC）断言，每个 R-链环 L 都把手滑动等价于一个平凡链环；GPRC 的稳定版本则断言， L 稳定把手滑动等价于一个平凡链环。如果这两个猜想成立，那么以这种方式得到的每个群表示 $P(L)$ 都是安德鲁–柯蒂斯平凡。关于 R-链环和 AC 猜想的详细讨论，请读者参阅 [GST10, MSZ16]。

2.3. 族 $L(3, 2; c/d)$。在 [MZ18], 中，Meier 和第二作者利用 [GST10] 与 [Sch16] 中的工作引入了 R-链环族 $L(3, 2; c/d)$；在 [MZ22], 中，他们将这一构造推广到了 $L(p, q; c/d)$。[MZ18] 和 [MZ22] 对这一构造有更为详尽的描述，这里我们仅作简要概述：设 Q 为方结 $3_1\#\overline{3_1}$, ，设 F 为 Q 在 S^3 中的纤维； S^3 是一个亏格为二、带一个边界分量的曲面。于是， $S^3_0(Q)$，即对 Q 进行 0-手术所得的闭 3-流形 $\widehat{\ }$，是一个以 F 为纤维的纤维化流形； F 是将圆盘沿边界粘合到 F 的边界分量后得到的闭亏格二曲面。将 F 视为一个环带，并把其六边形边界分量按图 1 所示成对识别，便可知与 $S^3_0(Q)$ 对应的闭单值变换 $\widehat{\varphi}\colon \widehat{F} \to \widehat{F}$ 是顺时针旋转 $\pi/3$ 弧度。

此外，如果 S 表示具有四个三阶锥点的2-球面，则存在$\widehat{\ }$一个分支覆盖映射 $\rho : F \to S$ ，满足 $\rho \circ \widehat{\varphi} = \rho$。 S 中避开锥点的曲线由扩展有理数$\overline{\mathbb{Q}}$参数化；当 c 为偶数时，与有理数（$c/2$）$/d$ 对应的曲线 $\lambda_{(c/2)/d}$ 经由 ρ 提升为三条曲线$\backsim V_{c/d}$、 $V'_{c/d}$和 $V''_{c/d}$，它们包含于 F中，并由 $\widehat{\varphi}$置换。这些曲线可以选取为位于 F中，因此链环 $Q \cup V_{c/d} \cup V'_{c/d} \cup V''_{c/d} \subset S^3$ 是一个 R-链环，在稳定意义下可通过柄滑移

等价于其两个组成子链中的任意一个。在 [MZ22], 中，链 $L(3,2;c/d)$ 被定义为 $V_{c/d}\cup V'_{c/d}$，但为了确定 $P(3,2;c/d)$ 是否为安德鲁–柯蒂斯平凡，根据引理 2.3 和 2.4，我们可以使用这些链中的任意一个

注2.5。此处关于 c/d 的约定与 [MZ22] 一致，但不同于 [MZ18] 和 [Sch16]，因为在我们的设定中，分子 c 被加倍了。这种加倍在 [MZ22] 的注 4.1 和 4.12 中有详细解释。

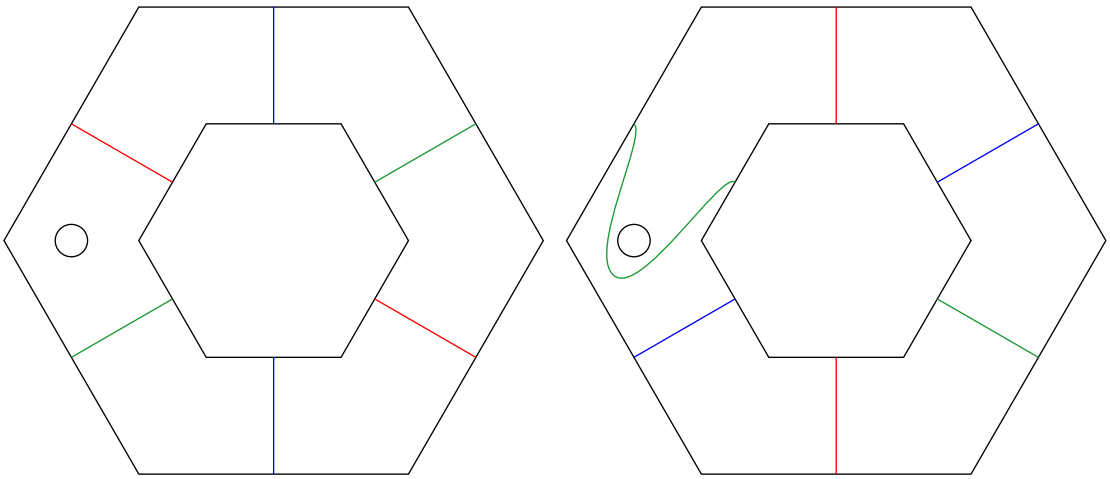
注 2.6. [Sch16] 证明了，链环 $L(3,2;2n/(2n+1))$ 在稳定把手滑动等价下等价于 [GST10], 中出现的链环 L_n，因此 $P(3,2;2n/(2n+1))$ 等价于引言中描述的著名群表示 P_n。

2.4. 对 $X_{L(3,2;c/d)}$ 进行三分解。Gay和Kirby在 [GK16]中引入了4-流形三分解。一个（g; k_1, k_2, k_3）-三分解 $\mathcal{T}$的闭光滑 4-流形 X是一个分解 $X=X_1\cup X_2\cup X_3$，具有以下性质

(1) 每个 X_i 都是一个 4 维 1-手柄体，其 rk($\pi_1(X_i)$) 为 $=k_i$；(2) 每个 $H_i=X_{i-1}\cap X_i$ 都是一个 3 维、属为 g 的手柄体；(3) $\Sigma=X_1\cap X_2\cap X_3$ 是一个属为 g 的曲面。

三分解 $\mathcal{T}$由并集 $H_1\cup H_2\cup H_3$确定，而该并集又由包含在 Σ中的三组切割系统 α、β和 γ确定， Σ称为该三分解的中心曲面。三元组 (α、β、γ)称为三分解图。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$我们已经讨论过方结 Q的闭单值化 $\widehat{\varphi}:F\to F$，但在此情形下，我们需要使用 Q的单值化 φ: $F\to F$，并要求它在 $\partial F=Q$上为恒等映射。单值化 φ 与之前一样，由一次 $\pi/3$ 旋转构成，但这次随后还要进行一个同伦，将 F 的边界分量拖回其起始位置。曲线 $V_{0/1}$、$V'_{0/1}$和 $V''_{0,1}$ 及其在 φ 下的像见图 1。（另见 [Sch16]的图 9。）



[{"id":0,"output":"FIGURE 1. 左侧为曲线 $V_{0/1}$（红色）、$V'_{0/1}$（蓝色）和 $V''_{0/1}$（绿色）。右侧为它们在单值化 φ 下的像。请注意，虽然闭单值化 $\widehat{\varphi}$ 会置换这三条曲线，但单值化 φ 不会。"}]

接下来，我们定义三个切割系统，它们将确定 $X_{L(3,2;c/d)}$的三分割 $\mathcal{T}(c/d)$的三分割图。定义 $\Sigma=\partial(F\times I)$，其中 $\partial F\times I$ 已被压缩至该

单条曲线 ∂F，因此我们可以将 Σ 视为 $F\#\overline{F}$。对于嵌入 F中的曲线或弧 a，令$\overline{a}$ 表示包含于 $\overline{F}$中的 a 的镜像。令 a_1、a_2、a_3、a_4 为 F 中的四条两两不相交的弧，将 F 切割成一个圆盘，并定义

$$\begin{aligned}\alpha &= \{\varphi(a_1)\cup\overline{a_1},\, \varphi(a_2)\cup\overline{a_2},\, \varphi(a_3)\cup\overline{a_3},\, \varphi(a_4)\cup\overline{a_4}\}\\ \beta &= \{a_1\cup\overline{a_1},\, a_2\cup\overline{a_2},\, a_3\cup\overline{a_3},\, a_4\cup\overline{a_4}\}\\ \gamma &= \{V_{c/d},\, V'_{c/d},\, \overline{V_{c/d}},\, \overline{V'_{c/d}}\}.\end{aligned}$$

于是我们得到以下结果，这是 [MZ18] 中的命题 19。

命题 2.7。三元组 (α,β,γ) 是 $X_{L(3,2;c/d)}$ 的三分解$\mathcal{T}(c/d)$ 的一个 (4; 0,2,2)-三分解图。

最后，我们需要一种工具，用于从三分解中提取把手分解；这是 [GK16] 中引理 13 的一部分的改述。

引理 2.8。设 $X = X_1\cup X_2\cup X_3$ 是一个 $(g;\, k_1,k_2,k_3)$-三分解，且满足 $H_i = X_{i-1}\cap X_i$。那么 X 有一个把手分解，其中包含

(1) 一个 0-把手和 k_1 1 个把手（包含于 X_1），(2) $g-k_2$ 2 个把手（包含于 X_2），以及 (3) k_3 3 个把手（包含于 X_3）。

此外，选择 k_1 一组两两不相交且互不分离的曲线 C，它们位于 Σ中，并在 H_1 和 H_2 中都围成圆盘，可表示 k_1 余核心与 Σ的交集。最后，可通过选择 $g-k_2$在 H_3中围成圆盘、且与 $g-k_2$在 H_2中围成圆盘的曲线互为对偶的曲线，并将L 视为 3-流形 ∂X_1中的带框链环（框架由曲面 Σ给出），从而得到 2-柄的附着链环 L。

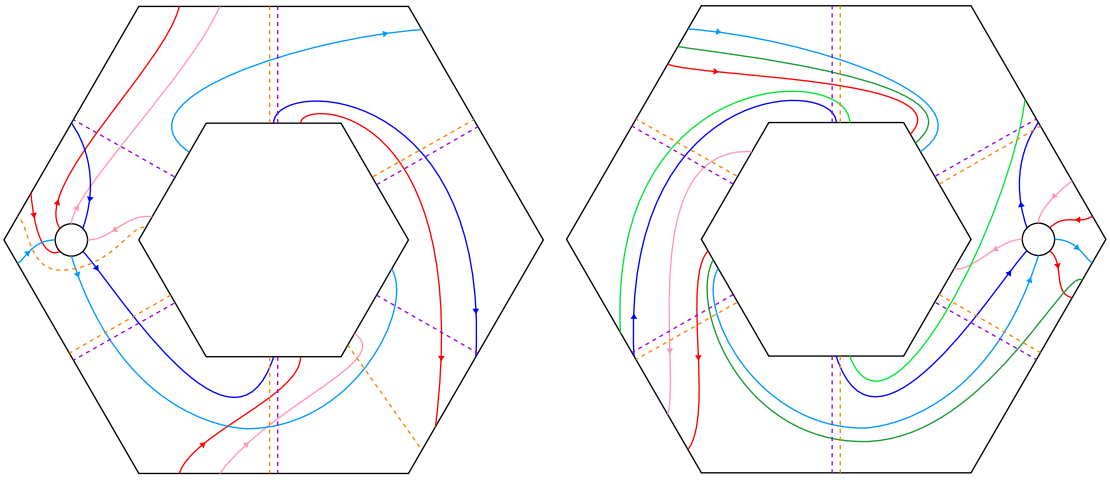
将 $\{1,2,3\}$ 的任意置换应用于分量 X_i的指标，也可以使用该引理。一个执行此过程的例子见于 [MZ17]的第2.6小节。

3. The case $d = 4n+1$

我们将主定理的证明分为两种情况。首先，在本节中，我们考虑形如 $4/(4n+1)$ 的 c/d。在下一节中，我们考察形如 $4/(4n+3)$的 c/d。证明过程非常相似，但具体的曲线和计算有所不同。在本节剩余部分，我们将按照如下方式标记图 2 右侧表面 $\overline{F}$ 中的曲线和弧：

（1）红色弧是 $\overline{a_1}$，粉色弧是 $\overline{a_2}$。（2）深蓝色弧是 $\overline{b_1}$，浅蓝色弧是 $\overline{b_2}$。（3）深绿色曲线是$\overline{V_{4/1}}$，浅绿色曲线是 $\overline{V'_{4/1}}$。

此外，我们分别用 a_3 和 a_4 表示图 2 左侧的红色弧和粉色弧。注意，$a_3=\varphi(a_1)$、$a_4=\varphi(a_2)$ 以及 F 中的深蓝色弧和浅蓝色弧分别是弧 b_1 和 b_2。我们还令 $\tau\colon F\to F$ 表示沿两两不相交曲线族 $V_{0/1}\cup V'_{0/1}\cup V''_{0/1}$作右手德恩扭转的乘积，因此 $\overline{\tau}\colon \overline{F}\to\overline{F}$表示沿 $\overline{V_{0/1}}\cup\overline{V'_{0/1}}\cup\overline{V''_{0/1}}$作左手德恩扭转的乘积，这些曲线在图 2 中以紫色虚线表示。定义 $V^*_{0/1}$ 为将 $V_{0/1}$ 沿 Q 滑动后得到的曲线（等价地，$V^*_{0/1}$ 是 $V''_{0/1}$ 在图 1 所示的 φ 作用下的像），并令 $\tau_*\colon F\to F$ 与 τ 相同，唯一区别是将沿 $V_{0/1}$ 的德恩扭转替换为沿 $V^*_{0/1}$的德恩扭转；后者在同一幅图中以橙色虚线表示



(A) F (B) $\overline{F}$

FIGURE 2. 用于计算 $P(3,2;\,4/(4n+1))$的 $\Sigma = F\#\overline{F}$中的曲线和弧

图。由于 $\varphi(V_{0/1}\cup V'_{0/1}\cup V''_{0/1}) = V'_{0/1}\cup V''_{0/1}\cup V^*_{0/1}$，根据 [FM12] 的第 3.5 节可得

$$\varphi\circ\tau = \tau_*\circ\varphi. \tag{1}$$

在 [MZ22], 的引理4.7和4.8中证明了

引理 3.1. 对于 $V_{4/d}$ 和 $V'_{4/d}$ 这两条位于 Σ 中的曲线，我们有

$$\tau^n(V_{4/d}) = V_{4/(d+4)} \quad \textit{and} \quad \tau^n(V'_{4/d}) = V'_{4/(d+4)}.$$

利用 Σ 的对称性，可得

$$\overline{\tau}^n(\overline{V_{4/d}}) = \overline{V_{4/(d+4)}} \quad \text{and} \quad \overline{\tau}^n(\overline{V'_{4/d}}) = \overline{V'_{4/(d+4)}}$$

也一样。这种关系正是我们需要讨论两种情况的原因，即当 $d = 4n+1$ 时以及当 $d = 4n+3$ 时。细心的读者应注意到，τ 具有如下性质：$\tau^{-2} = \tau_0$，其中 τ_0 是沿三对平行曲线的左手多重扭转，该扭转定义于 [MZ22] 中。

引理 3.2。三分解 $\mathcal{T}(4/(4n+1))$ 导出一个倒置的把手分解，其中有两个 1-把手和两个 2-把手；1-把手的余核心与中心曲面 Σ 相交于曲线 $\tau^n(b_1)\cup\overline{\tau}^n(\overline{b_1})$ 和 $\tau^n(b_2)\cup\overline{\tau}^n(\overline{b_2})$，而 2-把手的附着链由 $\tau^n_*(a_3)\cup\overline{\tau}^n(\overline{a_1})$ 和 $\tau^n_*(a_4)\cup\overline{\tau}^n(\overline{a_2})$ 决定。相应的群表示 $P(3,2;\,4/(4n+1))$ 为

$$P(3,2;4/(4n+1)) = \langle x,y \,|\, \overline{x}(y\overline{x})^n\overline{y}(\overline{y}x)^n y, \overline{x}(y\overline{x})^n\overline{y}(x\overline{y})^n\rangle.$$

证明。根据引理 2.7，存在一个关于 $\mathcal{T}(4n/(4n+1))$ 的三分图 (α,β,γ)，使得 α 包含对于 $i=1,\ 2$ 条曲线 $\alpha_i = \varphi(\tau^n(a_i))\cup\tau^n(a_i) = \varphi(\tau^n(a_i))\cup\overline{\tau}^n(\overline{a_i})$，它们在 $\overline{H_1}$ 中围成圆盘。反复应用方程 1，可得

$$\tau^n_*(a_3)\cup\overline{\tau}^n(\overline{a_1}) = \tau^n_*(\varphi(a_1))\cup\overline{\tau}^n(\overline{a_1}) = \varphi(\tau^n(a_1))\cup\overline{\tau}^n(\overline{a_1}) = \alpha_1;$$
$$\tau^n_*(a_4)\cup\overline{\tau}^n(\overline{a_2}) = \tau^n_*(\varphi(a_2))\cup\overline{\tau}^n(\overline{a_2}) = \varphi(\tau^n(a_2))\cup\overline{\tau}^n(\overline{a_2}) = \alpha_2.$$

此外，对于 $i = 1$，2，曲线 $\beta_i = \tau^n(b_i) \cup \tau^n(b_i) = \overline{\tau^n(b_i)} \cup \overline{\tau}^n(\overline{b_i})$ 是 β 中的曲线，它们在 H_2 中围成圆盘，并且 β_1 和 β_2 与 $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_3\}$ 中的曲线不相交，这些曲线

$$\{V_{4/(4n+1)}, V'_{4/(4n+1)}, \overline{V_{4/(4n+1)}}, \overline{V_{4/(4n+1)}}\} = \{\tau^n(V_{4/1}), \tau^n(V'_{4/1}), \overline{\tau}^n(\overline{V_{4/1}}), \overline{\tau}^n(\overline{V'_{4/1}})\},$$

正如引理 3.1 所断言的那样。因此，曲线 β_1 和 β_2 也在把手体 H_3 中围成圆盘。

现在，注意到 α_1 与 γ_1 相交一次且避开 γ_2，而 α_2 与 γ_2 相交一次且避开γ_1。根据 [GK16], 中的引理14，由$L(3,2;4/(4n+1))$确定的 $X_{L(3,2;4/(4n+1))}$ 的把手分解与由 $\mathcal{T}(4/(4n+1))$确定的把手分解相容，其中没有1-把手（包含在4-球 X_1中），有两个2-把手（包含在 X_3中）以及两个3-把手（包含在 X_2中）。因此，在反转的把手分解中，两个1-把手位于 X_2中，而两个2-把手可以在 X_3中看作。由于 $\partial X_2 = H_2 \cup H_3$由 β 和 γ确定，上述曲线 β_1 和 β_2 可以选为1-把手的余核心与 Σ的交集。此外，曲线 α_1 和 α_2 分别与 γ_1 和 γ_2对偶，因此根据引理2.8，2-把手的一个附着链环为 $\alpha_1 \cup \alpha_2$。

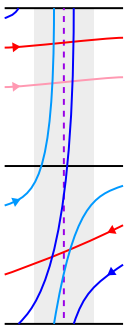
最后，按照图 2 所示的方向，我们可以读出由 α_1 和 α_2确定的关系子。为计算有向交点，我们求出 $\alpha_i \cap \beta_j$中每个点的符号，其中 α_i 的方向是标准定向有序基的第一个元素。注意，多重扭转 τ 和 τ_* 仅在曲线 $V_{0/1}$（它扭转 β_i 但不扭转 α_i）和 $V^*_{0/1}$（它扭转 α_i 但不扭转 β_i）处有所不同。为便于计算，我们在图 3 中绘出了这些曲线邻域内的扭转示意图。

我们分别用 x 和 y 作为 β_1 和 β_2的生成元，并分别从 α_1 和 α_2读出关系子 r 和s: 从 F 中的 Q 处开始，沿着方向前进（注意，在 $\overline{F}$中看不到交点）。我们得到

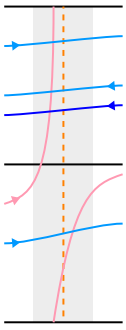
$$\begin{aligned} r &= \overline{x}(y\overline{x})^n\overline{y}(\overline{y}x)^n y; \\ s &= \overline{x}(y\overline{x})^n\overline{y}(xy\overline{yy})^n = \overline{x}(y\overline{x})^n\overline{y}(x\overline{y})^n \end{aligned}$$

□

接下来，我们将计算得到的群表示化为平凡表示。



(A) 对 b_1 和 b_2 进行德恩扭转，绕 $V_{0/1}$



(B) 对 a_3 和 a_4 进行德恩扭转，绕 $V^*_{0/1}$

FIGURE 3. 用于辅助引理 3.2 计算的德恩扭转像。

命题 3.3。群表示 $P(3, 2; 4/(4n + 1))$ 是安德鲁–柯蒂斯平凡。

证明。令 $(r_0, s_0) = (r, s)$ 为引理 3.2 中的关系子。首先，令 $r_1 = r_0^{-1}$，使得

$$r_1 = \overline{y}(\overline{x}y)^n y(x\overline{y})^n x.$$

接下来，令 $r_2 = r_1 s_0$，得到

$$r_2 = (\overline{y}(\overline{x}y)^n y(x\overline{y})^n x)(\overline{x}(y\overline{x})^n \overline{y}(x\overline{y})^n) = \overline{y}(\overline{x}y)^n (x\overline{y})^n.$$

将 s_0 中的各项重新分组，得到

$$s_0 = \overline{x}(y\overline{x})^n \overline{y}(x\overline{y})^n = \overline{x}(y\overline{x})^n (\overline{y}x)^n \overline{y}.$$

现在，对 s_0 进行循环置换，得到

$$s_1 = (y\overline{x})^n (\overline{y}x)^n \overline{yx},$$

然后令 $r_3 = r_2 s_1$。因此，

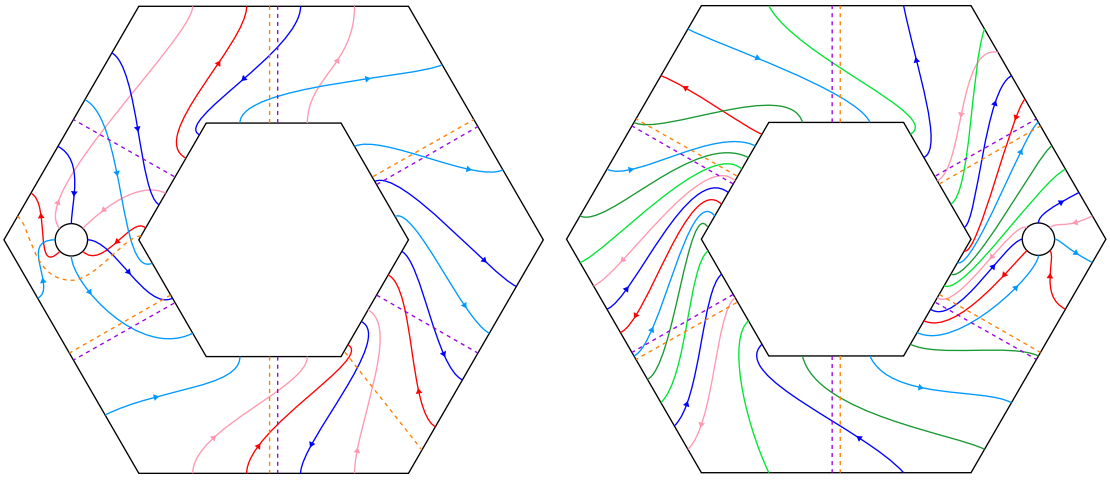
$$r_3 = (\overline{y}(\overline{x}y)^n (x\overline{y})^n)(y\overline{x})^n ((\overline{y}x)^n \overline{yx}) = \overline{y}^2 \overline{x}.$$

此时，r_3 是关系子 $x = \overline{y}^2$，我们可以使用循环置换和代换将 s_1 变为 $s_2 = y$，进而将 r_3 变为 $r_4 = x$，证明得证。□

4. The case $d = 4n + 3$

我们以与第 3 节几乎完全相同的方式进行，但从 Σ 中不同的曲线和弧开始。在本节余下部分，我们将对图 4 右侧表面 $\overline{F}$ 中的曲线和弧标记如下：

(1) 红色弧为 $\overline{a_1}$，粉色弧为 $\overline{a_2}$。(2) 深蓝色弧为 $\overline{b_1}$，浅蓝色弧为 $\overline{b_2}$。(3) 深绿色曲线为 $\overline{V_{4/3}}$，浅绿色曲线为 $\overline{V'_{4/3}}$。



(A) F (B) $\overline{F}$

Figure 4. $\Sigma = F$ 中用于计算 $P(3, 2;\ 4/(4n+3))$ 的曲线和弧#$\overline{F}$

此外，我们让 a_3 和 a_4 表示图 4 左侧的红色弧和粉色弧；如前所述，$a_3 = \varphi(a_1)$、$a_4 = \varphi(a_2)$ 以及 F 中的深蓝色弧和浅蓝色弧分别是弧 b_1 和 b_2。回顾第 3 节中 τ 和 τ_* 的定义。

引理4.1。三分割 $\mathcal{T}(4/(4n+3))$产生了$X_{L(3,2;4/(4n+3))}$ 的一个倒置手柄分解，其中1-手柄的余核心与中心曲面 Σ 相交于曲线 $\tau^n(b_1)\cup\overline{\tau}^n(\overline{b_1})$和 $\tau^n(b_2)\cup\overline{\tau}^n(\overline{b_2})$，而 2-手柄的附着链由 $\tau_*^n(a_3)\cup\overline{\tau}^n(\overline{a_1})$和 $\tau_*^n(a_4)\cup\overline{\tau}^n(\overline{a_2})$ 确定。相应的群表示 $P(3,2;4/(4n+3))$ 为

$$P(3,2;4/(4n+3)) = \langle x, y \,|\, \overline{y}(\overline{xyx})^n(yx^2)^n yx,\ \overline{x}(\overline{yx}^2)^n\overline{yxy}(xyx)^n xy\rangle$$

证明。如引理 3.2 的证明所示，存在一个关于 $\mathcal{T}(4n/(4n+3))$ 的三分解图 (α,β,γ)，其中包含（对于 $i=1,2$） $\alpha_i=\varphi(\tau^n(a_i))\cup\overline{\tau}^n(\overline{a_i})$ 作为曲线，它们位于 α，并界定 H_1 中的圆盘。通过相同的论证，我们有

$$\tau_*^n(a_3)\cup\overline{\tau}^n(\overline{a_1})=\alpha_1;$$
$$\tau_*^n(a_4)\cup\overline{\tau}^n(\overline{a_2})=\alpha_2.$$

对于 $i=1,2$，曲线 $\beta_i=\tau^n(b_i)\cup\overline{\tau}^n(\overline{b_i})$ 是 β 中的曲线，与$\gamma=\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_3\}$中的曲线不相交，这些曲线

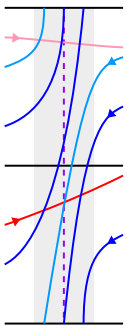
$$\{\tau^n(V_{4/3}),\tau^n(V'_{4/3}),\overline{\tau}^n(\overline{V_{4/3}}),\overline{\tau}^n(\overline{V'_{4/3}})\},$$

作为 asse 由引理3.1 支持。因此， β_1 和 β_2 也在把手体 H_3 中界定圆盘 l.

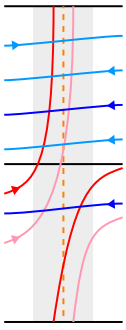
由于 α_1 与 γ_1 相交一次且避开 γ_2，而 α_2 与 γ_2 相交一次且避开 γ_1，因此可以使用与引理 3.2 中相同的论证来证明：在由 $L(3,2;4/(4n+3))$ 得到的反转手柄复合中，1-手柄的余核心在 Σ 中与 β_1 和 β_2相交，而 2-手柄的一个附着链由 α_1 和 α_2组成。现在，利用图 4 和图 5，我们可以读出关系子 r 和 s（沿着定向并从 F 中的 Q开始），

$$\begin{aligned} r &= \overline{y}(\overline{xyx})^n(yxy\overline{y}x)^n yx = \overline{y}(\overline{xyx})^n(yx^2)^n yx \\ s &= \overline{x}(\overline{yx}^2)^n\overline{yxy}(xyxy\overline{y})^n xy = \overline{x}(\overline{yx}^2)^n\overline{yxy}(xyx)^n xy \end{aligned}$$

□



(A) Dehn 扭转 b_1 和 b_2 关于 $V_{0/1}$



(B) 绕 a_3 和 a_4 对 $V_{0/1}^*$ 进行德恩扭转

FIGURE 5. 德恩扭转的像，用于辅助引理 4.1 中的计算。

命题 4.2。群表示 $P(3,2;4/(4n+3))$ 是安德鲁–柯蒂斯平凡的。

证明。设 $(r, s) = (r_0, s_0)$ 为引理 4.1 中的关系子，并注意我们可以重新组合各项，将其表示为 and r_0 and s_0 as

$$\begin{aligned} r_0 &= \overline{y}(\overline{xyx})^n yx(xyx)^n; \\ s_0 &= (\overline{xyx})^n \overline{xyxy}(xyx)^n xy. \end{aligned}$$

接下来，我们令 r_1 和 s_1 分别是对 r_0 和 s_0作循环置换所得的结果，使得

$$\begin{aligned} r_1 &= (\overline{xyx})^n yx(xyx)^n \overline{y}; \\ s_1 &= xy(\overline{xyx})^n \overline{xyxy}(xyx)^n. \end{aligned}$$

令 $s_2 = s_1 r_1$，我们得到

$$s_2 = (xy(\overline{xyx})^n \overline{xyxy}(xyx)^n)((\overline{xyx})^n yx(xyx)^n \overline{y}) = xy(\overline{xyx})^n \overline{xy}(xyx)^n \overline{y}.$$

对 s_2 作循环置换得到 s_3 ，可得

$$s_3 = \overline{y}xy(\overline{xyx})^n \overline{xy}(xyx)^n,$$

并令 $s_4 = s_3 r_1$,

$$s_4 = (\overline{y}xy(\overline{xyx})^n \overline{xy}(xyx)^n)((\overline{xyx})^n yx(xyx)^n \overline{y}) = \overline{y}xy(\overline{xyx})^n (xyx)^n \overline{y} = \overline{y}x.$$

Fin最后， s_4 是关系词 $y = x$，因此我们可以使用 AC 变换将 r_1 转换为 o

$$r_2 = \overline{x}^{3n} x^2 x^{3n} \overline{x} = x.$$

由此可知， $P(3, 2; 4/(4n + 3))$ 是安德鲁–柯蒂斯平凡的。 □

5. Conclusion

最后，我们提出几个问题，以推动该领域的未来研究。回顾引言中的内容，GPRC 与 Andrews-Curtis 猜想密切相关。我们简化了群表示，但其动机源自一个与相关链环有关的问题。

问题5.1.链环 $L(3,2; 4/d)$ 是否把手滑动等价于平凡链环，或与平凡链环稳定等价?

回答这个问题的一种方式是证明三分解 $\mathcal{T}(4/d)$是标准的，并引用 [MZ18] 中的定理 3 （关于标准三分解的定义，参见 [MZ18]。）

问题 5.2。三分解 $\mathcal{T}(4/d)$ 是标准的吗?

值得注意的是，目前仍未解决是否存在 S^4 的非标准三分解。

最后，理解这些技术是否能应用于其他群表示族也会很有意思；尤其值得一提的是，在即将发表的工作中，Meier 和第二作者得以证明，对于各种参数 [MZ], $P(p_1, q_1; c_1/d_1)$ 与 $P(p_2, q_2; c_2/d_2)$ 之间存在若干出乎意料的等价关系。

问题 5.3. 这些技术能否扩展到证明任何形如$P(5, 2; 4/d)$的群表示都是 AC 平凡的? 形如 $P(p, 2; 4/d)$的群表示又如何?

References

[AC65] J. J. Andrews 和 M. L. Curtis, *Free groups and handlebodies*, 《美国数学会会刊》16（1965），192–195。MR 173241[AK85]Selman Akbulut 和 Robion Kirby, *A potential smooth counterexample in dimension 4 to the Poincaré conjecture, the Schoenflies conjecture, and the Andrews-Curtis conjecture*, 《Topology》24（1985）4, 375 390 816520），第 – 期。MR BM R. G. Burns 和 Olga Macedonska, [93] *Balanced presentations of the trivial group*, 《伦敦数学会通报》**25** 1993 6, 513 526 1245076 （），第 – 期。MR Fer Ximena Fernandez, *Morse theory for group presentations*, arXiv 电子预印本（2019），arXiv:1912.00115。[FM12] Benson Farb 和 Dan Margalit, *A primer on mapping class groups*, 普林斯顿数学丛书，第 49, 2012 2850125 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿（新泽西州），。[16] *Trisecting 4-manifolds* MR GK David Gay 和 Robion Kirby, ，《Geometry & Topology》20（2016），第 6 期，3097–3132。MR 3590351[Gom91] Robert E. Gompf, *Killing the Akbulut-Kirby 4-sphere with relevance to the Andrews-Curtis and* ，，*Schoenflies problems* **30** 1991 1, 97 115 1081936 《Topology》（），第 – 期。MR[10] GST Robert E. Gompf、Martin Scharlemann 和 Abigail Thompson, *Fibered knots and potential counterexamples to the property 2R and slice-ribbon conjectures* **14** 2010 4, 2305 ，《Geometry & Topology》（），第 – 期，2347。MR 2740649[HNPZ] Hanna Hoffman、Kenji Nakagawa、Rilee Potter 和 Alexander Zupan, *for generalized square knots* *Cassson-gordon derivatives* ，编写中。.[Met79] Wolfgang Metzler, *Aquivalenzklassen von Gruppenbeschreibungen Identitäten und einfacher Homotopietyp in niederen Dimensionen* ，《同调群论》（达勒姆研讨会论文集，），伦敦数学会讲义丛书，第 36 卷，剑桥大学出版社，剑桥—纽约，1979 年，第 291–326 页。MR 564434[Met85]， *On the Andrews-Curtis conjecture and related problems*, 《拓扑学与代数几何中的组合方法》（纽约州罗切斯特，1982），当代数学，第 44 卷，美国数学会，普罗维登斯（罗得岛州），1985, 35 50 813099 第 – 页。[99] MR Mia Alexei D. Miasnikov, *Genetic algorithms and the Andrews-Curtis conjecture*, 《国际代数与计算杂志》9（1999），第 6 期，671–686。MR 1727164[MSZ16] Jeffrey Meier、Trent Schirmer 和 Alexander Zupan, *Classification of trisections and the generalized property R conjecture* **144** 2016 11, 4983 4997 3544545 ，《美国数学会会刊》（），第 – 期。MR [MZ] Jeffrey Meier 和 Alexander Zupan, *Presentations of the trivial group and generalized square knots*, 编写中。[MZ17]， ——— *Bridge trisections of knotted surfaces in S^4* **369** 2017 10, ，《美国数学会汇刊》（），第 – 期。MR[MZ18]， *Characterizing Dehn surgeries on links via trisections*, 《美国国家科学院院刊》115（2018 43, 10887 10893 3871792），第 – 期。MR MZ，[22] ——— *Generalized square knots and homotopy 4-spheres* **122** 2022 1, ，《微分几何杂志》（），69 129 4507471 第 – 期。MR [PU19] Dmitry Panteleev 和 Alexander Ushakov, *Conjugacy search problem and the Andrews-Curtis conjecture* **11** 2019 1, 43 60 4000597 ，《群、组合与密码学》（），第 – 期。MR[16] *Proposed Property 2R counterexamples examined* Sch Martin Scharlemann, ，《伊利诺伊数学杂志》60（2016），第 1 期，207–250。MR 3665179

Berkshire Hathaway Homestate Companies
Email address: eromary@bhhomestate.com

University of Nebraska-Lincoln, Lincoln, NE 68588
Email address: zupan@unl.edu*URL*:
http://www.math.unl.edu/azupan2