arXiv:2304.03197v1 [math.SP] 6 Apr 2023

小孔洞上带罗宾边界条件的拉普拉斯算子的谱收敛

Diana Barseghyan* 和 Baruch Schneider

俄斯特拉发大学数学系，30.dubna 22，俄斯特拉发70103，捷克共和国 电子邮件：diana.barseghyan@osu.cz，baruch.schneider@osu.cz

摘要

本文研究的是一个移除了小孔的有界区域。我们的主要结果涉及在孔边界施加罗宾条件的拉普拉斯算子的谱。此外，我们证明，在边界条件中的参数满足某些适当假设时，拉普拉斯算子的谱以豪斯多夫距离意义收敛于未扰动区域上定义的拉普拉斯算子的谱。

关键词。罗宾拉普拉斯算子, 谱收敛,带孔区域。

数学主题分类。主要分类：58J50；次要分类：35P15、47A10。

1 引言

人们通常认为，对物理情形的微小扰动只会导致谱发生微小变化。对于区域扰动，狄利克雷边界条件下大体确实如此，而在纽曼或罗宾情形下则更为微妙。近年来，相关问题已得到不少解答，始于 Rauch 和 Taylor 关于带孔洞区域上拉普拉斯算子之谱的开创性研究 [13]。

关于在边界施加诺伊曼条件、在边界其余部分施加狄利克雷条件的带有小球形障碍物的区域上拉普拉斯算子的特征值渐近行为的最新研究，可在 [11] 中找到一条极佳的捷径。

Maz'ya、Nazarov和 Plamenewskii（见 [10, 第9章，第I卷], ）研究了带有障碍物的区域上的拉普拉斯算子，在其边界上施加狄利克雷条件，并证明了特征值的完整渐近展开的有效性。

*通讯作者

关于该主题较新研究的综述，请参阅[4], [5], [6] ，其中作者考察了欧几里得区域或带孔流形上的狄利克雷拉普拉斯算子，并研究了预解式收敛问题。

几何形状更为一般的小型诺伊曼障碍物问题可能会导致谱发生突变。例如，当孔洞具有“分裂环”几何形状时，就会观察到这种效应，参见 [14]。分裂环（即使非常小）也可能产生一些额外的特征值，而这些特征值与未扰动区域上的诺伊曼拉普拉斯算子的特征值毫无共同之处。具有更一般几何形状的诺伊曼障碍物问题已在 [5] 中进行了研究，随后又在 [2]中进行了研究。

一般自伴椭圆算子的罗宾情形在[8] 中得到研究，但其中限制未扰动区域的边界为C^2-光滑。在上述工作中，通过缩小孔洞并适当缩放边界条件中的参数，作者得到一个算子族，该算子族在范数预解式意义下收敛于一个在无孔洞区域中具有点相互作用的算子。在 [3], 中也研究了高维含小孔区域内带有罗宾条件的算子的预解式收敛结果，但在该论文中，原始区域同样必须是 C^2-光滑的，并且所使用的罗宾条件中的系数与孔洞大小无关。

本文将重点研究定义在一个带有单个孔洞 K_ε （参数 ε 固定）的二维有界区域上的拉普拉斯算子的谱性质。该区域的边界光滑性不作任何额外假设，而孔洞具有利普希茨边界。在原区域的边界上施加狄利克雷条件或诺伊曼条件，在孔洞的边界上施加罗宾条件，其系数取决于孔洞的大小。

我们的主要结果是证明：定义在扰动域上的拉普拉斯算子的谱收敛于定义在原区域上的拉普拉斯算子的谱，这种收敛是指豪斯多夫距离意义下的收敛。

论文结构。除本引言外，本文共分为 6 节。
在第 2 节中，我们陈述主要结果，并讨论一个一般性定理，即定理 2.4。在证明关于 Ω 和 $\Omega \setminus K_\varepsilon$ 上拉普拉斯算子的谱收敛的定理 2.1 时，我们将用到定理 2.4。

第 3 节包含变化的希尔伯特空间上算子谱收敛的主要工具

在第 4 节和第 5 节中，我们证明了此前已经提及的结果。
在第 6 节中，我们给出了一些在 [2] 中确立的辅助材料。

2 主要结果

本节介绍我们的主要结果。这些结果将在后续章节中证明。

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界区域，且 $K \subset \Omega$ 是一个具有利普希茨边界的紧致单连通集。我们记 $\Omega_K := \Omega \setminus K$。利用引理 4.2，二次型

$$q_1(u) = \int_{\Omega_K} |\nabla u|^2 \, dx\, dy + \gamma_K \int_{\partial K} |u|_K^2 \, d\mu, \quad u \in \mathcal{H}^1(\Omega_K), \tag{2.1}$$

$$q_2(u) = \int_{\Omega_K} |\nabla u|^2 \, dx\, dy + \gamma_K \int_{\partial K} |u|_K^2 \, d\mu, \quad u \in \mathcal{H}^1(\Omega_K) \cap \mathcal{H}_0^1(\Omega), \tag{2.2}$$

其中，μ 是 ∂K 上与弧长相关的测度，γ_K 是一个实数；它们都是闭的且下半有界的，因此定义了唯一的自伴~算子 $H_{\Omega_K}(\gamma_K)$和 $H_{\Omega_K}(\gamma_K)$，它们在各自的定义域上均作为拉普拉斯算子作用。我们将研究当孔洞 K 收敛到一个点时，算子~$H_{\Omega_K}(\gamma_K)$ $H_{\Omega_K}(\gamma_K)$的谱的收敛问题。

我们首先给出以下定理中的一项相当重要的结果。

定理 2.1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个有界开区域。假设 $\mathbb{B}_\varepsilon \subset \Omega$ 是一个球，其中心为某个 $x_0 \in \Omega$ 中的点，半径为 $\varepsilon > 0$。假设 $K = K_\varepsilon \subset \mathbb{B}_\varepsilon$ 是一个具有利普希茨边界的有界单连通紧集。设 H_Ω^N 和 H_Ω^D 分别是定义在未扰动区域 Ω 上的 Neumann 拉普拉斯算子和 Dirichlet 拉普拉斯算子，而 $H_{\Omega_{K_\varepsilon}}, H_{\Omega_{K_\varepsilon}}$ 是由 Ω_{K_ε} 上的 (2.1) 和 (2.2) 生成的算子，其中系数 $\gamma_{K_\varepsilon} > 0$ 满足

$$\gamma_{K_\varepsilon} = \varepsilon M_\varepsilon, \tag{2.3}$$

其中 M_ε 在 $M_\varepsilon = o\left(\frac{1}{\varepsilon^{3/2}}\right)$的条件下趋于无穷大。于是，当 ε充分小时，存在 $\eta(\varepsilon) > 0$，使得 $\eta(\varepsilon) \to 0$ 在 $\varepsilon \to 0$时，从而发生如下谱收敛

$$\overline{d}\left(\sigma_\bullet\left(H_{\Omega_{K_\varepsilon}}\right), \sigma_\bullet\left(H_\Omega^N\right)\right) \le \eta(\varepsilon),$$

$$\overline{d}\left(\sigma_\bullet\left(\widetilde{H}_{\Omega_{K_\varepsilon}}\right), \sigma_\bullet\left(H_\Omega^D\right)\right) \le \eta(\varepsilon),$$

其中 $\overline{d}$ 在 (3.9) 中定义，$\sigma_\bullet(\cdot)$ 表示全谱、本质谱或离散谱。此外，离散谱的重数保持不变。

前述结果引出了以下推论：

推论2.2. 假设 H_Ω^N具有纯离散谱，记为 $\lambda_k^N(\Omega)$（按重数重复计数），并令 $\lambda_k^D(\Omega)$ 为 H_Ω^D 的离散谱。那么，$H_{\Omega_{K_\varepsilon}}, \widetilde{H}_{\Omega_{K_\varepsilon}}$ 的本质谱下确界趋于无穷大，并且存在 $\eta_k(\varepsilon) > 0$，使得 $\eta_k(\varepsilon) \to 0$ 在 $\varepsilon \to 0$ 时满足

$$|\lambda_k^N(\Omega) - \lambda_k(\Omega_{K_\varepsilon})| \le \eta_k(\varepsilon),$$

$$|\lambda_k^D(\Omega) - \beta_k(\Omega_{K_\varepsilon})| \le \eta_k(\varepsilon)$$

对于足够小的 ε。这里，$\lambda_k(\Omega_{K_\varepsilon})$ 和 $\beta_k(\Omega_{K_\varepsilon})$ 表示 $H_{\Omega_{K_\varepsilon}}$ 和 $H_{\Omega_{K_\varepsilon}}$ 的离散谱~（位于本质谱以下），并按重数重复计数。

推论 2.3。在任意紧区间 $[0,\Lambda]$ 上， $H_{\Omega_{K_\varepsilon}}$ 、 H_Ω^N、 $\widetilde{H}_{\Omega_{K_\varepsilon}}$ 和 H_Ω^D 的谱之间的豪斯多夫距离收敛于零。

定理 2.1 的证明基于定理 3.1 以及以下定理:

定理 2.4.在定理2.1 的假设下，算子 H_Ω^N 和$H_{\Omega_{K_\varepsilon}}$ 是具有 $\delta(\varepsilon)\to 0$ as $\varepsilon\to 0$ 的 $\delta(\varepsilon)$ 阶 2 近似。算子 H_Ω^D 和 $\widetilde{H}_{\Omega_{K_\varepsilon}}$同样如此。

3 变化希尔伯特空间上算子谱收敛的主要工具

为方便读者，本节首先回顾一些基本事实，以确保定义在不同定义域上的两个算子能够谱收敛。更多信息请参阅 [12]。给定一个希尔伯特空间 H，其内积为 $(\cdot,\ \cdot)$，范数为 $\|\cdot\|$，并配有一个非负无界算子 A，我们与之关联一系列希尔伯特空间。

$$H_k := \mathrm{Dom}((A+I)^{k/2}),\quad \|u\|_k := \|(A+I)^{k/2}u\|,\ k\geq 0,$$

其中 I 为恒等算子。

我们将(H', A') 视为 (H, A)的某种扰动，并希望放宽这一假设，使得谱性质不再相同，但仍然接近。

定义 1。（参见 *[12]*）设我们有线性算子

$$\begin{aligned} J &: H \longrightarrow H', \qquad J_1 : H_1 \longrightarrow H_1' \\ J' &: H' \longrightarrow H, \qquad J_1' : H_1' \longrightarrow H_1. \end{aligned}$$

设 $\delta>0$ 和 $k\geq 1$。若满足以下条件，则称 (H, A) 与 (H', A') 是 δ 阶近似的:

$$\|Jf - J_1 f\|_0 \leq \delta\|f\|_1, \tag{3.1}$$
$$|(Jf,u) - (f,J'u)| \leq \delta\|f\|_0\|u\|_0, \tag{3.2}$$
$$\|u - JJ'u\|_0 \leq \delta\|u\|_1, \tag{3.3}$$
$$\|Jf\|_0 \leq 2\|f\|_0,\ \ \|J'u\|_0 \leq 2\|u\|_0, \tag{3.4}$$
$$\|(f - J'Jf)\|_0 \leq \delta\|f\|_1, \tag{3.5}$$
$$\|J'u - J_1'u\|_0 \leq \delta\|u\|_1 \tag{3.6}$$
$$|a(f,J_1'u) - a'(J_1 f,u)| \leq \delta\|f\|_k\|u\|_1, \tag{3.7}$$

对适当空间中的所有 f、u。这里， a 和 a' 表示分别与 A 和 A' 相关联的半双线性型。

我们用 $d_{\mathrm{Haussdorff}}(A,B)$ 表示子集 A、$B\subset\mathbb{R}$ 的豪斯多夫距离：

$$d_{\mathrm{Haussdorff}}(A,B):=\max\left\{\sup_{a\in A}d(a,B),\sup_{b\in B}d(b,A)\right\},\tag{3.8}$$

其中 $d(a,B):=\inf_{b\in B}|a-b|$。我们设

$$\overline{d}(A,B):=d_{\mathrm{Hausdorff}}\left((A+I)^{-1},(B+I)^{-1}\right)\tag{3.9}$$

对于 $[0,\infty$ 的闭子集）。

对于接下来的结果（源自 O. Post 的工作 [12],），我们有以下关于距离 d 的谱收敛定理。

定理 3.1. *[12]* 存在 $\eta(\delta)>0$，满足 $\eta(\delta)\to 0$，当 $\delta\to 0$ 时，使得

$$\overline{d}(\sigma_\bullet(A),\sigma_\bullet(A'))\le\eta(\delta)\tag{3.10}$$

对于所有彼此 δ-接近的非负算子与希尔伯特空间对 (H,A) 和 (H',A')，结论均成立。这里，$\sigma_\bullet(A)$ 表示 A 的全谱、必不可少谱或离散谱。此外，离散谱的重数 σ_{disc} 得以保持；也就是说，如果 $\lambda\in\sigma_{\mathrm{disc}}(A)$ 的重数为 $\mu>0$，那么算子 A' 存在 μ 个特征值（不一定彼此不同）属于区间 $(\lambda-\eta(\delta)\ \lambda+\eta(\delta))$。

现在我们转向定理 2.4 的证明。由于狄利克雷情形和诺伊曼情形的证明几乎相同，我们将只讨论诺伊曼情形。唯一的区别在于引理 6.3，但很容易根据 [2] 验证它在狄利克雷情形下也成立。

4 定理2.4的证明

在此阶段，我们将证明分为两个步骤。

步骤 1. 映射的构造 J,J',J_1,J_1'。

我们可以应用 [2] 的技巧。容易看出，$H=L^2(\Omega)$ $H'=L^2(\Omega_{K_\varepsilon})$ $A=A'=-\Delta$，H_1,H_1' 对应于索伯列夫空间 $\mathcal{H}^1(\Omega)$ 和$\mathcal{H}^1(\Omega_{K_\varepsilon})$ 以及 $H_2=\mathrm{Dom}(H_\Omega^N)$。范数 $\|\cdot\|_0$ 对应于 L^2 范数，

$$\begin{aligned}&\|u\|_1=\left(\|u\|_0^2+\|\nabla u\|_0^2+\gamma_{K_\varepsilon}\int_{\partial K_\varepsilon}|u|^2\,d\mu\right)^{1/2},\quad\text{for}\quad u\in\mathcal{H}^1(\Omega_{K_\varepsilon}),\\&\|u\|_1=\left(\|u\|_0^2+\|\nabla u\|_0^2\right)^{1/2},\quad\text{for}\quad u\in\mathcal{H}^1(\Omega)\\&\text{and}\quad\|f\|_2=\|-\Delta f+f\|_0.\end{aligned}$$

我们对所有 $u\in H$ 定义 $Ju=J_1u=u|_{\chi\Omega_{K_\varepsilon}}$，并对所有 $u\in H'$ 定义 $J'u=u\chi_{\Omega_{K_\varepsilon}}$。

现在来构造映射 $J_1'\colon H_1'\to H_1$。不失一般性，假设定理 2.1 和定理 2.4 中提到的球 $\mathbb{B}_\varepsilon$ 的中心

位于原点。令 $\epsilon \in (\varepsilon, 2\varepsilon)$ 为一个稍后确定的数，并令 $\mathbb{B}_\epsilon \supset \mathbb{B}_\varepsilon$ 再次表示一个以原点为中心、半径为 ϵ 的球，$\Omega_\epsilon := \Omega \backslash \mathbb{B}_\epsilon$。

我们将首先为光滑函数构造映射 J_1' first。对于每个$v \in C^\infty(\Omega_{K_\varepsilon})$，我们定义

$$J_1' v := \begin{cases} v, & \text{on} \quad \Omega_\epsilon, \\ \frac{r}{\epsilon} \tilde{v}(\epsilon, \varphi), & \text{on} \quad \mathbb{B}_\epsilon, \end{cases}$$

其中 $\tilde{v}(r, \varphi) = v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$。

现在，让我们构造映射 $J_1' u$ ，对于任意 $u \in H_1'$。利用 [7, 定理2,5.3.2], 中所描述的近似方法，对于收敛于零的固定序列 $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$，我们构造满足以下条件的序列 $v_{\eta_k} \in C^\infty(\Omega_{K_\varepsilon})$

$$\int_{\Omega_{K_\varepsilon}} |\nabla(u - v_{\eta_k})|^2 \, dxdy + \int_{\Omega_{K_\varepsilon}} |u - v_{\eta_k}|^2 \, dxdy < \eta_k \|u\|_1^2. \tag{4.11}$$

为了处理 $\int_{\partial K_\varepsilon} |u|^2 \, d\mu$ ，我们将使用迹不等式 [7]。我们将在关于 Lipschitz 界的辅助结果之后立即给出该不等式 [7]。

引理4.1。设 ω 是一个具有利普希茨边界的有界二维开集。则存在 $\delta > 0$ 和 $\mu \in C^\infty(\overline{\omega})$ 使得

$$\mu \cdot \nu \geq \delta, \quad a.e. \ on \quad \partial\omega,$$

其中 ν 是 $\partial\omega$ 的法向量。

引理 4.2. 设 $v \in \mathcal{H}^1(\omega)$，其中 ω 是一个边界为 Lipschitz 的二维区域。那么存在一个依赖于 ω 的常数 $K > 0$ ，使得

$$\int_{\partial\omega} |v|^2 d\mu \leq K \int_\omega \left(\delta |\nabla v|^2 + \frac{1}{\delta} |v|^2 \right) dx \, dy,$$

其中 K 仅取决于 μ 在 $C^1(\Omega)$ 和 $\delta \in (0, 1)$ 中的范数。

结合上述引理、 $\delta = \frac{1}{2}$ 以及不等式（4.11），我们得到

$$\begin{aligned} &\int_{\partial K_\varepsilon} |u - v_{\eta_k}|^2 \, d\mu \\ &\leq 2K \left(\int_{\Omega_{K_\varepsilon}} |\nabla(u - v_{\eta_k})|^2 \, dx \, dy + \int_{\Omega_{K_\varepsilon}} |u - v_{\eta_k}|^2 \, dx \, dy \right) \\ &< 2K\eta_k \|u\|_1^2. \end{aligned}$$

因此

$$\|u - v_{\eta_k}\|_1 < \sqrt{(1 + 2K\gamma_{K_\varepsilon}) \, \eta_k} \, \|u\|_1. \tag{4.12}$$

需要指出的是，鉴于不等式(4.19)和 (4.25)（稍后将证明），以及函数 J_1' 的构造，可知对于任意光滑函数 v，积分$\int_\Omega |\nabla J_1' v|^2 \, dx \, dy$ 和 $\int_\Omega |J_1' v|^2 dx \, dy$ 可以是

可由某个常数乘以 $\|v\|_1^2$ 从上方估计。结合引理 4.2，我们得到

$$\|J_1' v\|_1^2 \leq \overline{C}(\varepsilon)\|v\|_1^2, \tag{4.13}$$

其中 $\overline{C}(\varepsilon)$ 是某个常数。

由于系数 γ_{K_ε} 的正性以及引理 4.2，空间 H_1 的完备性等价于索伯列夫空间 $\mathcal{H}^1$ 的完备性。因此，利用 (4.12) 和 (4.13)，我们可以定义

$$J_1' u = \lim_{k\to\infty} J_1' v_{\eta_k}. \tag{4.14}$$

步骤 2。条件 (3.1)-(3.7) 对映射 J、J'、J_1、J_1' 成立。

事实上，我们有估计 (3.1)-(3.4) 在 $\delta = 0$ 下成立。

现在证明 (3.5)，即在定理 2.4 所述假设下，当 ε 足够小时，不等式 (3.5) 对 $\delta = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma_{K_\varepsilon}} + \varepsilon}\right)$ 成立。因此，根据 (2.3)，当 $\varepsilon \to 0$ 时，δ 收敛于零。

根据我们的构造，我们有

$$\begin{aligned}\|f - J'Jf\|_0^2 = \int_\Omega |f - J'f|_{\Omega_{K_\varepsilon}}|^2\, dx\, dy &= \int_\Omega |f - f\chi_{\Omega_{K_\varepsilon}}|^2\, dx\, dy \\ &= \int_{K_\varepsilon} |f|^2\, dxdy \leq \int_{\mathbb{B}_\varepsilon} |f|^2\, dx\, dy.\end{aligned} \tag{4.15}$$

为完成（3.5）的证明，我们使用以下引理，将其应用于$\eta = \varepsilon$ 和 $\Gamma = \emptyset$:

引理4.3. 设Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个有界开区域。假设 $\mathbb{B}_\epsilon \subset$Ω 是一个球，其中心位于某点 $x_0 \in$ Ω，半径为 $\epsilon > 0$。假设 $\Gamma \subset \mathbb{B}_\epsilon$是一个具有利普希茨边界的有界单连通紧集。那么，对于任意函数 $u \in \mathcal{H}^1$(($\mathbb{B}_\epsilon \setminus \Gamma$)，以下不等式成立

$$\int_{\mathbb{B}_\epsilon \setminus \Gamma} |u(x,y)|^2\, dxdy \leq C_1 \left(\frac{\epsilon}{\gamma_\Gamma} + \epsilon\right) \|u\|_1^2,$$

其中 $C_1 > 0$ 是一个常数，取决于 $\mathbb{B}_\epsilon$ 的边界与 Ω 的边界之间的距离。

令我们转到 (3.6)，即在定理 2.4给出的假设下，当 ε足够小时，不等式 (3.6) 满足 $\delta = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma_{K_\varepsilon}} + \varepsilon}\right)$。因此，根据 (2.3)，$\delta$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时收敛于零。

利用 J' 和 J_1' 的构造以及 C^∞(Ω$_{K_\varepsilon}$)在空间 H_1' 中的完备性，只需证明(3.6)对 $u \in C^\infty$(Ω$_{K_\varepsilon}$)成立。

考虑到 $J'u = 0$ 在 K_ε、 $J'u = u$ 在 Ω_{K_ε}，且 $J_1'u = u$ 在 $\Omega \setminus \mathbb{B}_\epsilon$，有

$$\begin{aligned}\|J'u - J_1'u\|_0^2 &= \int_{\Omega_{K_\varepsilon}} |u - J_1'u|^2 \, dxdy + \int_{K_\varepsilon} |J_1'u|^2 \, dxdy \\ &= \int_{\mathbb{B}_\epsilon \setminus K_\varepsilon} |u - J_1'u|^2 \, dxdy + \int_{K_\varepsilon} |J_1'u|^2 \, dxdy \\ \leq 2 \int_{\mathbb{B}_\epsilon \setminus K_\varepsilon} |u|^2 \, dxdy &+ 2 \int_{\mathbb{B}_\epsilon} |J_1'u|^2 \, dxdy + \int_{K_\epsilon} |J_1'u|^2 \, dxdy. \end{aligned} \tag{4.16}$$

为了估计右端的第一个积分 (4.16)，我们将引理 4.3 用于 $\eta = \epsilon$ 和 $\Gamma = K_\varepsilon$。

现在来考察第二项。转换为极坐标后，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |J_1'u|^2 \, dx \, dy &= \int_0^\epsilon \int_0^{2\pi} r \left| \frac{r}{\epsilon} \tilde{u}(\epsilon, \varphi) \right|^2 \, dr \, d\varphi \\ &\leq \int_0^\epsilon \int_0^{2\pi} r |\tilde{u}(\epsilon, \varphi)|^2 \, dr \, d\varphi \leq \epsilon \int_0^\epsilon \int_0^{2\pi} |\tilde{u}(\epsilon, \varphi)|^2 \, dr \, d\varphi \\ &= \epsilon^2 \int_0^{2\pi} |\tilde{u}(\epsilon, \varphi)|^2 \, d\varphi.\end{aligned}$$

考虑到 $\epsilon \int_0^{2\pi} |\tilde{u}(\epsilon, \varphi)|^2 \, d\varphi$ 与曲线积分 $\int_{\partial \mathbb{B}_\epsilon} |u|^2 \, d\mu$相同，上述估计可得

$$\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |J_1'u|^2 \, dxdy \leq \epsilon \int_{\partial \mathbb{B}_\epsilon} |u|^2 \, d\mu. \tag{4.17}$$

根据将引理 4.2 应用于 $\delta = \frac{1}{2}$，可将 (4.17) 的右端估计为 $2K\epsilon \int_{\Omega \setminus \mathbb{B}_\epsilon} (|\nabla u|^2 + |u|^2) \, dx \, dy$。接着使用下面这个显然成立的估计，它源于 γ_{K_ε}的正性:

$$\int_{\Omega \setminus \mathbb{B}_\epsilon} (|\nabla g|^2 + |g|^2) \, dx \, dy \leq \|g\|_1^2, \quad \text{for all} \quad g \in \mathcal{H}^1(\Omega_{K_\epsilon}), \tag{4.18}$$

以及 $\epsilon \leq 2\varepsilon$ 这一事实，我们有

$$\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |J_1'u|^2 \, dxdy \leq 4K\varepsilon \|u\|_1^2. \tag{4.19}$$

事实上，我们有

$$\int_{K_\varepsilon} |J_1'u|^2 \, dx \, dy \leq 4K\varepsilon \|u\|_1^2,$$

由于

$$\int_{K_\varepsilon} |J_1'u|^2 \, dx \, dy \leq \int_{B_\epsilon} |J_1'u|^2 \, dx \, dy.$$

结合上述不等式以及 (4.19)，(4.16) 的右端可以估计如下

$$\|J'u - J_1'u\|_0^2 \le \left(2C_1\left(\frac{\varepsilon}{\gamma_{K_\varepsilon}} + \varepsilon\right) + 12K\varepsilon\right)\|u\|_1^2$$

这就证明了对于足够小的 ε，带有 $\delta = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma_{K_\varepsilon}} + \varepsilon}\right)$ 的 (3.6)。

现在给出估计 (3.7) 的证明，即在定理 2.4 给出的假设下，当 ε 足够小时，不等式 (3.7) 对 $k = 2$ 和 $\delta = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{1/6} + \gamma_{K_\varepsilon}^{1/2}\varepsilon^{1/4}\right)$ 成立。因此，根据 (2.3)，δ 在 $\varepsilon \to 0$ 时趋于零。

和之前一样，不妨设 $u \in C^\infty(\Omega_{K_\varepsilon})$。由于在 $\Omega_{\mathbb{B}_\epsilon}$ 上 $J_1'u = u$，且在 Ω_{K_ε} 上 $J_1u = u$，我们有

$$\begin{aligned}
&|a(f, J_1'u) - a'(J_1f, u)| \\
&= \left|\int_\Omega \nabla f\,\overline{\nabla(J_1'u)}\,dx\,dy - \int_{\Omega_{K_\varepsilon}} \nabla(J_1f)\,\overline{\nabla u}\,dx\,dy - \gamma_{K_\varepsilon}\int_{\partial K_\varepsilon}(J_1f)\,\overline{u}\,d\mu\right| \\
&= \left|\int_{\Omega_{\mathbb{B}_\epsilon}} \nabla f\,\overline{\nabla u}\,dx\,dy + \int_{\mathbb{B}_\epsilon} \nabla f\,\overline{\nabla(J_1'u)}\,dx\,dy - \int_{\Omega_{K_\varepsilon}} \nabla(J_1f)\,\overline{\nabla u}\,dx\,dy - \gamma_{K_\varepsilon}\int_{\partial K_\varepsilon}(J_1f)\,\overline{u}\,d\mu\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{B}_\epsilon} \nabla f\,\overline{\nabla(J_1'u)}\,dx\,dy - \int_{\mathbb{B}_\epsilon\setminus K_\varepsilon} \nabla f\,\overline{\nabla u}\,dx\,dy - \gamma_{K_\varepsilon}\int_{\partial K_\varepsilon}(J_1f)\,\overline{u}\,d\mu\right| \\
&\le \left|\int_{\mathbb{B}_\epsilon} \nabla f\,\overline{\nabla(J_1'u)}\,dx\,dy\right| + \left|\int_{\mathbb{B}_\epsilon\setminus K_\varepsilon} \nabla f\,\overline{\nabla u}\,dx\,dy\right| + \gamma_{K_\varepsilon}\left|\int_{\partial K_\varepsilon}(J_1f)\,\overline{u}\,d\mu\right|. \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

让我们估计(4.20)中的每一项。从第一项开始，我们得到

$$\left|\int_{\mathbb{B}_\epsilon} \nabla f\,\overline{\nabla(J_1'u)}\,dxdy\right| \le \left(\int_{\mathbb{B}_\epsilon}|\nabla f|^2\,dxdy\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{B}_\epsilon}|\nabla(J_1'u)|^2\,dxdy\right)^{1/2}. \qquad (4.21)$$

由于 $f \in \mathcal{H}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，然后应用引理 6.1（见附录），取定义域 Ω' 使得 $\Omega' \subset \Omega$ 且 $\mathbb{B}_\epsilon \subset \Omega'$，并利用 $\epsilon \le 2\varepsilon$ 这一事实，(4.21) 右端的第一项可估计如下

$$\int_{\mathbb{B}_\epsilon}|\nabla f|^2\,dx\,dy \le 2^{4/3}C_2\varepsilon^{4/3}\int_{\Omega'}|-\Delta f + f|^2\,dx\,dy \le 2^{4/3}C_2\varepsilon^{4/3}\|f\|_2^2. \quad (4.22)$$

为了进一步证明(4.21)的上界，我们需要

估计积分 $\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |\nabla(J_1' u)|^2 \, dx \, dy$。转换到极坐标后，我们得到

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |\nabla J_1' u|^2 \, dx \, dy &= \int_{\mathbb{B}_\epsilon} \left(\left| \frac{\partial (J_1' u)}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial (J_1' u)}{\partial y} \right|^2 \right) dx \, dy \\
&= \int_0^{\epsilon} \int_0^{2\pi} r \left| \frac{1}{\epsilon} \tilde{u}(\epsilon, \varphi) \, \cos\varphi - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}(\epsilon, \varphi) \, \sin\varphi \right|^2 dr \, d\varphi \\
&+ \int_0^{\varepsilon} \int_0^{2\pi} r \left| \frac{1}{\epsilon} \tilde{u}(\epsilon, \varphi) \, \sin\varphi + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}(\epsilon, \varphi) \, \cos\varphi \right|^2 dr \, d\varphi \\
&\leq \frac{4}{\epsilon} \int_0^{\epsilon} \int_0^{2\pi} \left(|\tilde{u}(\epsilon, \varphi)|^2 + \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}(\epsilon, \varphi) \right|^2 \right) dr \, d\varphi \\
&= 4 \int_0^{2\pi} |\tilde{u}(\epsilon, \varphi)|^2 d\varphi + 4 \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}(\epsilon, \varphi) \right|^2 d\varphi. \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

如同（3.6）的证明中一样，我们发现

$$\int_0^{2\pi} |\tilde{u}(\epsilon, \varphi)|^2 \, d\varphi = \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial \mathbb{B}_\epsilon} |u|^2 \, d\mu.$$

因此，应用引理 4.2 于 $\delta = \frac{1}{2}$ 并结合不等式 (4.18)，我们有

$$\int_0^{2\pi} |\tilde{u}(\epsilon, \varphi)|^2 \, d\varphi \leq \frac{2K}{\epsilon} \|u\|_1^2. \qquad (4.24)$$

现在我们来讨论(4.23) 的第二项。根据用于 $g = u$的引理6.2（见附录），存在一个数 $\tau \in (\varepsilon, 2\varepsilon)$，使得

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}(\tau, \varphi) \right|^2 d\varphi \leq 4 \int_{\mathbb{B}_{2\varepsilon} \setminus \mathbb{B}_\varepsilon} (|\nabla u|^2 + |u|^2) \, dx dy,$$

其中 $\tilde{u}(r, \varphi) := u(r \cos\varphi, r \sin \varphi)$，而 $\tau \in (\varepsilon, 2\varepsilon)$ 是某个数。

如果 τ 属于区间 $(\varepsilon, 3\varepsilon/2]$，那么我们取 ϵ 为区间 $(\varepsilon, 3\varepsilon/2]$中所有此类数的上确界。反之，如果 $\tau \in (3\varepsilon/2, 2\varepsilon)$，那么令 ϵ 为此类数的下确界。由于 u 是一个光滑函数，上述不等式在 $\tau = \epsilon$下成立。

将其与（4.18）结合可得

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}(\epsilon, \varphi) \right|^2 d\varphi \leq 4 \|u\|_1^2.$$

因此，根据(4.23)、(4.24)、上述估计以及$\epsilon \geq \varepsilon$这一事实，我们有

$$\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |\nabla J_1' u|^2 \, dx \, dy \leq \left(\frac{8K}{\varepsilon} + 16 \right) \|u\|_1^2. \qquad (4.25)$$

最后，利用上述界和不等式 (4.22)，我们如下估计 (4.21) 的右端

$$\left|\int_{\mathbb{B}_\epsilon} \nabla f\,\overline{\nabla(J_1' u)}\,dx\,dy\right| \le 2^{13/6}(C_2(K+2\varepsilon))^{1/2}\varepsilon^{1/6}\|f\|_2\|u\|_1. \tag{4.26}$$

现在考虑（4.20）中的第二项。由（4.18）和（4.22）可得

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{B}_\epsilon\setminus K_\varepsilon} \nabla f\,\overline{\nabla u}\,dx\,dy\right| &\le \left(\int_{\mathbb{B}_\epsilon}|\nabla f|^2\,dx\,dy\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{B}_\epsilon\setminus K_\varepsilon}|\nabla u|^2\,dx\,dy\right)^{1/2}\\ &\le 2^{2/3}(C_2)^{1/2}\varepsilon^{2/3}\|f\|_2\|u\|_1. \end{aligned}\tag{4.27}$$

最后我们转向(4.20)中的第三项。我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial K_\varepsilon}(J_1 f)\,\overline{u}\,d\mu\right| &\le \left(\int_{\partial K_\varepsilon}|J_1 f|^2\,d\mu\right)^{1/2}\left(\int_{\partial K_\varepsilon}|u|^2\,d\mu\right)^{1/2}\\ &= \left(\int_{\partial K_\varepsilon}|f|^2\,d\mu\right)^{1/2}\left(\int_{\partial K_\varepsilon}|u|^2\,d\mu\right)^{1/2}. \end{aligned}\tag{4.28}$$

我们首先为（4.28）右侧的第一个积分找到合适的估计。

设 $\Pi(d) = (-d,d)^2$, $d>0$ 为属于Ω 且包含 K_ε的最大正方形。对于几乎所有属于 K_ε 在坐标轴 X 上的投影的 x_0，令 $y(x_0)\in(-d,d)$ 为满足以下条件的点:

$$|f(x_0,y(x_0))|^2 \le \frac{1}{d}\int_{-d}^{d}|f(x_0,t)|^2\,dt\,.$$

我们固定任意 $y\in(-d,d)$。不妨设 $y>y(x_0)$。那么

$$\begin{aligned}|f(x_0,y)|^2 &= \left|f(x_0,y(x_0))+\int_{y(x_0)}^{y}\frac{\partial f}{\partial t}(x_0,t)\,dt\right|^2\\ &\le 2\,|f(x_0,y(x_0))|^2+2\left|\int_{y(x_0)}^{y}\frac{\partial f}{\partial t}(x_0,t)\,dt\right|^2\\ &\le \frac{2}{d}\int_{-d}^{d}|f(x_0,t)|^2\,dt+2(y-y(x_0))\int_{y_0(x_0)}^{y}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x_0,t)\right|^2\,dt\\ &\le \frac{2}{d}\int_{-d}^{d}|f(x_0,t)|^2\,dt+4d\int_{-d}^{d}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x_0,t)\right|^2\,dt\,. \end{aligned}\tag{4.29}$$

不失一般性，假设未扰动集合的边界（即 $\frac{1}{\varepsilon}K_\varepsilon$）可参数化为 $(x,y_1(x))$ $x\in(-1,1)$，其中 y_1 是某个 C^1-光滑函数。于是， K_ε 的边界参数化与 $(x,\varepsilon y_1(x/\varepsilon))$ $x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 重合。

对 $|f(x,y)|^2$ 在 ∂K_ε 上积分，并利用不等式 (4.29)，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial K_\varepsilon} |f(x,y)|^2 \, d\mu = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(x, \varepsilon y_1(x/\varepsilon))|^2 \, \left(1 + y_1'^2(x/\varepsilon)\right)^{1/2} \, dx \\
&\leq \left(1 + \|y_1'\|^2_{L^\infty(-1,1)}\right)^{1/2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\frac{2}{d} \int_{-d}^{d} |f(x,t)|^2 \, dt + 4d \int_{-d}^{d} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right|^2 \, dt \right) dx \\
&\leq 2\max\{1/d, 2d\} \left(1 + \|y_1'\|^2_{L^\infty(-1,1)}\right)^{1/2} \int_{\Omega_\varepsilon} \left(|f|^2 + |\nabla f|^2\right) dxdy \,, \qquad (4.30)
\end{aligned}$$

其中 $\Omega_\varepsilon := (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-d, d)$。

为了继续证明，我们需要以下辅助结果 [9]:

引理 4.4。设 $\Pi' \subset \mathbb{R}^n$ 是一个凸集， G 和 Q 是 Π' 中的任意可测集，且 $\mu(G) \neq 0$。那么，对于所有 $v \in \mathcal{H}^1(\Pi')$，以下不等式成立:

$$\begin{aligned}
&\int_Q |v|^2 \, dx \, dy \qquad (4.31) \\
&\leq \frac{2\mu(Q)}{\mu(G)} \int_G |v|^2 \, dx \, dy + \frac{C(n)(d(\Pi'))^{n+1} (\mu(Q))^{1/n}}{\mu(G)} \int_{\Pi'} |\nabla v|^2 \, dx \, dy,
\end{aligned}$$

其中， $d(\Pi')$ 是 Π' 的参数， μ 是 $\mathbb{R}^n$上的勒贝格测度，常数 $C(n)$ 仅取决于 $\mathbb{R}^n$ 的维数。

设 $G = \Pi' = \Pi(d)$ 且 $Q = \Omega_\varepsilon$。然后利用引理 4.4 对函数f ，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\varepsilon} |f|^2 \, dx \, dy \\
&\leq \frac{8\varepsilon d}{\mu(\Pi(d))} \int_{\Pi(d)} |f|^2 \, dx \, dy + \frac{2C(2)(d(\Omega))^3 \sqrt{\varepsilon d}}{\mu(\Pi(d))} \int_{\Pi(d)} |\nabla f|^2 \, dx \, dy, \\
&\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla f|^2 \, dx \, dy \\
&\leq \frac{8\varepsilon d}{\mu(\Pi(d))} \int_{\Pi(d)} |\nabla f|^2 \, dx \, dy + \frac{2C(2)(d(\Omega))^3 \sqrt{\varepsilon d}}{\mu(\Pi(d))} \int_{\Pi(d)} \left(\left| \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right|^2 + \left| \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right|^2 \right) dx \, dy \\
&\leq \frac{8\varepsilon d}{\mu(\Pi(d))} \int_{\Pi(d)} |\nabla f|^2 \, dx \, dy + \frac{2C(2)(d(\Omega))^3 \sqrt{\varepsilon d}}{\mu(\Pi(d))} \int_{\Pi(d)} \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|^2 \right) dx \, dy \,.
\end{aligned}$$

利用上述界限，可以证明当 ε充分小时，以下结论成立

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left(|\nabla f|^2 + |f|^2\right) dxdy \leq \tilde{c} \sqrt{\varepsilon} \, \|f\|_{\mathcal{H}^2(\Pi(d))}, \qquad (4.32)$$

其中

$$\tilde{c} = \frac{2C(2)(d(\Omega))^3 \sqrt{d}}{\mu(\Pi(d))} = \frac{C(2)(d(\Omega))^3}{2d\sqrt{d}}$$

并且 $\|f\|_{\mathcal{H}^2(\Pi(d))}$ 表示 f 的 Sobolev $\mathcal{H}^2(\Pi(d))$ 范数。

接下来我们需要以下内部正则性定理 [1]:

定理 4.5.（内部正则性定理。）假设 $h \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ 是 $-\Delta h = w$ 的弱解。那么 $h \in \mathcal{H}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，并且对每个 $\Omega_0 \subset \Omega$，存在一个常数 $c = c(\Omega_0)$，它与 h 和 w 无关，使得:

$$\|h\|_{\mathcal{H}^2(\Omega_0)} \leq c\left(\|h\|_{L^2(\Omega)} + \|w\|_{L^2(\Omega)}\right). \tag{4.33}$$

鉴于上述定理，(4.32) 的右端可以估计如下。

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla f|^2 + |f|^2)\, dx\, dy \leq c\,\tilde{c}\,\sqrt{\varepsilon} \int_{\Omega} (|f|^2 + |\Delta f|^2)\, dx\, dy, \tag{4.34}$$

其中某个常数 $c = c(d)$ 不依赖于 ε。

根据不等式 (4.30)、(4.34) 和引理 6.3（见附录），我们有

$$\begin{aligned}\int_{\partial K_\varepsilon} |f(x,y)|^2\, d\mu &\leq 2c\,\tilde{c}\max\{1/d, 2d\}\left(1 + \|y_1'\|^2_{L^\infty(-1,1)}\right)^{1/2} \sqrt{\varepsilon} \int_{\Omega} (|f|^2 + |\Delta f|^2)\, dxdy \\ &\leq 2c\,\tilde{c}\max\{1/d, 2d\}\left(1 + \|y_1'\|^2_{L^\infty(-1,1)}\right)^{1/2} \sqrt{\varepsilon}\, \|f\|_2^2 .\end{aligned}$$

上述结合了这一事实，即

$$\gamma_{K_\varepsilon} \int_{\partial K_\varepsilon} |u|^2\, d\mu \leq \|u\|_1^2$$

将不等式 (4.28) 右端估计为如下形式

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\partial K_\varepsilon} (J_1 f)\, \overline{u}\, d\mu\right| \\ &\leq \left(\frac{2c\,\tilde{c}\max\{1/d, 2d\}}{\gamma_{K_\varepsilon}}\right)^{1/2} \left(1 + \|y_1'\|^2_{L^\infty(-1,1)}\right)^{1/4} \varepsilon^{1/4}\, \|f\|_2 \|u\|_1 .\end{aligned}$$

由 (4.26)、(4.27) 以及上述不等式可知，不等式 (4.20) 的右端满足

$$\text{r.h.s.}(4.20) = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{1/6} + \gamma_{K_\varepsilon}^{1/2}\varepsilon^{1/4}\right)\, \|f\|_2\, \|u\|_1, \quad \varepsilon \to 0,$$

至此，证明完成。 □

5 引理 4.3 的证明

令 M_ϵ 为 $\mathbb{B}_\epsilon \setminus \Gamma$ 的子集，使得对于每个点 (x_0, y_0)，$\in M_\epsilon$ 直线 $l_{x_0} := \{x = x_0\}$ 与 Γ 的边界至少相交一次。令 $(x_0, y_1(x_0))$ 为 l_{x_0} 与 $\partial\Gamma$ 的交点，并令 $(x_0, y_2(x_0)) \in \Omega$ 为该点，使得

使得连接 $(x_0, y_1(x_0, y_0))$ 和$(x_0, y_2(x_0, y_0))$ 的开区间属于 Ω，且与 Γ 的交集为空。不失一般性，假设 $y_1(x_0) < y_2(x_0)$。那么对于任意 $u \in \mathcal{H}^1(\mathbb{B}_\varepsilon \setminus \Gamma)$ 以及几乎所有的 $(x_0, y_0) \in M_\epsilon$我们有

$$u(x_0, y_0) = u(x_0, y_1(x_0, y_0)) + \int_{y_1(x_0,y_0)}^{y} \frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t)\, dt.$$

令 P_ϵ 表示 M_ϵ 在轴 $\mathbb{X}$ 上的投影。我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{M_\epsilon} |u(x,y)|^2\, dx\, dy \\
&\le 2\int_{M_\epsilon} |u(x, y_1(x,y))|^2\, dx\, dy + 2\int_{M_\epsilon} \left| \int_{y_1(x,y)}^{y} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, dt \right|^2 dx\, dy \\
&= 2\int_{P_\epsilon} \int_{\{y:\,(x,y)\in M_\epsilon\}} |u(x, y_1(x))|^2\, dx dy \\
&+2\int_{P_\epsilon} \int_{\{y:\,(x,y)\in M_\epsilon\}} \left| \int_{y_1(x,y)}^{y} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, dt \right|^2 dx\, dy \\
&\le 2\int_{P_\epsilon} \int_{\{y:\,(x,y)\in M_\epsilon\}} |u(x, y_1(x))|^2\, dx\, dy \\
&+2\int_{P_\epsilon} \int_{\{y:\,(x,y)\in M_\epsilon\}} (y - y_1(x)) \int_{y_1(x)}^{y} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right|^2 dt\, dx\, dy \\
&\le 4\epsilon \int_{P_\epsilon} |u(x, y_1(x))|^2\, dx + 8\epsilon^2 \int_{P_\epsilon} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right|^2 dx\, dt \\
&\le 4\epsilon \int_{P_\epsilon} |u(x, y_1(x))|^2\, dx + 8\epsilon^2 \int_{\mathbb{B}_\epsilon \setminus \Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right|^2 dx\, dt \\
&\le 4\epsilon \int_{P_\epsilon} |u(x, y_1(x))|^2\, dx + 8\epsilon^2 \|u\|_1^2. \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

由于集合 $\{(x, y_1(x))\}$, $x \in P_\epsilon$ 是 Γ 的一部分，因此

$$\begin{aligned}
\int_{P_\epsilon} |u(x, y_1(x))|^2\, dx &\le \int_{P_\epsilon} \left(1 + y_1'(x)^2\right)^{1/2} |u(x, y_1(x))|^2\, dx \\
&= \int_{\Gamma \cap \{(x,y):\, x\in P_\epsilon\}} |u|^2\, d\mu \le \int_\Gamma |u|^2\, d\mu\,.
\end{aligned}$$

回到不等式 (5.1)，并将上述界与以下事实结合起来

$$\int_\Gamma |u|^2\, d\mu \le \frac{1}{\gamma_\Gamma} \|u\|_1^2$$

我们得到

$$\int_{M_\epsilon} |u(x,y)|^2\, dx dy \le 4\left(\frac{\epsilon}{\gamma_\Gamma} + 2\epsilon^2\right) \|u\|_1^2\,. \qquad (5.2)$$

现在转到子集$(\mathbb{B}_\epsilon \setminus \Gamma) \setminus M_\epsilon$。对于任意 $(x_0, y_0) \in (\mathbb{B}_\epsilon \setminus \Gamma) \setminus M_\epsilon$，令 $(x_0, y_3(x_0))$ 满足 $y_3(x_0) < y_0$，为直线 l_{x_0} 与Ω 的边界的交点。容易验证，存在 $y_4(x_0) \in (y_3(x_0), y_0)$ 使得

$$|u(x_0, y_4)| \le \frac{1}{\sqrt{y_0 - y_3(x_0)}} \sqrt{\int_{y_3(x_0)}^{y_0} |u(x_0, z)|^2 \, dz}.$$

因此

$$\begin{aligned}
|u(x_0, y_0)|^2 &= \left| u(x_0, y_4(x_0)) + \int_{y_4(x_0)}^{y_0} \frac{\partial u}{\partial z}(x_0, z) \, dz \right|^2 \\
&\le 2|u(x_0, y_4(x_0))|^2 + 2(y_0 - y_4(x_0)) \int_{y_4(x)}^{y} \left| \frac{\partial u}{\partial z}(x, z) \right|^2 dy \\
&\le \frac{2}{y_0 - y_3(x_0)} \int_{y_3(x_0)}^{y_0} |u(x_0, z)|^2 \, dz + 2(y_0 - y_3(x_0)) \int_{y_3(x_0)}^{y_0} \left| \frac{\partial u}{\partial z}(x_0, z) \right|^2 dz \\
&\le \frac{2}{\operatorname{dist}((x_0, y_0), \partial\Omega)} \int_{y_3(x_0)}^{y_0} |u(x_0, z)|^2 \, dz + 2\operatorname{diam}(\Omega) \int_{y_3(x_0)}^{y_0} \left| \frac{\partial u}{\partial z}(x_0, z) \right|^2 dz \\
&\le \widetilde{C} \left(\int_{y_3(x_0)}^{y_0} |u(x_0, z)|^2 \, dz + \int_{y_3(x_0)}^{y_0} \left| \frac{\partial u}{\partial z}(x_0, z) \right|^2 dz \right),
\end{aligned}$$

其中，$\operatorname{diam}(\Omega)$是 Ω 的直径，且 $\operatorname{dist}((x_0, y_0), \partial\Omega)$ 是 (x_0, y_0) 与 Ω 的边界之间的距离，并且

$$\widetilde{C} = 2\max\left\{ \frac{1}{\operatorname{dist}((x_0, y_0), \partial\Omega)}, \operatorname{diam}(\Omega) \right\}.$$

令 P'_ϵ为$(\mathbb{B}_\epsilon \setminus \Gamma) \setminus M_\epsilon$ 在轴 $\mathbb{X}$上的投影。因此我们得到

$$\begin{aligned}
\int_{(\mathbb{B}_\epsilon \setminus \Gamma) \setminus M_\epsilon} |u(x, y)|^2 \, dxdy &\le \widetilde{C} \int_{(\mathbb{B}_\epsilon \setminus \Gamma) \setminus M_\epsilon} \int_{y_3(x)}^{y} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial z}(x, z) \right|^2 + |u(x, z)|^2 \right) dzdxdy \\
&= \widetilde{C} \int_{P'_\epsilon} \int_{\{y : (x,y) \in (\mathbb{B}_\epsilon \setminus \Gamma) \setminus M_\epsilon\}} \int_{y_3(x)}^{y} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial z}(x, z) \right|^2 + |u(x, z)|^2 \right) dzdxdy \, .
\end{aligned}$$

最后，

$$\int_{(\mathbb{B}_\epsilon \setminus \Gamma) \setminus M_\epsilon} |u(x, y)|^2 \, dxdy \le 2\widetilde{C}\epsilon \int_{\Omega \setminus \Gamma} (|\nabla u|^2 + |u|^2) \, dxdy \le 2\widetilde{C}\epsilon \|u\|_1^2 \, .$$

结合式（5.2），这就证明了引理。

$$C_1 = \max\{2\widetilde{C} + 8\varepsilon, 4\} < \max\{2\widetilde{C} + 8, 4\}.$$

□

6 附录

本节提及若干在 [2] 中证明的有用引理。

引理6.1。设Ω′ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个有界开区域，并设 $p \in \Omega'$ 是某个固定点。假设 $\mathbb{B}_\epsilon \subset \Omega'$ 是一个球，其中心为 p ，半径为 $\epsilon > 0$。对于任意函数 $g \in \mathcal{H}^2(\Omega')$，以下估计成立

$$\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |\nabla g|^2 \, dxdy \leq C_2 \epsilon^{4/3} \int_{\Omega'} |-\Delta g + g|^2 \, dxdy,$$

其中常数 C_2 取决于 Ω。

引理6.2.令 $\mathbb{B}_{2\varepsilon}$ 和 $\mathbb{B}_\varepsilon$ 为以原点为中心、半径分别为 ε 和 2ε的球。令 $g \in \mathcal{H}^1(\mathbb{B}_{2\varepsilon} \setminus \mathbb{B}_\varepsilon)$。则存在 $\tau \in (\varepsilon, 2\varepsilon)$ 使得

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \varphi}(\tau, \varphi) \right|^2 d\varphi \leq 4 \int_{\mathbb{B}_{2\varepsilon} \setminus \mathbb{B}_\varepsilon} (|\nabla g|^2 + |g|^2) \, dxdy,$$

其中 $\tilde{g}(r, \varphi) := g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$。

引理 6.3. 对任意 $z \in \mathrm{Dom}(H_\Omega^N)$，以下估计成立

$$\int_\Omega |-\Delta z + z|^2 \, dxdy \geq \int_\Omega (|\Delta z|^2 + |z|^2) \, dxdy.$$

致谢

D.B.感谢捷克科学基金会（GACR）项目 21-07129S 的支持。

参考文献

[1] L. Beck, 《椭圆正则性理论》, Springer InternationalPublishing, 瑞士, 2016

[2]D. Barseghyan、B. Schneider 和 L.H. Hai, 《扰动域中的诺伊曼拉普拉斯算子》, 《地中海数学杂志》（2022）, 19(126), 1–17。

[3] D.I. Borisov, A.I. Mukhametrakhimova, 关于多维域中带小孔的椭圆算子的范数预解式收敛, 《数学科学杂志》232（2018）, 283–298。

[4] M. Balzano 和 L. Notarantonio，黎曼流形中带有较小随机孔洞的狄利克雷问题的渐近行为，《帕多瓦大学数学研讨会纪要》100（1998），249–282。[5] A. Colette，O. Post，剧烈扰动流形：范数预解式收敛与谱收敛，《谱理论杂志》，欧洲数学会，即将出版。[6] D. Daners，变化域上的狄利克雷问题，《微分方程杂志》188（2003），591–624。[7] L. C. Evans，《偏微分方程》，美国数学会，2010。[8] P. Exner，D. Borisov，通过几何扰动逼近二维域中的点相互作用，《数学科学通报》（2022）2250003。[9] V. A. Marchenko，E. Ya. Khruslov，《偏微分方程的均匀化》，数学物理进展丛书，第46卷，Birkh¨auser，波士顿，2006。[10]V. G. Maz’ya，S. A. Nazarov，B. A. Plamenewskii，《奇异扰动域中椭圆边值问题的渐近理论》，第I、II卷。算子理论：进展与应用，第111、112卷。Birkh¨auser，巴塞尔（2000）（译自1991年 Akademie Verlag 出版的德文原著）[11] S. Ozawa，带小球形诺伊曼边界的域的谱，《日本学士院纪要，A辑，数学科学》58(5)（1982），190–192。[12] O. Post，准一维空间的谱收敛，《亨利·庞加莱年刊》7（2006），933–973。[13] J. Rauch，M. Taylor，剧烈扰动域上的位势理论与散射理论，《泛函分析杂志》18（1975），27–59。[14] B. Schweizer，小型亥姆霍兹共振器的低频谱，《英国皇家学会A辑：数学、物理与工程科学论文集》：20140339，2015。