arXiv:2304.03205v1 [math.DG] 6 Apr 2023

卡诺群中正规曲线逃离紧集

ENRICO LE DONNE 和 NICOLA PADDEU

摘要。在次芬斯勒 Carnot群中，我们考虑满足庞特里亚金极大值原理所导出的正规方程的曲线。我们证明，除常值曲线外，每一条这样的曲线都会以定量方式离开任意紧集。具体而言，时刻 0 与时刻 t 处两点之间的距离至少以 $t^{1/s}$ 的阶增长，其中 s 表示卡诺群的阶数。特别地，次芬斯勒 Carnot群中不存在周期正规测地线。

目录

1. 引言 1 1.1. 次黎曼卡诺群中闭环的基本情形 2 1.2. 证明策略 3 1.3. 论文结构 3 2. 预备知识 3 2.1. 次芬斯勒几何与卡诺群 3 2.2. 齐性空间与自相似距离 4 2.3. 庞特里亚金极大值原理与正规曲线 5 3. 主要结果的证明 10 3.1. 膨胀的微分 10 3.2. 定理 1.1 的证明 11 3.3. 推论 1.2 的证明 12 4. 一些例子 14 4.1. 终点可任意接近原点的曲线 14 4.2. 定理1.1中指数的最优性 15 参考文献 16

1. 引言

本文源于以下问题：次黎曼流形是否存在任意短的测地线环？重要的次黎曼流形包括卡诺群，它们具有膨胀结构，因此是自相似的。因此，对于这些空间，这个问题可以改述为：卡诺群中是否存在测地线环？我们指出，欧几里得空间中不仅不存在测地线环，严格凸范数的赋范向量空间中也不存在。有限维赋范向量空间恰好是幂零阶数为 1、配备测地距离的卡诺群。关于卡诺群的介绍，以及它们配备

日期：2023年4月6日。

卡诺-卡拉泰奥多里距离时恰好是齐次、局部紧致、测地且具有膨胀的度量空间这一事实，请参阅 ′和 。

卡诺群中的一些困难在于，距离函数可能不是凸的，在每个尺度上都存在由多条测地线连接的点对，而且测地线可能不是全局长度最短的。然而，与其他次黎曼问题一样，最大的困难在于存在作为终点映射奇异点的测地线，我们称之为异常测地线。根据庞特里亚金极大值原理，我们知道，如果一条测地线不是异常测地线，那么它满足一个称为正规方程的测地线方程。满足正规方程的曲线称为正规曲线 （或正规轨迹），处理起来更为容易。本文聚焦于正规曲线，并证明除常值曲线外，它们不能构成闭环，而且实际上会以定量的方式离开每一个紧集。本文的主要结果如下。

定理1.1 （正规曲线离开紧集）。 设 G 为一个步数为 s的次芬斯勒卡诺群。在右不变余向量空间上取范数 N。那么，存在常数$\epsilon > 0$，使得对于每一条按弧长参数化的正规曲线 $\gamma : \mathbb{R} \to G$，都有

$$d(\gamma(t), \gamma(t')) \geq \frac{\epsilon}{N(\lambda)^{\frac{1}{s}}} |t - t'|^{\frac{1}{s}} - 1, \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

对于与 γ相关联的每个余向量 λ，参见定义 *2.19*。

因此，我们排除了某些测地线环的存在。

推论 1.2。 次芬斯勒卡诺群中的正规闭环都是常值的。

我们强调，众所周知，上述推论在二阶卡诺群中成立（得益于测地线的完全积分），而 Bravo-Doddoli [5] 的工作证明它在射流空间中也成立。此外，几何群论中关于幂零群大尺度几何的研究也提出了一个类似的问题。事实上，鉴于 Hoda [11], 的工作，证明卡诺群不能包含标准单位圆的等距副本将十分重要。对于有限维赋范空间，这一结果早已为人所知，并由 Creutz 证明，参见 [8, 引理 1.7]。

1.1. 次黎曼卡诺群中闭环的基本情形。

这里我们给出一个更简单的证明，说明次黎曼卡诺群中不存在正规闭环。我们将进一步运用同一思路证明推论 1.2，并给出定理1.1中的定量结果。

次黎曼卡诺群的推论*1.2*的证明。令G为一个带有左不变内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$的次黎曼卡诺群。令 $\gamma : [0, 1] \to G$ 为一条形成闭路的正规测地线。不失一般性，我们假设 $\gamma(0) = \gamma(1) = 1_G$。

由于 γ 是法线，由定义可知，其控制 u 满足正规方程：存在$\lambda \in (T_{\gamma(1)}G)^*$，使得对所有控制 v 均有

$$\lambda(\mathrm{d}\,\mathrm{End}_u\, v) = \langle u, v \rangle, \tag{2}$$

其中终点映射是从 1_G出发的终点映射，例如参见 [1, 推论 8.8]。当 $v = u$ 时，我们得到

$$\lambda(\mathrm{d}\,\mathrm{End}_u\, u) = ||u||^2_{L^2}. \tag{2bis}$$

现在的思路是考虑经过 Carnot 膨胀的曲线：对 $\tau > 0$，令 $\delta_\tau : G \to G$ 为膨胀因子为 τ 的膨胀。一方面，我们显然有 $(\delta_\tau \circ \gamma)(1) = 1_G$。

另一方面，曲线 $\delta_\tau \circ \gamma$ 的控制为 τu。因此我们有。

$$\mathrm{End}(\tau u) = \delta_\tau(\mathrm{End}(u)) = 1_G, \ \forall \tau > 0. \tag{3}$$

方程（3）意味着

$$\mathrm{d}\,\mathrm{End}_u\, u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\,\mathrm{End}((1+\epsilon)u)\Big|_{\epsilon=0} = 0. \tag{4}$$

因此，方程(4)和(2bis)意味着$||u||_{L^2} = 0$，从而 γ 是常曲线。□

1.2.证明策略。 我们在此介绍证明定理1.1时将使用的关键思想。我们在子Finsler空间的背景下开展讨论，即在配备分布的光滑流形中，两点之间的距离由连接这两点且处处与该分布相切的路径长度的下确界给出。长度是相对于一个连续变化的范数来测量的。

我们首先用能量的次微分来写出由庞特里亚金极大值原理导出的正规方程，见命题2.13。我们利用正规方程的这一表述，得到 (2bis) 的对应形式，它将正规控制 u 的能量表示为某个余向量 λ 作用于 d 终点映射$_u\, u$ 的结果。随后，我们利用膨胀单参数子群 δ 的性质来定义向量场

$$\vec{\delta}(g) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_t(g)\Big|_{t=1}, \forall g \in G.$$

第一个关键点是，我们有 δ(终点映射(u)) = d 终点映射$_u\, u$，见（44）。特别地，我们将得到

$$||u||^2_{L^2} = \lambda(\vec{\delta}(\mathrm{End}(u)). \tag{5}$$

我们证明，$g \mapsto \lambda(\delta(g))$ 是有限个齐次次数小于步长 s 的齐次函数之和，因此，当 $d(1,g) > 1$ 时，它可由 $Cd(1,g)^s$ 有界，其中 $C > 0$ 为某个常数。该界与（5）结合即可得到（1）。

1.3. 论文结构。 本文结构如下：我们在第 2 节简要介绍本文所需的次芬斯勒几何概念。我们回顾次芬斯勒流形、卡诺群和自相似空间的定义；定义正规曲线，并用能量的次微分刻画它们。在第 3 节中，我们证明本文的主要结果。我们还将推论 1.2 稍作推广，使其适用于自相似空间。第 4 节包含一些例子：我们证明长度为 1 的正规测地线可以始终任意接近起点，并且定理 1.1 中的指数 $\frac{1}{s}$ 是可能的最大值。

致谢。作者部分受到瑞士国家科学基金会（资助编号 200021-204501‘次黎曼测地线的正则性及其应用’）以及欧洲研究理事会（ERC Starting Grant 713998GeoMeG ‘度量群的几何’）的资助。E.L.D 还部分受到芬兰科学院（资助编号 322898 ‘通过度量几何与李群理论研究次黎曼几何’）的资助。

2. 预备知识

2.1. 次芬斯勒几何与卡诺群。 我们首先回顾次芬斯勒几何中的一些基本定义和事实，遵循 [12] 和 [3]。

定义 2.1。 设 M 是一个光滑流形。 M 上的分布 是切丛的一个子丛。若在每个点的某个邻域内，由与该分布相切的向量场生成的李代数包含该邻域上切丛的一组标架，则称该分布为括号生成的 。次芬斯勒流形 是一个光滑流形 M，配备一个括号生成的分布 Δ 和一个连续变化的范数$||\cdot||$，以及卡诺-卡拉泰奥多里距离

$$d_{cc}(x,y) := \inf\{\int_0^1 ||\dot{\gamma}(t)||\mathrm{d}t \,\big|\gamma : [0,1] \to M \text{ absolutely continuous;} \\ \dot{\gamma}(t) \in \Delta_{\gamma(t)}, \text{ for a.e. } t \in [0,1]; \gamma(0) = x; \gamma(1) = y\}. \tag{6}$$

d_{cc} 是距离这一事实由 Chow 定理保证（例如参见 [9,第 1]节）。本文主要关注卡诺群：具有左不变分布和范数的特殊李群。

定义 2.2。*Lie* 代数 $\mathfrak{g}$ 的分层 是将 $\mathfrak{g}$ 分解为直和$\mathfrak{g} = V_1 \oplus ... \oplus V_s$，其中

$$[V_1, V_j] = V_{j+1}, \ \forall j \in \{1, ..., s\}, \tag{7}$$

其中 $V_{s+1} := \{0\}$。这些子空间 V_i 称为分层中的层。配备分层的李代数称为 分层的。卡诺群是一个具有分层李代数的单连通李群，将第一层的左不变延拓作为分布，并配备左不变范数以及卡诺-豪斯多夫距离。

卡诺群具有自相似性，即存在作为位似变换作用的自然自同构。

定义2.3。令 G 为具有分层李代数 $\mathfrak{g} = V_1 \oplus ... \oplus V_s$的卡诺群。膨胀 $\delta_\lambda :\ G \to G$ 因子为 λ 且满足 $\lambda \in \mathbb{R}$，是通过设定以下内容定义的李群自同构

$$(\delta_\lambda)_*(v) = \lambda^i v, \ \ ,\forall i \in \{1, ..., s\}, \ \forall v \in V_i. \tag{8}$$

膨胀的存在对于我们证明周期正规测地线不存在至关重要，见 (61)。

2.2. **齐性空间和自相似距离**。 在微分几何中，术语齐性空间 指李群模去一个闭子群所得的商空间，以保留李群的传递作用。然而，在度量几何以及更一般的度量空间上的分析中，齐性一词指在空间的某些膨胀下按比例变化的函数。任何允许膨胀（也称为相似变换）的度量空间，都称为自相似空间。

在次芬斯勒几何中，自相似空间得到了很好的刻画。作为可微流形，它们具有这样的齐性结构：它们是卡诺群关于一个膨胀不变子群的作用（通过左乘）所得商空间。然而，定义良好的右作用并非等距作用。因此，它们不是等距齐性空间。它们仍被称为齐性空间，是因为它们允许膨胀。为避免“齐性”一词的这种双重使用，我们将其称为自相似（次芬斯勒）空间。根据Bella¨ıche的工作（[4], [3]），我们知道，（常秩）次芬斯勒流形的度量切空间是（常秩）自相似空间。

定义2.4。 一个自相似子Finsler空间 是由一个（左不变）次芬斯勒 *Carnot*群对一个膨胀不变子群的左作用取商而得到的次芬斯勒流形，并赋有商分布。具体而言，

假设 G 是一个卡诺群，具有分布 Δ 和左不变范数 $||\cdot||$，且 $H<G$ 是一个闭的膨胀不变子群，其中 $T_1H\cap\Delta_1=\{0\}$。在商流形 $_{H\backslash G}:=\{Hg:\ g\in G\}$ 上，我们定义一种次芬斯勒结构，使投影$\pi:\ G\to{}_{H\backslash G}$ 成为次度量映射：我们取 $\Delta_{H\backslash G}:=\pi_*\Delta$ 作为（常秩）分布，并在 $_{H\backslash G}$ 上定义连续变化的范数，令所有 $p\in{}_{H\backslash G}$ 以及所有 $v\in(\pi_*\Delta)_p\subseteq T_p({}_{H\backslash G})$ 利来

$$(||v||_{H\backslash G})_p:=\inf\{||w||_q:q\in\pi^{-1}(p),w\in T_q\Delta,\mathrm{d}\pi_q(w)=v\}. \tag{9}$$

由于 H 具有膨胀不变性，G 的膨胀可传递到商空间上，并定义 $_{H\backslash G}$上的膨胀。因此，在自相似空间 $_{H\backslash G}$ 中，我们将 H 称为原点，因为它是唯一在膨胀下保持不动的点。关于自相似空间的介绍，请参见 [4, 第 7] 节。

2.3. 庞特里亚金极大值原理与正规曲线。 在本节余下部分，我们定义终点映射，并陈述庞特里亚金极大值原理。随后，我们介绍正规曲线，并利用能量的次微分对其进行刻画。

定义 2.5。 (控制) 设 M 为一个带有分布 Δ的次芬斯勒流形，取$X_1,...,X_n\in\mathrm{Vec}(M)$使得张成$(\{X_1(p)...,X_n(p)\})=\Delta_p$对每个 $p\in M$都成立。$\Omega:=L^2([0,1],\mathbb{R}^n)$ 中的元素称为控制。

设一个次芬斯勒流形 M，并固定 X_1,..., $X_n\in$ Vec(M)，使得在每个 $p\in M$处的分布都与张成({X_1(p) ..., X_n(p)})重合。令Ω 为 L^2([0, 1], $\mathbb{R}^n$)。对于每个控制 $u\in\Omega$ 以及每个点 $p\in M$，我们关联唯一的曲线 $\gamma_u:\ [0,1]\to M$ 满足

$$\begin{cases}\gamma_u'(t)=\sum_{i=1}^n u_i(t)X_i(\gamma_u(t)),\ \text{for a.e. } t\in[0,1];\\ \gamma_u(0)=p.\end{cases} \tag{10}$$

方程（10）的解存在且唯一，这由 Carathéodory 存在唯一性定理（[15, 定理 3. 4], [7, 定理 1.3]）保证。我们称γ_u 为带有控制的曲线 u，或者称 u 是 γ_u的一个控制。两个控制可能产生相同的曲线，因为向量场 X_j在某些点处可能不线性无关。此外，每条有限长度的曲线都允许进行重新参数化，使其控制属于 Ω。我们可以用方程（10）定义沿控制的流。这将有助于计算终点映射的微分。

定义 2.6. (沿控制的流) 设 M 是一个分布为Δ的次芬斯勒流形，令 $X_1,...,X_n\in\mathrm{Vec}(M)$ 满足 张成$(\{X_1(p)...,X_n(p)\})=\Delta_p$对每个$p\in M$ 都成立，并定义 $\Omega:=L^2([0,1],\mathbb{R}^n)$。沿控制的流 $u\in\Omega$ 是映射$\phi:\ [0,1]\times M\to M$，定义如下

$$\phi^t(p):=\gamma_u(t),\ \forall t\in[0,1], \tag{11}$$

其中 γ_u 是满足方程 *(10)* 的曲线。对于固定的 s，$t\in[0,1]$，且 $s<t$，我们将 $\phi_s^t:\ M\to M$ 记为从 s到 t的流：

$$\phi_s^t:=\phi^{t-s}\circ(\phi^s)^{-1}. \tag{12}$$

例 2.7。 设 G 是一个第一层为 V_1的次芬斯勒 *Carnot*群。设 X_1，……， X_n 是第一层的左不变标架。利用标架 X_1，……， X_n，将 $L^2([0,1],\ \mathbb{R}^n)$与 $L^2([0,1],\ V_1)$对应。对于所有 $p \in G$和 $u \in L^2([0,1],\ V_1)$，方程 (10) 可改写为

$$\begin{cases} \gamma_u'(t) = \mathrm{d}L_{\gamma_u(t)} u(t),\ \textit{for a.e. } t \in [0,1]; \\ \gamma_u(0) = p. \end{cases} \tag{13}$$

特别地，若 $\phi\colon\ [0,1] \times G \to G$ 是沿控制的流 $u \in L^2([0,1], V_1)$，参见(11)，则不难验证，对所有 $p \in G$ 曲线 $t \mapsto L_p(\phi^t(1_G))$ 满足(13)。因此，

$$\phi^t(p) = R_{\phi^t(1_G)}(p),\ \forall p \in G, \forall t \in [0,1]. \tag{14}$$

定义2.8。 （终点映射）设 M 为带有分布 Δ的次芬斯勒流形。选取 X_1、……、$X_n \in \mathrm{Vec}(M)$ 使得 张成$(\{X_1(p)$ ……、 $X_n(p)\}) = \Delta_p$。记$\Omega\colon = L^2([0,1],\ \mathbb{R}^n)$ 并固定一点 $p \in M$。与X_1、……、 X_n 和 p 相关联的终点映射 终点映射：$\Omega \to M$ 定义为

$$\mathrm{End}(u) := \gamma_u(1), \tag{15}$$

其中 γ_u 满足方程 *(10)*。在卡诺群中，我们总是假设点 p 为单位元，并假设 X_1,..., X_n 为第一层的左不变标架。

命题 *2.9.*（终点映射的微分， [1, 命题 8.5]）。设 M 为带有分布 Δ的次芬斯勒流形，设 $X_1, ..., X_m \in \mathit{Vec}(M)$，满足 $\Delta_p =$张成$(\{X_1(p) ..., X_m(p)\})$，对每个 $p \in M$均成立。固定 $q \in M$。令 $\Omega := L^2([0,1], \mathbb{R}^m)$，并用 $\mathit{End} : \Omega \to M$ 表示与 $X_1, ..., X_m$ 和 q相关联的终点映射。则 End 在 Ω 上光滑，且对每个 $u, v \in \Omega$，我们有

$$\mathrm{d}\,\mathrm{End}_u\, v = \int_0^1 (\phi_t^1)_* \sum_{i=1}^m v_i(t) X_i(\gamma(t)) \mathrm{d}t; \tag{16}$$

其中 ϕ^t 是与控制 u 相关联的流，且 $\gamma(t) := \phi^t(q)$，参见 (11)。

定义 2.10.（能量）设 M 为具有连续变化范数$||\cdot||\colon\ \Delta \to \mathbb{R}$ 的次芬斯勒流形。点 $p \in M$ 处的能量 是函数 $\mathrm{E}_p\colon\ \Delta_p \to \mathbb{R}$，定义为

$$\mathrm{E}_p := \frac{1}{2}||\cdot||_p^2.$$

对于绝对连续曲线 $\gamma\colon\ [0,1] \to M$，其中 $\dot\gamma \in \Delta$，我们将其能量 定义为 $\frac{1}{2}\int_0^1 ||\dot\gamma(t)||^2 \mathrm{d}t$。

使 (6) 中的下确界得以实现的曲线称为长度极小化曲线。众所周知，若将长度极小化曲线重新参数化为恒速曲线，则能量的极小值也由能量极小化曲线实现。

现在我们可以陈述众所周知的庞特里亚金极大值原理，它给出了曲线成为能量极小化曲线的一阶必要条件。

定理 2.11. (PMP, [2, 定理 12.10])。设 M 是一个次芬斯勒流形，其分布为 Δ，且设 $X_1, ..., X_m \in \mathrm{Vec}(M)$ 满足 $\Delta_p =$张成$\{X_1(p) ..., X_m(p)\}$，对每个$p \in M$均成立。令Ω 为 $L^2([0,1], \mathbb{R}^m)$。

对于每个 $\nu \in \mathbb{R}$ 和 $v = (v_1, ..., v_m) \in \mathbb{R}^m$; 定义 $h_{v,\nu}\colon\ T^*M \to \mathbb{R}$ 为

$$h_{v,\nu}(\eta) := \left\langle \eta, \sum_{i=1}^m v_i X_i(\pi(\eta)) \right\rangle + \nu\, \mathrm{E}_{\pi(\eta)} \left(\sum_{i=1}^m v_i X_i(\pi(\eta)) \right),\ \forall \eta \in T^*M, \tag{17}$$

其中 $\pi\colon\ T^*M \to M$ 是典范投影。如果曲线 $\gamma\colon\ [0,1] \to M$ 带有控制 u 且是能量极小化的，则存在 $\nu \in \{-1,0\}$ 以及一条绝对连续曲线 $\eta\colon\ [0,1] \to T^*M$，使得 $\eta(0) \in T^*_{\gamma(0)}M$ 并且

$$\dot{\eta}(t) = \vec{h}_{u(t),\nu}(\eta(t)),\ \textit{for a.e. } t \in [0,1]; \tag{18}$$

$$h_{u(t),\nu}(\eta(t)) \geq h_{v,\nu}(\eta(t)),\ \ \forall v \in \mathbb{R}^m,\ \textit{for a.e. } t \in [0,1], \tag{19}$$

其中 $\vec{h}_{u(t),\nu}(\eta(t))$ 是与 $h_{u(t),\nu}$ 相关联的哈密顿向量场，参见 [2, 第 11.5 节。2]。

在本文中，我们将使用命题 2.11 的一种改述。首先，我们需要回顾次微分的定义。

定义 2.12。(次微分) 设 V 为一个向量空间，且 $f\colon\ V \to \mathbb{R}$。$f$ 在 $v \in V$ 处的一个次微分 是一个线性函数 $a\colon\ V \to \mathbb{R}$，满足

$$a(u-v) \leq f(u) - f(v), \quad \forall u \in V. \tag{20}$$

我们用 $\partial_v f$ 表示 f 在 v 处的次微分集合。

很容易验证，凸函数的次微分集合总是一个非空的闭凸集。

命题 2.13。 （修订的次芬斯勒庞特里亚金极大值原理） 设 M 是一个带有分布 Δ 的次芬斯勒流形，设 $X_1, \ldots\ldots, X_m \in \mathrm{Vec}(M)$，使得对于每个 $p \in M$ 都有 $\Delta_p = \text{张成}(\{X_1(p) \ldots\ldots, X_m(p)\})$。如果曲线 $\gamma\colon\ [0,1] \to M$ 及其控制 u 是能量极小化的，那么存在 $\lambda \in T^*_{\gamma(1)}M$ 使得以下两者之一成立

$$\left(\phi_t^1\right)^* \lambda \in \partial_{\dot{\gamma}(t)} \mathrm{E}_{\gamma(t)}, \quad \textit{for a.e. } t \in [0,1] \tag{21}$$

or

$$\lambda\left(\left(\phi_t^1\right)_* X\right) = 0,\ \forall t \in [0,1],\ \forall X \in \Delta_{\gamma(t)}, \tag{22}$$

函数 ϕ^t 表示沿控制 u 的流，见 (11)。

证明。根据命题 2.11，如果具有控制 u 的曲线 $\gamma\colon [0,1] \to M$ 是能量极小化的，则存在 $\nu \in \{-1,0\}$ 和一个绝对连续曲线 $\eta\colon [0,1] \to T^*M$，使得 $\eta(0) \in T^*_{\gamma(0)}M$，并且方程（18）和（19）成立。众所周知（例如参见 [2,第 12.2] 节），方程（18）可改写为对所有 $t \in [0,1]$ 都有如下形式

$$\begin{cases} \pi(\eta(t)) = \gamma(t); \\ \eta(t) = \left(\phi_t^1\right)^* \eta(1). \end{cases} \tag{23}$$

令 $\lambda := \eta(1)$，根据 (23) 以及 (17)中 $h_{v,\nu}$ 的定义，我们有

$$h_{v,\nu}(\eta(t)) = \left\langle \left(\phi_t^1\right)^* \lambda, \sum_{i=1}^m v_i X_i(\gamma(t)) \right\rangle + \nu\, \mathrm{E}_{\gamma(t)}\left(\sum_{i=1}^m v_i X_i(\gamma(t))\right). \tag{24}$$

当 $\nu = -1$ 时，方程（19）等价于对所有 $v \in \mathbb{R}^m$，

$$\left\langle \left(\phi_t^1\right)^* \lambda, \sum_{i=1}^m v_i X_i(\gamma(t)) - \dot{\gamma}(t) \right\rangle \leq \mathrm{E}_{\gamma(t)}\left(\sum_{i=1}^m v_i X_i(\gamma(t))\right) - \mathrm{E}_{\gamma(t)}\left(\dot{\gamma}(t)\right).$$

当 v 变化时，向量 $\sum_{i=1}^{m} v_i X_i(\gamma(t))$给出了$\mathrm{E}_{\gamma(t)}$的定义域中的任意元素。因此，我们有方程（19）等价于（21）。当 $\nu = 0$时，由(24)方程（19）是

$$\left\langle \left(\phi_t^1\right)^* \lambda, \sum_{i=1}^{m} v_i X_i(\gamma(t)) - \dot{\gamma}(t) \right\rangle \leq 0.$$

注意到我们正将 $\left(\phi_t^1\right)^* \lambda$ 应用于 $\Delta_{\gamma(t)}$中的任意元素，最终可推得，在第二种情况下，方程（19）等价于（22）。□

定义 2.14.（正规曲线与异常曲线）在命题 *2.13* 的设定下，若存在余向量 $\lambda \in T^*_{\gamma(1)}M$ 使得式 *(21)* 成立，则称曲线 $\gamma\colon\ [0,1] \to M$ 为正规曲线 。若存在余向量$\lambda \in T^*_{\gamma(1)}M$ 使得式 *(22)* 成立，则称曲线为异常曲线 。

我们也可以为定义域不同于 $[0,1]$ 的曲线定义正规曲线。

定义2.15。设 M 是一个带有分布 Δ 的次芬斯勒流形，且 I 是一个区间。当 γ 限制在 I 的每个紧子区间上，并以 $[0,1]$，进行仿射重参数化后，是定义 *2.14* 意义下的正规曲线时，曲线 $\gamma\colon\ I \to M$ 称为一条正规曲线 。

以下备注确保，将正规曲线限制在其定义域的每个子区间上仍是正规曲线，因此定义 2.15 是定义良好的。

注记2.16。设 M 是一个带有分布 Δ 的次芬斯勒流形。令 $\gamma\colon\ [0,1] \to M$ 为一条正规曲线，且 $\lambda \in T^*_{\gamma(1)}M$ 为满足 *(21)* 的余向量。对于每个 $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$，定义曲线 $\gamma_\alpha\colon \left[0, \frac{1}{\alpha}\right] \to M$ 为

$$\gamma_\alpha(t) := \gamma(\alpha t),\ \ \forall t \in \left[0, \frac{1}{\alpha}\right]. \tag{25}$$

Then

$$(\phi^{\frac{1}{\alpha}}_{t;\alpha})^* \lambda_\alpha \in \partial_{\dot{\gamma}_\alpha(t)} \mathrm{E}_{\gamma_\alpha(t)},\ \ \forall t \in \left[0, \frac{1}{\alpha}\right], \tag{26}$$

[1]其中 $\lambda_\alpha \in T^*_{\gamma(1)} M$通过设定 $\lambda_\alpha\colon = \alpha\lambda$ 来定义，且 $(\phi^{\overline{\alpha}}_{t;\ \alpha})$ 是沿控制αu $(\alpha t)\ \mathbb{I}_{\left[0,\frac{1}{\alpha}\right]}$从 t 到$\frac{1}{\alpha}$的流。

证明。根据次微分和 E 的定义，如果对于某些 $p \in M$、$v \in T_pM$ 和 $a \in T^*_pM$，我们有 $a \in \partial_v \mathrm{E}_p$，那么对于每个 $\tau > 0$，都有 $\tau a \in \partial_{\tau v} \mathrm{E}_p$。此外，对于所有 $t \in \left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$，我们有 $\gamma'_\alpha(t) = \alpha\gamma'(\alpha t)$，并且 $\phi_t^{\frac{1}{\alpha}};\ _\alpha$等于沿着 u 从 αt到 1 的流 $\phi^1_{\alpha t}$。因此，由于对于所有$t \in \left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$，$(\phi^1_{\alpha t})^* \lambda \in \partial_{\dot{\gamma}}(\alpha t)\ \mathrm{E}_{\ \gamma(\alpha t)}$，我们有，对于所有 $t \in \left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$，$(\phi_t^{\frac{1}{\alpha}};\ _\alpha)^*(\alpha\lambda) \in \partial_{\dot{\gamma}_\alpha}(t)\ \mathrm{E}_{\ \gamma_\alpha}(t)$。□

由命题 2.13 以及命题 2.9 中终点映射的微分公式，我们可以得到次芬斯勒流形上与（2bis）等价的结论。

推论 2.17. (正规方程和终点映射) 设 M 为具有分布 Δ 的次芬斯勒流形。选取 $X_1, \ldots,$ $X_m \in \mathrm{Vec}(M)$ 使得 张成$(\{X_1(p) \ldots, X_m(p)\}) = \Delta_p$ 对每个 $p \in M$ 都成立，并固定 $q \in M$。设 $\Omega := L^2([0,1], \mathbb{R}^m)$，并记 终点映射 : $\Omega \to$

M与 $X_1,...,X_m$和 q相关联的终点映射。令 $\gamma\colon [0,1]\to M$为一条控制为 u 的正规曲线，满足 $\gamma(0)=q$。令 $\lambda\in T^*_{\gamma(1)}M$为一个满足(21) 的余向量。则

$$\lambda(\mathrm{d}\,\mathrm{End}_u\, u)=\int_0^1 ||\dot\gamma(t)||^2_{\gamma(t)}\mathrm{d}t, \tag{27}$$

证明。 由命题 2.9 可得

$$\lambda(\mathrm{d}\,\mathrm{End}_u\, v)=\int_0^1 \lambda\left(\left(\phi_t^1\right)_*\sum_{i=1}^m v_i(t)X_i(\gamma(t))\right)\mathrm{d}t,\ \ \forall v\in\Omega. \tag{28}$$

由 (21) 可得

$$\left(\left(\phi_t^1\right)^*\lambda\right)(\dot\gamma(t))=||\dot\gamma(t)||^2,\ \text{for a.e. } t\in[0,1], \tag{29}$$

例如参见 [10, 引理 2.19]。(28) 和 (29) 式推出 (27)。 □

对于卡诺群，我们总是选取左不变标架作为在 Δ 每一点张成分布的向量场集合。因此，我们可以将控制视为函数 $u\in L^2([0,1],\Delta_1)$，并为每条绝对连续曲线关联一个唯一的控制：曲线导数在原点处的左平移。沿控制的流与沿关联曲线的右平移一致，因此我们可以将命题 2.13 和推论 2.17 改写如下：

命题 2.18. 设 G 是一个次芬斯勒卡诺群，配备第一层 V_1 和左不变范数，设 $\{X_1,...,X_m\}$ 是第一层的左不变标架。设 终点映射是与 $X_1,...,X_m$ 和 1_G关联的终点映射。设 $\gamma\colon[0,1]\to G$ 是控制为 $u\in L^2([0,1],V_1)$ 的正规曲线，且满足 $\gamma(0)=1_G$。那么，存在一个右不变余向量 λ，使得

$$\lambda\circ\mathrm{Ad}_{\gamma(t)}\in\partial_{u(t)}\,\mathrm{E}_1,\ \textit{for a.e. } t\in[0,1], \tag{30}$$

and

$$\lambda(\mathrm{d}\,\mathrm{End}_u\, u)=||u||^2_{L^2}. \tag{31}$$

证明。令 $\lambda\in T^*_{\gamma(1)}G$ 为满足（21）的余向量。定义 λ 为 $\bar\lambda$的右不变延拓。由于沿着 u 的流为 $\phi^t=R_{\gamma(t)}$，见（14），有

$$\left(\phi_t^1\right)^*\bar\lambda=\bar\lambda\circ\mathrm{d}R_{\gamma(1)}\circ\mathrm{d}R^{-1}_{\gamma(t)},\forall t\in[0,1].$$

因此，方程（21）可改写为

$$\bar\lambda\circ\mathrm{d}R_{\gamma(1)}\circ\mathrm{d}R^{-1}_{\gamma(t)}\in\partial_{\dot\gamma(t)}\,\mathrm{E}_{\gamma(t)},\ \text{for a.e. } t\in[0,1]. \tag{32}$$

由于为 $\dot\gamma=\mathrm{d}L_\gamma u$ (见 (13)) 且 E 左不变，方程 (32) 等价于

$$\bar\lambda\circ\mathrm{d}R_{\gamma(1)}\circ\mathrm{d}R^{-1}_{\gamma(t)}\circ\mathrm{d}L_{\gamma(t)}\in\partial_{u(t)}\,\mathrm{E}_1,\ \text{for a.e. } t\in[0,1],$$

这正是(30)，即 λ λ的右不变延拓。方程 (31)由(27) 得出，即 $\bar\lambda=\lambda_{\gamma(1)}$ 和 $||u||_{L^2}=\int_0^1||\dot\gamma(t)||^2_{\gamma(t)}\mathrm{d}t$。 □

由命题 2.18 和注记 2.16 可知，若 G 是卡诺群，$I\subseteq\mathbb{R}$ 是区间，$\gamma\colon I\to G$ 是正规测地线，且 $u:=\mathrm{d}L_\gamma^{-1}\dot\gamma$，则存在一个右不变余向量 λ，使得对每个 $t\in I$ 都有 $\lambda\circ\mathrm{Ad}_{\gamma(t)}\in\partial_{u(t)}\mathrm{E}_1$。

定义 2.19. 设 G 为卡诺群，I 为区间，$\gamma\colon I \to G$ 为正规曲线。令 $u := \mathrm{d}L_{\gamma}^{-1}\dot{\gamma}$。若 $\lambda \in T^*G$ 右不变，且满足以下条件，则称其为与 γ 相关联的余向量

$$\lambda \circ \mathrm{Ad}_{\gamma(t)} \in \partial_{u(t)} \mathrm{E}_1, \text{ for a.e. } t \in I. \tag{33}$$

3. 主要结果的证明

3.1. 膨胀的微分。 本小节致力于计算卡诺群中一参数膨胀族 δ 的微分。目标是写出向量场

$$\vec{\delta}(g) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta_\tau(g)\Big|_{\tau=1} \tag{34}$$

作为右不变向量场的线性组合。接着，利用该线性组合系数的特殊形式，我们将得到如下估计：对于每个右不变余向量 λ，$\lambda(\vec{\delta}(g))$ 可由距离 $d(1,g)$ 控制。

定义 3.1。 设 G 是一个分层李代数为 $\mathfrak{g} = V_1 \oplus ... \oplus V_s$的卡诺群。若有序基 $X_1,...,X_n$ 属于 $\mathfrak{g}$，则称其适配于分层，如果

$$X_i \in V_j,\ \forall j \in 1,...,s, \forall i \in \{1,...,n\} \text{ s.t. } \dim(V_{j-1}) < i \leq \dim(V_j),$$

其中我们设定 $V_0 := \{0\}$。
我们称向量 $X \in \mathfrak{g}$ 具有 齐次度 $j \in \{1,...,s\}$，如果 $X \in V_j$。我们称函数 $f\colon G \to \mathbb{R}$ 是 齐次的次数为 $\alpha \in \mathbb{R}$，如果 $f \circ \delta_\tau = \tau^\alpha f$ 对所有 $\tau \geq 0$均成立。

引理 3.2。 设 G 为一个卡诺群，固定一个适应于分层的基 X_1，...，X_m 并设 δ 如式 *(34)* 所示。则

$$\vec{\delta} = \sum_{i=1}^{m} P_i X_i^\dagger, \tag{35}$$

其中，对于每个 $i \in \{1,...,m\}$，记 $X_i^\dagger$ 为 X_i 的右不变延拓，并且$P_i\colon\ G \to \mathbb{R}$ 是次数为 d_i的齐次函数，整数 $d_i \in \mathbb{N}$ 是 X_i的齐次次数。

证明。固定 $\tau > 0$。对于所有 $g \in G$，有

$$\left((\delta_\tau)_* \vec{\delta}\right)(g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\delta_\tau \circ \delta_{1+\epsilon}(\delta_\tau^{-1}(g))\Big|_{\epsilon=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\delta_{1+\epsilon}(g)\Big|_{\epsilon=0} = \vec{\delta}(g). \tag{36}$$

此外，对于所有 $i \in \{1,...,m\}$，都有

$$(\delta_\tau)_* X_i^\dagger = \tau^{d_i} X_i^\dagger, \tag{37}$$

这是因为 $(\delta_\tau)_* X_i^\dagger(1_G) = \tau^{d_i} X_i^\dagger(1_G)$，并且 $(\delta_\tau)_* X_i^\dagger$是一个右不变向量场，其中 δ_τ 是群同态，而 $X_i^\dagger$ 是右不变的。
由于δ是一个光滑向量场，存在光滑函数 P_1、...、$P_m\colon\ G \to \mathbb{R}$ 使得 (35) 成立。为了完成引理的证明，我们必须证明

$$P_i \circ \delta_\tau = \tau^{d_i} P_i,\ \forall i \in \{1,...,m\}. \tag{38}$$

对于所有 $i \in \{1, ..., m\}$，我们都有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} P_i X_i^\dagger &\overset{(35)}{=} \vec{\delta} \\ &\overset{(36)}{=} (\delta_\tau)_* \vec{\delta} \\ &\overset{(35)}{=} (\delta_\tau)_* \left(\sum_{i=1}^{m} P_i X_i^\dagger \right) \\ &\overset{(37)}{=} \sum_{i=1}^{m} \tau^{d_i} (P_i \circ \delta_\tau^{-1}) X_i^\dagger,\end{aligned}$$

从而（38）成立。 □

引理 3.2 中得到的恒等式使我们能够估计将右不变余向量应用于式(34) 中定义的向量 $\vec{\delta}(g)$所得到的值。除常数因子外，我们得到的界仅取决于该余向量以及 g 到原点的距离。为了得到定量估计，我们在李代数上固定一个范数。

定义3.3。令 G 为一个李群，且 λ 为一个右不变余向量。选取 $T_1 G$ 的一个基 $\{X_1, ..., X_n\}$ 并定义

$$N(\lambda) := \sum_{i=1}^{n} |\lambda(X_i)|. \tag{39}$$

在一个乘法常数意义下，范数 N 与右不变余向量空间上的任意其他范数等价。

引理 3.4。 设 G 为一个卡诺群。按式 *(34)* 定义 δ 。存在常数 $C > 0$，使得对于每个右不变余向量 λ，都有

$$\lambda(\vec{\delta}(g)) \leq C N(\lambda) \max(d(1, g), d(1, g)^s), \qquad \forall g \in G, \tag{40}$$

其中 $N(\lambda)$ 按定义 *3.3* 定义。

证明。 选取一个适配分层的基 $X_1, ..., X_n$，称 $\{X_i^\dagger\}_{i \in \{1,...,n\}}$ 为该基的右不变延拓。设 $d_i \in \mathbb{N}$ 为 X_i的齐次次数。由引理 3.2可知，(35)成立。对于所有 $i \in \{1, ..., n\}$，由于函数 P_i是次数为 d_i的齐次函数，存在常数 $C_i > 0$ 使得

$$P_i(g) \leq C_i d(1, g)^{d_i}, \ \forall g \in G. \tag{41}$$

令 $C = \max_{1,...,n} C_i$，对于每个右不变余向量 λ，根据 $N(\lambda)$的定义，我们有

$$\lambda(\vec{\delta}(g)) \overset{(35)}{=} \sum_{i=1}^{n} P_i(g) \lambda(X_i) \overset{(39),(41)}{\leq} C N(\lambda) \max(d(1, g), d(1, g)^s), \ \forall g \in G. \tag{42}$$

引理得证。 □

3.2. 定理 1.1 的证明。 现在我们可以证明本文的主要结果了。

定理*1.1*的证明。设 $\gamma : \mathbb{R} \to G$ 是一条以弧长参数化的正规曲线。不失一般性，我们可以假设 $t' = 0$、 $t > 0$ 且 $\gamma(0) = 1_G$。由于右不变余向量空间上的所有范数都等价，假设 N 是由 (39) 定义的范数并不会失去一般性。选取一个与 γ 相关联的余向量 λ（参见

定义 2.19)。用 V_1 表示 Lie(G) 分层的第一层，并对 $t>0$，用 $u_t \in L^2([0,1],V_1)$ 表示曲线 γ_t 的控制： $[0,1]\to G$, $\gamma_t(\tau):=\gamma|_{[0,t]}(t\tau)$ 对所有 $\tau\in[0,1]$ 均成立。对于每个 $t>0$，我们有

$$\mathrm{d}\,\mathrm{End}_{u_t}\,u_t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{End}(\tau u_t)\bigg|_{\tau=1}. \tag{43}$$

由于 τu_t是 $\delta_\tau\gamma_t$的控制，我们可以将 (43) 改写为

$$\mathrm{d}\,\mathrm{End}_{u_t}\,u_t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta_\tau(\mathrm{End}(u_t))\bigg|_{\tau=1}=\vec{\delta}(\mathrm{End}(u_t)),\ \ \forall t>0, \tag{44}$$

其中 $\vec{\delta}$ 由 (34) 定义。应用引理 3.4 可知，存在常数$C>0$ 使得

$$\lambda(\vec{\delta}(\mathrm{End}(u_t)))\le CN(\lambda)\max(d(1,\mathrm{End}(u_t)),d(1,\mathrm{End}(u_t))^s),\ \ \forall t>0. \tag{45}$$

By (44) and (45), and being $\mathrm{End}(u_t)=\gamma(t)$ for all $t>0$, we have

$$\lambda(\mathrm{d}\,\mathrm{End}_{u_t}\,u_t)\le CN(\lambda)\max(d(1,\gamma(t)),d(1,\gamma(t))^s),\ \ \forall t>0. \tag{46}$$

此外，由注记 2.16 和命题 2.18 可得

$$t\lambda(\mathrm{d}\,\mathrm{End}_{u_t}\,u_t)=\int_0^1||t\dot\gamma(tx)||^2\mathrm{d}x=t^2,\ \ \forall t>0. \tag{47}$$

由方程 (46) 和 (47)，对于任意 $t>0$，我们得到

$$t\le CN(\lambda)\max(d(1,\gamma(t)),d(1,\gamma(t))^s). \tag{48}$$

特别地，对于 $t>CN(\lambda)$，必有

$$d(1,\gamma(t))>1,$$

因此

$$\max(d(1,\gamma(t))),d(1,\gamma(t))^s)=d(1,\gamma(t))^s.$$

因此，对于所有 $t>CN(\lambda)$，公式 (48) 变为

$$t\le CN(\lambda)d(1,\gamma(t))^s. \tag{49}$$

令 $\epsilon:=C^{-\frac{1}{s}}$。若 $t>CN(\lambda)$，则方程 (1) 是(49) 的推论。若 $t\le CN(\lambda)$，则方程 (1) 显然成立，因为右端小于或等于0。我们证明了(1) 对每个 $t>0$ 都成立，从而完成了定理的证明。□

3.3. **推论 1.2 的证明**。本节致力于证明推论 1.2。实际上，我们将证明一个更强的结论:

定理3.5。 在自相似空间中，从原点出发的正规闭环是常值的。

我们首先说明，自相似空间中的正规曲线可以提升为卡诺群中的正规曲线。

引理 3.6。 设 G 是一个卡诺群，其分层李代数为 $\mathfrak{g}=V_1\oplus...\oplus V_s$，且设 $H<G$ 是一个膨胀不变子群，其中 李(H) $\cap V_1=\{0\}$。记 $\pi:\ G\to H\backslash G$ 为投影。设 $\gamma:[0,1]\to H\backslash G$ 是一条正规曲线。对于每个 $g\in\pi^{-1}(\gamma(0))$，存在一条正规曲线 $\tilde\gamma:[0,1]\to G$，使得 $\tilde\gamma(0)=g$ 且 $\pi\circ\tilde\gamma=\gamma$。此外，我们可以选择一个与 $\tilde\gamma$ 相关联的余向量 $\lambda\in(T_{\tilde\gamma(1)}G)^*$，使得

$$\tilde\lambda(\ker(\mathrm{d}\pi_{\tilde\gamma(1)}))=\{0\}. \tag{50}$$

证明。记 Δ 为 G 的分布，记 $\bar{\Delta}$ 为 $H\backslash G$的分布，参见定义2.4 。固定一个左不变标架 $\{X_1, ..., X_m\}$，使得张成$\{X_1(g) ..., X_m(g)\} = \Delta_g$对所有$g \in G$成立。我们有张成$\{\mathrm{d}\pi_g X_1(g) ..., \mathrm{d}\pi_g X_m(g)\} = \mathrm{d}\pi_g \Delta_g = \Delta_{\pi(g)}$ 对所有 $g \in G$ 成立，因此我们可以将 $\Omega := L^2([0,1], \mathbb{R}^m)$ 同时视为与$\{X_1, ..., X_m\}$ 相关联的 G 中曲线的控制集合，以及与 $\{\pi_* X_1, ..., \pi_* X_m\}$相关联的 $H\backslash G$ 中曲线的控制集合。我们注意到，根据(9)中 $||\cdot||_{H\backslash G}$ 的定义，并且由于 Δ 上的范数是左不变的，对于每个 $p \in H\backslash G$、每个 $q \in \pi^{-1}(p)$以及每个 $v \in \mathbb{R}^m$，都有

$$||\sum_{i=1}^m v_i \left(\pi_* X_i\right)(p)||_{H\backslash G} = ||\sum_{i=1}^m v_i X_i(q)||_G$$

因此，对于控制 $u \in \Omega\, \gamma$，我们有

$$||\dot{\gamma}(t)||_{H\backslash G} = ||\sum_{i=1}^m u_i(t) X_i(q)||_G, \text{ for a.e. } t \in [0,1], \forall q \in \pi^{-1}(\gamma(t)). \tag{51}$$

为简化记号，我们将 $u(t) \cdot X(q)$记作 $\sum_{i=1}^m u_i(t) X_i(q)$。我们声称，对于几乎处处的 $t \in [0,1]$、所有 $q \in \pi^{-1}(\gamma(t))$以及所有线性函数 a，都有： $T_{\gamma(t)}(H\backslash G) \to \mathbb{R}$

$$a \in \partial_{\dot{\gamma}(t)} \left(\frac{\left(||\cdot||_{H\backslash G}\right)^2_{\gamma(t)}}{2} \right) \implies a \circ \mathrm{d}\pi_q \in \partial_{u(t)\cdot X(q)} \left(\frac{(||\cdot||_G)^2_q}{2} \right). \tag{52}$$

事实上，根据次微分的定义，若 $a \in \partial_{\dot{\gamma}(t)} \left(\frac{\left(||\cdot||_{H\backslash G}\right)^2_{\gamma(t)}}{2} \right)$且 $q \in \pi^{-1}(\gamma(t))$,

then

$$\frac{||\dot{\gamma}(t)||^2_{H\backslash G}}{2} \leq \frac{||\mathrm{d}\pi_q(w)||^2_{H\backslash G}}{2} - a(\mathrm{d}\pi_q(w) - \dot{\gamma}(t)), \forall w \in T_q G. \tag{53}$$

因此，由（51）可得

$$\frac{||u(t) \cdot X(q)||^2_G}{2} \leq \frac{||\mathrm{d}\pi_q(w)||^2_{H\backslash G}}{2} - a(\mathrm{d}\pi_q(w) - \dot{\gamma}(t)), \forall w \in T_q G. \tag{54}$$

根据 $||\cdot||_{H\backslash G}$ 的定义，我们有 $||\mathrm{d}\pi_q(w)||^2_{H\backslash G} \leq ||w||^2_G$，因此方程（54）意味着

$$\frac{||u(t) \cdot X(q)||^2_G}{2} \leq \frac{||w||^2_G}{2} - (a \circ \mathrm{d}\pi_q)(w - u(t) \cdot X(q)), \forall w \in T_q G, \tag{55}$$

由此证明了断言（52）。
如果我们将 u 在 G 中的流记为 $\tilde{\phi}^t$，并将 u 在 $H\backslash G$ 中的流记为 ϕ^t，则有

$$\pi \circ \tilde{\phi}^t = \phi^t \circ \pi, \ \ \forall t \in [0,1], \tag{56}$$

˜因为对于每个 $q \in G$， $\pi \circ \phi^t(q)$ 和 $\phi^t \circ \pi(q)$ 都满足该微分方程

$$\begin{cases} \sigma'(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t) \pi_* X_i(\sigma(t)); \\ \sigma(0) = \pi(q). \end{cases}$$

特别地，对于所有 $g \in \pi^{-1}(\gamma(0))$，定义为 $\tilde{\gamma}(t) := \tilde{\phi}^t(g)$（对所有 $t \in [0,1]$）的曲线 $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to G$ 满足 $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$，且 $\tilde{\gamma}(0) = g$。由于此处是 γ 正规曲线，存在 $\lambda \in T^*_{\gamma(1)}(H\backslash G)$ 使得

$$(\phi_t^1)^* \lambda \in \partial_{\dot{\gamma}(t)} \left(\frac{\left(|| \cdot ||_{H\backslash G} \right)^2_{\gamma(t)}}{2} \right), \text{ for a.e. } t \in [0,1]. \tag{57}$$

我们证明 $\tilde{\gamma}$ 是正规曲线，只需证明对 $\lambda\colon = \lambda \circ \mathrm{d}\pi_{\tilde{\gamma}(1)}$，有

$$\left(\tilde{\phi}_t^1\right)^* \tilde{\lambda} \in \partial_{\dot{\tilde{\gamma}}(t)} \left(\frac{(|| \cdot ||_G)^2_{\tilde{\gamma}(t)}}{2} \right), \text{ for a.e. } t \in [0,1]. \tag{58}$$

事实上，由 (52) 和 (57) 可知

$$\left((\phi_t^1)^* \lambda \right) \circ \pi_* \in \partial_{\dot{\tilde{\gamma}}(t)} \left(\frac{(|| \cdot ||_G)^2_{\tilde{\gamma}(t)}}{2} \right), \text{ for a.e. } t \in [0,1], \tag{59}$$

由 (56) 可得

$$\left(\tilde{\phi}_t^1\right)^* \tilde{\lambda} = \left((\phi_t^1)^* \lambda \right) \circ \pi_*, \ \forall t \in [0,1]. \tag{60}$$

最后，等式 (50) 可由 λ 的定义直接得到。 □

现在我们可以证明，在自相似空间中，从原点出发的正规闭环都是常值曲线。

定理 *3.5* 的证明。设 G 为一个卡诺群，$H < G$ 为一个在膨胀作用下不变的子群，且 $\mathrm{Lie}(H) \cap V_1 = \{0\}$。记 $\pi\colon G \to H\backslash G$ 为典范投影。设 $\gamma\colon [0,1] \to H\backslash G$ 是一条正规曲线，使得 $\gamma(0) = \gamma(1) = \pi(1_G)$。由引理 3.6 可知，存在一条正规曲线 $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to G$，其控制为 u，满足 $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ 且 $\tilde{\gamma}(0) = 1_G$。特别地，$\tilde{\gamma}(1) \in H$，因此

$$\mathrm{d}\,\mathrm{End}_u\, u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \delta_\tau(\tilde{\gamma}(1))\Big|_{\tau=1} \in T_{\tilde{\gamma}(1)} H, \tag{61}$$

具有 H 膨胀不变性。另一方面，由（50）可知，$\tilde{\gamma}$ 满足方程 (31)，其中余向量为 $\lambda \in T^*_{\tilde{\gamma}(1)} G$，且 $\lambda(T_{\tilde{\gamma}(1)} H) = \{0\}$，因此

$$||u||_{L^2} = \tilde{\lambda}(\mathrm{d}\,\mathrm{End}_u\, u) = 0. \tag{62}$$

我们证明了 $\tilde{\gamma}$ 为常数，因此 γ 也为常数。由于 γ 是一个从原点出发的任意法向回路，我们便完成了该定理的证明。□

4. Some examples

4.1. 终点映射任意接近原点的曲线。 即使根据定理 3.5，我们知道在卡诺群中不存在非常数正规闭环，但我们可以找到长度为 1且终点映射任意接近原点的正规曲线。我们在海森堡群中给出一个简单的例子。

定义 4.1。三维海森堡群是卡诺群 $(\mathbb{R}^3,\ \cdot)$，其乘法为

$$(x,y,z)\cdot(x',y',z') := (x+x', y+y', z+z'-\frac{1}{2}(x'y-xy')), \forall x,y,z,x',y',z' \in \mathbb{R}.$$

在海森堡群中，我们选取第一层的正交左不变标架，即对所有 x，y，$z \in \mathbb{R}$ 定义的两个向量场 $\{X,Y\}$ 为

$$X(x,y,z) := \partial_x - \frac{y}{2}\partial_z;$$
$$Y(x,y,z) := \partial_y + \frac{x}{2}\partial_z.$$

命题 4.2. 设 $G := (\mathbb{R}^3,\ \cdot)$ 为三维次黎曼海森堡群。对于每个 $\epsilon > 0$，存在一条以弧长参数化的正规曲线 $\gamma:\ [0,1] \to \mathbb{R}^3$，使得 $\gamma(0) = 1_G$ 且 $d(\gamma(1)\ 1_G) < \epsilon$。

证明。对于每个 $N \in \mathbb{N}$，在定义 4.1 的坐标中，考虑曲线 $\gamma_N :[0,1] \to G$，其定义为 $\gamma_N(t) :=(x_N(t)\ y_N(t)\ z_N(t))$，其中

$$x_N(t) := \frac{\cos(2\pi Nt)-1}{2\pi N};$$
$$y_N(t) := \frac{\sin(2\pi Nt)}{2\pi N};$$
$$z_N(t) := \frac{2\pi Nt - \sin(2\pi Nt)}{8(\pi N)^2}.$$

曲线 γ_N 是半径为 $\frac{1}{2\pi N}$、绕行 N 圈的圆的水平提升，并且是以弧长参数化的正规测地线（例如参见 [12, 第 1.4 节1]，其中对海森堡群中的测地线作了刻画）。我们有 $\gamma_N(0) = 1_G$ 且$\gamma_N(1) =(0, 0, \frac{1}{4\pi N})$。因此，对于每个 $\epsilon > 0$，存在 $N > 0$使得 $\gamma_N(1) \in B(1_G, \epsilon)$。我们证明了对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一条长度为 1 且终点位于 $B(1_G, \epsilon)$ 的正规曲线，因此命题得证。□

4.2. **定理1.1中指数的最优性**。在任意卡诺群中，我们无法得到类似定理1.1的估计，其指数小于步数的倒数。事实上，对于每个 $s \in \mathbb{N}$，我们都给出一个例子：在步数为 s的丝状群中，存在一条正规曲线γ，使得 $\gamma(t)$到原点的距离有一个上界，该上界为$t^{\frac{1}{s}}$的常数倍。

定义4.3。第一类次黎曼丝状群是一个卡诺群，其分层李代数为 $\mathfrak{g} = V_1 \oplus ... \oplus V_s$，基为 X_1，Y_1，.....，Y_s，其中 $\{X_1, Y_1\}$ 是 V_1的标准正交基，V_j =张成(Y_j) 对应 $j = 2$，.....，s，且唯一的非平凡括号关系为$[X_1, Y_i] = Y_{i+1}$，对每个 $i = 1$，.....，$s-1$均成立。

我们回顾一下，在第一类次黎曼丝状群中，所有长度最小曲线都是正规曲线（例如参见 [6, 命题 4.1]）。

命题4.4。设 G 是第一类、阶为 s 的次黎曼丝状群。设 Y_n 是张成 s 层的一个向量，且 $\gamma:\ \mathbb{R} \to G$ 是一条满足 $\gamma(0) = 1_G$、$\gamma(1) = \exp(Y_n)$ 且为长度最小的正规曲线。那么存在 $C > 0$，使得对每个 $t > 1$ 都有

$$d(1, \gamma(t)) < Ct^{\frac{1}{s}}. \tag{63}$$

证明。设 $\{X_1, X_2\}$ 是第一层的一个标准正交标架。设 λ 是与 γ 相关联的一个余向量，参见定义 2.19。由于原点处的能量可微，其微分为

$$\mathrm{d}(\mathrm{E}_1)_w v = \langle w, v\rangle, \ \ \forall v, w \in T_1 G,$$

方程（33）可改写为

$$\lambda(\mathrm{Ad}_{\gamma(t)} X_i) = \langle u(t), X_i\rangle, \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, 2\}. \tag{64}$$

我们断言

$$\gamma(m + s) = \exp(mY_n)\gamma(s), \ \ \forall m \in \mathbb{N}, \forall s \in \mathbb{R}. \tag{65}$$

事实上，曲线 $\exp(mY_n)\gamma(s)$ 关于余向量 λ 满足正规方程（64）：

$$\begin{aligned}(\exp(mY_n)\gamma(s))' = \mathrm{d}L_{\exp(mY_n)}\gamma(s)' = \\ = \mathrm{d}L_{\exp(mY_n)} \sum_{i=1}^{2} \lambda(\mathrm{Ad}_{\gamma(s)} X_i) X_i(\gamma(s)) = \\ = \sum_{i=1}^{2} \lambda(\mathrm{Ad}_{\exp(mY_n)\gamma(s)} X_i) X_i(\exp(mY_n)\gamma(s)),\end{aligned} \tag{66}$$

其中，在第二个等号中我们用到了 γ 满足（64），最后一个等号则源于 $\exp(mY_n)$ 属于中心。

我们有

$$d(1, \exp(mY_n)) = d(1, \delta_{m^{\frac{1}{s}}}(\exp(Y_n))) = m^{\frac{1}{s}} d(1, \exp(Y_n)), \ \ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{67}$$

方程（67）结合（65）和三角不等式可得

$$d(1, \gamma(m + s)) \le m^{\frac{1}{s}} d(1, \exp(Y_n)) + d(1, \gamma(s)), \ \ \forall m \in \mathbb{N}, \forall s \in \mathbb{R}. \tag{68}$$

特别地，由于为 $\gamma|_{[0,1]}$ 长度极小且 $\gamma(1) = \exp(Y_n)$，我们有

$$\begin{aligned}d(1, \gamma(m + s)) \le m^{\frac{1}{s}} d(1, \exp(Y_n)) + d(1, \exp(Y_n)) \le \\ \le d(1, \exp(Y_n))(m^{\frac{1}{s}} + 1), \ \ \forall m \in \mathbb{N}, \forall s \in [0, 1].\end{aligned} \tag{69}$$

因此，令 $C = 2d(1, \exp(Y_n))$，我们有 $m > 1$ 使得

$$d(1, \gamma(m + s)) < C m^{\frac{1}{s}} < C(m + s)^{\frac{1}{s}}, \ \ \forall m \in \mathbb{N}, \forall s \in [0, 1]. \tag{70}$$

命题的证明至此结束。 □

参考文献

[1] Andrei A Agrachev、Davide Barilari 和 Ugo Boscain。《黎曼与次黎曼几何导论》。2012 年。

[2] Andrei A Agrachev 和 Yuri Sachkov。《几何视角下的控制理论》，第 87 卷。Springer Science & Business Media，2013 年。[3] Gioacchino Antonelli、Enrico Le Donne 和 Sebastiano Nicolussi Golo。Lipschitz 卡诺–卡拉泰奥多里结构及其极限。《动力学与控制系统杂志》，第 1–50 页，2022 年。[4] Andr´e Bella¨ıche。次黎曼几何中的切空间。载于《次黎曼几何》，第 1–78 页。Springer，1996 年。[5] Alejandro Bravo-Doddoli。喷射空间中不存在周期测地线，2022 年。[6] Robert L Bryant 和 Lucas Hsu。秩为 2 的分布的积分曲线刚性。《数学发明》，114(1):435–461，1993 年。[7] Earl A Coddington 和 Norman Levinson。《常微分方程理论》。Tata McGraw-Hill Education，1955 年。

[8] Paul Creutz。Pu 不等式的刚性与赋范空间的二次等周常数。《伊比利亚美洲数学杂志》，38(3):705–729，2021 年。[9] Mikhael Gromov。从内部看卡诺–卡拉泰奥多里空间。载于《次黎曼几何》，第 79–323 页。Springer，1996 年。[10] Eero Hakavuori。第二层卡诺群中的无限测地线与等距嵌入。《SIAM 控制与优化杂志》，58(1):447–461，2020 年。[11] Nima Hoda。强捷径空间，2020 年。[12] Enrico Le Donne。次黎曼几何讲义。《预印本》，2010 年。[13] Enrico Le Donne。卡诺群的度量刻画。《美国数学会会刊》，143(2):845–849，2015 年。[14] Enrico Le Donne。卡诺群入门：齐性群、卡诺–卡拉泰奥多里空间及其等距变换的正则性。《度量空间中的分析与几何》，5(1):116–137，2018 年。[15] Donal O'Regan。《非线性常微分方程存在性理论》，第 398 卷。Springer Science & Business Media，1997 年。

E.LeDonne；弗里堡大学，Chemindu Mus´ee 23，1700 弗里堡，瑞士& 数学与统计学系，邮政信箱 35，FI-40014，于韦斯屈莱大学，芬兰，enrico.ledonne@unifr.ch

N. Paddeu；弗里堡大学，Chemin du Mus´ee 23，1700 弗里堡，瑞士，nicola.paddeu@unifr.ch