arXiv:2304.03256v1 [cs.CC] 6 Apr 2023

将图分解为匹配和有界线性森林的复杂性

Agnijo Banerjee*、João Pedro Marciano†、Adva Mond*、Jan Petr*、Julien Portier*

摘要

最近，Campbell、Hörsch 和 Moore 证明：对于每个 $k \geq 9$，判定一个图是否能被边分解为一个匹配和一个 k-有界线性森林是 NP 完全问题；而对于 $k = 1,2$，该问题可在多项式时间内求解。在本文的第一部分中，我们通过证明对于每个 $k \geq 3$该问题都是 NP 完全问题，弥合了这一差距。在本文的第二部分中，我们证明：对于任意 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，判定一个图是否能被边分解为一个匹配和一个 k-有界星森林是多项式时间可解的，从而回答了 Campbell、Hörsch 和 Moore 在同一篇论文中提出的另一个问题。

1 引言

将图的边集分解为张成更简单子图的若干部，是图论中的一个核心问题。众所周知，判定一个图的边集是否能被分解为给定图的同构副本 H，当 H 包含一个含有 3 条或更多边的连通分支时，是 NP 完全问题 [9]。然而，当考虑将边分解为取自更大族的子图副本时，该问题有时会变得更容易。例如，著名的 Nash-Williams 定理 [17] 刻画了一个图何时能够被分解为 k 森林，而这可以在多项式时间内判定。

在此背景下，或许最简单的一类是由所有匹配构成的类，因为将一个图分解为匹配等价于对其边进行正常着色。匹配类的一个直接推广是线性森林类，而线性森林是由顶点互不相交的路径组成的森林。若线性森林的每个分支都是一条至多含有 k 条边的路径，我们就称该线性森林为 k有界的。在 [6] Campbell、Hörsch 和 Moore 研究了将图分解为两个规模有界的线性森林的问题。更确切地说，他们研究了以下问题类别的计算复杂性：

(k,l)-有界线性森林分解问题（(k,l)-BLFD）。给定一个图 G，其边集合是否可以分解为一个 k-有界线性森林和一个 l-有界线性森林?

由于最大度至少为 4 的图显然不可能分解为一个匹配和一个线性森林，因此输入可以限制为次三次图。

*{ab2558, am2758, jp895, jp899}@cam.ac.uk，剑桥大学纯数学与数理统计系（DPMMS），Wilberforce Road, Cambridge，CB3 0WA，英国
†joao.marciano@impa.br，巴西里约热内卢州里约热内卢，Jardim Botânico，Estrada Dona Castorina 110，IMPA

在讨论 (k,l)-BLFD 的复杂度之前，我们先简要介绍一些相关的存在性结果。Akiyama、Exoo 和 Harary [1] 研究了图 G 的线性森林数 la(G)，即将 G 的边分解为线性森林所需的最少部数，并提出了线性森林度猜想，该猜想指出，对于每个图 G，la(G) $\leq \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rceil$。这一猜想仍未解决，目前已知的最佳上界由 Lang 和 Postle 给出 [15]，他们证明了 la(G) $\leq \frac{\Delta}{2} + O(\sqrt{\Delta}\log^4 \Delta)$，其中$\Delta = \Delta(G)$。关于将次三次图分解为线性森林的一项主要结果由 Thomassen 给出 [19],：任意三次图的边都可以分解为两个 5-有界线性森林。有关更多相关及较新的结果，请参阅 [2, 11, 13, 20] 。此外，Glock、Kühn 和 Osthus 的综述 [10] 详细介绍了关于图的边分解的一般结果。

按照我们的记号表述，Péroche [18] 证明了 (∞,∞)-BLFD 是 NP 完全的。Bermond、Fouquet、Habib和 Péroche [3] 证明了 (3,3)-BLFD 是 NP 完全的，并猜想对于每个 $k \geq 2$，(k,k)-BLFD都是NP完全的。Jiang、Jiang 和 Jiang [12] 验证了 $k = 2$情形，随后Campbell、Hörsch和 Moore [6] 解决了任意 $k \geq 2$ 下的这一猜想。事实上，他们证明了一个更一般的结果：如果 $k,l \geq 2$，或者 $l = 1$ 且 $k \geq 9$，则(k, l)-BLFD是NP完全的；如果 $l = 1$ 且 $k \leq 2$，则该问题是多项式时间可解的。这解决了大多数情形下的一般问题，仅留下最后未解决情形中的 $3 \leq k \leq 8$ 和 $l = 1$ 之间的空缺。在本文中，我们填补了这一空缺。

定理 1.1。（k,1）*-BLFD* 对所有 $k \geq 3$ 都是 *NP* 完全的。

连接此 t 定理结合先前结果，我们得到 (k,l)-BLFD 表现出以下二分性 .

定理 1.2。(k,l) -如果 $k + l \geq 4$，则 *BLFD* 是 *NP* 完全问题；否则可在多项式时间内求解。

我们通过一个更强的结果推导出定理 1.1。我们将问题 平面 (k,l)-*BLFD* 定义为输入限定为平面图 G时的 (k,l)-BLFD 问题。关于该问题，我们证明如下结果。

定理 1.3. 对于所有 $k \geq 3$，平面 $(k,1)$-*BLFD* 都是 *NP* 完全的。

显然，定理 1.3 蕴含定理 1.1。

提出的另一个问题是 [6]：考虑匹配与 k-有界星森林，而非 k-有界线性森林时，是否也能证明类似的结果?

匹配与 k-有界星森林分解问题（k-MBSFD）。给定一个图 G，能否将其边集分解为一个匹配和一个 k-有界星森林?

情形 $k = 2$ 显然等价于 (2,1)-BLFD 问题，该问题已在 [6] 中被证明可在多项式时间内求解。通过直接推广他们的证明，我们回答了 Campbell、Hörsch 和 Moore 提出的问题。

定理 1.4。 k-*MBSFD* 对每个 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 都是多项式时间可解的。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们证明定理 1.3，首先简要概述证明思路。在第 3 节中，我们证明定理 1.4；在第 4 节中，我们提出一些尚未解决的问题。

2 NP 完全性的 $(k,1)$-BLFD 对于 $k \geq 3$

2.1 证明概要

我们首先注意到，存在一个多项式时间可验证的证书，用于判断给定整数 k、图$G = (V, E)$ 和两个子集 F_k, $M \subset E$ 时，二元组 (F_k, M) 是否构成 E的一个划分，使得 F_k 是一个 k-有界

线性森林，而 M 是一个匹配。因此，为了证明对于任意$k \geq 3$，Planar (k，1)-BLFD 是 NP 完全的，只需证明它是 NP-hard。这便推出定理 1.3。为此，我们给出一个从 3-SAT 的某个变体到 (k，1)-BLFD 的归约。

对于变量 x，我们将 $\bar{x}$ 称为其否定文字。我们将图 G 的一个 (k, 1)-*BLF*分解 (F_k, M) 定义为将其边分解为一个 k-有界线性森林 F_k 和一个匹配 M。长度为 ℓ（按边计）的路径也称为 ℓ-路径。我们考虑以下 SAT 问题。

($\leq$ 3,3)–**SAT**

输入： 一个变量集合 X、一个子句集合 C，使得 $|C| \in$ {2,3}对所有 $C \in$ C，且对于每个 $x \in X$，我们有 x 恰好出现在两个子句中，而 $\bar{x}$ 恰好出现在一个子句中。
问题： 是否存在一个真值赋值 ϕ： $X \to$ {真，假}，使得每个子句至少包含一个真文字?

一个具有所需性质的赋值 ϕ 被称为满足。

由于我们希望证明平面 (k,1)-BLFD 的NP 完全性，我们考虑 ($\leq$ 3,3)-SAT 的一个稍加限制的变体。给定一个元组 (X, C)，其中 X 是变量的集合，而 C 是子句的集合，其关联图 是一个部为 $X \cup$C的二分图，当且仅当 x 或 $\bar{x}$ 出现在 C中时， xC 是一条边。平面 ($\leq$ 3, 3)-SAT是将 ($\leq$ 3,3)-SAT 限制在具有关联图的平面实例上。

定理 2.1 ([8, 16])。 平面 ($\leq$ 3,3)–*SAT* 是 *NP* 完全。

我们从 3-SAT 的一个变体到平面（k，1)-BLFD 的归约遵循 [6] 中归约的大致思路。给定平面（X，C）-（$\leq$ 3，3)-SAT 的一个实例，我们构造一个平面图 $G_{(X,\mathcal{C})}$，并证明（X，C）是平面（$\leq$ 3，3)-SAT 的是实例，当且仅当 $G_{(X,\mathcal{C})}$ 是平面（k，1)-BLFD 的是实例。C 中的子句在我们的图中表示为顶点，而变量表示为子图，我们称之为变量构件。对于每个变量 $x \in X$ 和子句 $C \in$ C（满足 x 或 $\bar{x}$ 出现在 C 中），我们在表示变量 x 的变量构件与表示 C的顶点之间添加一条边。我们以如下方式进行构造：如果 x 出现在 C 中，则表示 x 的构件将通过一个我们称为正输入顶点的顶点与顶点 C 相连；而如果 $\bar{x}$ 出现在 C中，则通过一个我们称为负输入顶点 的顶点与之相连。由于（X，C）是（$\leq$ 3，3)-SAT 的一个实例，因此 $G_{(X,\mathcal{C})}$ 中的每个变量构件都将具有两个正输入顶点和一个负输入顶点（见图 1）。

接下来，我们将展示 (X, C) 的满足赋值与 $G_{(X,\mathcal{C})}$ 的 (k,1)-BLF分解之间的如下对应关系。给定 $G_{(X,\mathcal{C})}$ 的 (k,1)-BLF分解，我们将变量 x 的构件与表示子句 C 的顶点之间的一条边是否包含在匹配中，与 $\phi(x)$ =真关联起来（若该边与一个正输入顶点相邻）；若该边与一个负输入顶点相邻，则与 $\phi(x)$ = 假关联起来。这旨在表示将 ϕ 赋值为 x 会使 C 为真。要使这一启发式说法成立，必须排除这样一种可能：从某个 (k,1)-BLF分解中同时推导出 $\phi(x)$ =真和 $\phi(x)$ = 假。这对应于我们所称的冲突边：也就是说，我们的图存在一个 (k,1)-BLF分解，使得存在一个变量 x，其负输入顶点和至少一个正输入顶点都通过一条包含在匹配中的边与某个子句相邻。

基于这一框架，只要我们构造一个变量构件，使其在任何 (k,1)-BLF 分解中都不允许出现冲突边，那么就一定能从其任意一个 (k,1)-BLF 分解中推导出一个满足赋值 ϕ for (X, C)。事实上，这样一来，每个变量都恰好被赋予一个真值，并且每个子句顶点都至少有一个变量，其赋值使该子句为真。反过来，我们必须能够从一个满足赋值

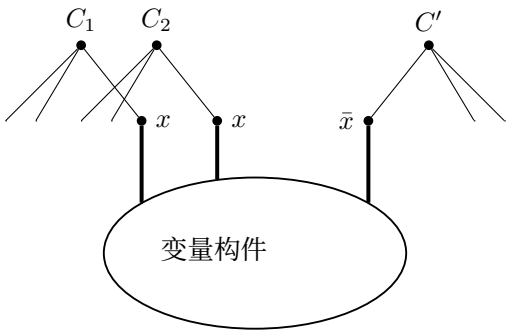


图1：变量 x的一个变量构件示意图，其左侧有两个正输入顶点，右侧有一个负输入顶点；以及三个子句顶点 C_1，C_2 和C'，使得 x 出现在 C_1，C_2 中，并且 $\bar{x}$ 出现在 C'中。每个子句顶点还与另外两条边相邻，每条边都将其连接到相关的变量构件。

ϕ of (X, C)。注意，在我们的框架中，一个赋值 ϕ 会诱导出一个针对所有与子句顶点相邻的边的 (k,1)-BLF 分解。因此，只要任何针对与子句顶点相邻边的 (k,1)-BLF 分解都能“扩展”为每个变量构件的有效 (k, 1)-BLF 分解，从而得到整个图的有效 (k,1)-BLF 分解，这一点就应该可行。

接下来的挑战是构造一个满足上述所有条件的变量构件。注意，变量构件的第一项限制意味着，在一个 (k,1)-BLF 分解中，其负输入顶点和其中一个正输入顶点不可能同时与一条匹配边相邻。第二项限制意味着，只要在与子句顶点相邻的边的 (k,1)-BLF 分解中，其负输入顶点和其中一个正输入顶点都不与匹配边相邻，就可以将其扩展为整个变量构件的 (k,1)-BLF 分解。

我们通过组合两个辅助构件来构造变量构件，将它们分别称为 k-OR 和(FF k)-拒绝器（分别见定义 2.6 和 2.8）。非正式地说，给定图$G_{(X,C)}$的 (k,1)-BLF分解， k-OR 具有这样的性质：它能够识别变量构件是否存在一条匹配边，通过其某个正输入顶点将其连接到一个子句；如果存在这种情形，则(FF k)-拒绝器具有这样的性质：拒绝将负输入顶点连接到子句顶点的边也包含在匹配中的可能性。

本节其余部分安排如下。在第2.2 节中，我们构造辅助构件，随后在第 2.3 节中使用这些构件构造变量构件。然后，在第 2.4 节中，我们证明归约。

2.2 辅助构件

我们用来构造构件的一个重要对象是强制器。由于强制器是我们构件中的基本“构建模块”，我们首先介绍它们的构造。

2.2.1 强制器图

M-强制器和 F$_k$-强制器是带有一条指定边的图；对于它们的任意 (k, 1)-BLF 分解 (F_k, M)，该边分别被强制包含于 M或 F_k 中。 $k \geq 4$ 的强制器图已经在 [6], 中构造出来，但使用的是含有多重边的图。为了便于推广，我们在此针对每个 $k \geq 3$ ，使用简单图构造强制器。

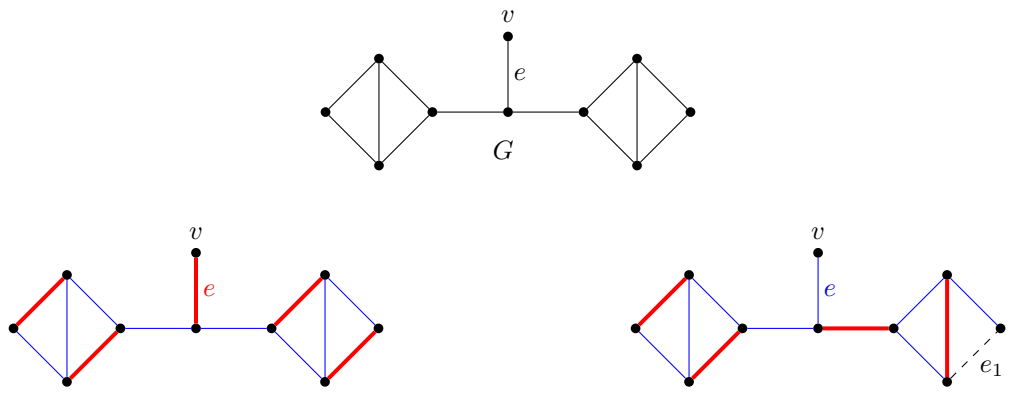


图2：一个用于 $k \geq 8$ 的 (M k)-强制器 (G, v)，左侧是它的一种可能的 (k,1)-BLF分解 (F_k, M)，其中 $e \in M$；右侧则尝试给出一种 $(k, 1)$-BLF分解 (F_k, M)，其中 $e \in F_k$ 创建了一条无法进行任何指派的边 e_1。F_k 被涂成蓝色，M 以粗体显示并被涂成红色。

定义2.2。令 $k \geq 3$ 为一个整数。给定一个图 $G = (V, E)$ 和一个度为1的顶点 $v \in V$，如果以下条件成立，则称 (G, v) 是一个 (M k)-强制器。

- 存在 G 的一种 (k,1)-BLF分解。
- 对于 G 的任意 $(k, 1)$-BLF分解 (F_k, M)，包含 v 的边 $e \in E$ 属于 M。

定义 2.3。设 $k \geq 3$ 和 $1 \leq \ell \leq k$ 为整数。给定一个图 $G = (V, E)$ 及其一个度为1的顶点 $v \in V$，若满足以下条件，则称 (G, v) 是一个 (ℓF k)-强制器。

- 存在一个 (k,1)-BLF分解，将 G分解为。
- 对于 G的任意(k，1)-BLF分解(F_k，M)，顶点 v 包含在 F_k中的一条 ℓ-路径里，且不包含在 F_k中的任何($\ell + 1$)-路径里。

我们通过给出显式构造，证明 (M k)-强制器和 (ℓF k)-强制器存在。

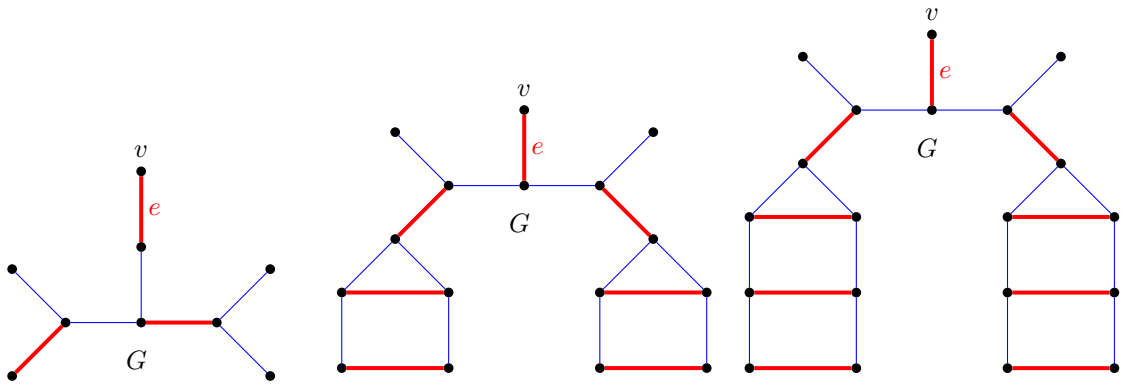
命题2.4。对于任意 $k \geq 3$，存在一个($\mathcal{M}$ k)-强制器(G, v)。此外，该陈述在附加限制 G 为平面图的情况下仍然成立。

证明。我们为 k 的任意可能取值给出一个 (M k) 强制器的显式构造。对于 $k \geq 8$，我们按图2构造 (G, v)。对于 $k \leq 7$，我们采用不同的构造，该构造进一步分为 $k = 3$, $k = 4$,5，或 $k = 6$,7 的情形，如图3所示。容易验证，所给出的每种构造确实都是一个 (M k) 强制器。注意，所有构造中的图都是平面的。

□

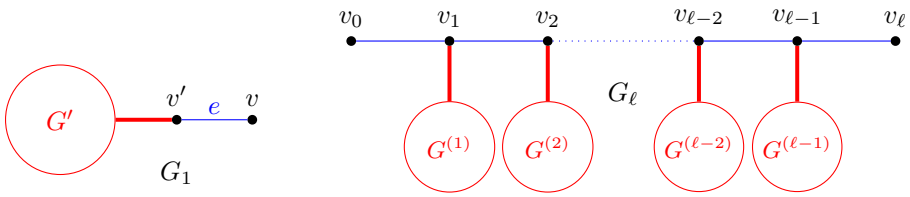
命题 2.5。对于任意整数 $k \geq 3$和 $1 \leq \ell \leq k$，都存在一个($\ell\mathcal{F}$ k)-强制器(G, v)。此外，即使附加要求 G 是平面图，该结论仍然成立。

证明。令 $k \geq 3$ 为一个整数，并首先考虑 $\ell = 1$的情形。令 (G', v') 为命题2.4的证明中构造的 (M k)-强制器。令 G_1 为通过添加一个新顶点 v 和边 $e = vv'$ 得到的图。则 (G_1, v) 是一个 (1F k)- 强制器。事实上，G_1 的任意 (k, 1)-BLF 分解 (F_k, M) 都会诱导出 G' 的一个 $(k, 1)$-BLF 分解 $(F\kappa, M')$。由于 (G', v') 是一个 (M k)- 强制器，我们得到 $e' \in M\prime$，其中



(a) $k = 3$ (b) $k = 4,5$ (c) $k = 6,7$

图3：(k)-强制器（G, v），用于 $3 \leq k \leq 7$ with一个可能的（$k, 1$）-BLF分解（F_k, M），其中每个分解满足 $e \in M$。 F_k 被着色为蓝色， M 以粗体显示并着色为红色。



(a) $\ell = 1$ (b) $\ell \geq 2$

图 4：满足条件的（ℓF k）-强制器（G， v），每个强制器都可能有一个（k，1）-BLF分解（F_k， M）。 F_k 着为蓝色，而（M k）-强制器的图 G'， $G^{(1)}$，.....， $G^{(\ell-1)}$ 着为红色，此外， M也以粗体显示。

$e' \in E(G')$ 是满足 $v' \in e'$ 的边。由此可知，在 (F_k, M)中有 $e = vv' \in F_k$，此外， v 不包含在 F_k 中的任何 2- 路径中（见图 4(a) ）。

现在设 $2 \leq \ell \leq k$ 为一个整数，并令（$G^{(1)}, v_1$）.....，（$G^{(\ell-1)}, v_{\ell-1}$）为（G', v'）的 $\ell - 1$ 个不相交副本。按如下方式定义图 $G_\ell = (V, E)$。设 v, u 是两个顶点，对于所有 $i = 1$，.....，$\ell - 1$，它们都不属于 V（$G^{(i)}$）；令 P 为 ℓ- 路径（v, v_1,....., $v_{\ell-1}, u$）。设 $V := V$（$G^{(1)}$）$\cup \ldots \cup V$（$G^{(\ell-1)}$）$\cup \{v, u\}$，并设 $E := E$（$G^{(1)}$）$\cup .. \cup E$（$G^{(\ell-1)}$）$\cup E$（P）（见图 4(b)）。我们声称（G_ℓ, v）是一个（ℓF k）-强制器。事实上， G_ℓ的任意（$k, 1$）-BLF分解（F_k, M）都会诱导出 $G^{(i)}$ 的（F（i）$_k, M$（i））形式的（$k, 1$）-BLF分解，其中 $i = 1$,....., $\ell - 1$。由于（$G^{(i)}, v_i$）是（M k）-强制器，我们知道必有 $e_i \in M^{(i)}$，其中 $e_i \in E$（$G^{(i)}$）是具有$v_i \in e_i$的边，对所有 $i = 1$,....., $\ell - 1$均如此。因此，在（F_k, M）中必有 $vv_1, v_{\ell-1}u \in F_k$，且对所有$i = 1$,....., $\ell - 2$均有 $v_i v_{i+1} \in F_k$，这意味着 $P \subset F_k$；此外，没有包含 v 的（$\ell + 1$）-路径属于 F_k。

最后，对于 ℓ的任意取值，图4通过明确的分解展示了 G_ℓ存在一个（k，1）-BLF分解。

□

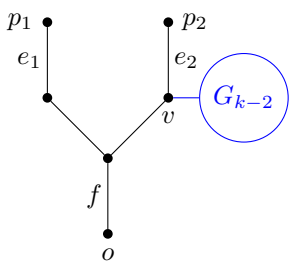


图5：图 O 的顶点 p_1, p_2, o 的度为1，其中（G_{k-2}, v）是一个（（$k-2$）F, k）-强制器。

2.2.2 k-OR构件

我们使用一个强制器构造的第一个构件是 k-OR 构件。它是一个具有三条指定边的构件，并满足：对于其图的任意 (F_k, F_l)-分解 (F_k, M)，第三条边属于 F_k 当且仅当前两条边中至少有一条属于 F_k。由于我们将属于 F_k 的边与真关联，该构件充当析取。

定义 2.6。设 $k \geq 3$。设 $O = (V, E)$ 为一个图，且 $p_1, p_2, o \in V$ 是 O 中度为1的三个顶点。设 $e_1, e_2, f \in E$ 分别为包含 p_1, p_2 和 o 的边。若满足以下条件，则称 (O, p_1, p_2, o) 为 k-OR。

- 对于集合 $\{F_k, M\}$ 的任意划分，都存在一个$(k,1)$-BLF分解(F_k, M)，其对象为 O ，使得 $F_k \subset F_k$ 且 $M \subset M$。
- 对于任意的 O 的 $(k,1)$-BLF分解 (F_k, M)，若满足 $e_1, e_2 \in M$，则有 $f \in M$。
- 对于任意 $(k,1)$-BLF分解 (F_k, M)，其中 O $e_1 \in F_k$ 或 $e_2 \in F_k$，我们有 $f \in F_k$。

对于所有 $k \geq 3$，都存在这样的构件：

命题 2.7。对于所有 $k \geq 3$，存在一个 k-OR (O, p_1, p_2, o)。此外，即使增加 O 为平面图这一限制，该命题仍成立。

证明。构造图 O，其顶点为 p_1，p_2，o，如图5所示，其中$(G_{k-2}$，$v)$ 是一个 $((k-2)$F $k)$-强制器。在任意$(k,1)$-BLF分解$(F_k$，$M)$ 中，O的每个度为 3 的顶点都必须恰好与 M中的一条边关联，并且由于 F_k 不包含由 $k+1$ 条边组成的任何路径，容易验证 O 恰好有 4 个可能的 $(k$，1)-BLF分解；这些分解如图6所示。这表明$(O$，p_1，p_2，$o)$是一个 k-OR。此外，通过令 G_{k-2} 为平面图（根据命题 2.5 这是可能的），我们得到 O 也是平面的。

□

2.2.3 （$\mathcal{FF}$ k）-拒绝器

定义 2.8。令 $k \geq 3$。令 $R = (V$，$E)$ 为一个图，n'，$n \in V$ 为 R 中度为1的顶点。令 e'，$e \in E$ 分别为包含 n'，n 的边。若满足以下条件，则称 $(R$，n'，$n)$ 为一个 (FF k)-拒绝器。

- 不存在这样的（k，1）-BLF分解（F_k，M）：R 使得 e，$e \in F_k$。

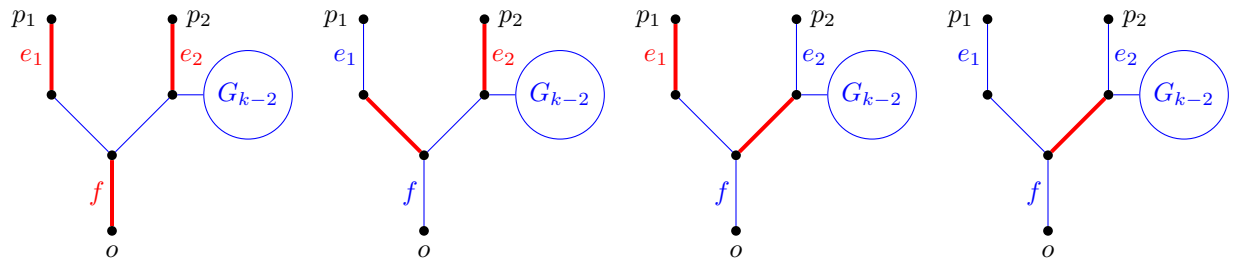


图6： O的仅有四种可能的（k，1）-BLF分解。($k-2$)F k)-强制器 G_{k-2} 以及 k-有界线性森林的边为蓝色，匹配的边为红色且加粗。

- 对于集合{e, e}的任意划分{$\tilde{F_k}$, $\tilde{M}$}，只要至少有一个 e, e 属于 M，就存在 R的一个（k, 1）-$\tilde{}$ BLF分解（$\tilde{F_k}$, $\tilde{M}$），使得 $\tilde{F_k} \subset F_k$和 $\tilde{M} \subset M$；此外， e,和 e 都不包含在 $\tilde{F_k}$中长度大于1的路径内。

（FF k）-拒绝器的一个重要性质是，它由一个图构成：当且仅当其输入边中至少有一条包含在匹配中时，该图才存在一个（k, 1）-BLF分解。稍后在最终归约中，将利用这一点验证不会将真值 TRUE 同时赋给 x 和 $\bar{x}$。

命题 2.9。 对于所有 $k \geq 3$，都存在一个($\mathcal{FF}$ k)-拒绝器(R, n', n)。此外，在附加限制 R 为平面图的情况下，该结论仍然成立。

证明。 设 $k \geq 3$。我们给出一个 (FF k)-拒绝器 (R, n', n) 的显式构造。令 $\left\{(G_{k-2}^{(j)}, v_j)\right\}_{j \in \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$ 为来自命题 2.5 证明的 (($k-2$)F k)-强制器的不相交副本集合，并令$w_1, \ldots, {}^{w_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}, u_1, \ldots, {}^{u_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}}, n', n$ 为$2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 3$个互不相同的顶点，且与所有 $G_{k-2}^{(j)}$’ 均不相交。按如下方式定义图$R = (V, E)$（见图7）。

$$V \coloneqq \bigcup_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} V\left(G_{k-2}^{(j)}\right) \cup \{w_1, \ldots, w_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}\} \cup \{u_1, \ldots, u_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}\} \cup \{n', n\}$$

$$E \coloneqq \bigcup_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \left(E\left(G_{k-2}^{(j)}\right) \cup \{v_j w_j, w_j u_j, w_j u_{j+1}\}\right) \cup \{e', e\},$$

其中 $e' = n' u_1$ 和 $e = {}^{n u_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}}$。我们声称 (R, n', n) 是一个 (FF k)-拒绝器，具体可通过考察定义 2.8 中的各项得出。

首先，我们证明不存在一个 $(k, 1)$-BLF分解 (F_k, M) 的 R 使得 $e', e \in F_k$。反设存在，并令 (F_k, M) 是一个 $(k, 1)$-BLF分解 R 的分解，使得 $e', e \in F_k$。我们声称存在 $1 \leq j \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ 使得 $v_j w_j \in F_k$。事实上，否则，对于所有 $1 \leq j \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$，我们都有 $v_j w_j \in M$，这意味着 $u_j w_j, w_j u_{j+1} \in F_k$。但此时 $(n', u_1, w_1, u_2, w_2, \ldots, {}^{w_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}, {}^{u_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}}, n)$ 将是一个路径，其长度为 $2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2 \geq k + 1$，位于 F_k 中，这是矛盾。

令 j_0 为使得 $v_j w_j \in F_k$的最小 j。那么，对于所有 $j < j_0$，我们都有 $v_j w_j \in M$，因此$u_j w_j$, $w_j u_{j+1} \in F_k$。注意到这意味着 $u_{j_0} w_{j_0} \in M$，因为否则（n', u_1, w_1, u_2, ..., w_{j_0}, v_{j_0}）将会是 F_k中一条长度至少为3 的路径，与 $G^{(j_0}$ 中一条长度为 $k-2$ 的路径相连）通过 v_{j_0}，从而在 F_k 中形成一条长度大于 k 的路径，这与矛盾。由于 $u_{j_0} w_{j_0} \in M$，我们有 $w_{j_0} u_{j_0+1} \in F_k$。因此，由于根据 j_0的选取有$v_{j_0} w_{j_0} \in F_k$，我们得到（v_{j_0}, w_{j_0}, u_{j_0+1}）是 F_k 中一条长度为2 的路径，与 $G^{(j_0}$ 中一条长度为 $k-2$ 的路径相连）通过 v_{j_0}，迫使 $u_{j_0+1} w_{j_0+1} \in M$。迭代这一论证，我们得到

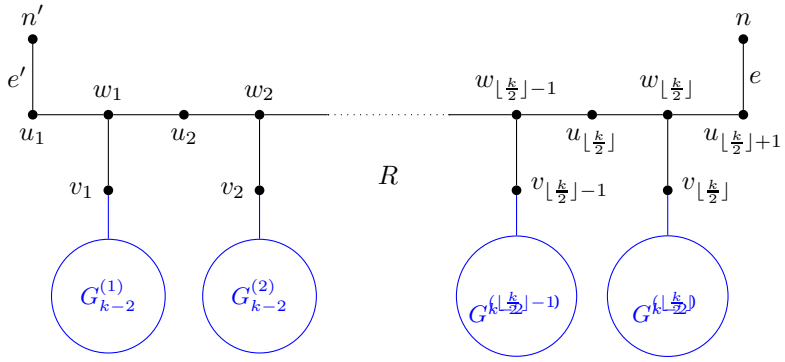


图7 ：一个由图 R 构成的 (FF k)-拒绝器 (R, n', n)，其顶点 n', n 的度为1 .

对于所有 $j_0 \le j \le \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$，我们有 $u_j w_j \in M$ 和 $w_j v_j$，$w_j u_{j+1} \in F_k$。但这样一来，$(n, u_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}, w_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}, v_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor})$ 就是 F_k 中一条长度为 3 的路径，它经由 $v_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$ 与 $G^{(\lfloor k/2 \rfloor)}_{k-2} \cap F_k$ 中一条长度为 $k-2$ 的路径相连，从而在 F_k 中形成一条长度大于 k 的路径，矛盾。

其次，给定集合 $\{e', e\}$ 的一个划分 $\{F_k, M\}$，且 e', e 中至少有一个属于 M，我们给出 R 的一个满足 $\tilde{F}_k \subset F_k$ 和 $\tilde{M} \subset M$ 的 $(k, 1)$-BLF分解 (F_k, M)。对于每个 $1 \le j \le \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$，我们固定 $G^{(j)}_{k-2}$ 的一个 $(k, 1)$-BLF分解 $(F^{(j)}_k, M^{(j)})$。由命题 2.5 和定义 2.3 可知，对于每个 $1 \le j \le \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$，$v_j$ 是 $F^{(j)}_k$ 中一条 $(k-2)$- 路径的端点。现在，我们考虑 $\{F_k, M\}$ 的所有三种可能，并分解剩余的边，得到如下的 (F_k, M)（见图8）。

(a) $\tilde{F}_k = \{e'\}$；$\tilde{M} = \{e\}$。对于所有 j，我们令 $u_j w_j \in M$ 和 $v_j w_j$，$w_j u_{j+1} \in F_k$。(b) $\tilde{F}_k = \{e\}$；$\tilde{M} = \{e'\}$。对于所有 j，我们令 $w_j u_{j+1} \in M$和 $v_j w_j$，$u_j w_j \in F_k$。(c) $\tilde{F}_k = \emptyset$；$\tilde{M} = \{e', e\}$。对于所有 j我们令 $v_j w_j \in M$和 $u_j w_j$，$w_j u_{j+1} \in F_k$。

直接检查可知，在三种情形下，(F_k, M) 都是 R 的一个有效的 $(k, 1)$-BLF 分解，注意在第三种情形中，路径 $u_1 w_1 u_2 \dots w_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} u_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1} \in F_k$ 的长度为 $2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \le k$。还要注意，在三种情形下，$e'$ 和 e 都不包含在 F_k 中长度大于 1 的路径内。因此，(R, n', n) 是一个 (FF k)- 拒绝器。此外，通过令所有 $G^{(j)}_{k-2}$'s 都为平面图（根据命题 2.5 这是可能的），我们得到一个同样为平面图的图 R。

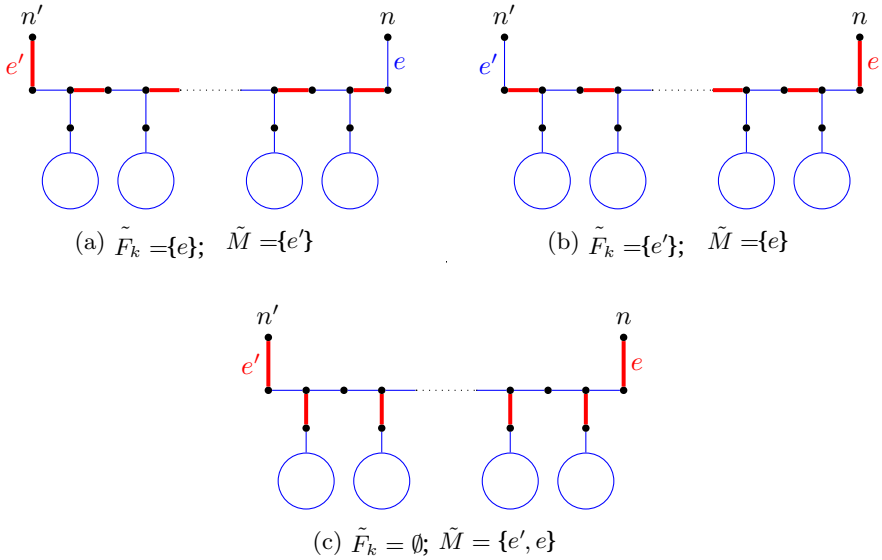
□

2.3 构造变量构件

我们构造一个变量构件，稍后将在最终归约中使用它。

构造 *2.10.* 令 $k \ge 3$。我们按如下方式构造一个图 H。令 (R, n', n) 为一个 (FF k)-拒绝器，使得 R 是平面图；令 e' 和 e 分别为 R 中包含 n' 和 n 的边，并令 o 为满足 $e' = n'o$ 的顶点。令 (O, p_1, p_2, o) 为一个 k-OR，使得 e' 是 O 中包含 o 的边，并将 e_1 和 e_2 分别记为 O 中包含 p_1 和 p_2 的边。注意，我们有 $V(O) \cap V(R) = \{n', o\}$，以及 $E(O) \cap E(R) = \{e'\}$。令 $H := O \cup R$（见图 9）。我们称 (H, p_1, p_2, r) 为一个变量构件，e_1, e_2 和 p_1, p_2 分别是其正输入边和正输入顶点，而 e, r 分别是其负输入边和负输入顶点。

以下引理概括了变量构件最重要的性质。



(a) $\tilde{F}_k$ ={e}; $\tilde{M}$ ={e′}

(b) $\tilde{F}_k$ ={e′}; $\tilde{M}$ ={e}

(c) $\tilde{F}_k = \emptyset$; $\tilde{M} = \{e', e\}$

˜ ˜图8: R满足 $F_k \subset F_k$和 $M \subset M$时，可能的（k，1）-BLF分解（F_k，M）。一个（（$k-2$）F k）-强制器的副本以及 F_k 被标为蓝色，M 被标为红色并加粗。

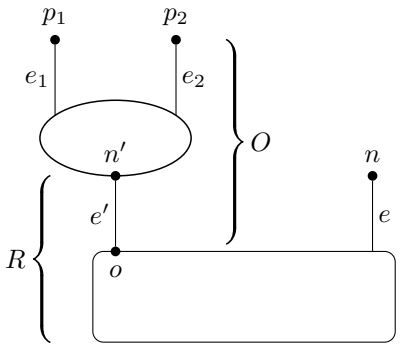


图 9: 一个变量构件（H, p_1, p_2, n），由一个 k-OR（O, p_1, p_2, o）和一个（FF k）-拒绝器（R, n', n）组成，使得 O 和 R 共享边 $e' = n'o$。

引理 *2.11*。设 $k \geq 3$，且令 *(H,* p_1*,* p_2*, n)* 为构造 *2.10* 中所述变量构件的一个副本，其正输入边为 e_1, e_2，负输入边为 e。设 *{*F_k*,* M*}* 是˜集合 *{*e_1*,* e_2*, e}* 的一个划分，使得 *{*e_1*, e}* 和 *{*e_2*, e}* 均不包含于 F_k 中。那么存在一个 *(k, 1)-BLF*˜ ˜分解 *(*F_k*,* M*)*，使得 $F_k \subset F_k$，$M \subset M$。

反之，给定一个 $(k, 1)$*-BLF*分解 (F_k, M) *of* H，我们有$\{e_1, e\}$、$\{e_2, e\}$ 均不包含于 F_k。

˜ ˜证明。该引理是命题 2.7 和 2.9 的推论。令 (F_k, M) 为集合 $\{e_1, e_2, e\}$ 的一个划分，满足陈述中的假设，并令 $(\tilde{F}_k^O, \tilde{M}^O)$ 为其在 $\{e_1, e_2\}$ 上诱导的划分。由命题 2.7，存在一个 $(k, 1)$-BLF分解 (F_k^O, M^O)，使得 O $\tilde{F}_k^O \subset F_k^O$且 $\tilde{M}^O \subset M^O$。令 $\{\tilde{F}_k^R, \tilde{M}^R\}$ 为由 $\{\tilde{F}_k \cup F_k^O, \tilde{M} \cup M^O\}$ 在集合 $\{e', e\}$ 上诱导的划分。根据定义 2.8，存在一个 $(k, 1)$-BLF分解 (F_k^R, M^R)，使得 $\tilde{F}_k^R \subset F_k^R$且 $\tilde{M}^R \subset M^R$当且仅当 e'、e 中至少一个属于 $\tilde{M}^R$。然而，由于 (O, p_1, p_2, o) 是一个 k-OR，这等价于 $\{e_1, e\}$ 和 $\{e_2, e\}$ 均不包含于 $\tilde{F}_k^R$，而这由我们的假设保证。令 (F_k^R, M^R) 为这样一个 $(k, 1)$-BLF分解，并令 $(F_k, M) := (F_k^O \cup F_k^R, M^O \cup M^R)$。于是我们有 $\tilde{F}_k \subset \tilde{F}_k^O \cup \tilde{F}_k^R \subset F_k^O \cup F_k^R = F_k$ 和 $\tilde{M} \subset \tilde{M}^O \cup \tilde{M}^R \subset M^O \cup M^R = M$，如所需。

反过来，设 (F_k, M) 是 H 的一个 $(k, 1)$-BLF 分解。若 $e \in F_k$，那么由于 (R, n', n) 是一个 (FF k)-拒绝器，我们必有 $e' \in M$。但是，由于 (O, p_1, p_2, o) 是一个 k-OR，可得 $e_1, e_2 \in M$，从而证明了该结论。 □

2.4 归约

现在，我们终于来描述用于建立该归约的图。

构造 *2.12*。设 *(X, C)* 是平面 *(*$\leq$ 3*, 3)–SAT* 的一个实例，且 $k \geq 3$。我们按如下方式构造平面图 $G_{(X,\mathcal{C})}$。对于每个子句 $C \in \mathcal{C}$，令 v_C 为一个顶点。对于每个满足以下条件的变量 $x \in X$： x 出现在 C_1 中，C_2，且 $\bar{x}$ 出现在 C_3 中，其中 C_1、C_2、$C_3 \in \mathcal{C}$，令 $p^x_{C_1}$ 和 $p^x_{C_2}$ 为正输入顶点，$n^x_{C_3}$ 为负输入顶点。然后，令 *(*H^x*,*$p^x_{C_1}$*,*$p^x_{C_2}$*,*$n^x_{C_3}$*)* 为 *2.10* 中构造的变量构件的一个副本。此外，对于每个满足 $|C| = 2$ 的子句 $C \in \mathcal{C}$，将一个 *(1F k)*-强制器 *(*G_C*,* v_C*)* 接到 v_C 上。然后，$G_{(X,\mathcal{C})}$ 定义为上述所有部分的并集，并加入连接每个变量构件的输入顶点与相应子句顶点的边，即

$$\{v_{C_1}p^x_{C_1}, v_{C_2}p^x_{C_2}, v_{C_3}n^x_{C_3} : x \in X, C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{C} \ s.t. \ x \in C_1, C_2; \bar{x} \in C_3\}.$$

图 *10* 展示了一个示例。

引理 2.13. 设 $k \geq 3$。设 $(X, \mathcal{C})$ 是平面$(\leq 3,3)$*–SAT* 的一个实例，并设图 $G_{(X,\mathcal{C})}$ 如构造 *2.12* 所述。若 $(X, \mathcal{C})$ 是平面$(\leq 3,3)$*–SAT* 的一个是实例，则 $G_{(X,\mathcal{C})}$ 是平面$(k,1)$*-BLFD* 的一个是实例。

证明。设 $\phi : X \to$ {TRUE,FALSE} 是一个真值赋值，使得 C 的每个子句都至少包含一个真文字。我们按如下方式构造图 $G_{(X,\mathcal{C})}$ 的一个有效的 $(k, 1)$-BLF 分解 (F_k, M)。

设 $x \in X$ 为一个变量，设 C_1、C_2、$C_3 \in$ C 为子句，使得 x 出现在 C_1、C_2 中，而 $\bar{x}$ 出现在 C_3 中。令 $(H^x$、$p^x_{C_1}$、$p^x_{C_2}$、$n^x_{C_3})$ 为按照构造 2.10 构造的 x 的变量构件。分别将与 $p^x_{C_1}$、$p^x_{C_2}$ 相邻的 H^x 中的正输入边记为 $e^x_{C_1}$、$e^x_{C_2}$，并将与 $n^x_{C_3}$ 相邻的 H^x 中的负输入边记为 $e^x_{C_3}$。对于任意子句 $C \in$ C 和任意变量 $x \in X$，若 $x \in C$ 或 $\bar{x} \in C$，将 H^x 的输入顶点记为 v^x_C，该输入顶点与 v_C 相邻（即，当 $x \in C$ 时为 $v^x_C = p^x_C$，当 $\bar{x} \in C$ 时为 $v^x_C = n^x_C$）。

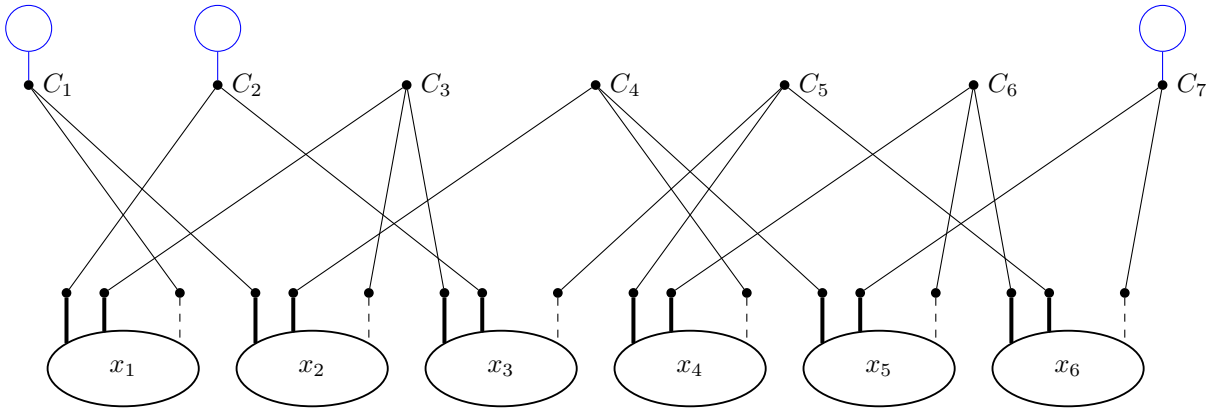


图 10：图 $G_{(X,\mathcal{C})}$ for $X = \{x_i\}_{i=1}^{6}$ 和 C $= \{C_i\}_{i=1}^{7}$ 的一个示例，其中 $C_1 = \bar{x}_1 \vee x_2$;$C_2 = x_1 \vee x_3$; $C_3 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$; $C_4 = x_2 \vee \bar{x}_4 \vee x_5$; $C_5 = \bar{x}_3 \vee x_4 \vee x_6$; $C_6 = x_4 \vee \bar{x}_5 \vee x_6$; $C_7 = x_5 \vee \bar{x}_6$。该图由 6 个变量构件、7 个子句顶点，以及 3 个用于 3 个大小为 2 的子句的 (1F k)-强制器组成。可以验证该图是平面的。

˜ ˜我们首先将与变量构件的输入顶点，或与 $\{v_C : C \in$ C$\}$ 中的顶点相邻的边划分为 $\{F$、$M\}$。然后证明，该划分可以扩展为 $G_{(X,\mathcal{C})}$ 的一个有效的 $(k,$ 1)-BLF分解˜ ˜$(F_k$、$M)$，使得 $F_k \subset F_k$ 且 $M \subset M$。对于每个子句 $C \in$C，我们任意选取一个变量 x_C，使得 x_C 出现在 C 中且 $\phi(x_C)$ 为真，或者 $\bar{x_C}$ 出现在 C 中且 $\phi(x_C)$ 为假（即，˜一个使 C 的取值为真的任意变量）。然后，对于每个子句 $C \in$ C，我们指定 $v_C v_C^{x_C} \in M$˜，从而得到 $e_C^{x_C} \in F_k$。对于满足 y 或 $\bar{y}$ 出现在 C 中的任意其他变量 $y \neq x_C$，我们指定 $v_C v_C^{y} \in \tilde{F}_k$ 和 $e_C^{y} \in \tilde{M}$。对于每个满足 $|C| = 2$ 的子句 $C \in$C，考虑与其相邻的 (1F k)-强制器 $(G_C$、$v_C)$˜。将包含 v_C 的边记为 $e_C \in E(G_C)$，并指定 $e_C \in F_k$。

˜ ˜请注意，到目前为止，已划分到 $\{F_k, M\}$ 中的边集合，恰好是所有与 v_C 相邻的边（对所有 $C \in$ C 而言），以及所有变量构件的输入边（正边和负边）。˜ ˜因此，为了将 $\{F_k, M\}$ 扩展为 $G_{(X,\mathcal{C})}$ 的 $(k, 1)$-BLF 分解，我们分别将其扩展为每个变量构件以及附接到大小为 2 的子句上的每个 (1F k)-强制器的 $(k, 1)$-BLF 分解。

从后者开始，对于每个具有 $|C| = 2$ 的 $C \in$C 型 (1F k)-强制器 (G_C, v_C)，我们固定 G_C 的一个 $(k,$ 1)-BLF分解 (F_k^C, M^C)，使得 $e_C \in F_k^C$。根据定义 2.3 和命题 2.5，存在一个满足上述条件的 $(k,1)$-BLF分解。

此时我们需要分解的边集合恰好为

$$\bigcup_{x \in X} \left(E(H^x) \setminus \{e^x_{C_1}, e^x_{C_2}, e^x_{C_3} \ : \ x \in C_1, C_2, \bar{x} \in C_3\} \right),$$

˜ ˜我们通过分别在每个变量构件上将 $\{F_k, M)$ 扩展为一个 $(k, 1)$-BLF分解来实现这一点。

令 $x \in X$，并令 C_1、C_2、$C_3 \in$C满足 x 出现在 C_1中，且C_2和 $\bar{x}$ 出现在 C_3中。回想一下，根据˜ ˜˜我们对 F_k的选择，具有 $e^x_{C_3} \in F_k$ 意味着 $\phi(x) =$ 假，而具有$e^x_{C_1} \in F_k$ 或$e^x_{C_2} \in F_k$ 则意味着$\phi(x) =$真。因此，$\{e^x_{C_1}, e^x_{C_3}\}$和$\{e^x_{C_2}, e^x_{C_3}\}$都不包含于 F_k^x中。因此，由引理 2.11，存在一个 H^x的$(k, 1)$-BLF分解(F_k^x, M^x)，使得 $F_k^x \subset F_k^x$且 $M^x \subset M^x$，其中 $\{F_k^x, M^x\}$是由$\{F_k, M\}$诱导的$\{e^x_{C_1}, e^x_{C_2}, e^x_{C_3}\}$的划分。

定义 $(F_k,\ M)$ 为

$$F_k \coloneqq \left(\bigcup_{x\in X} F_k^x\right) \cup \left(\bigcup_{|C|=2} F_k^C\right)$$
$$M \coloneqq \left(\bigcup_{x\in X} M^x\right) \cup \left(\bigcup_{|C|=2} M^C\right).$$

剩下需要证明分解 (F_k, M) 是 $G_{(X,\mathcal{C})}$ 的一个有效的 $(k, 1)$-BLF 分解，也就是说，M 确实是一个匹配，而 F_k 确实是一个 k-有界线性森林。注意，根据我们的构造，对每个 $x \in X$，M^x 和 F_k^x 分别确实是一个匹配和一个 k-有界线性森林。对于每个满足 $|C| = 2$ 的 $C \in \mathsf{C}$，(F_k^C, M^C) 也同样如此。由于每个变量构件 H^x 中的输入顶点（无论正或负）在 M 中恰好包含于一条边，因此 M 确实是 $G_{(X,\mathcal{C})}$ 中的一个匹配。

反设图中由 F_k 中的边所张成的子图 Q 是一条长度为 $k+1$ 的路径或一个环，或者包含一个度为 3 的顶点。注意，根据引理 2.11 和定义 2.3，Q 不可能完全包含在任何变量构件或任何 (1F k)-强制器中。因此，存在一个子句 $C \in \mathsf{C}$，使得 $v_C \in V(Q)$。由于根据我们的构造有 $v_C v_C^{x_C} \in M$，并且对于出现在 C 中的任何其他变量 $y \neq x_C$，都有 $e_C^y \in M$，因此 Q 的大小至多为 2，这与假设矛盾。因此，F_k 是一个 k-有界线性森林，证明完毕。

□

引理 2.14。设 $k \geq 3$。令 $(X, \mathcal{C})$ 为平面 $(\leq 3,3)$–*SAT* 的一个实例，并令图 $G_{(X,\mathcal{C})}$ 如构造 *2.12* 所示。若 $G_{(X,\mathcal{C})}$ 是平面 $(k,1)$-*BLFD* 的一个是实例，则 $(X, \mathcal{C})$ 是平面 $(\leq 3,3)$–*SAT* 的一个是实例。

证明。令 $(F_k,\ M)$ 是 $G_{(X,\mathcal{C})}$ 的一个分解，使得 F_k 是一个 k-有界线性森林，而 M 是一个匹配。我们构造一个真值赋值 $\phi:\ X \to \{\text{TRUE, FALSE}\}$。令 x 为 X 中的一个变量，并假设 x 出现在子句 C_1 和 C_2 中，且 $\bar{x}$ 出现在 C' 中。根据引理 2.11，我们既没有 $e_{C_1}^x,\ e_{C'}^x \in F_k$，也没有 $e_{C_2}^x,\ e_{C'}^x \in F_k$。我们定义

$$\phi(x) = \begin{cases} \text{TRUE} & \text{if } e_{C_1}^x \in F_k \text{ or } e_{C_2}^x \in F_k \\ \text{FALSE} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们声称每个子句 $C \in \mathsf{C}$ 都至少有一个真文字。事实上，v_C 的度为 3，位于 $G_{(X,\mathcal{C})}$ 中，因此存在 $x \in X$ 使得 $v_C v_C^x \in M$，从而 $e_C^x \in F_k$。如果 $v_C^x = p_C^x$，那么 x 出现在 C 中，并且 $\phi(x) =$ 根据我们的构造为真。如果 $v_C^x = n_C^x$，那么 $\bar{x}$ 出现在 C 中，于是 $\phi(x) =$ 为假。因此，ϕ 是 (X, C) 的一个满足赋值，consequently (X, C) 是平面 $(\leq 3,3)$–SAT 的一个是实例。 □

定理 1.3 随后由定理 2.1、引理 2.13 和引理 2.14 得出。

3 将图分解为一个匹配和一个（有界）星森林

如引言中所述，通过推广 [6] 中证明 (2,1)-BLFD 可在多项式时间内求解的方法，可以证明定理 1.4。具体而言，我们通过对小间隙广义因子问题进行多项式时间归约来证明；根据 Cornuéjols [7] 的一项结果，该问题可在多项式时间内求解。

我们称集合 $A \subset \mathbb{N}$ 为小间隙集，如果对于满足 $\inf A \leq i \leq \sup A$ 的每个整数 $i \in \mathbb{N}$，都有 $i \in A$ 或 $i+1 \in A$。给定一个图 $G=(V, E)$、其边的子集 $S \subset E$ 以及一个顶点 $v \in V$，我们用 $d_S(v)$ 表示由 S 中的边所生成的 G 的子图中 v 的度。小间隙广义因子问题定义如下。

小间隙广义因子问题（SGGF）

输入： 一个图 H，一组小间隙集 $\{A_v : v \in V(H)\}$。**问题：** 是否存在一个集合 $S \subseteq E(H)$，使得对于每个 $v \in V(H)$，$d_S(v) \in A_v$？

如前所述，Cornuéjols [7] 证明了以下结论。

定理 3.1。*SGGF* 可在多项式时间内求解。

3.1 归约

我们首先提出一个在 [6] 中针对 $k=2$ 情形已被注意到的观察。

观察 3.2. 设 G 是一个含有度至少为 $k+2$的顶点的图。那么，G 是 k-*MBSFD* 的否实例。

现在我们给出该归约，它是对 [6] 中证明的情形 $k=2$所用归约的简单推广。

构造 *3.3.* 设 $k \in \{2, \ldots\} \cup \{\infty\}$，并设 G 是 k-*MBSFD* 的一个实例。我们构造如下 *SGGF* 实例（$H_G, \{A_v : v \in V(H_G)\}$）。对于整数 d，令 $X_{\geq d}, X_d \subset V(G)$ 分别为 G 中度至少为 d 和度恰为 d 的顶点集。令 $\mathcal{P}$ 为 G 中所有两端点均在 $X_{\geq 3} \cup X_1$、且所有内部顶点均在 X_2的路径，以及 G 中至多包含一个 $X_{\geq 3}$ 中顶点的所有环所组成的族。对于整数 $\ell \geq 1$，令 $\mathcal{P}_\ell \subset \mathcal{P}$ 为其中长度为 ℓ的所有此类路径和环构成的子族。令 $H = H_G$ 为一个二分图，其两部为 $X = X_{\geq 3}$ 和 $Y = \{y_P : P \in \mathcal{P}\}$，且其$E(H) = \{xy_P : x$ 是 G 中 P 的一个端点$\}$。

我们为每个顶点 $v \in V$（H）定义一个小间隙集 A_v。

- 对于每个 $x \in X_{\geq k+1}$，我们令 $A_x = \{1\}$。
- 对于每个 $x \in X \setminus X_{\geq k+1}$，我们令 $A_x = \{0,1\}$。
- 对于每个 $P \in \mathcal{P}_1$，我们取 $A_{y_P} = \{2\}$。

对于每个 $P \in \mathcal{P}_2$，我们集合 $A_{y_P} = \{1\}$。

- 对于每个 $P \in \mathcal{P}_3$，我们把 $A_{y_P} = \{0, 2\}$集合为。
- 对于每个 $P \in \mathcal{P}_4$，我们令 $A_{y_P} = \{1,2\}$。
- 对于每个 $P \in \mathcal{P} \setminus (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 \cup \mathcal{P}_4)$，我们取 $A_{y_P} = \{0,1,2\}$。

注释 3.4。请注意，对于 $k=\infty$ 构造 *3.3* 仍然成立，但由于 $X_{\geq k+1} = \emptyset$ 第一项中小间隙集的定义为空。此外，对于 $k=2$ 构造 *3.3* 与 *[6]*中的构造相同。

以下两个引理共同说明了该归约是有效的。它们的证明与情形 $k = 2$ in [6]，的等价引理的证明基本相同，遵循完全相同的分类讨论，只有一个区别。因此，我们不在此给出完整的证明。不过，为了清晰起见，我们给出其证明的一般思路，以及其中我们进行推广的各部分的细节。

引理 3.5。设 $k \geq 2$ 为一个整数，G 为一个图。令 $(H_G,\{A_v : v \in V(H_G)\})$ 如构造 *3.3* 中所述。若 $(H_G, \{A_v : v \in V(H_G)\})$ 是 *SGGF* 的是实例，则 G 是 *k-MBSFD* 的是实例。

引理 3.6。设 $k \geq 2$ 为一个整数，G 为一个图。令 $(H_G,\{A_v : v \in V(H_G)\})$ 如构造 *3.3* 中所构造。若 G 是 *k-MBSFD* 的是实例，则 $(H_G,\{A_v : v \in V(H_G)\})$ 是 *SGGF* 的是实例。

定理 1.4 随即由引理 3.5、引理 3.6 和定理 3.1 得出。

引理 *3.5* 和引理 *3.6* 的证明思路。设 G 为一个图，且 $(H_G, \{A_v : v \in V(H_G)\})$ 是如构造 3.3 中所述的 SGGF 实例。该归约的基本思想基于如下观察：将 G 分解为匹配 M 和 k-有界星森林 S_k 的有效分解，等价于对与度至少为 3 的顶点相邻的边进行分解，其中 M 中的边是 $(H_G, \{A_v : v \in V(H_G)\})$ 的一个解。换言之，从以 $X_{\geq 3}$为中心的星的边中选取匹配边，使其满足 $\{A_v : v \in V(H_G)\}$ 中为 P 中元素和 $X_{\geq 3}$ 中元素给出的条件，对于构造一个将 G 分解为匹配和 k-有界星森林而言，是充分且必要的。因此，G 是 k-MBSFD 的是实例，意味着 $(H_G, \{A_v : v \in V(H_G)\})$ 是 SGGF 的是实例，反之亦然。

通过考察 $\{A_v : v \in V(H_G)\}$ 的选择，可以看出，G 中的顶点 $x \in X_{\geq k+1}$ 必须与一条匹配边相邻，而 G 中的顶点 $x \in X_{\geq 3} \setminus X_{\geq k+1}$ 至多与一条匹配边相邻。若 $k = 2$，后者显然是空集，这也体现了我们构造中的唯一差异。[6] 中归约的证明采用分类讨论，展示了 SGGF 问题的一个解S 与从 $X_{\geq 3}$ 中与顶点相邻的边里选出的一组匹配边之间的上述对应关系。按照构造 3.3，将 $X_{\geq 3}$ 中的顶点分成两种情形，即 $X_{\geq k+1}$ 和 $X_{\geq 3} \setminus X_{\geq k+1}$，会多出一种需要检验的情形，但这很直接。事实上，这正是我们的归约证明与 [6] 中证明的唯一差异。

□

4 总结与开放问题

虽然我们在第 2 节中的构造要求 k 是有限的，但我们指出，可以将Campbell、Hörsch和 Moore 的 [6] 构造加以修改，从而证明平面 $(\infty,1)$-BLFD 是 NP 完全的。仅有的两个区别在于：应从平面 $(\leq 3,3)$-SAT而不是从$(3, B2)$-SAT 进行归约，并且应使用我们论文中的简单图$(M, 8)$-强制器和$(1F,8)$-强制器，而不是 [6]中的多重图强制器。

由于 (k, l)-BLFD的复杂性现已得到完整刻画，我们希望引导读者关注近期有关将图分解为线性森林和匹配的某些分解存在性问题。第一个问题来自Campbell、Hörsch 和 Moore 的论文 [6]，仍然涉及平面次三次图：

问题 4.1（问题 4，见 [6]）。每个围长至少为 α 的平面次三次图都能分解为一个线性森林和一个匹配，满足这一性质的最小整数 α 是多少？

目前已知的仅有 $6 \leq \alpha \leq 9$。对于次三次图，分解为一个匹配和一个线性森林比 3-边着色的要求更强，因此请注意，若将 α 改进到小于 9，就会推出关于 3-边着色的结果（例如见 [5, 14]）。

另一个未解决问题与线性森林度猜想有关。Bonamy、Czyżewska、Kowalik 和 Pilipczuk [4] 研究了以下情形：当 G 是最大度为奇数的平面图时， $\Delta(G)$，并寻找关于其可分解成的 $\left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil + 1$ 线性森林的更强条件。 他们猜想，任意最大度~~为奇数~~ $\Delta \geq 7$ 的平面图 G 都可以分解为 $\frac{\Delta-1}{2}$ 个线性森林和一个匹配。他们证明了最大度为奇数的 $\Delta \geq 9$ 时猜想成立，只留下一个情形尚未解决：

猜想 4.2 （ [4]中的猜想 2）。任何最大度为7 的平面图 G 都可以分解为3个线性森林和一个匹配。

致谢

第一、第三和第五作者感谢IMPA在本工作开始期间访问该机构时给予的热情接待。作者感谢Béla Bollobás教授和Rob Morris教授的宝贵意见；两位教授是作者的导师。

第二作者得到巴西高等教育人才提升协调机构（CAPES）的部分资助。第三作者得到剑桥大学三一学院的资助。最后两位作者得到EPSRC（工程与物理科学研究委员会）的资助。第四作者还得到剑桥大学纯数学与数学统计系的资助，第五作者还得到剑桥联邦、欧洲及国际信托基金的资助。

参考文献

[1] J. Akiyama、G. Exoo 和 F. Harary。图中的覆盖与打包。III：循环与非循环不变量。*Mathematica Slovaca*，30(4):405–417，1980。[2] J. Balogh、M. Kochol、A. Pluhár 和 X. Yu。用森林覆盖平面图。*Journal of Combi-natorial Theory, Series B*，94(1):147–158，2005。[3] J.-C. Bermond、J.-L. Fouquet、M. Habib 和 B. Péroche。关于线性 k-森林数。*Discrete Mathematics*，52(2-3):123–132，1984。[4] M. Bonamy、J. Czyżewska、Ł. Kowalik 和 M. Pilipczuk。将平面图的边划分为线性森林和一个匹配。*arXiv preprint arXiv:2302.13312*，2023。[5] S. Bonduelle 和 F. Kardoš。围长为 7 的平面次三次图属于 I 类。*Discrete Mathematics*，345 (10):113002，2022。ISSN 0012-365X。[6] R. Campbell、F. Hörsch 和 B. Moore。分解为两个长度有界的线性森林。*arXivpreprint arXiv:2301.11615*，2023。[7] G. Cornuéjols。图的一般因子。*Journal of Combinatorial Theory, Series B*，45(2):185–198，1988。[8] E. Dahlhaus、D. S. Johnson、C. H. Papadimitriou、P. D. Seymour 和 M. Yannakakis。多端点割的复杂性。*SIAM Journal on Computing*，23(4):864–894，1994。[9] D. Dor 和 M. Tarsi。图分解是 NPC——Holyer 猜想的完整证明。在*Proceedings of the twenty-fourth annual ACM symposium on Theory of computing*，第 252–263 页，1992。

[10] S. Glock、D. Kühn 和 D. Osthus。图与超图分解问题的极值方面。在 *BCC*，第 235–266 页，2021。[11] D. Gonçalves。用森林覆盖平面图，其中一个森林具有有界最大度。*Journal ofCombinatorial Theory, Series B*，99(2):314–322，2009。[12] R. Jiang、K. Jiang 和 M. Jiang。将图分解为具有小分支的子图。*arXivpreprintarXiv:2110.00692*，2021。[13] G. Kronenberg、S. Letzter、A. Pokrovskiy 和 L. Yepremyan。将三次图分解为同构的线性森林。*arXiv preprint arXiv:2210.11458*，2022。[14] H. Kronk、M. Radlowski 和 B. Franen。关于无三角形图的边色数。在*Abstract in Graph Theory Newsletter*，第 3 卷，1974。[15]R. Lang 和 L. Postle。线性森林度猜想的改进界。*arXiv preprintarXiv:2008.04251*，2020。[16] M. Middendorf 和 F. Pfeiffer。关于不相交路径问题的复杂性。*Combinatorica*，13(1): 97–107，1993。[17] C. S. J. Nash-Williams。有限图分解为森林。*Journal of the London MathematicalSociety*，1(1):12–12，1964。[18] B. Péroche。图中若干划分与覆盖问题的 NP 完全性。*Discrete appliedmathematics*，8(2):195–208，1984。[19] C. Thomassen。为三次图的边进行二染色，使得每个单色分支都是长度至多为 5 的路径。*Journal of Combinatorial Theory, Series B*，75(1):100–109，1999。[20] N. Wormald。问题 13。*Ars Combinatoria*，23:332–334，1987。