arXiv:2304.03260v2 [math.AC] 8 Apr 2023

交换环的 IE-闭子范畴是无挠类

榎本晴久

Abstract. 设 $\mathcal{C}$ 是交换诺特环 R上有限生成 R-模范畴的一个子范畴。我们证明，若 $\mathcal{C}$ 对像和扩张封闭（称为 IE-闭子范畴），则 $\mathcal{C}$ 对子模封闭，因此是一个无挠类。这一结果在某种意义上补充了 Stanley–Wang 的结果，并且为 Iima–Matsui–Shimada–Takahashi 提出的问题给出了完整答案。证明依赖于阿贝尔范畴中 IE-闭子范畴的一般理论，该理论指出，IE-闭子范畴恰好是挠类与无挠类的交。此外，我们完整刻画了这样一类右诺特环：其每个 IE-闭子范畴（或无挠类）都是 Serre 子范畴。

1. Introduction

我们首先介绍本文的主要结果：

定理 A(= 定理 3.1). 设 R 为交换诺特环，且 $\mathcal{C}$ 为范畴 $\operatorname{mod} R$ 中有限生成 R-模的子类- 别。那么以下条件等价。

(1) $\mathcal{C}$ 对子模和扩张封闭（即， $\mathcal{C}$ 是一个无挠类）。(2) $\mathcal{C}$ 对取像封闭（即，对于每个 f : $C_1 \to C_2$ 满足 $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$，我们有 $\operatorname{Im} f \in \mathcal{C}$）且对扩张封闭。

显然，条件 (1)蕴含条件 (2)，因为 $\operatorname{Im} f$ 是 C_2的一个子模。值得注意的是，我们的主要结果还证明了逆命题同样成立。现在我们进一步讨论这一定理背后的背景和动机。

在阿贝尔范畴的研究中，理解子范畴的结构一直是一个核心主题。这一领域最早且影响最深远的成果之一，是 Gabriel [Ga] 对 Serre 子范畴的分类。他证明，对于诺特概形 X，相干层范畴 $\operatorname{coh} X$ 的 Serre 子范畴可以用 X 的特化闭子集来分类。这一成果为后续关于各种阿贝尔范畴中子范畴的研究奠定了基础。

另一项重要进展是对阿贝尔范畴中的挠类和无挠类的研究。Happel–Reiten–Smalø [HRS] 证明，它们与该范畴有界导出范畴中的某些t-结构一一对应。这一对应关系在通过简单倾斜过程研究 Bridgeland 稳定条件时发挥了关键作用。近来，代数表示论领域对通过 Adachi–Iyama–Reiten [AIR], 的 τ-倾斜理论研究挠（无挠）类兴趣大增，该理论使我们能够对一些子范畴作组合描述。

近年来，研究人员也考察了阿贝尔范畴的宽子范畴。例如，Br¨uning [Br] 将宽子范畴与导出范畴的厚子范畴联系起来，而 Marks–˘St’ov´ı˘cek [MS] 指出，宽子范畴与挠（无挠）类密切相关，并且在满足某些有限性条件时，二者之间存在双射。

作者最近提出了对阿贝尔范畴中更一般子范畴的研究，即 [En1、En2、ES1、ES2] 中的 ICE-闭、I KE-闭和 IE-闭子范畴。这些

2020 *Mathematics Subject Classification.* 13C60,18E10,18E40.*Key words and phrases.* IKE-闭子范畴, IE-闭子范畴, 无挠类, 交换诺特环。

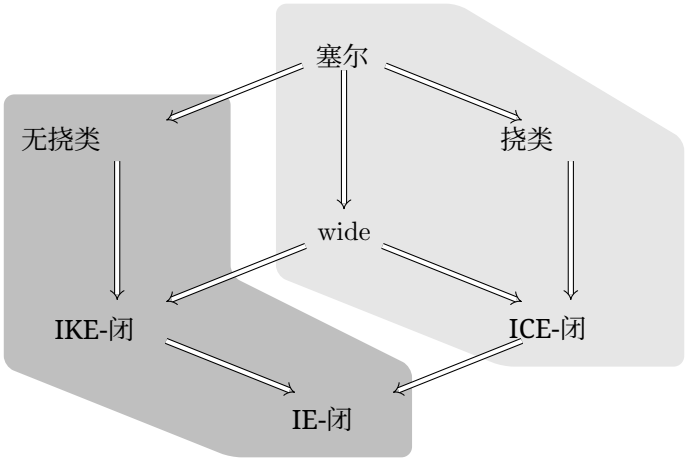

FIGURE 1. 阿贝尔范畴的子范畴类之间的关系

子范畴推广了上述子范畴，其定义条件是对以下某些运算封闭：像、余核、核和扩张（这些子范畴类别名称的首字母分别对应这些运算）。

为清晰起见，我们总结一下上述阿贝尔范畴子范畴的定义。图1总结了这些子范畴之间的蕴含关系。

定义 1.1. 设 $\mathcal{C}$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 的一个子范畴。

- $\mathcal{C}$ 在对子对象、商对象和扩张封闭时称为 Serre 类。
- $\mathcal{C}$ 在对商对象和扩张封闭时是挠类。
- $\mathcal{C}$ 是无挠类，当且仅当它对子对象和扩张封闭。
- $\mathcal{C}$ 若对核、余核和扩张封闭，则称其为宽子范畴。
- $\mathcal{C}$ 是 ICE-闭的，如果它对像、余核和扩张封闭。
- $\mathcal{C}$ 若对像、核和扩张封闭，则称其为 IKE-闭。
- $\mathcal{C}$ 若在像和扩张下封闭，则称其为 IE-闭。

在右诺特环 Λ 上，我们分别用 $\mathsf{serre}\,\Lambda$、$\mathsf{tors}\,\Lambda$、$\mathsf{torf}\ \Lambda$、$\mathsf{wide}\ \Lambda$、$\mathsf{ice}\,\Lambda$、$\mathsf{ike}\,\Lambda$ 和 $\mathsf{ie}\,\Lambda$ 表示范畴$\mathsf{mod}\,\Lambda$ 中有限生成右 Λ-模的 Serre子范畴、挠类、无挠类、宽子范畴、ICE-闭子范畴、IKE-闭子范畴和 IE-闭子范畴的集合。

如前所述，关于这类子范畴的研究较为零散。一个自然而又颇具挑战性的问题是考虑以下问题：

问题 1.2. 对于给定的诺特环 Λ，请对上述 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ 的子范畴类别进行分类，并阐明它们之间的关系。

此前提及的研究中，有多项涉及这一方向。由于研究一般的诺特环可能较为困难，因此有两个方向截然相反的思路，将环类限制为以下类型：

(1) 域 k 上的（非交换）有限维 k-代数 Λ 。(2) 交换诺特环 R。在交换情形下，Stanley–Wang 的以下结果颇为引人注目：

定理 1.3（[SW，推论 7.1]）。设 R 是一个交换诺特环。则 $\mathsf{serre}\,R = \mathsf{tors}\ R =$ 宽子范畴 $R = \mathsf{ice}\ R$ 成立。

这一结果表明，在交换情形下，某些子范畴类可能在一般情况下相一致，这是交换环所特有的一个迷人现象。在这一方向上，Iima–Matsui–Shimada–Takahashi最近提出了如下问题：

问题 1.4([IMST，问题3.3])。设 R 为一个交换诺特环。$\operatorname{mod} R$ 的每个 IKE-闭子范畴都是无挠的吗?

他们通过仔细计算，对模范畴进行了详细考察，从而针对数值半群环的情形解决了这一问题，并为肯定回答提供了组合充分条件 [IMST，定理 1.3], 以及大量例子。此外，他们还完全刻画了该情形下 $\operatorname{mod} R$ 的 IKE-闭子范畴。

受他们提出的问题和研究结果的启发，本文研究了 $\operatorname{mod} R$ 的无挠类、IKE-闭子范畴和 IE-闭子范畴。定理 A 对问题 1.4 给出了如下完整回答；事实上，我们还考虑了 IE-闭子范畴，从而得到一个略强的结果。

推论 B. 设 R 是一个交换诺特环，则 $\operatorname{torf} R = \operatorname{ike} R = \operatorname{ie} R$ 成立。特别地，问题 1.4 的回答是肯定的。

这一情况与定理 1.3相结合表明，图1中两个灰色区域内的子范畴类彼此重合，因此在交换情形下实际上只有两类子范畴。

得益于这一理论，对于交换情形，研究 I(K)E-闭子范畴与研究无挠类完全相同。例如，我们可以利用Spec R应用 Takahashi 的高桥分类 [Ta] 无挠类。总结 Takahashi、Gabriel 以及我们的结果，我们得到如下交换图，其中水平映射均为双射:

$$\operatorname{serre} R = \operatorname{tors} R = \operatorname{wide} R = \operatorname{ice} R \xrightarrow{\text{Supp}} \{\text{specialization-closed subsets of } \operatorname{Spec} R\}$$

$$\operatorname{torf} R = \operatorname{ike} R = \operatorname{ie} R \xrightarrow{\qquad\qquad\text{Ass}\qquad\qquad} \{\text{subsets of } \operatorname{Spec} R\}$$

这里，对于 $\operatorname{mod}\ R$ 的子范畴 $\mathcal{C}$，我们记 $\operatorname{Supp}\mathcal{C} := \bigcup\{\text{支集}_R X \mid X \in \mathcal{C}\}$，并记 $\operatorname{Ass}\mathcal{C} := \bigcup\{\text{关联素理想集}_R X \mid X \in \mathcal{C}\}$。

另一个自然的问题是，所有这些子范畴类何时相同。事实上，这如下刻画了阿廷环。

推论C(= 推论3.5)。设 R 是一个交换诺特环 R。则以下条件等价:

(1) R是阿廷的。(2)塞尔 $R = \operatorname{tors}\ R = \operatorname{torf}\ R =$ 宽子范畴 $R = \operatorname{ice}$
$R = \operatorname{ike}\ R = \operatorname{ie}\ R$成立。

尽管这一事实可以轻易地从 Gabriel 和 Takahashi 对子范畴的分类中推导出来，但我们将从以下关于非交换诺特环中同一情形的完整刻画来推导它。

定理 D（= 定理 3.4）。设 Λ 是一个右诺特环。则以下条件等价:

(1) Λ与右阿廷局部环的有限直积 Morita 等价。(2) $\operatorname{torf}\ \Lambda = \operatorname{serre}\Lambda$ 成立。
(3) $\operatorname{serre}\ \Lambda = \operatorname{tors}\ \Lambda = \operatorname{torf}\ \Lambda =$ 宽子范畴 $\Lambda = \operatorname{ice}\ \Lambda = \operatorname{ike}\ \Lambda = \operatorname{ie}\ \Lambda$成立。

上述大多数结果都基于以下关于IE-闭子范畴的一般性陈述，该陈述对任意阿贝尔范畴都成立，并且本身也很有意义。

Th定理 E(= 推论2.8)。令 $\mathcal{A}$ 为一个阿贝尔范畴，且 $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{A}$的子范畴。那么 t *he foll*以下条件等价。

(1) $\mathcal{C}$ 是IE-闭的。(2) 存在一个挠类 $\mathcal{T}$和一个无挠类 $\mathcal{F}$，使得 $\mathcal{C} = \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$。

这一结果推广了 [En3，引理 4.23], 其中假设 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔长度范畴 ry.

约定与记号。对于加性范畴 $\mathcal{C}$的子范畴，我们始终指在同构下封闭的满加性子范畴。对于环 Λ, 我们将有限生成右 Λ-模的范畴记为 $\operatorname{mod}\Lambda$ （如果 Λ 是右诺特的，则它是阿贝尔范畴）。

2. IE-closed subcategories via torsion/torsion-free classes

在本节中，我们始终用 $\mathcal{A}$ 表示一个阿贝尔范畴，不假设它满足任何限制，例如不要求它是阿贝尔长度范畴。本节中，我们关注一般阿贝尔范畴中的 IE-闭子范畴及其与挠类和无挠类的关系。首先，让我们回顾阿贝尔范畴中各种子范畴的定义。

首先，让我们回顾一下阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$中“对特定运算封闭”的几个子范畴。

定义 2.1. 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个子范畴。

(1) $\mathcal{C}$ 在扩张下闭合，即对于每个短正合列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

在 $\mathcal{A}$ 中，对于 L、$N \in \mathcal{C}$，我们有 $M \in \mathcal{C}$。

(2) $\mathcal{C}$ 对商对象（分别地，子对象）封闭，指的是对于每个对象 $C \in \mathcal{C}$， C 在 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的每个商对象（分别地，子模）都属于 $\mathcal{C}$。(3) $\mathcal{C}$ 对像（分别地，核、余核）封闭，指的是对于每个映射 φ: $C_1 \to C_2$，当C_1、$C_2 \in \mathcal{C}$时，我们有 $\operatorname{Im}\varphi \in \mathcal{C}$（分别地，$\operatorname{Ker}\varphi \in \mathcal{C}$、$\operatorname{Coker}\varphi \in \mathcal{C}$）。

接下来，我们回顾引言中讨论的子范畴类:

定义 2.2. 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个子范畴。

(1) $\mathcal{C}$ 是一个挠类（分别地，无挠类），如果 $\mathcal{C}$ 在商对象和扩张下闭合（分别地，在子对象和扩张下闭合）。（2） $\mathcal{C}$ 是一个宽子范畴，如果 $\mathcal{C}$ 在核、余核和扩张下闭合。（3） $\mathcal{C}$ 是 ICE-闭的（分别地，IKE-闭的），如果 $\mathcal{C}$ 在像、余核和扩张下闭合（分别地，在像、核和扩张下闭合）。（4） $\mathcal{C}$ 是IE-闭的，如果 $\mathcal{C}$ 在像和扩张下闭合。

2.1.挠（无挠）类与挠对。值得提及的是，在 $\mathcal{A}$ 中，挠（无挠）类与挠对之间的关系。一对$(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ 的 $\mathcal{A}$ 被称为挠对，若满足以下条件:

(1) $\mathcal{A}(\mathcal{T}, \mathcal{F}) = 0$。 (2) 对任意 $X \in \mathcal{A}$，存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow X \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

在 $\mathcal{A}$ 中，使用 $T \in \mathcal{T}$ 和 $F \in \mathcal{F}$。

容易看出，如果（$\mathcal{T}$， $\mathcal{F}$）是 $\mathcal{A}$中的一个挠对，那么 $\mathcal{T}$是一个挠类，而 $\mathcal{F}$ 是一个挠（无挠）类。当它们在 $\mathcal{A}$ 中构成一个挠对（$\mathcal{T}$， $\mathcal{F}$）时，我们将强挠（无挠）类分别称为 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{F}$ 。注意，一些作者将“挠（无挠）类”这一术语用于强挠（无挠）类。在某些情形下，强挠（无挠）类与通常的挠（无挠）类等价，或存在如下关系:

- 如果 $\mathcal{A}$ 是诺特的（即每个对象都是诺特的），那么强挠类与挠类一致。
- 对偶地，如果 $\mathcal{A}$ 是阿廷的，那么强无挠类与无挠类一致。
- 对于“较大的”范畴，假设 $\mathcal{A}$ 是良幂的且余完备的。那么， $\mathcal{A}$ 的子范畴 $\mathcal{T}$是强挠类，当且仅当 $\mathcal{T}$是挠类且对余积封闭。我们也可以将此陈述对偶化为关于（强）无挠类的陈述。

这些事实的证明是众所周知且标准的，因此我们略去证明。此外，我们注意到下面的命题，它用挠类和挠对刻画了阿廷环:

Pr命题 2.3. 设 Λ 是一个右诺特环。以下条件等价 *t:*

(1) Λ是一个右阿廷环。(2) $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的每个无挠类 $\mathcal{F}$ 都是强挠类。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)：由 $\operatorname{mod}\Lambda$ 是阿廷阿贝尔范畴这一事实，立即可得此方向。

(2) $\Rightarrow$ (1)：令 $\operatorname{fl}\ \Lambda$ 为 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中由具有有限长度的有限生成 Λ-模构成的子范畴。由于 $\operatorname{fl}\ \Lambda$ 是 $\operatorname{mod}\Lambda$的 Serre 子范畴，它也是 $\operatorname{mod}\Lambda$中的无挠类。因此，根据 (2)，存在 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的一个挠类 $\mathcal{T}$，使得 $(\mathcal{T}, \operatorname{fl}\ \Lambda)$ 是 $\operatorname{mod}\ \Lambda$ 中的一个挠对。

我们断言 $\mathcal{T} = 0$。反设 $\mathcal{T}$ 包含一个非零模 M。由于 M 是有限生成的，它至少有一个极大子模 N。存在一个满同态 $\varphi: M \to M/N$到一个单模 M/N。然而，由于 M/N属于 $\operatorname{fl}\ \Lambda$，根据挠对的性质，我们有 $\operatorname{Hom}_\Lambda(M, M/N) = 0$。这与非零满同态 φ的存在相矛盾，因此必有 $M = 0$，从而 $\mathcal{T} = 0$。

因此，我们已经证明 $(0, \operatorname{fl}\Lambda)$ 是 $\operatorname{mod}\ \Lambda$ 中的一个挠对，这意味着 $\operatorname{fl}\Lambda = \operatorname{mod}\Lambda$。因此，$\Lambda_\Lambda$ 具有有限长度，所以 Λ 是右阿廷的。□

2.2. 挠（无挠）闭包与 IE-闭子范畴的描述。现在我们将引入挠（无挠）闭包的概念，并对其给出明确的构造性描述。设 $\mathcal{C}$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的一个对象族。我们用 $\mathsf{T}(\mathcal{C})$（分别用 $\mathsf{F}(\mathcal{C})$）表示包含 $\mathcal{C}$ 的最小挠类（分别表示包含 $\mathcal{C}$ 的最小无挠类）。为了说明 $\mathsf{T}(\mathcal{C})$ 的存在性，我们可以考虑 $\mathcal{A}$ 中所有包含 $\mathcal{C}$ 的挠类的交。容易看出，该交仍是一个包含 $\mathcal{C}$ 的挠类，因此是包含 $\mathcal{C}$ 的最小挠类。

然而，就我们的目的而言，对 $\mathsf{T}(\mathcal{C})$ 作出更明确且具构造性的描述至关重要。为此，我们引入以下记号。

定义 2.4. 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$中的一个对象族。

(1) $\operatorname{Fac}\mathcal{C}$ 表示 $\mathcal{A}$ 的子范畴，由满足存在一个满射$C \twoheadrightarrow X$，在 $\mathcal{A}$ 中来自某个对象 $C \in \mathcal{C}$的 X 构成。 (2) $\operatorname{Sub}\mathcal{C}$ 表示 $\mathcal{A}$ 的子范畴，由满足存在一个单射$X \hookrightarrow C$，在 $\mathcal{A}$ 中指向某个对象 $C \in \mathcal{C}$的 X 构成。 (3) $\operatorname{Filt}\mathcal{C}$ 表示 $\mathcal{A}$ 的子范畴，由满足存在一个由 X的子对象组成的有限序列的 X 构成：

$$0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \cdots \subseteq X_n = X,$$

使得对于每个 i，都有 $X_i/X_{i-1} \in \mathcal{C}$。在这种情况下，我们称 X 具有长度为n的 $\mathcal{C}$-滤过。

我们可以如下对 $\mathsf{T}(\mathcal{C})$给出一个更具构造性的描述。尽管关于域 k 上有限维 k-代数的 $\operatorname{mod}\Lambda$ 情形已在 [MS，引理 3.1], 中得到证明，但同样的证明也适用于我们的情形。为方便读者，我们在下文给出证明，因为它并不冗长。

引理 2.5。设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$中的一个对象族。则有等式：

$$\mathsf{T}(\mathcal{C}) = \operatorname{Filt}(\operatorname{Fac}\mathcal{C}).$$

证明。根据构造，如果一个挠类 $\mathcal{T}$包含 $\mathcal{C}$，那么它也必须包含 $\operatorname{Fac}\mathcal{C}$，因为 $\mathcal{T}$对商对象封闭，进而包含$\operatorname{Filt}(\operatorname{Fac}\mathcal{C})$，因为 $\mathcal{T}$对扩张封闭。因此，只需证明 $\operatorname{Filt}(\operatorname{Fac}\mathcal{C})$ 是一个挠类。

显然，$\operatorname{Filt}(\operatorname{Fac}\mathcal{C})$ 对扩张封闭。因此，我们需要证明它也对商对象封闭。我们将通过对 n 归纳来证明以下断言：如果 $X \in \operatorname{Filt}(\operatorname{Fac}\mathcal{C})$ 有一个长度为 n 的 $(\operatorname{Fac}\mathcal{C})$-滤过，那么 X 的每个商对象都属于 $\operatorname{Filt}(\operatorname{Fac}\ \mathcal{C})$。

假设 $X \in \operatorname{Filt}(\operatorname{Fac}\mathcal{C})$具有一个 $(\operatorname{Fac}\mathcal{C})$-过滤长度 n。如果 $n = 0$，那么 $X = 0$，并且 X 的每个商对象都平凡地属于 $\operatorname{Filt}(\operatorname{Fac}\mathcal{C})$。接下来，假设 $n > 0$。那么存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{\pi} X'' \longrightarrow 0$$

在 $\mathcal{A}$ 中，使得 $X' \in \mathsf{Fac}\mathcal{C}$，且 $X'' \in \mathsf{Filt}(\mathsf{Fac}\ \mathcal{C})$ 有一个长度为 $n-1$ 的 $(\mathsf{Fac}\ \mathcal{C})$-滤过。现在，考察任意商对象 $p\colon X \twoheadrightarrow Y$。考虑 $p\iota$ 的像，我们得到以下交换正合图： $X' \to Y$：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{\iota} & X & \xrightarrow{\pi} & X'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Im}(p\iota) & \xrightarrow[\iota']{} & Y & \xrightarrow[\pi']{} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

这里， B 是 ι'的余核。因此，由于 $\pi' p$ 是满射， f 是满射。此外，$\mathsf{Im}(p\iota) \in \mathsf{Fac}\mathcal{C}$，因为 $X' \in \mathsf{Fac}\mathcal{C}$，且$\mathsf{Fac}\ \mathcal{C}$在商对象下封闭。根据归纳假设，由于 B 是 X''的商对象，B 属于$\mathsf{Filt}(\mathsf{Fac}\mathcal{C})$。因此，$\mathsf{Im}(p\iota)$和 B 都属于 $\mathsf{Filt}(\mathsf{Fac}\ \mathcal{C})$，从而我们得出 $Y \in \mathsf{Filt}(\mathsf{Fac}\mathcal{C})$。证明完毕。□

由于我们研究的是一般的阿贝尔范畴，可以将前一个引理对偶化，从而得到以下对无挠闭包的描述。

引理 2.6。设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$中的对象族。那么我们有以下等式:

$$\mathsf{F}(\mathcal{C}) = \mathsf{Filt}(\mathsf{Sub}\,\mathcal{C}).$$

现在我们可以证明一个关键观察，这对我们的工作至关重要。

定理 2.7. 设 $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴，且 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个 IE-闭子范畴。那么我们有等式 $\mathcal{C} = \mathsf{T}(\mathcal{C}) \cap \mathsf{F}(\mathcal{C})$。

证明。该断言的证明已在 [En3, 引理 4.23]中，在假设 $\mathcal{A}$ 是阿贝尔长度范畴的情况下给出。然而，由于其中的证明仅依赖于引理 2.5 和引理 2.6 中分别给出的 $\mathsf{T}(\mathcal{C})$ 和 $\mathsf{F}(\mathcal{C})$ 的描述，因此同一证明也适用于这一一般情形。故此处不再重复证明。□

由于所有挠类和无挠类都是 IE-闭的，且 IE-闭子范畴在交下封闭，利用定理 2.7，我们立即得到子范畴为 IE-闭的以下等价条件。这推广了 [ES2, 命题 2.3], ，其中仅考虑了阿廷代数 Λ 的 $\mathcal{A} = \mathrm{mod}\,\Lambda$ 情形。

推论 2.8. 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$的一个子范畴。以下条件等价:

(1) $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$的一个 IE-闭子范畴。(2) 存在一个挠类 $\mathcal{T}$和一个无挠类 $\mathcal{F}$，使得 $\mathcal{C} = \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$。

3. Applications

现在我们可以将本文的理论应用于交换诺特环的研究。在下文中，我们用 R 表示一个交换诺特环。

首先，我们可以证明本文的主要结果，该结果完整刻画了 $\mathrm{mod}\,R$ 的 I(K)E-闭子范畴，并对问题 1.4 给出了肯定的回答。

Th定理 3.1. 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathrm{mod}\,R$ 的一个子范畴。那么，以下条件等价:

(1) $\mathcal{C}$ 是一个无挠类。(2) $\mathcal{C}$ 是一个 IKE-闭子范畴。(3) $\mathcal{C}$ 是一个 IE-闭子范畴。

证明。显然，(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3)，因此我们只需证明 (3) $\Rightarrow$ (1)。

设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathrm{mod}\,R$ 的一个 IE-闭子范畴。由推论 2.8，存在 $\mathrm{mod}\,R$ 的一个挠类 $\mathcal{T}$ 和一个无挠类 $\mathcal{F}$，使得 $\mathcal{C} = \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$。由 Stanley–Wang 的结果（定理 1.3）可知， $\mathcal{T}$ 是一个 Serre 子范畴。特别地， $\mathcal{T}$ 是一个无挠类，因为 $\mathcal{A}$ 的每个 Serre 子范畴都是无挠类。因此， $\mathcal{C}$ 是两个无挠类 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{F}$ 的交。这意味着 $\mathcal{C}$ 也是一个无挠类。至此，证明完成。□

注 3.2. 我们可以将定理 3.1 推广到非交换情形如下。设 R 是一个交换诺特环，且 Λ 是一个模有限的 R-代数。假设对于每个 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$， $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ 都与一个局部环 Morita 等价。那么 $\operatorname{mod}\Lambda$ 的每个 IE-闭子范畴都是无挠类。证明方法是在证明中用 Iyama–Kimura 的相应结果 [IK, Proposition 3.19]，替换 Stanley-Wang 的结果；该结果指出，在这种情形下，每个挠类都是 Serre 子范畴。

作为 Takahashi 的工作 [Ta]，的推论，该工作对模 R的无挠类进行了分类。 inter关于 $\operatorname{Spec} R$ 的子集，我们得到以下由主结果直接推出的推论。

推论 3.3。以下陈述成立。

(1) $\operatorname{torf} R = \operatorname{ike} R = \operatorname{ie} R$与 $\operatorname{Spec} R$的子集集之间存在一个双射。(2) 设 R 是一个维数为 $\dim R = 1$的局部整环。那么，$\operatorname{torf} R = \operatorname{ike} R = \operatorname{ie} R$中恰有四个元素：零子范畴、$\operatorname{fl} R$、无挠 R-模范畴，以及 $\operatorname{mod} R$。

证明。(1) 这是定理 3.1 和 [Ta, 定理 B]的直接推论。

(2) 这也可以由 Takahashi 的结果轻易推出。详情请参阅 [IMST, 注 4.9]。□

此结果推广了 [IMST, 定理 1.3 (2)]，，该文中的上述结果仅针对与满足某些条件的数值半群 $H \leq \mathbb{N}$相关联的完备数值半群环 $R = k[\![H]\!]$ 建立。我们的结果适用于每个满足 $\mathbb{N} \setminus H$ 为有限集的数值半群$H \leq \mathbb{N}$ 对应的 $R = k[\![H]\!]$ 。

正如引言中所述并在图1中所示，我们的主要结果定理 3.1和Stanley-Wang 的结果定理 1.3 表明，$\operatorname{mod} R$的子范畴存在两类不同的类别：(i) $\operatorname{Serre} R = \operatorname{torsion} R = $宽子范畴 $R = \operatorname{ice} R$, 以及(ii) $\operatorname{torf} R = \operatorname{ike} R = \operatorname{ie} R$。此外，前一类包含于后一类中。

在本文余下部分，我们将探讨这两个类何时相同这一自然问题。由于我们的观察也适用于非交换环，我们给出以下一般结果，它完整刻画了所有所考虑的类均相同的环。

Th定理 3.4. 设 Λ为一个右诺特环。则以下条件等价：

(1) Λ与一个有限直积的右阿廷局部环 Morita等价。(2) $\operatorname{serre} \Lambda = \operatorname{ie} \Lambda$成立（或等价地，$\operatorname{serre} \Lambda = \operatorname{tors} \Lambda = \operatorname{torf} \Lambda =$宽子范畴$\Lambda = \operatorname{ice} \Lambda = \operatorname{ike} \Lambda = \operatorname{ie} \Lambda$ 成立）。(3) $\operatorname{serre} \Lambda = \operatorname{torf} \Lambda$ 成立。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2)：我们可以假设 Λ 是右阿廷局部环的有限直积。不失一般性，我们还可以进一步假设 Λ 本身是右阿廷局部环，因为考虑 $\operatorname{mod}\Lambda$ 的 IE-闭（分别为 Serre）子范畴，等价于对 Λ 的每个环不可分解直和项分别进行考虑。

设 $\mathcal{C}$ 是 $\operatorname{mod}\Lambda$的一个非零IE-闭子范畴，并令 S 表示唯一的简单 Λ- 模。假设存在一个非零模 $0 \neq X \in \mathcal{C}$。由于 Λ 是右阿廷的，存在一个满射 $X \twoheadrightarrow S$ 和一个单射 $S \hookrightarrow X$。因此， S 是复合映射 $X \twoheadrightarrow S \hookrightarrow X$的像，这意味着 S 属于 $\mathcal{C}$ ，因为 $\mathcal{C}$ 对像封闭。于是，我们有$\operatorname{Filt} S \subseteq \mathcal{C}$，因为 $\mathcal{C}$对扩张封闭。然而，由于 Λ是阿廷局部的，我们有$\operatorname{mod}\Lambda = \operatorname{Filt} S$。因此，我们得到 $\mathcal{C} = \operatorname{mod}\Lambda$。这意味着 $\operatorname{mod}\Lambda$ 的唯一可能的 IE-闭子范畴是零子范畴和 $\operatorname{mod}\ \Lambda$ 本身，而这两者都是 Serre 子范畴。因此，我们有 $\operatorname{serre} R = \operatorname{ie}\ R$。

(2) $\Rightarrow$ (3)：这一蕴含显然成立，因为每个无挠类都是 IE-闭的。

(3) $\Rightarrow$ (1)：我们将证明分为两步。

步骤 1： Λ 是右阿廷的：考虑由满足以下条件的模F组成的 $\operatorname{mod}\Lambda$ 的子范畴 $\mathcal{F}$ ：对于每个单模 Λ-模 S，我们有 $\operatorname{Hom}_{\Lambda}(S, F) = 0$。显然， $\mathcal{F}$是一个无挠类，因此根据假设， $\mathcal{F}$ 是一个 Serre 子范畴。若存在非零模 $0 \neq F \in \mathcal{F}$，由于 F 是有限生成的，存在一个满射 $F \twoheadrightarrow S$ ，将其映到某个单模 S上。于是，由于 $\mathcal{F}$ 是 Serre 子范畴，我们必有 $S \in \mathcal{F}$；这与以下事实矛盾：

$\mathrm{Hom}_\Lambda(S,S) \neq 0$。因此，我们得到 $\mathcal{F} = 0$。这意味着，对于每个非零模 M，都存在某个单模 S 以及一个非零同态 $S \to M$。由于 S 是单模，该同态是单射。因此， M 有一个单子模。总而言之，每个非零模都有一个单子模。

现在，在环论中，根据这一条件以及假设 Λ 是右诺特的，证明 Λ 是右阿廷的已是标准习题。为方便读者，我们在此给出证明。考虑 Λ_Λ。若 $\Lambda \neq 0$，则它有一个简单子模 S_1，记作 $M_1 := S_1$。接着考虑商对象 Λ/M_1。若 $\Lambda/M_1 \neq 0$，则它同样有一个简单子模 S_2，对应于 Λ 的一个子模 M_2，满足 $M_1 \subsetneq M_2 \subseteq \Lambda$ 且 $M_2/M_1 \cong S_2$。重复这一过程，可得到 Λ的右理想升链：
$0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq M_3 \subsetneq \cdots$。由于$\Lambda$ 是右诺特的，该序列必定终止，因此这一过程不可能无限重复。这意味着存在某个 l ，使得 $\Lambda/M_l = 0$，即 $M_l = \Lambda$。显然，序列
$0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_l = \Lambda$ 给出了 Λ的一个合成列，因此 Λ 是右阿廷的。

步骤 2： Λ 与局部环的直积 Morita 等价：设 $S_1, S_2, \ldots, S_n$为两两不同构的简单 Λ-模的完备集合。由于 Λ 是右阿廷的，该集合是有限的。为证明这一断言，只需证明对每个 $i \neq j$，都有 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(S_i, S_j) = 0$ 。为此，我们将证明每个短正合列

$$0 \longrightarrow S_j \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} S_i \longrightarrow 0$$

在 mod Λ 中，当 $i \neq j$时分裂。考虑 M的无挠闭包 F(M)。根据假设，这个无挠类是一个 Serre 子范畴，因此由 $M \in$ F(M)可得 $S_i \in$ F(M)。另一方面，根据引理 2.6，我们有 F(M) $=$Filt(Sub M)，因此 $S_i \in$Filt(Sub M)。然而，由于 S_i是简单的，我们必有 $S_i \in$Sub M，从而得到一个满射 i:
$S_i \hookrightarrow M$。根据 Jordan–Hölder 定理，我们必有 Coker$i \cong S_j$，这给出了以下图表：

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & S_i & & & & \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle i} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & S_j & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\pi} & S_i & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & S_j & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array}$$

如果 $\pi i = 0$，那么 i 可经由 S_j分解。然而，Schur 引理告诉我们，$\mathrm{Hom}_\Lambda(S_i, S_j) = 0$，因此我们必须有 $i = 0$，这就导致了矛盾。因此，我们有 $\pi i \neq 0$。然后，再次根据 Schur引理， πi 是一个同构。这意味着 π 是一个收缩，所以原短正合列分裂。□

将这一观察应用于交换情形，我们立即得到如下对交换阿廷环的范畴刻画。我们注意到，也可以利用Gabriel 和 Takahashi的Serre子范畴与无挠类的高桥分类，以及 Spec R，对 mod R using 进行证明。

推论 3.5. 对于交换诺特环 R，以下条件等价：
(1) R是阿廷的。(2) torf $R =$ serre R 成立。(3) serre $R =$ t
ors $R =$ torf $R =$ 宽子范畴 $R =$ ice $R =$ ike $R =$ ie R 成立。

证明。众所周知，交换阿廷环是交换阿廷局部环的有限直积。因此，这由定理 3.4 得出。□

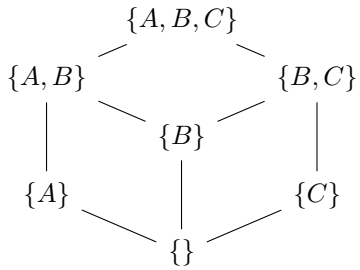

FIGURE 2. mod 的 IE-闭子范畴的哈斯图 Λ

最后，我们通过一些示例说明，这类性质（某些子范畴类之间的重合）通常不适用于非局部非交换环。

例 3.6. 设 k 为一个域，并考虑上三角矩阵代数 $\Lambda := \left[\begin{smallmatrix} k & k \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right]$，它是矩阵环 $M_2(k)$ 的一个 3 维子代数。众所周知，恰好存在三个不可分解的 Λ-模 A、B、C，并且有一个非分裂短正合列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

由于该代数的挠（无挠）类分类已广为人知，我们可以利用定理 2.7 枚举所有 IE-闭子范畴（或者也可以使用 [ES2] 的结果）。IE-闭子范畴的哈斯图见图 2，其中我们只展示了每个子范畴所包含的不可分解模。

在表 1 中，我们列出了每个类的所有子范畴。从该表可以看出，这些类之间没有任何两个是相同的。

类	子范畴列表	数字
Serre R	$\{\},\{A\},\{C\},\{A,B,C\}$	4
tors R	$\{\},\{A\},\{C\},\{B,C\},\{A,B,C\}$	5
torf R	$\{\},\{A\},\{C\},\{A,B\},\{A,B,C\}$	5
覎子范畴 R	$\{\},\{A\},\{B\},\{C\},\{A,B,C\}$	5
冰 R	$\{\},\{A\},\{B\},\{C\},\{B,C\},\{A,B,C\}$	6
像 R	$\{\},\{A\},\{B\},\{C\},\{A,B\},\{A,B,C\}$	6
ie R	$\{\},\{A\},\{B\},\{C\},\{A,B\},\{B,C\},\{A,B,C\}$	7

TABLE 1. mod Λ的每一类子范畴列表

致谢。作者谨向 Osamu Iyama 和 Shunya Saito 致以谢意，感谢他们参与有益的讨论。本研究获 JSPS KAKENHI 资助，项目编号为 JP21J00299。

REFERENCES

[AIR] T. Adachi、O. Iyama、I.Reiten、 *τ-tilting theory*，组合数学150（2014），第 3 期，415–452。[Br] K. Br¨uning、 *Thick subcategories of the derived category of a hereditary algebra*，同调与同伦应用9（2007），第 2期，165–176。[En1] H. ENOMOTO、 *Monobrick、 a uniform approach to torsion-free classes and wide subcategories*，数学进展 393（2021），论文编号 108113，共 41页。[En2] H. ENOMOTO、 *Rigid modules and ICE-closed subcategories in quiver representations*，代数杂志 594（2022），364–388。[En3] H. ENOMOTO、 *From the lattice of torsion classes to the posets of wide subcategories and ICE-closed subcategories* 2201 00595 ，arXiv：。[ES1] H.ENOMOTO、A. Sakai、 *ICE-closed subcategories and wide τ-tilting modules* 300 2022 1, ，数学杂志（），第 – 541 577 。

[ES2] H. Enomoto、A. Sakai、 *Image-extension-closed subcategories of module categories of hereditary algebras*, 《纯粹与应用代数杂志》227 (9) (2023)，107372。[Ga] P. Gabriel， *Des catégories abéliennes*, 《法国数学会通报》90 (1962)，323–448。[HRS] D. Happel、I. Reiten、S.O. Smalø， *Tilting in abelian categories and quasitilted algebras*, 《美国数学会回忆录》120 (1996)，第575号，viii+ 88 页。[IMST] K. Iima、H. Matsui、K. Shimada、R. Takahashi, *When is a subcategory Serre or torsionfree?*, arXiv:2203.00228[IK] O. Iyama、Y. Kimura、 *Classifying subcategories of modules over Noetherian algebras*, arXiv:2106.00469。[MS] F. Marks、J. ˇSt'ov´ıˇcek， *Torsion classes*， *wide subcategories and localisations*, 《伦敦数学会通报》49 (2017)，第3期，405–416。[SW] D. Stanley、B. Wang， *Classifying subcategories of finitely generated modules over a Noetherian ring*, 《纯粹与应用代数杂志》215 (2011)，第11期，2684–2693。[Ta] R. Takahashi, *Classifying subcategories of modules over a commutative Noetherian ring*, 《伦敦数学会杂志》（第二辑）78 (2008)，第3期，767–782。

Graduate School of Science， Osaka Metropolitan University， 1-1 Gakuen-cho， Naka-ku, Sakai， Os-aka 599-8531， Japan*Email address*： henomoto@omu.ac.jp