arXiv:2304.03268v2 [cs.FL] 7 Apr 2023

周期序列中的幻数

Savinien Kreczman[1][0000−0002−1928−0028]、Luca Prigioniero[2][0000−0001−7163−4965]、Eric Rowland[3][0000−0002−0359−8381] 和 Manon Stipulanti[1⋆][0000−0002−2805−2465]

[1] 比利时列日，列日大学数学系{savinien.kreczman,m.stipulanti}@uliege.be[2] 意大利米兰，米兰大学信息学系 prigioniero@di.unimi.it[3] 美国纽约州亨普斯特德，霍夫斯特拉大学数学系 eric.rowland@hofstra.edu

摘要。在形式语言和自动机理论中，魔数问题可以表述如下：对于给定的整数 n，是否可以在范围 $[n, 2^n]$ 内找到一个数 d，使得不存在一个具有 d 个状态的最小确定性有限自动机，可以由一个恰好具有 n 个状态的最小非确定性有限自动机模拟？如果这样的数 d 存在，则称其为魔数。在本文中，我们在带输出的确定性自动机框架下考察魔数问题，这类自动机已知可以刻画自动序列。更确切地说，我们研究周期序列分别被视为自动序列、正则序列或常递归序列时的魔数。

关键词： 魔数 · 周期序列 · 自动序列 · 正则序列 · 常递归序列

1 引言

自近期提出以来，魔数问题在形式语言与自动机理论领域受到了广泛关注 [16, 17]。在这一设定下，众所周知，对于一个有 n 个状态的非确定性有限自动机，总可以构造出一个与之等价的确定性有限自动机，例如采用幂集构造。所得自动机的状态数可能介于 n 和 2^n 之间，而在最坏情况下，上界无法进一步降低 [23]。因此，自然会提出这样的问题：给定一个数 n，是否能找到一个满足 $n \leq d \leq 2^n$ 的数 d，使得不存在状态数恰好为 d 的最小确定性有限自动机，能够由一个状态数恰好为 n 的最优非确定性有限自动机模拟？如果这样的数 d 存在，就称其为 n 的魔数。这一问题已针对字母表含一个或两个字母的有限自动机进行研究（并已找到魔数 [12, 16, 17]）；也针对更大的字母表进行了研究（而对于这些字母表，

⋆ 通讯作者

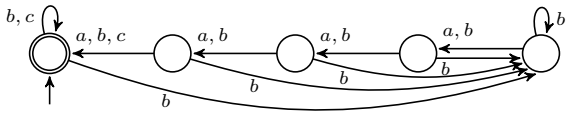


图1：一个具有 5 个状态的非确定有限自动机，其等价的最小确定有限自动机有 2^5 个状态。

已证明每个 $n \geq 0$ [11, 18, 20] 都不存在魔数），也针对某些特殊情况进行了研究 [14]。魔数问题的表述也已推广到正则语言上的运算成本 [19]。在这种情况下，目标是确定：对给定的语言运算，能否取得下界与上界之间的所有规模。

示例*1*。图1 中的非确定性有限自动机 $\mathcal{A}$ 有 5个状态，其对应的最小确定性有限自动机可以通过对 $\mathcal{A}$应用幂集构造后，再将所生成的自动机最小化而得到，该自动机具有 $2^5 = 32$ 个状态。对于每个 $d \in \{5, \ldots, 32\}$，都可以通过在符号 c上添加适当的转换来修改 $\mathcal{A}$，从而得到一个具有 d 个状态的对应最小确定性有限自动机。此外，对于每个 $n \geq 0$，这个示例可以推广到具有 n 个状态的非确定性有限自动机，以证明在三字母表 [20]的情况下不存在魔数。

起初，我们打算研究确定性有限输出自动机情形下的魔数问题。众所周知，这类机器是确定性有限自动机的简单扩展，其中每个状态都关联一个输出；它们生成自动序列这一类序列。更准确地说，如果存在一个确定性有限输出自动机，当输入整数 n 的数字 [3, Chapter 5]时，对每个整数 n 都输出 $s(n)$，那么序列 $s = s(n)_{n \geq 0}$ 就是自动序列。Cobham [8], 首次对自动序列进行了系统研究；此后，自动序列已成为文字组合学的核心课题，并应用于众多领域，尤其是数论 [3]。生成序列 s 的特定最小确定性有限输出自动机与所谓的核 s之间存在完善的对应关系；后者是从 s 中提取出的一组特定子序列。因此，由于我们关注的是状态数，研究自动序列的核大小（称为秩）与之等价。具体而言，给定周期长度 ℓ，我们希望找到周期长度为 ℓ 的所有周期序列的秩可能取值的下界和上界。此外，我们还在这一背景下考察魔数问题：给定整数 $\ell \geq 1$，是否可以在前述界限内找到数值 d，使得存在一个周期长度为 ℓ 的周期序列，由恰有 d 个状态的确定性有限输出自动机生成，或者等价地，其秩恰为 d? 在某些特定情形下，我们完整刻画了周期序列的魔数。

随后，我们将这项研究扩展到另外两类序列，即常递归序列和正则序列。若一个序列的每一项都能由前面各项的线性组合得到，则称该序列为常递归序列。这类序列的秩是所有能够生成该序列的线性递推关系的最低阶。研究常递归序列的动机在于，它们出现在计算机科学和数学的许多领域，例如理论生物学、软件验证、概率模型检验、量子计算和晶体学；更多详情请参见 [24] 或优秀的综述 [9]，及其中的参考文献。关于这类序列，仍有一些富有挑战性的开放问题。例如，一般而言，是否能够判定常递归序列是否取值为 0，尚不得而知。这个问题被称为*Skolem* 问题。对于这类序列，我们将相应的魔数刻画为：对序列周期长度的各个因子取欧拉函数值，再将这些值相加所得的和。

另一方面，序列 s 若是正则的，则其核所生成的向量空间是有限生成的 [2]。在这一类序列中，序列的秩是该向量空间的维数。每个自动序列必然定义在有限字母表上，并且都是正则的。从这个意义上说，正则序列的概念将自动序列推广到了无限字母表，从而为序列的研究提供了更广泛的框架。正则序列自然出现在许多领域中，例如算法分析、组合学、数论、数值分析以及分形理论 [2]。在某些特定情况下，我们证明正则情形实际上归结为常系数递推情形。

本文结构如下。第 2 节介绍必要的预备知识。随后，每一类序列都专设一节：第 3 节讨论自动序列，第 4 节讨论常系数递归序列，第 5 节讨论正则序列。我们选择在相应章节中分别介绍各类序列所需的背景知识。

2 预备知识

在一个 $\mathcal{F}$ 序列的族中，我们将考虑数字上的性质 $\mathrm{P}_{\mathcal{F}}$。如果一个数字不满足 $\mathrm{P}_{\mathcal{F}}$，我们就称其为魔法数字；否则，采用 [12], 的术语，它被称为麻瓜数字。$\mathrm{P}_{\mathcal{F}}$ 的范围是包含关于 $\mathrm{P}_{\mathcal{F}}$的所有麻瓜数的最小区间。

周期序列的 周期长度 是满足 $s(n+\ell) = s(n)$ for all $n \geq 0$ 的最小整数 $\ell \geq 1$ s。令Per(ℓ)表示周期长度为 ℓ 的此类周期序列集合。序列 $s \in$Per(ℓ) 的 周期 是元组 ($s(0)$ $s(1)$ .. . , $s(\ell-1)$)。请注意，在下文中，我们舍弃 $\ell = 1$的情况，该情况对应于常值序列，且对于这种情况，三个族给出的相应秩均等于 1。

对于周期序列 s，形式为 $s(cn+r)_{n\geq 0}$ 的子序列也具有周期性，并且它们的周期长度满足以下条件。

命题 1。令 $\ell \geq 2$、c，$r \geq 0$ 为整数。如果 s 是一个周期序列，其周期长度整除 ℓ，那么 $s(cn+r)_{n\geq 0}$ 是周期序列，其周期长度整除 ℓ 最大公约数 $(c,\ \ell)$。

证明。对于所有 $n \geq 0$，我们有

$$s\left(c\left(n+\frac{\ell}{\gcd(c,\ell)}\right)+r\right) = s\left(cn+\frac{c}{\gcd(c,\ell)}\ell + r\right) = s(cn+r)$$

由于 $\frac{c}{\gcd(c,\ell)}$ 是整数，且 s 的周期长度整除 ℓ，这就足够了。 □

3 自动序列

本节关注将周期序列表示为自动序列。我们简要介绍有关周期性和自动性的早期研究。[5,15, 22]中研究了最终周期性和自动集合。对于 $\ell \geq 1$，Alexeev [1] 和 Sutner [27] 研究了生成周期为 (1, 0, 0, . . . , 0) 的序列的自动机，其中有 $\ell - 1$ 个尾随零。Sutner 和 Tetruashvili 确定了周期为 (0, 1, . . . , $\ell - 1$) 的序列在特定 $\ell \geq 1$ [28, 值下的秩（命题 2.1]）。Bosma 研究了二元字母表上若干周期序列族的一些特例，并考察了其秩的上界和下界 [6], ；Zantema 则给出了所有周期序列秩的一个上界 [29, （定理 10]）。

现在我们介绍本节所需的定义。设 k、$\ell \geq 2$ 为整数。将 $\mathrm{ord}_\ell(k)$ 定义为满足以下条件的最小整数 $m \geq 1$：对于所有充分大的 e，$k^{e+m} \equiv k^e \mod \ell$。在 k 与 ℓ 互素的特殊情形下，$\mathrm{ord}_\ell(k)$ 是 k 模 ℓ 的通常乘法阶。令 $\mathrm{pre}_\ell(k)$ 表示满足以下条件的最小整数 $e \geq 0$：$k^{e+\mathrm{ord}_\ell(k)} \equiv k^e \mod \ell$。换言之，$\mathrm{pre}_\ell(k)$ 是序列 $(k^e \mod \ell)_{e\geq 0}$ 的前周期长度，而 $\mathrm{ord}_\ell(k)$ 是（最终的）周期长度。对于每个整数 n，我们令 $\mathrm{Div}(n)$ 表示 n 的所有因子组成的集合。

给定整数 k，若存在一个确定性有限输出自动机（DFAO），使得对于每个整数 n，将 n的以k 为底的数字输入后，自动机输出 $s(n)$，则称序列 s 是 k-自动的。为了将自动机与底数联系起来，我们称之为 k-自动机。此处，自动机读取以k 为底的表示时，从最低有效位开始（注意，反向读取也会得到相同的序列集合）。自动序列也可以用所谓的核来刻画。具体而言，序列 s 的 k-核是子序列集合 $\ker_k(s) = \{s(k^e n + j)_{n\geq 0} : \ e \geq 0 \text{和 } 0 \leq j \leq k^e - 1\}$。序列是 k-自动的，当且仅当其 k-核有限。我们将 k-自动序列 s 的 k-秩（或在上下文明确时简称秩）定义为量 $\mathrm{rank}_k(s) = |\ker_k(s)|$。事实上，$\ker_k(s)$与生成 s 且满足前导 0 不影响输出这一性质的最小 k-自动机的状态集合一一对应。每个周期序列对于每个 $k \geq 2$ [7, p都是 k-自动的。 88]。注意，在这种情况下，字母表并不重要，因此不失一般性，本节中的序列均取非负整数值。关于自动序列的更多细节，参见例如 [3]。

例*2*。 对于具有周期 (0,1,2,3,4,5) 的序列 $s \in \mathrm{Per}(6)$，我们在图2和表1中说明了 s 的最小2-自动机与其2-核之间的关系。

表1：对于周期为 (0,1, 2, 3,4, 5) 的 $s \in \mathrm{Per}(6)$，其2-核包含第二列所示的 13 个不同序列。仅当 $s(k^e n + j)_{n\geq 0} = s(k^{e'} n + j')_{n\geq 0}$ 时，两对 (e, j)和 (e', j')才是等价的。因此，在第三列中，图2的 s 的2-自动机中的状态被标记为 ej，其中 (e, j) 是该等价关系的字典序最小代表元。

(e, j)	$s((2^e \bmod 6)n + (j \bmod 6))_{n\geq 0}$	状态
(0, 0)	$s(n)_{n\geq 0} = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$	00
(1, 0), (3, 0), (3, 6)	$s(2n)_{n\geq 0} = 0, 2, 4, 0, 2, 4, \ldots$	10
(1, 1), (3, 1), (3, 7)	$s(2n + 1)_{n\geq 0} = 1, 3, 5, 1, 3, 5, \ldots$	11
(2,0),(4,0),(4,6),(4,12)	$s(4n)_{n\geq 0} = 0, 4, 2, 0, 4, 2, \ldots$	20
(2,1),(4,1),(4,7),(4,13)	$s(4n + 1)_{n\geq 0} = 1, 5, 3, 1, 5, 3, \ldots$	21
(2,2),(4,2),(4,8),(4,14)	$s(4n + 2)_{n\geq 0} = 2, 0, 4, 2, 0, 4, \ldots$	22
(2, 3)、(4, 3)、(4, 9)、(4, 15)	$s(4n + 3)_{n\geq 0} = 3$、1、5、3、1、5、…	23
(3, 2)	$s(2n + 2)_{n\geq 0} = 2, 4, 0, 2, 4, 0, \ldots$	32
(3, 3)	$s(2n + 3)_{n\geq 0} = 3, 5, 1, 3, 5, 1, \ldots$	33
（3，4）	$s(2n + 4)_{n\geq 0} = 4, 0, 2, 4, 0, 2, \ldots$	34
(3, 5)	$s(2n + 5)_{n\geq 0} = 5, 1, 3, 5, 1, 3, \ldots$	35
(4, 4), (4, 10)	$s(4n + 4)_{n\geq 0} = 4, 2, 0, 4, 2, 0, \ldots$	44
（4, 5），（4, 11）	$s(4n + 5)_{n\geq 0} = 5, 3, 1, 5, 3, 1, \ldots$	45

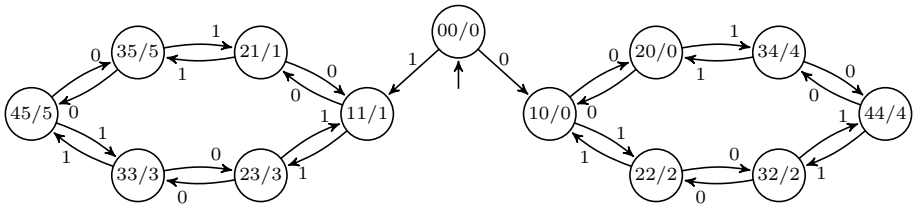


图2：输出周期为 (0, 1, 2, 3, 4, 5) 的序列的最小2自动机。每个状态的标签形式为 α/ρ，其中 α 对应表1第三列中的状态名称，而 ρ 是输出值。

3.1 魔数的界限

对于整数 k、$\ell \geq 2$ 以及周期序列族 $\mathrm{Per}(\ell)$，我们考虑以下性质：当且仅当一个整数等于

Per(ℓ) 中某个序列的 k 秩。结合命题 2 和命题 3，我们得到当 k 与 ℓ 互质时 $\mathrm{P_a}(k, \ell)$ 的取值范围，如下所述。

推论1。令 $k, \ell \geq 2$ 为互素整数。区间 $[\ell, B_\ell(k)]$ 是 $\mathrm{P}_a(k, \ell)$ 的取值范围，其中 $B_\ell(k)$：$= \left(\sum_{e=0}^{\mathrm{pre}_\ell(k)-1} \min(k^e, \ell)\right) + \ell \cdot \mathrm{ord}_\ell(k)$。

我们首先求出一般情况下的上界。

命题 2. 设 k，$\ell \geq 2$ 为两个整数。$\mathsf{Per}(\ell)$ 中每个序列的 k-秩至多为 $B_\ell(k)$。此外，周期为 $(0, 1, \ldots\ldots, \ell - 1)$ 的周期序列的 k-秩为 $B_\ell(k)$。

为了证明命题2，我们需要一个新概念和两个引理。我们先从第一个引理开始。

引理1. 令 $k, \ell \geq 2$ 为整数，并令 $s \in \mathsf{Per}(\ell)$。$\ker_k(s)$中的每个序列都可以写成 $s(cn + r)_{n\geq 0}$，其中 $c, r \in \{0, 1, \ldots, \ell - 1\}$。特别地，如果 k和 ℓ 互素，则 c在 $\mathbb{Z}_\ell$中是可逆的。

证明。令 $e \geq 0$和 $0 \leq j \leq k^e - 1$。由于 $s \in \mathsf{Per}(\ell)$，我们有 $s(k^e n + j)_{n\geq 0} = s((k^e$ 模 $\ell)n + (j$模 $\ell))_{n\geq 0}$。现在假设 k和 ℓ互质。我们证明 $\gcd(c, \ell) = 1$。反之，假设 ℓ 和 c 有一个公共质因数 p，并令 $\ell = m_1 p$ 和 $c = m_2 p$，其中 m_1、$m_2 \geq 1$ 为某些整数。根据定义，令 e、$m_3 \geq 0$满足 $k^e = m_3 \ell + c$。于是我们有 $k^e = (m_1 m_3 + m_2)p$，因此 p 是 k 和 ℓ的一个公因数，这是不可能的。□

对于一个序列 $s \in \mathsf{Per}(\ell)$，我们定义两组序列：(k, ℓ)-漏斗和 (k, ℓ)-盆地：

$$\mathrm{fun}_{k,\ell}(s) = \{s(k^e n + j)_{n\geq 0} : 0 \leq e \leq \mathrm{pre}_\ell(k) - 1 \text{ 和 } 0 \leq j \leq \min(k^e, \ell) - 1\},$$
$$\text{盆地}_{k,\ell}(s) = \{s(k^{e+\mathrm{pre}_\ell(k)} n + j)_{n\geq 0} : 0 \leq e \leq \mathrm{ord}_\ell(k) - 1 \text{ 和 } 0 \leq j \leq \ell - 1\}.$$

根据定义，$\mathrm{fun}_{k,\ell}(s) \subseteq \ker_k(s)$显然成立。我们将证明 $\mathrm{basin}_{k,\ell}(s) \subseteq \ker_k(s)$同样成立。对于 $\mathrm{basin}_{k,\ell}(s)$ 中的每个核序列 $s(k^{e+\mathrm{pre}_\ell(k)} n + j)_{n\geq 0}$，核序列 $s(k^{e+\mathrm{pre}_\ell(k)}(kn + r) + j)_{n\geq 0}$也属于 $\mathrm{basin}_{k,\ell}(s)$，因此 basin 在此运算下封闭。漏斗由核序列$s(k^e n + j)_{n\geq 0}$构成，其中 e 太小，以至于 k^e 不属于模 ℓ下 k 的幂的最终周期。根据 basin 的定义可知，若 $s \in \mathsf{Per}(\ell)$ 且 $k \equiv k' \bmod \ell$，则 $\mathrm{basin}_{k,\ell}(s) = \mathrm{basin}_{k',\ell}(s)$。

我们有如下关于核的描述。

引理2. 令 $k, \ell \geq 2$ 为整数。若 $s \in \mathsf{Per}(\ell)$，则 $\ker_k(s) = \mathrm{fun}_{k,\ell}(s) \cup$盆地$_{k,\ell}(s)$。

证明。我们将 $\ker_k(s)$ 写作两个集合的并集

$$F_{k,\ell}(s) = \{s(k^e n + j)_{n\geq 0} : 0 \leq e \leq \mathrm{pre}_\ell(k) - 1 \text{ and } 0 \leq j \leq k^e - 1\},$$
$$B_{k,\ell}(s) = \{s(k^e n + j)_{n\geq 0} : e \geq \mathrm{pre}_\ell(k) \text{ and } 0 \leq j \leq k^e - 1\}.$$

由于 $s \in \mathrm{Per}(\ell)$（或引理 1），我们有

$$F_{k,\ell}(s) = \{s(k^e n + j)_{n\geq 0} : 0 \leq e \leq \mathrm{pre}_\ell(k) - 1 \text{ and } 0 \leq j \leq \min(k^e, \ell) - 1\},$$
$$B_{k,\ell}(s) = \{s(k^e n + j)_{n\geq 0} : e \geq \mathrm{pre}_\ell(k) \text{ and } 0 \leq j \leq \min(k^e, \ell) - 1\}.$$

因此，$F_{k,\ell}(s) = \text{函数}_{k,\ell}(s)$。我们证明 $B_{k,\ell}(s) = \text{盆地}_{k,\ell}(s)$。有两种情况。若 $k^{\mathrm{pre}_\ell(k)} \geq \ell$，则 $\min(k^e, \ell) = \ell$ 对所有 $e \geq \mathrm{pre}_\ell(k)$，所以

$$\begin{aligned} B_{k,\ell}(s) &= \{s(k^e n + j)_{n\geq 0} : e \geq \mathrm{pre}_\ell(k) \text{ and } 0 \leq j \leq \ell - 1\} \\ &= \{s(k^{e+\mathrm{pre}_\ell(k)} n + j)_{n\geq 0} : e \geq 0 \text{ and } 0 \leq j \leq \ell - 1\}. \end{aligned}$$

由于 $k^{e+\mathrm{ord}_\ell(k)} \equiv k^e$ 模 ℓ 对所有 $e \geq \mathrm{pre}_\ell(k)$，我们有 $B_{k,\ell}(s) = \text{盆地}_{k,\ell}(s)$。现在若 $k^{\mathrm{pre}_\ell(k)} < \ell$，令 $E = \lceil \log_k \ell \rceil$，使得 $k^e \geq \ell$ 对所有 $e \geq E$。由于 $\mathrm{pre}_\ell(k) < E$（根据 E的定义），

$$\begin{aligned} B_{k,\ell}(s) = \{s(k^e n + j)_{n\geq 0} &: \mathrm{pre}_\ell(k) \leq e \leq E - 1 \text{ and } 0 \leq j \leq k^e - 1\} \\ &\cup \{s(k^e n + j)_{n\geq 0} : e \geq E \text{ and } 0 \leq j \leq \ell - 1\}. \end{aligned}$$

我们证明，前一个等式右边的第一集合是第二集合的子集。令 $\mathrm{pre}_\ell(k) \leq e \leq E - 1$ and $0 \leq j \leq k^e - 1$，使得 $s(k^e n + j)_{n\geq 0}$ 属于第一集合。取 $e' \geq E$，使得 $k^{e'} \equiv k^e \bmod \ell$。于是 $s(k^e n + j)_{n\geq 0} = s(k^{e'} n + j)_{n\geq 0}$。因此，

$$\begin{aligned} B_{k,\ell}(s) &= \{s(k^e n + j)_{n\geq 0} : e \geq E \text{ and } 0 \leq j \leq \ell - 1\} \\ &= \{s(k^e n + j)_{n\geq 0} : \mathrm{pre}_\ell(k) \leq e \leq \mathrm{pre}_\ell(k) + \mathrm{ord}_\ell(k) - 1 \text{ and } 0 \leq j \leq \ell - 1\} \\ &= \mathrm{basin}_{k,\ell}(s). \end{aligned}$$

证明至此结束。 □

证明（命题 *2*）。根据引理 2,

$$\mathrm{rank}_k(s) \leq |\mathrm{fun}_{k,\ell}(s)| + |\mathrm{basin}_{k,\ell}(s)| \leq \left(\sum_{e=0}^{\mathrm{pre}_\ell(k)-1} \min(k^e, \ell) \right) + \ell \cdot \mathrm{ord}_\ell(k),$$

如所需。

至于陈述的第二部分，设 g_ℓ 是周期为 $(0, 1, \ldots, \ell - 1)$ 的序列。陈述的第一部分意味着 $\mathrm{rank}_k(g_\ell) \leq B_\ell(k)$。我们证明等号成立。设 $s_1, s_2 \in \ker_k(g_\ell)$，并写作

$$s_1(n)_{n\geq 0} = g_\ell(k^{e_1} n + j_1)_{n\geq 0} = g_\ell(c_1 n + r_1)_{n\geq 0}$$

and

$$s_2(n)_{n\geq 0} = g_\ell(k^{e_2} n + j_2)_{n\geq 0} = g_\ell(c_2 n + r_2)_{n\geq 0}$$

由引理 1 得到 $0 \leq e_1, e_2 \leq \mathrm{pre}_\ell(k) + \mathrm{ord}_\ell(k) - 1$, $0 \leq j_1, j_2 \leq \ell - 1$, 以及 $c_1, c_2, r_1, r_2 \in \{0, 1, \ldots, \ell - 1\}$。根据 g_ℓ 的定义，当且仅当 $n \equiv m \bmod \ell$ 时，$g_\ell(n) = g_\ell(m)$。因此，$s_1 = s_2$ 特别意味着 $r_2 \equiv r_1 \bmod \ell$ $(n = 0)$ 且 $c_2 + r_2 \equiv c_1 + r_1 \bmod \ell$ $(n = 1)$。由于 $c_1, c_2, r_1, r_2 \in \{0, 1, \ldots, \ell - 1\}$，我们得到 $r_1 = r_2$ 和 $c_1 = c_2$。进而可推出 $e_1 = e_2$ 和 $j_1 = j_2$，证明至此完成。□

例*3*。 设 $k = 2$ 和 $\ell = 6$。序列$(k^e$ 模 $\ell)_{e\geq 0}$ 为 1、2、4、2、4、2、4、.....，因此 $\mathrm{pre}_\ell(k) = 1$ 和 $\mathrm{ord}_\ell(k) = 2$。对于例2中的序列，我们得到$B_\ell(k) = 2^0 + 6 \cdot 2 = 13$。生成 $g_\ell(n)_{n\geq 0}$ 的最小 DFAO 如图2所示，并且有13个状态。

然后我们得到推论 1 的下界。

命题 3. 设 $k, \ell \geq 2$ 为互素整数。$\mathrm{Per}(\ell)$ 中的每个序列的 k-秩至少为 ℓ。此外，周期为$(0, 0, \ldots, 0, 1)$ 的周期序列的 k-秩为 ℓ。

证明。根据引理 2，$\ker_k(s) =$ 盆地$_{k,\ \ell}(s)$。由于 $\mathrm{pre}_\ell(k) = 0$，然后序列$s(n+j)_{n\geq 0}$ 是 $\ker_k(s)$ 中的元素，对于 $j \geq 0$。共有 ℓ 个不同的此类序列，因此秩$_k(s) \geq \ell$。

对于陈述的第二部分，令 $s \in \mathrm{Per}(\ell)$ 为周期为 (0,0, ... ,0, 1)的序列。根据引理 1 和 2，$\ker_k(s) =$ 盆地 $_{k,\ell}(s)$ 中的每个序列都可以写成 $s(cn + r)_{n\geq 0}$ 其中 c、$r \in \{0, 1, \ldots, \ell - 1\}$，并且 $c \neq 0$ 在 $\mathbb{Z}_\ell$ 中是可逆的。序列 $s(cn+r)_{n\geq 0}$是周期性的，周期长度至多为 ℓ。对于所有$n \geq 0$，$s(cn + r) = 1$ 当且仅当 $cn + r \equiv \ell - 1 \mod \ell$，这等价于$n \equiv c^{-1}(\ell-1-r) \bmod \ell$。因此，$s(cn+r)_{n\geq 0}$ 是 s的移位，并且秩$_k(s) \leq \ell$。该不等式连同陈述的第一部分给出秩$_k(s) = \ell$。□

3.2 迈向一种刻画

以下定理刻画了当 k 和 ℓ 互质时，相对于 $\mathrm{P_a}(k, \ell)$ 的魔数和麻瓜数。

定理1. 令 $k, \ell \geq 2$ 为互素整数。令 $A = \{d\ell : d \in \mathrm{Div}(\mathrm{ord}_\ell(k))\}$。则 A 是范围内的麻瓜数集合，对于 $\mathrm{P}_a(k, \ell)$而言。特别地，相对于 $\mathrm{P}_a(k, \ell)$ 的魔数集合为 $\mathbb{N} \setminus A$。

以下引理对定理 1 的证明很有用。

引理 3. 设 k，$\ell \geq 2$ 为互素整数，且 $s \in \mathrm{Per}(\ell)$。则 $\ker_k(s) = \{s(k^e n + j)_{n\geq 0}$: $e \geq 0$ 且 $0 \leq j \leq \ell - 1\}$。

证明。 由引理 2 可知，当 k 和 ℓ 互质时，集合 $\mathrm{fun}_{k,\ell}(s)$ 为空。□

引理 4。 令 k、$\ell \geq 2$ 为互素整数。如果 s 属于 $\mathrm{Per}(\ell)$，那么 $s(kn)_{n\geq 0}$也属于其中。

证明。我们通过反证法进行推导，并假设 $s(kn)_{n\geq 0} \in \mathrm{Per}(d)$，其中$d \mid \ell$ 和 $d \neq \ell$。令 j 为 k 模 ℓ 的逆元，该逆元存在，因为$\gcd(k, \ell) = 1$。于是 $s(jkn)_{n\geq 0}$ 的周期长度整除 d。这是不可能的，因为前一个序列实际上是 s，其周期为 $\ell > d$。□

现在我们可以给出定理 1 的证明了。

证明（定理*1*）。为简洁起见，设 $T = \{秩_k(s) : s \in \mathrm{Per}(\ell)\}$。我们证明 $T = A$，方法是证明两个包含关系。

第一个包含关系。由命题 3，$\mathrm{rank}_k(s) \geq \ell$ 对所有 $s \in \mathrm{Per}(\ell)$ 都成立。利用引理 3，对于每个 $e \geq 0$，令 $B_{k,\ell,e}(s) = \{s(k^e n + j)_{n\geq 0} : 0 \leq j \leq \ell - 1\}$ 为由指数 e 产生的核序列集合。由于 k 和 ℓ 互素，$B_{k,\ell,e}(s)$ 中的序列恰好是 $s(k^e n)_{n\geq 0}$ 的 ℓ 次移位 $s(k^e(n+i))_{n\geq 0}$ $(0 \leq i \leq \ell - 1)$，并且由引理 4 可知它们互不相同，因此 $|B_{k,\ell,e}(s)| = \ell$。因此，若对于某些 $e, e' \geq 0$，有 $B_{k,\ell,e}(s) \cap B_{k,\ell,e'}(s) \neq \emptyset$，则 $B_{k,\ell,e}(s) = B_{k,\ell,e'}(s)$。集合序列 $(B_{k,\ell,e}(s))_{e\geq 0}$ 是周期序列，其周期长度整除 $\mathrm{ord}_\ell(k)$。因此，$T \subseteq A$。

第二个包含关系。令 $d \in \mathrm{Div}(\mathrm{ord}_\ell(k))$。我们考虑作用在 $\mathbb{Z}/(\ell\mathbb{Z})$ 上的映射 $n \mapsto k^d n$，由于 k^d 在模 ℓ 意义下可逆，因此它是一个置换。这个置换具有有限阶，而 n 在此映射下的轨道为集合 $\{n, k^d n, k^{2d} n, \ldots\}$。特别地，0 的轨道是 $\{0\}$。令 $X_0 = \{0\}, X_1, \ldots, X_m$ 为互不相同的轨道。这些集合构成 $\mathbb{Z}/(\ell\mathbb{Z})$ 的一个划分（示例见例 4）。定义字母表 $\{0, 1, \ldots, m\}$ 上的序列 s 如下：

$$s(n) = i \quad \text{where } (n \bmod \ell) \in X_i. \tag{1}$$

那么 s 是周期的，因为 $s(n) = s(n + \ell)$。此外，s 属于 $\mathrm{Per}(\ell)$，因为 0 在周期中只出现一次，即出现在与 0 模 ℓ 同余的位置。为了证明 $A \subseteq T$，还需证明 $\mathrm{rank}_k(s) = d\ell$。

首先，之前定义的序列 $(B_{k,\ell,e}(s))_{e\geq 0}$ 是周期性的，其周期长度至多为 d，因为根据轨道的定义，$B_{k,\ell,e}(s) = B_{k,\ell,e+d}(s)$。我们证明周期长度恰好为 d。令 e, $e' \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ 使得 $B_{k,\ell,e}(s) = B_{k,\ell,e'}(s)$；我们证明 $e = e'$。由于 0 在 s 的周期中只出现一次，因此在 $B_{k,\ell,e}(s)$ 中恰有一个序列的初始项为 0，即 $s(k^e n)_{n\geq 0}$。因此，$s(k^e n)_{n\geq 0} = s(k^{e'} n)_{n\geq 0}$。特别地，$s(k^e) = s(k^{e'})$，所以 $k^e, k^{e'} \in X_i$ 对于某个 $i \neq 0$ 成立。根据 X_i 的定义，$k^{e+jd} \equiv k^{e'} \bmod \ell$ 对某个 $j \geq 0$ 成立。因此 $e + jd \equiv e' \bmod \mathrm{ord}_\ell(k)$，这反过来意味着 $e \equiv e' \bmod d$，进而得到 $e = e'$。因此，$\mathrm{rank}_k(s) = d\ell$，如所需。

该陈述的第二部分可由推论 1 得出。 □

注意，前面的证明是构造性的，也就是说，对于 $\mathrm{ord}_\ell(k)$ 的每个因数 d，方程（1）都定义了一个秩为 $d\ell$ 的序列。

例 *4.* 我们有 $\mathrm{ord}_7(3) = 6$，因此麻瓜数属于集合 $\{7d : d \in \mathrm{Div}(\mathrm{ord}_7(3))\} = \{7, 14, 21, 42\}$。我们在表2中列出了 $\mathrm{Per}(7)$ 中秩各不相同的周期序列的周期。

注记 *1*。Neder [26, A217519] 猜想，如果 s_ℓ 是周期为(0,1, ... , $\ell - 1$)的序列，那么“$秩_2(s_\ell) \leq \ell(\ell - 1)$，当且仅当 ℓ 是一个以 2 为原根的素数时等号成立”。回忆一下，素数 ℓ 的原根是满足 $\mathrm{ord}_\ell(k) = \ell - 1$ 的整数 k。Neder 的猜想由定理 1 得出，即使在 $k \neq 2$ 时也成立。

表2：对于 Per(7) 中周期序列的秩的每个可能取值，我们给出一个具有该秩的序列。

d 秩	3^d 模 7	$\mathbb{Z}/(7\mathbb{Z})$ 的划分	周期
6 42	1	$\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)
3 21	6	$\{0\},\{1,6\},\{2,5\},\{3,4\}$	(0, 1, 2, 3, 3, 2, 1)
2 14	2	$\{0\},\{1,2,4\},\{3,5,6\}$	(0, 1, 1, 2, 1, 2, 2)
1 7	3	$\{0\},\{1,2,3,4,5,6\}$	(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)

4 常递归序列

整数序列 s 是 常系数递推的，如果存在 c_0、c_1、…、$c_{d-1} \in \mathbb{Z}$，满足 $d \in \mathbb{N}$ 且 $c_0 \neq 0$，使得

$$s(n+d) = c_{d-1}s(n+d-1) + \cdots + c_1 s(n+1) + c_0 s(n) \tag{2}$$

对所有 $n \geq 0$。对于一个常系数递归序列 s，我们令 rank(s) 表示其秩，即满足以下条件的最小整数 d： s 满足形式如公式(2)的递推关系。换句话说，如果集合 $\{s(n+j)_{n\geq 0}\colon\ j \geq 0\}$ 包含 s 的所有移位，被称为 s 的 1-核，那么 s 的秩就是由其 1- 核生成的 $\mathbb{Q}$- 向量空间的维数。

对于整数 $\ell \geq 2$ 和周期序列族 Per(ℓ)，我们考虑以下性质：当且仅当某个整数等于 Per(ℓ) 中某个序列的秩时，该整数满足 $\mathrm{P_{cr}}(\ell)$。对于 $s \in$ Per(ℓ)，当 $\ell \in \{2,\ldots,15\}$ 时，秩(s) 的前几个可能值列于表3中。

表3：当 $s \in$ Per(ℓ) 对于 $\ell \in \{2,\ldots,15\}$ 时，秩(s) 的前几个值。

ℓ	秩(s) $s \in$ Per(ℓ)	ℓ	秩(s) $s \in$ Per(ℓ)
2	1, 2	9	6, 7, 8, 9
3	2, 3	10	4, 5, 6, 8, 9, 10
4	2, 3, 4	11	10, 11
5	4, 5	12	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
6	2, 3, 4, 5, 6	13	12, 13
7	6, 7	14	6, 7, 8, 12, 13, 14
8	4, 5, 6, 7, 8	15	6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

对于 $\mathrm{P_{cr}}(\ell)$，我们采用以下策略：首先给出命题4中的范围，然后在定理2中完整刻画魔法数和麻瓜数。为了陈述这些内容，我们需要一些关于分圆多项式的定义和结果。关于这一主题的更多细节，请读者参阅优秀的参考文献 [10]。

定义1。设 $m \geq 1$。m次圆分多项式 是首一多项式 Φ_m，其在 $\mathbb{C}$ 中的根是 m 次本原单位根。

前几个分圆多项式是 $\Phi_1(x) = x - 1$, $\Phi_2(x) = x + 1$,$\Phi_3(x) = x^2 + x + 1$, $\Phi_4(x) = x^2 + 1$, $\Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, 以及$\Phi_6(x) = x^2 - x + 1$。对于所有 $m \geq 2$, $\Phi_m(x)$ 都是回文的。我们还有以下恒等式：$x^n - 1 = \prod_{m\in 整除(n)}\Phi_m(x)$，对于所有 $n \geq 1$。欧拉函数 ϕ 将每个正整数 n 映射为小于 n 且与 n互质的正整数的个数。

引理5（Garrett [10]）。对于所有 $m \geq 1$, $\Phi_m(x)$，均为首一多项式，次数为 $\phi(m)$。

欧拉函数的加法版本 ψ ϕ 定义如下：– 对于每个素数 p 和每个 $k \geq 1$, $\psi(p^k) = \phi(p^k)$；– 如果 n 是奇数，那么 $\psi(2n) = \phi(n)$；如果 m 和 n 互素且均不等于 2，那么 $\psi(mn) = \phi(m) + \phi(n)$。

命题4。令 $\ell \geq 2$。区间 $[\psi(\ell)\ \ell]$ 是$\mathrm{P}cr(\ell)$的取值范围。此外，序列 $s \in \mathsf{Per}(\ell)$ 的周期为$(0, 0, \ldots, 0, 1)$ 满足秩$(s) = \ell$。

定理2。令 $\ell \geq 2$。令 S为由非空集合 $\{d_1, d_2, \ldots, d_j\}$ 组成的集合，其中元素为非负且两两不同的整数，并满足 $\mathrm{lcm}(d_1, d_2, \ldots, d_j) = \ell$。集合$R' = \{\sum_{i=1}^{j} \phi(d_i)$: $\{d_1, d_2, \ldots, d_j\} \in S\}$ 是 $\mathrm{P}cr(\ell)$ 的范围内的麻瓜数集合。特别地，$\mathrm{P}cr(\ell)$ 的魔数集合为 $\mathbb{N} \setminus R'$。

从命题4和定理2得出的关于 $\mathsf{P}_{\mathrm{cr}}(\ell)$ 的魔数和麻瓜数的范围及刻画，将由涉及阶为 ℓ 的（简单）矩阵大小的中间结果推导而来。照例，我们用 $\mathsf{GL}_d(\mathbb{Z})$ 表示由大小为 d 的可逆矩阵组成的 阶一般线性群，其定义在 $\mathbb{Z}$ 上。注意，$\mathsf{GL}_d(\mathbb{Z})$ 中每个矩阵的行列式都是 ± 1。给定一个矩阵 $M \in \mathsf{GL}_d(\mathbb{Z})$，其阶$\mathrm{ord}\, M$ 是满足 $M^m = I$ 的最小正整数 m，其中 I 是大小为 d 的单位矩阵；若不存在这样的整数，则其阶为 $+\infty$。若矩阵 M 的所有特征值（在 $\mathbb{C}$ 中）代数重数均为 1，则称其为简单的。

4.1 命题4的证明

事实上，借助定理3，Hiller证明了给定阶的矩阵的最小大小对应于函数 ψ 的一个特定值。因此，它给出了命题4中的下界（见 [26, A080737,A152455]）。

定理 3（Hiller [13]）。最小的整数 $d \geq 1$ 使得 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ 包含一个阶为 ℓ 的矩阵是 $\psi(\ell)$。

证明（命题*4*）。$\mathsf{Per}(\ell)$ 中的每个序列 s 都是常递归的，因为$s(n + \ell) = s(n)$对所有 $n \geq 0$ 均成立。因此，其秩至多为 ℓ。秩 ℓ 由周期为 (0, 0, . . . , 0, 1) 的序列达到。□

4.2 定理2的证明

定理2的证明将涉及若干关于有限阶矩阵的结果，其中第一个结果给出了关于 $\mathrm{P}_{\mathrm{cr}}(\ell)$ 的麻瓜数的另一种刻画。

定理4。 令 $\ell \geq 2$。集合

$$R = \{d \in \mathbb{N}: \text{ 存在一个简单矩阵 } M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z}) \text{ 使得 } \operatorname{ord} M = \ell\}$$

是对于 $\mathrm{P}_{cr}(\ell)$，范围内的麻瓜数集合。

现在我们将构建证明定理2和定理4所需的工具。令 s为满足方程（2）中递推关系的常系数递归序列。相应递推关系的特征多项式为 $\chi(x) = x^d - c_{d-1}x^{d-1} - \cdots - c_1 x - c_0$。对于首一多项式 $p(x) = x^\ell + a_{\ell-1}x^{\ell-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，我们用 $C(p)$ 表示由大小为 ℓ的矩阵给出的 $p(x)$ 的伴随矩阵 。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{\ell-1} \end{bmatrix}.$$

以下结果将满足方程（2）的周期序列的周期长度与前述递推关系的伴随矩阵的阶联系起来。

命题 5. 设 s 是满足方程 (2) 的常系数递归序列，设 $\chi(x)$ 是相应递推关系的特征多项式，设 $M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ 是 $\chi(x)$ 的伴随矩阵。假设 $\operatorname{ord} M$ 是有限的。

1. s 的周期长度至多为$\operatorname{ord} M$。*2.*此外，如果初始条件为 $s(0) = s(1) = \cdots = s(d-2) = 0$ 且$s(d-1) = 1$，那么 s 的周期长度恰好为$\operatorname{ord} M$。

命题5 的证明受有限域中的类似结果 [25,命题IV.5。1]启发。我们从一个引理开始，该引理指出，伴随矩阵的幂可以获得序列的更多项。

引理 6。 设 s 为满足方程 (2) 的常系数递归序列，且令 M 为对应特征多项式的伴随矩阵。对于所有 $n \geq 0$，我们定义向量 $\boldsymbol{s}_n = \big[s(n)\ s(n+1)\ \cdots\ s(n+d-1)\big]$。那么对于所有 $m, n \geq 0$，均有 $\boldsymbol{s}_n M^m = \boldsymbol{s}_{n+m}$。

证明。我们对 $m \geq 0$进行数学归纳法证明。如果 $m = 0$，结论显然成立。根据数学归纳法假设，我们有 $\boldsymbol{s}_n M^{m+1} = \boldsymbol{s}_{n+m} M$，它等于

$$\Big[s(n+m+1)\ s(n+m+2) \cdots\ s(n+m+d-1)\ \textstyle\sum_{i=0}^{d-1} c_i s(n+m+i)\Big].$$

根据假设，$\sum_{i=0}^{d-1} c_i s(n+m+i) = s(n+m+d)$，这意味着 $\boldsymbol{s}_n M^{m+1} = \boldsymbol{s}_{n+m+1}$，正如预期。□

命题 *5* 的证明。令 ord $M=\ell$。对于所有 $n\geq 0$，引理 6 给出 $\boldsymbol{s}_{n+\ell}=\boldsymbol{s}_nM^\ell=\boldsymbol{s}_n$，因此对于所有 $n\geq 0$，$s(n+\ell)=s(n)$。这反过来意味着，对于所有初始条件，s 的周期长度至多为 ℓ。这证明了第 (1) 项。

我们来证明第（2）项。我们证明，序列 s的每个周期长度，在初始条件 $s(0)=s(1)=\cdots=s(d-2)=0$ 和 $s(d-1)=1$ 下，至少为 ℓ。令 $\{\boldsymbol{e}_i:1\leq i\leq d\}$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 的标准基，也就是说，对于所有 $i\in\{1,2,\ldots,d\}$，$\boldsymbol{e}_i$ 在第 i个坐标上为 1，在其他位置均为 0。根据假设，我们有 $\boldsymbol{s}_0=\boldsymbol{e}_d$。我们可以通过数学归纳法证明，对于所有 $j\in\{0,1,\ldots,d-1\}$,

$$\boldsymbol{s}_j=\boldsymbol{s}_0M^j=\boldsymbol{e}_{d-j}+\sum_{i=d-j+1}^{d}\alpha_{j,i}\boldsymbol{e}_i$$

对于某些系数 $\alpha_{i,j}\in\mathbb{Q}$。设

$$A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}_{d-1}\\ \boldsymbol{s}_{d-2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{s}_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\alpha_{d-1,2}&\alpha_{d-1,3}&\cdots&\alpha_{d-1,d}\\ 0&1&\alpha_{d-2,2}&\cdots&\alpha_{d-2,d}\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0&1&\alpha_{1,d}\\ 0&\cdots&0&0&1\end{bmatrix}\in\mathrm{GL}_d(\mathbb{Q}).$$

注意，$\det(A)=1$。再次根据引理 6，我们得到

$$AM^m=\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}_{d-1}\\ \boldsymbol{s}_{d-2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{s}_0\end{bmatrix}M^m=\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}_{m+d-1}\\ \boldsymbol{s}_{m+d-2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{s}_m\end{bmatrix}\tag{3}$$

对于所有 $m\geq 0$。现在假设 s 属于 Per(m)。我们想要证明 $m\geq\ell$。根据 m 是周期长度的定义，公式 (3) 变为

$$AM^m=\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}_{d-1}\\ \boldsymbol{s}_{d-2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{s}_0\end{bmatrix}=A.$$

由于 A 可逆，我们得出 $M^m=I$，因此 m 是ord(M) $=\ell$ 的倍数。特别地，$m\geq\ell$，如所需。□

以下结果刻画了有限阶矩阵。

定理 5（Koo [21, 第 147]页）。矩阵 $M\in\mathrm{GL}_d(\mathbb{Q})$ 具有有限阶，当且仅当存在正整数 r、m_1、……、m_r、n_1、……、n_r（其中各 m_i 两两不同）、一个可逆矩阵 $P\in\mathrm{GL}_d(\mathbb{Q})$以及一个分块对角矩阵

$$A=\mathrm{diag}(\underbrace{C(\Phi_{m_1}),\ldots,C(\Phi_{m_1})}_{n_1\ times},\underbrace{C(\Phi_{m_2}),\ldots,C(\Phi_{m_2})}_{n_2\ times},\ldots,\underbrace{C(\Phi_{m_r}),\ldots,C(\Phi_{m_r})}_{n_r\ times}),$$

满足 $\sum_{i=1}^{r} n_i \deg(\Phi_{m_i}) = d$，使得 $M = P^{-1}AP$。此外， M 的阶为 $\operatorname{lcm}(m_1$、m_2、.....、$m_r)$。
注意到，对于所有 i，$r \le \sum_{i=1}^{r} n_i \deg(\Phi_{m_i}) = d$因为 n_i，$\deg(\Phi_{m_i}) \ge 1$。

我们陈述两个有助于证明定理4的引理，用以描述常数递推且周期性的序列所满足的最小递推关系的特征多项式。

引理7。设 $\ell \ge 2$。对于每个周期长度整除 ℓ 的常系数递推周期序列 s，由 s 满足的最小递推关系的特征多项式整除 $x^{\ell} - 1$。

证明。根据假设，对于所有 $n \ge 0$，都有 $s(n+\ell) = s(n)$。后一个递推关系的特征多项式为 $x^{\ell}-1$。由最小性可得结论。

□

引理 8。设 $\ell \ge 2$ 且 $f(x)$ 是 $x^{\ell} - 1$的一个因子。伴随矩阵 M的 $f(x)$具有有限阶。此外， $f(x) = \prod_{i=1}^{r} \Phi_{m_i}(x)$是若干互不相同的分圆多项式的乘积，其中每个指标 m_i 都是 ℓ的一个因数，且阶$M = \operatorname{lcm}(m_1, m_2, \ldots, m_r)$。

证明。由于 $f(x)$的根是单位根， M 的特征值是阶整除 ℓ 的单位根。因此，根据定理 5，矩阵 M 具有有限阶，其阶为 $\operatorname{lcm}(m_1, m_2, \ldots, m_r)$。 □

现在我们可以证明定理4了。

证明（定理*4*）。为简洁起见，令 $T = \{$秩$(s) : s \in \mathrm{Per}(\ell)\}$。我们通过证明两个包含关系来证明 $T = R$。

第一重包含。我们证明 $T \subseteq R$。因此，设 $s \in \mathrm{Per}(\ell)$，且 $d = \mathrm{rank}(s)$。我们构造一个简单矩阵 $M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$，使得 $\mathrm{ord}\, M = \ell$。由于 $\mathrm{rank}(s) = d$，根据定义，序列 s 满足形如方程 (2) 的递推关系。令 M 为该递推关系的特征多项式 $\chi(x)$ 的伴随矩阵。根据引理 7， $\chi(x)$ 是 $x^{\ell}-1$ 的因子，因此矩阵 M 是简单矩阵。根据引理 8， M具有有限阶，且 $\mathrm{ord}\ M \le \ell$。另一个不等式 $\ell \le \mathrm{ord}\ M$由命题 5 得出。因此， $T \subseteq R$。

第二个包含关系。我们证明 $R \subseteq T$。令 $d \ge 1$，并令 $M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$为满足 $\mathrm{ord}\, M = \ell$ 的简单矩阵。由极小性，对于所有满足 $m < \ell$的 $m \in \mathrm{Div}(\ell)$，我们有 $M^m \ne I$。根据定理5， $\chi_M(x) = \prod_{i=1}^{r} \Phi_{m_i}(x)^{n_i}$，其中 r、m_i、n_i 为某些整数，且每个 m_i 都是 ℓ的因子， m_i's 彼此不同，并且 $\operatorname{lcm}(m_1, m_2, \ldots, m_r) = \ell$。由于 M 是简单的，对于所有 i， $n_i = 1$。写作 $\chi_M(x) = x^d - c_{d-1}x^{d-1} - \cdots - c_1 x - c_0$，其中 c_0、c_1、...、$c_{d-1} \in \mathbb{Z}$。令 s 为满足递推关系 $s(n+d) = c_{d-1}s(n+d-1) + \cdots + c_1 s(n+1) + c_0 s(n)$ 的序列，对所有 $n \ge 0$及初始条件 $s(0) = s(1) = \cdots = s(d-2) = 0$ 和 $s(d-1) = 1$。根据命题5， s 的周期长度为 $\mathrm{ord}(M) = \ell$，因此 $s \in \mathrm{Per}(\ell)$。我们声称$\mathrm{rank}(s) = d$。根据定义， s 的秩至多为 d。对于所有 $d' < d$，唯一一个以 d' 个初始零开始且满足 d' 阶递推关系的序列是恒零序列。因此$\mathrm{rank}(s) = d$。所以， $R \subseteq T$。□

我们用一个例子说明证明的每个方向。

例*5.* 令 $s \in \mathrm{Per}(3)$ 为周期为（$-1, 0, 1$）的序列。它满足$s(n+2) = -s(n+1) - s(n)$，对所有 $n \geq 0$ 均成立。此递推关系的特征多项式为 $x^2 + x + 1$，其伴随矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

且它是 $x^3 - 1$ 的一个因子。可以验证，$\mathrm{ord}\, M$ 确实等于 3。

例*6.* 令 let $M \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{Z})$ 为矩阵，其各行由以下六个向量给出

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

可以验证，M 的阶为 15，且其特征多项式等于$\chi_M(x)$ $= x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = \Phi_3(x)\Phi_5(x)$。不难找到一个可逆矩阵 $P \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{Q})$，使得 $PMP^{-1} = \mathrm{diag}(C(\Phi_3)\ C(\Phi_5))$。我们定义 s 为满足以下条件的序列：$s(0) = s(1) = s(2) = s(3) = s(4) = 0, s(5) = 1$，并且对所有 $n \geq 0$，

$$s(n+6) = -2s(n+5) - 3s(n+4) - 3s(n+3) - 3s(n+2) - 2s(n+1) - s(n).$$

可以验证，s 的周期为 $(0, 0, 0, 0, 0, 1, -2, 1, 1, -2, 2, -1, -1, 2, -1)$，因此 $s \in \mathrm{Per}(15)$，且 $\mathrm{rank}(s) = 6$。

现在我们来证明定理2。注意，陈述中的最小公倍数条件意味着每个 d_i 都是 ℓ 的因数。

证明（定理*2*）。设 $\ell \geq 2$。根据定理4，集合 $\{\mathrm{rank}(s) : s \in \mathrm{Per}(\ell)\}$与 R 相等。根据定理 5 和引理5，存在一个大小为 d、阶为 ℓ 的简单矩阵 M，当且仅当对于某个整数集合$\{d_1, d_2, \ldots, d_j\} \in S$，$d = \sum_{i=1}^{j} \phi(d_i)$。第一部分的结论由此得出，第二部分则由命题4得出。□

注意，定理2直接推出以下结论，这解释了为什么表3的素数行中只有两个取值。

推论2。对于每个素数 ℓ，关于$\mathrm{P}_{cr}(\ell)$的麻瓜数只有 $\ell - 1$ 和 ℓ。

5 正则序列

本节我们研究 k-正则序列 [2]，它们是常系数递归序列的底数-k 类比。若整数序列 s 所生成的 k-核（定义见第3节）的 $\mathbb{Q}$-向量空间 $V_k(s)$ 是有限生成的，则称该序列 s 为 k-正则。k-秩（或在上下文明确时简称秩）是 s 的 $V_k(s)$ 的维数。我们仍使用记号 $\mathrm{rank}_k(s)$。

每个周期序列对于任意的 k 都是 k-自动的，因此也都是 k-正则的。不过，相应的 k 秩不一定相等。

例7。 考虑周期为 (0, 1, 1, 1) 的序列 $s \in \mathsf{Per}(4)$。 s 的 2-核由周期分别为 (0, 1, 1, 1)、(0, 1)、(1) 和 (0) 的序列组成。将 s 视为 2-自动序列时，其秩为 4；而将其视为 2-正则序列时，其秩为 3（周期分别为 (0, 1, 1, 1)、(0, 1) 和 (1) 的序列线性无关）。

对于整数 k、$\ell \geq 2$ 以及周期序列族 $\mathsf{Per}(\ell)$，我们考虑以下性质：一个整数满足 $\mathsf{P}_{\mathrm{r}}(k, \ell)$，当且仅当它等于 $\mathsf{Per}(\ell)$ 中某个序列的 k-秩。为了寻找关于 $\mathsf{P}_{\mathrm{r}}(k, \ell)$ 的神奇数和麻瓜数，我们将使用以下概念。设 $n \geq 1$ 为一个整数，且 $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ 为一个整数序列。循环矩阵 $C(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ 是一个大小为 n 的矩阵，其第 i行 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 是首行向右循环移位 $(i-1)$ 次所得。多项式 $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ 是 $C(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ 的相伴多项式 。

我们将与给定周期序列相关联的循环矩阵的秩，与其常递归秩和 k-正则秩联系起来。第一个结果的证明源自 [4, 定理2.1.6]以及 [4, 第6章第 1]节中的讨论。

命题6（Berstel 和 Reutenauer [4]）。设 $\ell \geq 2$。设 $s \in \mathsf{Per}(\ell)$，并设 $M = C(s(0)\ s(1) \ldots, s(\ell-1))$ 为由 s 的周期构成的大小为 ℓ 的循环矩阵。作为常系数递归序列，s 的秩等于 秩 M。

命题7。令 k，$\ell \geq 2$ 为互素整数。令 $s \in \mathsf{Per}(\ell)$ 并令 $M = C(s(0)\ s(1) \ldots\ldots, s(\ell-1))$ 为基于 s的周期构造的大小为 ℓ的循环矩阵。则秩$_k(s)$ =秩 M。

证明。 通过反复应用引理 4，每个满足 $e \geq 0$且 $0 \leq j \leq k^e - 1$的序列 $s(k^e n + j)$ 的周期长度均为 ℓ，因此我们有秩$_k(s)$、秩 $M \leq \ell$。作为第一个简单情形，若序列 $s(n)_{n\geq 0}$、$s(n+1)_{n\geq 0}$、.....、$s(n+\ell-1)_{n\geq 0}$ 是线性无关序列，则根据定义，秩 $M = \ell =$ 秩$_k(s)$，这就足够了。作为第二种情形，假设其中存在一个最小的线性无关序列集，其大小为 $d < \ell$。根据定义，我们有秩 $M = d$。利用命题6，其中的每个序列

$$V = \{s' \in \mathsf{Per}(\ell) \colon s' \text{ satisfies the same linear recurrence as } s\}$$

可以写成这组 d 线性无关序列的线性组合。现在证明，$\ker_k(s)$中的每个序列都属于 V。根据引理 1，这样的序列可以写成 $s(cn+r)_{n\geq 0}$，其中 $0 \leq c$、$r \leq \ell - 1$（且 c在 $\mathbb{Z}_\ell$中是可逆的）。由于序列 s 和 $s(cn+r)_{n\geq 0}$ 都属于 $\mathsf{Per}(\ell)$，令 f和 g 分别为它们的最小递推关系的特征多项式。根据引理 7以及将 $x^\ell - 1$ 分解为分圆多项式，存在一个集合 $S \subseteq \mathsf{Div}(\ell)$，使得 $f(x) = \prod_{m\in S} \Phi_m(x)$。 $g(x)$的根是 $f(x)$的根的 c次方。由于 k 和 ℓ 互质，因此 c 和 m也互质，从而映射 $x \mapsto x^c$ 是 $\Phi_m(x)$的根的一个置换。因此， g的根等于 f的根。所以， $s(cn+r)_{n\geq 0}$ 属于 V。因此，秩$_k(s) = d$，正如所要求的那样。□

请注意，前面的论证不适用于 k 和 ℓ不互质的情况。

例*8*。在例7中，周期为(1,0) 的核序列 s 不是其他核序列的线性组合，这些核序列的周期分别为 (0, 1,1,1)、(1) 和(0)。然而， s 是周期为 (0, 1, 1,1)的序列 s_0 的移位的线性组合，因为如果我们令 s_1、 s_2 和 s_3 分别为 s_0 的第一次、第二次和第三次移位，则有 $s = \frac{2}{3}s_0 - \frac{1}{3}s_1 + \frac{2}{3}s_2 - \frac{1}{3}s_3$。

定理 *6*。 k、 $\ell \geq 2$ 是互素整数。$P_r(k, \ell)$ 的范围是 $[\psi(\ell)\ \ell]$。现在令 S 为由非空集合 $\{d_1, d_2, \ldots, d_j\}$ 组成的集合，其中包含两两不同的非负整数，且 $lcm(d_1, d_2, \ldots, d_j) = \ell$。集合 $R' = \{\sum_{i=1}^{j} \phi(d_i) : \{d_1, d_2, \ldots, d_j\} \in S\}$ 是 $P_r(k, \ell)$ 范围内的麻瓜数集合。特别地，关于 $P_r(k, \ell)$ 的魔数集合是 $\mathbb{N} \setminus R'$。

证明。 在此证明中，对于每个序列 $s \in \mathsf{Per}(\ell)$，我们用 M_s 表示由 s 的周期构成的、大小为 ℓ 的循环矩阵 $C(s(0)\ s(1) \ldots, s(\ell-1))$。与第 4 节一样，我们也用 $\mathsf{rank}(s)$ 表示将 s 视为常系数递归序列时的秩。根据命题 6 和 7，我们有

$$\{\mathrm{rank}_k(s) : s \in \mathsf{Per}(\ell)\} = \{\mathrm{rank}\, M_s : s \in \mathsf{Per}(\ell)\} = \{\mathrm{rank}(s) : s \in \mathsf{Per}(\ell)\}\,.$$

特别地，$\mathrm{P_r}(k, \ell)$ 和 $\mathrm{P_{cr}}(\ell)$ 的麻瓜数集合相同。命题 4 和定理2随即使我们能够完成证明。□

6 结论与未来工作

本文研究了周期序列秩的三种定义下的魔数问题。具体而言，对于常系数递归序列，我们完整刻画了任意周期长度对应的魔数；而对于周期长度为 ℓ 的 k-自动序列和 k-正则序列，在 k 和 ℓ 互素的条件下，我们给出了相应的刻画。对于这类序列，一般情形看起来更为复杂。事实上，例7已经表明， k-核中序列的周期长度并不总是等于 ℓ，而是其因子 ℓ。因此，要刻画可能出现的秩，进而刻画这些序列族中的魔数和麻瓜数，就需要深入理解集合 $\mathsf{Per}(d)$ 之间的关系，其中 d 整除 ℓ。因此，作为本研究的自然延续，我们目前正致力于将自动序列和正则序列的结果推广到不对 k 和 ℓ 作任何条件限制的情形。

致谢 Savinien Kreczman和Manon Stipulanti 分别获得FNRS 研究资助 1.A.789.23F 和 1.B.397.20F 的支持。

参考文献

1. Alexeev, B.：用于测试整除性的最小 DFA。《计算机与系统科学杂志》69(2), 235 243 2004 10 1016 2004 02 001 – ( )。https://doi.org/ . / 2 k j.jcss. . . . Allouche, J.P., Shallit, J.O.：-正则序列构成的环。《理论计算机科学》98(2), 163–197（1992）。https://doi.org/10.1016/0304-3975(92)90001-V 3. Allouche, J.P., Shallit, J.O.：《自动序列：理论、应用与推广》。剑桥大学出版社（2003） 4. Berstel, J., Reutenauer, C.：《非交换有理级数及其应用》，《数学及其应用百科全书》第137卷。剑桥大学出版社，剑桥（2011） 5. Boigelot, B., Mainz, I., Marsault, V., Rigo, M.：一种使用 MSDF 约定判定 b-可识别集合周期性的高效算法。载于：ICALP 2017。LIPIcs，第80卷，第118:1–118:14页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik（2017 118 6 10 4230 2017）。https://doi.org/ . /LIPIcs.ICALP. . . Bosma, W.：周期序列的复杂性。预印本见 https://www.math.ru.nl/bosma/pubs/periodic.pdf（2019） 7. Büchi, R.J.：弱二阶算术与有限自动机。《数学逻辑季刊》6(1-6)，66–92（1960）。https://doi.org/https://doi.org/10 19600060105 8 1002. /malq. . Cobham, A.：一致标记序列。《数学系统理论》6，164–192（1972）。https://doi.org/10 01706087 9 1007. /BF . Everest, G., van der Poorten, A.J., Shparlinski, I.E., Ward, T.：递推序列，《数学调查与专著》第104卷。美国数学学会（2003） 10. Garrett, P.B.：《抽象代数》。Chapman & Hall/CRC，佛罗里达州博卡拉顿（2008） 11. Geffert, V.：（非）确定性与单向有限自动机的规模。载于：第七届形式系统描述复杂性国际研讨会——DCFS 2005，意大利科莫，2005年6月30日至7月2日。论文集。第23–37页。米兰大学，意大利米兰（2005） 12. Geffert, V.：有限自动机状态层级中的魔数。《信息与计算》205 001 13 11 1652 1670 2007 10 1016 2007 07 （），–（）。https://doi.org/ . /j.ic. . . . Hiller, H.：高维空间中的晶体学限制。《晶体学报 A 辑》41(6)，541–544（1985）。https://doi.org/https://doi.org/10 0108767385001180 14 1107. /S . Holzer, M., Jakobi, S., Kutrib, M.：子正则语言族的魔数问题。《国际基础计算机科学杂志》23(1)，115–131（2012）。https://doi.org/10.1142/S0129054112400084 15. Honkala, J.：判定由数制定义的集合是否可识别的方法。《RAIRO 理论与应用信息学》20(4)，395–403（1986）。https://doi.org/10 1986200403951 16 1051. /ita/ . Iwama, K., Kambayashi, Y., Takaki, K.：与 n-状态 NFA 等价的 DFA 状态数的紧界。《理论计算机科学》237(1-2), 485 3 17 494 2000 10 1016 0304 3975 00 00029 –（）。https://doi.org/ . /S - ( ) - . Iwama, K., Matsuura, A., Paterson, M.：一类需要 $2^n - \alpha$ 个确定性状态的 NFA。《理论计算机科学》301(1-3)，451–462（2003）。https://doi.org/10 5 18 1016 0304 3975 02 00891 . /S - ( ) - . Jirásková, G.：最小 NFA 的确定性膨胀。《RAIRO 理论与应用信息学》40(3)，485–499（2006）。https://doi.org/10.1051/ita:2006032

19. Jirásková, G.: 关于正则语言的补运算、星运算和反转的状态复杂度。载于：语言理论发展，第十二届国际会议，DLT 2008，日本京都，2008年9月16日至19日。论文集。计算机科学讲义，第5257卷，第431–442页。施普林格（2008）。https://doi.org/ 10 1007 978 3 540 85780 8_34 。/ - - - - . Jirásková, G.: 魔数与三
20
元字母表。国际基础计算机科学杂志
22 2 331 344 2011 10 1142 0129054111008076 ( ), – （）。
21
https://doi.org/。/S . Koo, R.: 有限阶矩阵在 和 上的分类。《数学杂志》76(2)，143–148（2003） 22. Marsault, V.: 使用最低有效位优先约定，通过高效算法判定 b-可识别集合的周期性。逻辑方法与计算机科学 15(3)（2019）。https://doi.org/10 2019 23 23638 15 3 8 . /LMCS- (:)。Meyer, A.R., Fischer, M.J.: 自动机、文法和形式系统的描述简约性。载于：第十二届开关与自动机理论年度研讨会，美国密歇根州东兰辛，1971年10月13日至15日。第188–191页。IEEE计算机学会（1971 11 24 10 1109 1971）。https://doi.org/。/SWAT. . . Ouaknine, J., Worrell, J.: 线性递推序列的判定问题。载于：RP 2012。计算机科学讲义，第7550卷，第21–28页。施普林格（2012）。https://doi.org/ 10 1007 978 3 642 33512 9_3 。/ - - - - . Rigo,
25
M.: 离散数学，2009–2010年课程讲义。可在 http://www.discmath.ulg.ac.be/cours/main_sd.pdf 获取 26. Sloane, N.J.A.: 在线整数序列百科全书。http://oeis.org 27. Sutner, K.: 整除性与状态复杂度。《Mathematica 杂志》11(3)，430 8 28 445 2009 10 3888 11 3 –（）。https://doi.org/。/tmj. . - . Sutner, K., Tetruashvili, S.: 推断自动序列。https://www.cs.cmu.edu/ sutner/papers/auto-seq.pdf（2012） 29. Zantema, H., Bosma, W.: 自动序列的复杂度。《信息与计算》288，104710（2022）。https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ic.2021.104710，特刊：第十四届语言与自动机理论及应用国际会议 LATA 2020 的精选论文