arXiv:2304.03281v2 [quant-ph] 5 Feb 2024

多体纠缠：穿越几何的旅程

Songbo Xie、* Daniel Younis、Yuhan Mei 和 Joseph H. Eberly
Center for Coherence and Quantum Optics, and Department of Physics and Astronomy, University of Rochester, Rochester, New York 14627, USA（日期：2024 年 2 月 7 日）

真正的多体纠缠对于量子信息及相关技术至关重要，但对其进行量化一直是一个长期存在的挑战。大多数已提出的度量都不符合“真正的”这一要求，因此不适用于许多应用。在这项工作中，我们通过揭示多体纠缠与几何单形的超体积之间一种出人意料的关系，提出了一条解决这一问题的探索路径，并由此导出了四方纠缠的四面体度量。通过比较两个高度纠缠的四量子比特态的纠缠排序，我们表明，四面体度量取决于量子系统内各方之间置换不变性的程度。我们展示了该度量在多体系统中的量子信息扰乱背景下潜在的未来应用。

引言。——真正的多体纠缠（GME）是一种超越两方纠缠的纠缠形式，相较于两方纠缠具有独特优势[1]。GME 的主要优势在于能够助力完成复杂的量子任务 [2–4]。因此，理解多体系统中的 GME 对量子技术的发展大有裨益。

要量化纠缠的程度，必须使用纠缠度量。纠缠度量在多种研究中至关重要，包括考察多体系统的动力学行为、量化量子协议的性能，以及识别多体系统中的相变性质 [5–8]。“真正”这一要求意味着，真正多体纠缠度量必须且只能在双可分状态下取零[9, 10]。这对于准确量化各方纠缠的集体强度并释放其在量子任务中的潜力至关重要。

遗憾的是，许多已提出的多体纠缠度量，包括一些被广泛使用的度量 [11–14]，都未能满足“真正”这一要求，因此不适用于许多实际应用。构造真正多体纠缠度量的一种常见方法是采用基于距离的方案，包括相对熵 [15] 以及一些“几何度量” [16–18]。然而，计算这类度量需要进行优化，这一过程极具挑战性，有时甚至对纯态也是如此。

在这项工作中，为了解决这一度量识别问题，我们踏上了一段独特的旅程。这段旅程始于我们最近为三量子比特系统引入的三角形度量 [10]。然而，由于几何形状过于灵活，将这一度量扩展到含有三个以上量子比特的系统颇具挑战性。人们已经进行了各种尝试，但它们要么无法满足“真正的”要求，要么失去了简单的几何直觉 [19–21]。

我们通过为四量子比特系统提出一种四面体度量，展示了开展“几何之旅”的可能性。我们展示了，我们的新方法，尽管与基于距离的度量共享“几何”这一术语，它通过揭示多方纠缠与几何单形的超体积之间出人意料的联系，呈现出根本性的区别。它还依赖于量子系统内各方之间的置换不变性程度——这一特征并非基于距离的度量所共有。这为未来的研究带来了希望，例如探究多体系统中的信息扰乱。

从三体到四体。——冯·诺依曼熵在我们的方法中至关重要。具体来说，双体纯量子态 ψ_{12} 的纠缠 E 可以用任意一方的冯·诺依曼熵 S 来表征，$E(\psi_{12}) \coloneqq S(\rho_i) \equiv -\mathrm{Tr}(\rho_i \log_2 \rho_i)$，其中 ρ_i 是该方的约化密度算符 i。$E(\psi_{12})$称为该态 ψ_{12}的纠缠熵。

另一个关键要素是“纠缠多边形不等式” [22]。具体而言，对于一般的 n量子比特系统，考虑一个量子比特与其余（$n-1$）个量子比特之间的纠缠熵，可得到 n 个这样的单比特对其余比特的二分熵。纠缠多边形不等式要求，其中任意一个值都不能超过其余（$n-1$）个值之和。对于三量子比特态，这些关系为：$E_{i(jk)} \le E_{j(ki)} + E_{k(ij)}$。这里，$E_{i(jk)} \coloneqq S(\rho_i)$，下标 i指系统的第 i个量子比特，而$\{i,j,k\}$是{1,2,3}的任意排列。

这些不等式可以从几何上理解为：三个单比特对其余比特的熵分别代表三角形三条边的长度。我们证明了这个三角形的面积是一个三量子比特 genuine 多体纠缠度量，其中以并发度代替纠缠熵 [10, 23]。现在我们将说明，纠缠熵具有独特的优势。

四量子比特系统的不等式为 [22]:

$$E_{i(jkl)} \le E_{j(kli)} + E_{k(lij)} + E_{l(ijk)}, \tag{1}$$

其中 $\{i,j,k,l\}$ 是 $\{1,2,3,4\}$的任意排列。如 [22], 式（1）所示，它形成一个四边形，其四条边的长度分别等于四个两两之间的熵。

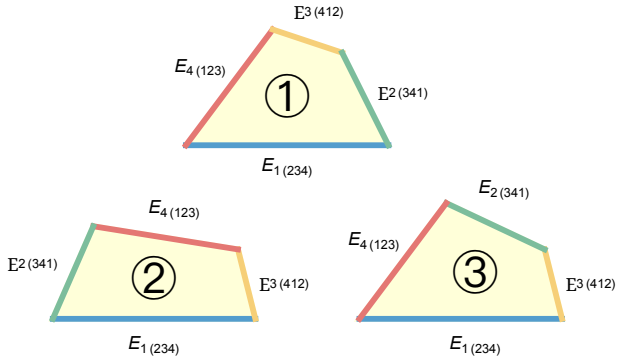


图 1. 将式(1) 解释为四边形，违背了纠缠在量子比特置换下的不变性，因为四条边没有得到同等对待，从而产生了三种不同的可能四边形。这里，相同颜色的边表示长度相等。

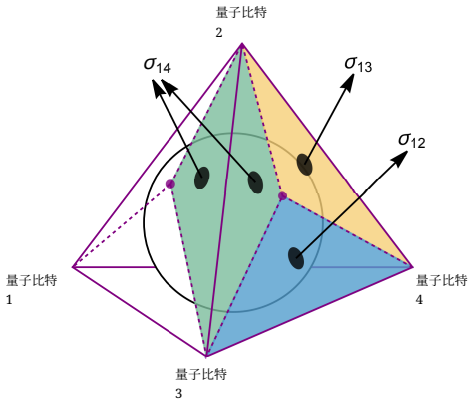


图 2. 四面体的内切球将四个面分成十二个较小的三角形。四面体上任何两个共用一条边的小三角形，其面积都相同，并以相同的颜色表示。

因此，借鉴 [10], 中的三角形度量，一个颇具吸引力的四量子比特 genuine 多体纠缠度量候选方案是该四边形的面积。

然而，使用上述定义的四边形会带来一些问题。首先，由于纠缠在量子比特置换下保持不变，四个单对其他量子比特的熵$E_{i(jkl)}$ 必须被同等对待。然而，四边形的四条边不一定相等。边长各不相同的四边形可以有三种不同的排列方式，如图1所示。此外，四边形有五个自由度，而边长只能确定其中四个。因此，即使四条边的长度已固定，四边形的面积仍可能变化，从而使纠缠度量无法确定。

从多边形到单纯形。——相反，我们考虑由公式（1）诱导的“熵四面体”，其四个面面积分别等于四个单对其他量子比特的熵，如图1所示。当注意到四个面受到同等对待时，四面体方法的优势便很快显现出来。我们在这一新框架中将 [22] 的结果重新解释为纠缠单纯形不等式，其中“单纯形”一词将三角形和四面体的概念推广到了任意维度。

继续之前，需要指出，四面体有六个自由度，而四个面面积只能确定其中四个。因此，如果我们试图用熵四面体的体积来衡量 GME，该体积仍无法确定。

进一步说明一下：每个四面体都有一个唯一的内切球，与四个面都相切。对于每个面，都可以将内切球的切点与该面的三个顶点相连，从而将该面分成三个较小的三角形。四个面上的十二个小三角形两两相关：任何两个共用四面体一条棱的三角形，面积都相等。这些小三角形的六种不同面积

记作 $\{\sigma_{12},\ \sigma_{13},\ \sigma_{14},\ \sigma_{23},\ \sigma_{24},\ \sigma_{34}\}$，如图 2所示。作为一道简单的练习，可以证明，这些小三角形的面积确定了该四面体，其体积为：

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sqrt{2}}{3} S^{1/2} (A_0 A_1 A_2 A_3)^{1/4}, \\ \text{with } A_0 &= +\sqrt{\sigma_{12}\sigma_{34}} + \sqrt{\sigma_{13}\sigma_{24}} + \sqrt{\sigma_{14}\sigma_{23}}, \\ A_1 &= -\sqrt{\sigma_{12}\sigma_{34}} + \sqrt{\sigma_{13}\sigma_{24}} + \sqrt{\sigma_{14}\sigma_{23}}, \\ A_2 &= +\sqrt{\sigma_{12}\sigma_{34}} - \sqrt{\sigma_{13}\sigma_{24}} + \sqrt{\sigma_{14}\sigma_{23}}, \\ A_3 &= +\sqrt{\sigma_{12}\sigma_{34}} + \sqrt{\sigma_{13}\sigma_{24}} - \sqrt{\sigma_{14}\sigma_{23}}. \end{aligned} \tag{2}$$

以及 $S = 2(\sigma_{12}+\sigma_{13}+\sigma_{14}+\sigma_{23}+\sigma_{24}+\sigma_{34})$，熵四面体的总表面积。

这六个参数 $\{\sigma_{ij}\}$ 的总和必须等于由“纠缠单纯形不等式”确定的四个面面积（包括四种指标置换）：

$$\sigma_{ij} + \sigma_{ik} + \sigma_{il} = E_{i(jkl)}. \tag{3}$$

然而，这些方程无法确定四面体，因为还需要另外两个方程。到目前为止，虽然一直使用一对其余熵，但四量子比特genuine 多体纠缠的构造还必须涉及表示二对其余二分划分的熵，即 $\{E_{(12)(34)}, E_{(13)(24)}, E_{(14)(23)}\}$，其中 $E_{(ij)(kl)} := S(\rho_{ij}) \equiv S(\rho_{kl})$，这些二分划分将量子比特分成两个各含两个量子比特的组。

一方面，如果三个二对其余纠缠熵中任意一个为零，该状态就是双可分的。根据“真”纠缠的要求，我们提出的 GME 度量——四面体的体积——应为零。另一方面，如果式（A_1、 A_2和 A_3 ）中的任意一个量为零，四面体的体积也为零。为确保这两个条件一致，我们通过以下方程（包括三种指标排列）将这些量联系起来：

$$-\sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{kl}} + \sqrt{\sigma_{ik}\sigma_{jl}} + \sqrt{\sigma_{il}\sigma_{jk}} = \lambda \cdot E_{(ij)(kl)}. \tag{4}$$

在将式（ λ 中的方程两两相除时，可以消去额外参数，结合式（3）和（4），可得到关于σ_{ij}的六个方程。

解的存在性。——方程（4）可转换为二次型：$\sigma_{ij}\sigma_{kl} = (\lambda^2/4)\,[E_{(ik)(jl)}+E_{(il)(jk)}]^2$。结合方程（3），可将这些方程简化为关于单个变量 σ_{ij} 的一个四次方程，该方程有四个不同的解。重要的是，由于其固有的对称性，这一推理普遍适用于全部六个$\{\sigma_{ij}\}$。因此，这六个方程总共有四组解。

我们的数值研究一贯证实存在四组不同的解。在这些解组中，有一个唯一的解，其所有 $\{\sigma_{ij}\}$ 均为非负值。因此，对于任意四量子比特态，总能构造一个四面体，使其六个较小三角形的面积等于非负值 $\{\sigma_{ij}\}$。我们称这一构造为熵四面体。

我们引入四量子比特熵填充，记作$F_4 := (3^{7/6}/2)V^{2/3}$，其中 V 是四面体体积，见公式（2）。前因子 $3^{7/6}/2$ 确保归一化 $0 \le F_4 \le 1$。正如将要解释的，指数 2/3 有助于 F_4 的可加性。现在我们证明， F_4 是四量子比特纯态的 genuine 多体纠缠度量。

(A)F_4 满足“真正的”要求。——对于四量子比特纯态系统，双可分态分为两种：一对其他可二分态和二对其他可二分态。对于一对其他可二分态，四个量 A_0、 A_1、 A_2 和 A_4 均为零，因此四面体的体积为零。对于二对其他可二分态，三个量 A_1、 A_2 或 A_3 中有一个为零，因此四面体的体积同样为零。

反之，如果所构造四面体的体积为零，根据式 V（2）中的表达式，可分为四种可能的情形：

（a）（$A_1A_2A_3$）$= 0$，但 A_1， A_2，且 A_3 并非全为零。不失一般性，我们假设 $A_1 = 0$。根据式（4），这意味着 $\lambda \neq 0$ 且 $E_{(12)(34)} = 0$，表明该态至少是二对其余部分双可分的。

(b) $A_0 = 0$。这等价于 $A_1 = A_2 = A_3 = 0$。在这种情况下，很容易观察到 $\sqrt{\sigma_{12}\sigma_{34}} = \sqrt{\sigma_{13}\sigma_{24}} = \sqrt{\sigma_{14}\sigma_{23}} = 0$。因此，每个平方根下的因子中至少有一个应被取为零。我们首先假设存在一个下标 i，使得$\sigma_{ij} = \sigma_{ik} = \sigma_{il} = 0$。这导致 $E_{i(jkl)} = 0$，表明该状态至少是一个与其他部分双可分的状态。

（c） $A_0 = 0$，但（b）中的假设并不成立。可以证明，要使每个平方根都为零，唯一的可能性是 $\sigma_{jk} = \sigma_{kl} = \sigma_{lj} = 0$，而 $\sigma_{ij} \neq 0$、 $\sigma_{ik} \neq 0$ 和 $\sigma_{il} \neq 0$。四个面面积满足关系 $E_{i(jkl)} = E_{j(kli)} + E_{k(lij)} + E_{l(ijk)}$，其中 $E_{i(jkl)} > E_{j(kli)} > 0$、 $E_{i(jkl)} > E_{k(lij)} > 0$ 和 $E_{i(jkl)} > E_{l(ijk)} > 0$ 表示一个四个顶点共面的四面体。采用与 [10]，附录中相同的方法，可以证明这会导致矛盾。因此，这种情形不会出现在四量子比特系统中。（d） $S = 0$。这意味着所有$\{\sigma_{ij}\}$ 都等于零。根据公式（3），该态是一个乘积态。

因此，我们已经证明，分配给四量子比特态的熵四面体的体积为零，当且仅当该态是双可分的，这表明 F_4 满足真正性要求。

(B)F_4 是可加的。—如果一个纠缠度量 E 是可加的，即 $E(\psi^{\otimes n}) = nE(\psi)$，这表明某个状态的 n 相同副本的纠缠是单个副本纠缠的 n 倍 [24]。

鉴于冯·诺依曼熵的可加性已是公认事实，$\{E_{i(jkl)}, E_{(ij)(kl)}\}$ 中的各个量在式（3）和（4）中均具有可加性。因此，对于 n 个相同副本，$\{\sigma_{ij}\}$ 的非负解将增大n倍。这证明了 F_4 具有可加性，并说明了指数 2/3 对于 V 的必要性。

(C)局域单调性——纠缠度量 E还应满足局域单调性，要求E 在局域操作和经典通信（局域操作和经典通信） [25]下不增加。对于一般的混合态 ρ，这意味着 $E(\rho) \ge E(\Lambda(\rho))$，其中 Λ 是任意的局域操作和经典通信过程 [26]。对于仅为纯态定义的度量，该要求适用更强的形式：$E(\psi) \ge \sum_i p_i E(\varphi_i)$，其中$\{p_i, |\varphi_i\rangle\}$是在局域操作和经典通信 [27]下由 $|\psi\rangle$获得的系综。

我们通过采用 [28] 中阐述的数值方法，验证 F_4 的局域单调性。具体而言，如 [1]，所示，只需将局域操作和经典通信限制为作用于量子比特 1 上、具有二元结果的正算子值测度 $\{X_1, X_2\}$。这些算子满足关系 $X_1^\dagger X_1 + X_2^\dagger X_2 = \mathbb{1}$，并且通常可参数化为：

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \begin{pmatrix} \sin\alpha_1\cos\beta_1 & -e^{i\beta_2}\sin\alpha_1\sin\beta_1 \\ \sin\alpha_2\sin\beta_1 & e^{i\beta_2}\sin\alpha_2\cos\beta_1 \end{pmatrix}, \\
X_2 &= \begin{pmatrix} \cos\alpha_1\cos\beta_1 & -e^{i\beta_2}\cos\alpha_1\sin\beta_1 \\ \cos\alpha_2\sin\beta_1 & e^{i\beta_2}\cos\alpha_2\cos\beta_1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

其中 $\{\alpha_i, \beta_i\}$ 为 $\in [-\pi, \pi]$。由于纠缠度量在局域酉变换下保持不变，因此只需将输入态 ψ 限定为广义施密特形式 [29]：

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle = {} & c_0|0000\rangle + c_4|0100\rangle + c_5|0101\rangle + c_6|0110\rangle \\
& + c_8|1000\rangle + c_9 e^{i\phi_1}|1001\rangle + c_{10}e^{i\phi_2}|1010\rangle \\
& + c_{11}e^{i\phi_3}|1011\rangle + c_{12}e^{i\phi_4}|1100\rangle + c_{13}e^{i\phi_5}|1101\rangle \\
& + c_{14}e^{i\phi_6}|1110\rangle + c_{15}e^{i\phi_7}|1111\rangle,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

其中 $\sum_i c_i^2 = 1$ 和$\{\phi_i\} \in [0, \pi]$。二元结果态由 $|\varphi_i\rangle = (X_i \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1})|\psi\rangle/\sqrt{p_i}$给出，而$\{p_i\}$ 是归一化因子。 F_4 的局域单调性等价于以下不等式：

$$
M(c_i, \phi_i, \alpha_i, \beta_i) := \left[F_4(\psi) - \sum_i \big(p_i F_4(\varphi_i)\big) \right] \ge 0. \tag{7}
$$

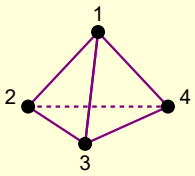
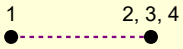
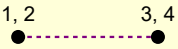
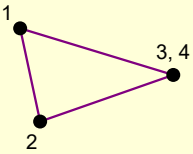
状态	$\|1234\rangle$	$\|1\rangle \otimes \|234\rangle$	$\|12\rangle \otimes \|34\rangle$	$\|1\rangle \otimes \|2\rangle \otimes \|34\rangle$	$\|1\rangle \otimes \|2\rangle \otimes \|3\rangle \otimes \|4\rangle$
可分性	真正 纠缠	一对其他 双可分	两个对其他 双可分	一一二 双可分	乘积
四面体					
体积	> 0	= 0	= 0	= 0	= 0

图3。不同类型四量子比特态的熵四面体。(a) 真正纠缠态对应的四面体体积为正。(b) 一对其他可二分态对应的四面体是一条无限长、体积为零的直线，以虚线表示。(c) 二对其他可二分态对应的四面体同样是一条无限长、体积为零的直线，以虚线表示。(d) 一一二可二分态对应的四面体是一个共面三角形，体积为零。值得注意的是，这是四面体形状不固定的唯一情况，只要三角形的面积等于双体熵 E_{34}。(e) 乘积态对应的四面体是一个点，体积为零。

我们进行了全面的数值验证，发现 M 在22个参数中的最小值约为 -10^{-6}。我们强调，与 M相关的数值不确定性源于数值求解方程（3）和（4），其量级与之相当，其中 $\Delta M \sim 10^{-6}$。具体而言，我们采用不确定性传播公式：$\Delta M = |\partial M/\partial\sigma_{ij}|\Delta\sigma_{ij}$，其中 $\Delta\sigma_{ij} \sim 10^{-15}$源于 σ_{ij}的双精度格式。值得注意的是，我们的分析表明，$|\partial M/\partial\sigma_{ij}|$ 可达到 10^9,的量级，这证实了 M 的总体不确定性为 $\Delta M \sim 10^{-6}$。因此， M 的最小值为 -10^{-6} 仅反映了数值计算中固有的系统不确定性。

为进一步验证，我们固定参数$\{c_i,\ \phi_i,\ \alpha_i,\ \beta_i\}$ 这些参数此前曾导致 M取负值。我们反复求解方程（3）和（4）。值得注意的是，计算得到的 M 呈现振荡，并在多次试算中频繁转为正值。这一观察表明，在数值不确定性的容差范围内， F_4 的最小值实际上为零。因此，这为熵填充 F_4 满足四量子比特纯态局域单调性的更强版本提供了证据。

既然我们已经确认，量 F_4 满足所有标准：(A)“真正性”要求、(B) 可加性，以及 (C) 局域单调性，因此我们认为，由熵四面体的体积推导出的熵填充是一种恰当的四量子比特纠缠度量。

不同类型状态对应的熵四面体的直观展示，请参见图 3。图注中提供了详细说明。

几何依赖于对称性。——熵填充源自二分熵 $\{E_{i(jkl)}, E_{(ij)(kl)}\}$。我们注意到，这些值通过代数构造导出另外两种纠缠度量：一种是它们的最小值，标记为“MIN”；另一种是它们的几何平均值，标记为“GM”。这些方法中的构造可见于 [9, 28, 30–32]。值得注意的是，这两种代数度量 MIN 和 GM 也满足上述三个标准 (A)、(B) 和 (C)，因此可将它们确立为另外两种纠缠度量。接下来，我们比较这三种度量。

在四量子比特系统中，Greenberger-Horne-Zeilinger（GHZ）态 $(|0000\rangle + |1111\rangle)/\sqrt{2}$ 和簇态 $|\phi_4\rangle = (|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle - |1111\rangle)/2$ 是两个著名的高度纠缠态[33]。这两种状态具有不同的纠缠特性，适用于不同的量子任务，因此难以直接判定它们的纠缠排序。有趣的是，我们发现，如表 I 所示，上述三种度量对这两种状态给出了截然不同的纠缠排序。

具体而言，MIN度量认为这两个状态具有同等的纠缠程度，即MIN(GHZ) = 1 = MIN(ϕ_4)，因为它只考虑最小的双体熵，而忽略了所有其他细节。GM 度量则将簇态评为纠缠程度更高，即 GM(GHZ) = 1 < 1.219 = GM(ϕ_4)，因为它将所有熵相乘。

熵填充度量给出了截然不同的视角，它赋予 GHZ 态更高的纠缠值，这一点从 F_4(GHZ) = 1 > 0.976 = F_4 (ϕ_4) 中可以看出。这种区别源于其基于几何的构造，

	$\{E_{i(jkl)}\}$	$\{E_{(ij)(kl)}\}$	分钟	GM	F_4
GHZ	{1,1,1,1}	{1,1,1}	1	1	1
簇	{1,1,1,1}	{1,2,2}	1	1.219	0.976

表 I. GHZ 态和簇态的二分纠缠熵、其最小值（标记为 MIN）、几何平均值（标记为 GM）以及熵填充 F_4 。

而几何与对称性密切相关。举例来说，对称性越高，体积越大——这一原理可由球体得到证明：在总表面积固定时，球体的对称性最高，体积也最大。

将这一原理应用于我们的情境，GHZ 态和簇态对应的四面体具有相同的总表面积。然而，与 GHZ 态对应的四面体体积更大，表明其对称性程度更高。这种几何对称性源于量子系统中各方之间的置换不变性。具体而言，GHZ 态在任意两个量子比特互换时均保持不变。相比之下，簇态仅在前两个量子比特之间以及后两个量子比特之间具有置换不变性。我们的纠缠四面体度量成功捕捉到了这种置换不变性。

此外，根据我们的四面体度量 F_4，可以将置换不变性程度 P 定义如下：$\mathrm{P} := F_4/F_4^{(S),\,\max}$，其中 $F_{(S)\,4,\,\max}$ 表示在熵四面体的总表面积由 S 固定时的最大 F_4 值，其定义为 $F_4^{(S),\,\max} = S/4$。将其应用于这两个高度纠缠态，可得 $\mathrm{P(GHZ)} = 1$ 以及 $\mathrm{P}(\phi_4) = 0.976$。

作为进一步的说明，我们考察由 $\cos\theta|0000\rangle + \sin\theta|1111\rangle$ 表示的广义 GHZ 状态。我们强调，尽管这些状态具有不同的 F_4 值来表征其纠缠，但对于 θ 的所有可能取值，它们始终呈现最大程度的置换对称性 $\mathrm{P} = 1$。这一观察验证了我们所定义的量 P 的适用性，因为这些状态本质上在全部四个量子比特之间具有置换不变性。

可扩展性。——沿着几何探索之旅继续前行，将系统推广到五个或更多量子比特，是一个值得未来深入探索的方向。这需要研究三维以上单纯形的超体积，因此难以获得直观的视觉呈现。

尽管如此，本文提出的四面体度量仍具有可扩展性。具体而言，我们可以始终将一个大型系统划分为四个组，并探索这些组之间真正的四方纠缠。从本质上说，四面体度量是一种真正的四方量子维度纠缠度量，其中每个参与方都具有两个以上的维度。近期的一项研究使熵填充向量子维度系统的扩展成为可能 [34]。此外，我们进行了数值验证，证明在量子维度系统中，方程（3）和（4）存在唯一的非负解，适用范围截至 $d = 50$。因此，我们推测，四面体度量同样适用于量子维度系统。

这一结果的一个直接应用是研究量子信息扰乱这一现象。它描述了量子多体系统中信息的重新分配与转化。然而，此前关于信息扰乱的研究仅涉及跨二分划分的纠缠，忽略了多体纠缠的丰富图景 [35–37]。之所以存在这一遗漏，是因为缺乏合适的度量来量化 GME。

借助依赖于量子状态对称性质的新颖genuine 多体纠缠度量，我们可以从理论和实验两方面探索多体系统中的各种 genuine 多体纠缠度量性质。这可能包括研究 genuine 多体纠缠度量生成的“速度”，从而增进我们对量子猝发之后热化早期阶段不同时间尺度的理解。我们还期待发现新的相，例如“genuine 多体纠缠度量体积法则”和“genuine 多体纠缠度量面积法则”。

混合态扩展——凸顶构造将熵填充推广到混合态 ρ as $F_4(\rho)$ $=\min\sum_i p_i F_4(\psi_i)$，其中最小化取遍所有纯态实现 $\rho = \sum_i p_i|\psi_i\psi_i|$。尽管这种方法计算量很大，但人们已发展出数值技-术来评估这一量 [38–40]。最近，有人提出了一种方法，用于在实验中估计基于凸顶的纠缠度量 [41]。

作者感谢 Foek Hioe、Sabre Kais、Gabriel T. Landi、Peter W. Milonni 和 Akira Sone 教授所进行的宝贵讨论。本研究获得了美国国家科学基金会第 PHY-1505189 号和第 PHY-1539859 号（INSPIRE）资助，以及罗切斯特大学的一项竞争性资助。

* sxie9@ur.rochester.edu[1] W. D¨ur,G. Vidal,andJ. I. Cirac, 三个量子比特可以通过两种不等价的方式纠缠, Phys. Rev. A **62**, 062314 2000(). [2] R. Laflamme, C. Miquel,J.P. Paz, and W. H. Zurek, 完美量子纠错码, Phys. Rev. Lett. **77**, 198 (1996). [3] A.W. Chin, S.F. Huelga,and M. B.Plenio, 非马尔可夫环境中的量子计量, Phys. Rev. Lett. **109**, 233601 (2012). [4] A.Karlssonand M.Bourennane, 使用三粒子纠缠的量子隐形传态, Phys. Rev. A **58**, 4394 (1998). [5] Y. Ding,S. Xie, andJ. H. Eberly, 缩小体积中纠缠共享的突然冻结与解冻, Phys. Rev.A **103**, 032418 (2021). [6] A. Anshu, A. W.Harrow,andM. Soleimanifar, 有能隙基态中的纠缠扩展面积律, Nature Physics **18**, 1362 (2022). [7] M. Block, Y. Bao, S. Choi, E. Altman,and N. Y. Yao, 长程相互作用量子线路中的测量诱导转变, Phys. Rev.Lett. **128**, 010604 (2022). [8] S. Puliyil,M.Banik,and M. Alimuddin, 真正的多体纠缠的热力学特征,

Phys. Rev. Lett. 129, 070601 (2022). [9] Z.-H. Ma, Z.-H. Chen, J.-L. Chen, C. Spengler, A. Gabriel, and M. Huber, 可计算下界的真实多体纠缠度量, Phys. Rev. A 83, 062325 (2011). [10] S. Xie and J. H. Eberly, 三体纠缠的三角形度量, Phys. Rev. Lett. 127, 040403 (2021). [11] V. Coffman, J. Kundu, and W. K. Wootters, 纠缠的分布, Phys. Rev. A 61, 052306 (2000). [12] D. A. Meyer and N. R. Wallach, 多粒子系统中的全局纠缠, J. Math. Phys. 43, 4273 (2002). [13] A. R. R. Carvalho, F. Mintert, and A. Buchleitner, 退相干与多体纠缠, Phys. Rev. Lett. 93, 230501 (2004). [14] B. Jungnitsch, T. Moroder, and O. G¨uhne, 驯服多粒子纠缠, Phys. Rev. Lett. 106, 190502 (2011). [15] V. Vedral and M. B. Plenio, 纠缠度量与纯化过程, Phys. Rev. A 57, 1619 (1998). [16] T.-C. Wei and P. M. Goldbart, 纠缠的几何度量及其在双体和多体量子状态中的应用, Phys. Rev. A 68, 042307 (2003). [17] M. Blasone, F. Dell'Anno, S. De Siena, and F. Illuminati, 几何纠缠的层级结构, Phys. Rev. A 77, 062304 2008( ). [18] A. Sen, U. Sen, $et\ al.$, 多方量子状态中的信道容量与纠缠度量, Phys. Rev. A 81, 012308 (2010). [19] A. Mishra, A. Raj, A. Kumar, S. Mahanti, and P. K. Panigrahi, 四量子比特系统的几何真实多体纠缠, arXiv:2212.11690 (2022). [20] Y. Guo, Y. Jia, X. Li, and L. Huang, 真实多体纠缠度量, J. Phys. A Math. Theor. 55, 145303 2022( ). [21] Z.-X. Jin, Y.-H. Tao, Y.-T. Gui, S.-M. Fei, X. Li-Jost, and C.-F. Qiao, 并发度三角形诱导的真实多体纠缠度量, Results Phys. 44, 106155 2023( ). [22] X.-F. Qian, M. A. Alonso, and J. H. Eberly, 量子比特系统中的纠缠多边形不等式, New J. Phys. 20, 063012 (2018). [23] S. Xie and J. Eberly, 应对三方纠缠挑战, Contemp. Phys. 62, 189 (2022). [24] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, 混合态纠缠与量子纠错, Phys. Rev. A 54, 3824 (1996). [25] G. Vidal, 纠缠单调量, J. Mod. Opt. 47, 355 (2000). [26] E. Chitambar, D. Leung, L. Manˇ cinska, M. Ozols, and A. Winter, 关于局域操作和经典通信, 你一直想知道却不敢问的一切, Commun. Math. Phys. 328, 303 2014( ).

[27] R. Horodecki、P. Horodecki、M. Horodecki 和 K.Horodecki, 《量子纠缠》, Rev.Mod.Phys. 81, 865 (2009)。 [28] X.Ge、L.Liu 和 S. Cheng, 《局部操作和经典通信下的三体纠缠度量》, Phys.Rev.A107,032405 (2023)。 [29] A.Ac´ın、A. Andrianov、E. Jan´e 和 R. Tarrach, 《三量子比特纯态的规范形式》, J. Phys.AMath. Gen. 34, 6725 (2001)。 [30] S.M. HashemiRafsanjani、M. Huber、C.J.Broadbent 和J.H. Eberly, 《n量子比特 x 矩阵的真正多体并发度》, Phys. Rev. A 86,062303 (2012)。[31] J. Schneeloch、C.C.Tison、M. L.Fanto、S. Ray 和P. M. Alsing, 《利用熵关联量化三体纠缠》, Phys. Rev.Research 2, 043152 (2020)。[32] Y.Li 和 J. Shang, 《作为真正多体纠缠度量的二体并发度几何平均值》, Phys. Rev. Res. 4, 023059 (2022)。 [33] H. J.Briegel和 R. Raussendorf, 《相互作用粒子阵列中的持久纠缠》, Phys.Rev. Lett. 86, 910 (2001)。 [34] X.Yang、Y.-H.Yang 和 M.-X.Luo, 《量子位系统中的纠缠多边形不等式》, Phys. Rev. A 105, 062402 2022( )。 [35] R.Lewis-Swan、A. Safavi-Naini、J. J.Bollinger和A. M. Rey, 《通过在Dicke模型中测量保真度非定时序关联函数统一扰乱、热化和纠缠》, Nat.Commun.10, 1581 2019( )。 [36] S. Choi、Y.Bao、X.-L.Qi 和 E. Altman, 《扰乱动力学和测量诱导相变中的量子纠错》, Phys. Rev.Lett.125,030505(2020)。[37] Q. Zhu、Z.-H. Sun、M. Gong、F. Chen、Y.-R. Zhang、Y. Wu、Y. Ye、C. Zha、S. Li、S. Guo、 $et\ al.$, 《超导量子处理器中热化和信息扰乱的观测》, Phys. Rev. Lett. 128, 160502 2022( )。 [38] B. R¨othlisberger 、 J. Lehmann 和 D. Loss, 《凸包纠缠度量的数值评估及其在自旋环中的应用》, Phys. Rev. A 80, 042301 (2009)。 [39] J. Eisert、F. G. Brandao 和 K. M. Audenaert, 《定量纠缠见证》, New J. Phys. 9, 46 (2007)。 [40] S. Xie 、 D. Younis 和 J. H. Eberly, 《真正三体纠缠的猝死》, arXiv 预印本 arXiv:2210.01854 (2022)。 [41] S. Xie、Y.-Y. Zhao、C. Zhang、Y.-F. Huang、C.-F. Li、G.-C. Guo 和 J. H. Eberly, 《纠缠估计的实验检验》, Phys. Rev. Lett. 130, 150801 (2023)。