KCL-PH-TH/2023-22

arXiv:2304.03300v1 [hep-th] 6 Apr 2023

交汇，边缘模，和 G_2-全纯轨形

Bobby S. Acharya[1, 2*], Michele Del Zotto[3, 4†], Jonathan J. Heckman[5,6‡]、MaxH¨ubner[5§] 和 Ethan Torres[5¶]

[1阿卜杜斯] 萨拉姆国际理论物理中心，34151，的里雅斯特，意大利

[2]伦敦国王学院物理系，伦敦，WC2R 2LS，英国

[3]乌普萨拉大学数学系，乌普萨拉，瑞典

[4]乌普萨拉大学物理与天文学系，乌普萨拉，瑞典

[5]宾夕法尼亚大学物理与天文学系，费城，宾夕法尼亚州 19104，美国

[6]宾夕法尼亚大学数学系，费城，宾夕法尼亚州 19104，美国

摘要

实现广泛一类相互作用量子场论的一般策略之一，是通过高维体理论的交汇与交叉来实现。在弦/M理论的背景下，这包括许多与红外自由体耦合的 $D > 4$ 超共形场论（SCFT）。对这些理论的味对称性进行规范化，并允许规范耦合依赖于位置，为实现与局域边缘模耦合的新型高维理论交汇提供了一般策略。在此，我们展示了奇异的、渐近锥形的具有 G_2 holonomy 的轨形上的 M理论，为实现具有四维 $\mathcal{N} = 1$ 边缘模的强耦合五维体理论提供了一个通用模板。这种几何方法还展示了体广义对称性如何被边界系统继承。

2023年4月

*电子邮件：bacharya@ictp.it

†电子邮件：michele.delzotto@math.uu.se

‡电子邮件：jheckman@sas.upenn.edu§

电子邮件：hmax@sas.upenn.edu

¶电子邮件：emtorres@sas.upenn.edu

目录

1 引言 **2**

2 体区/边界系统的几何工程 6

2.1 超共形场论与准超共形场论的工程构造.6 2.2 一些著名实例.8

3 四维 $\mathcal{N}=1$ 锥上的边缘模 12

3.1 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(S^4)$ 的几何与物理学.14 3.2 等距变换.15 3.3 体区视角.17 3.4 四维准共形场论.20 3.5 对称性增强.21 3.6 说明性实例：耦合的 $\mathcal{T}_N$ 理论.22

4 阿贝尔商空间的例 25

4.1 含一般 $\Gamma=\mathbb{Z}_K$ 的单循环因子.25 4.2 含特殊 $\Gamma=\mathbb{Z}_K$ 的单循环因子.26 4.3 含一般 $\Gamma=\mathbb{Z}_K\times\mathbb{Z}_L$ 的两个循环因子.31

5 广义 对称性 3 **3**

5.1 缠绕膜产生的对称性综述.34 5.2 对称性继承.36 5.3 自发对称性破缺.39 5.4 例.40

6 更多示例 **46**

6.1 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(\mathbb{CP}^2)$的物理学与几何.47 6.2 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(\mathbb{CP}^2)/\Gamma$ 的例子.49 6.3 带有 $\mathbb{WCP}^2$ 底空间的推广.52 6.4 统一与进一步推广.52

7 结论 **55**

1 引言

近期高能理论研究中的一个普遍主题是体区／边界对应关系。例如， D维量子场论的反常与整体结构可以用 $D+1$维拓扑场论来理解；在许多情况下，这还能用于获取有关系统对称性以及局域于系统“边缘模”中的自由度的重要信息（部分参考文献见 [1–13]）。更广泛地说，这当然也是研究各种系统的重要主题，涉及范围从凝聚态物理现象到量子引力／全息。它也是在弦论／M理论中构建各种量子场论的范式，其中量子场论的自由度是局域于高维引力理论中的激发。

在后一种情形下，人们通常会考虑某些特殊类型的奇点，它们可能出现在体超引力理论的度量和／或场分布中，也可能源于膜探针／孤子对象的存在。在许多值得关注的情形中，各种量子场论激发的整体对称性，会通过纯几何结构或额外的高维“味膜”在高维体系统中实现。如何统一刻画这类对称性是一个重要问题，尤其是在那些无法用传统拉格朗日描述的系统中。近期，在理解这一领域及相关背景下的各种广义对称性方面，已经取得了许多进展。[1] 尤其是在那些难以用传统弱耦合拉格朗日描述的量子场论背景下，体／边界对应及其相关对称性的刻画，往往依赖于可从弦紧致化的额外维几何中提取的结构。

此时值得指出，许多弦论中量子场论的实现方式，都可以重新诠释为与高维体量子场论耦合的自由度。低维系统可以源自交叉，也就是说，每个体量子场论的局部几何都支撑在一份 $\mathbb{R}^n$ 上。它也可以源自交汇，也就是说，量子场论支撑在一个带角／边缘的流形上，其局部形式为 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n_{\geq 0}$，随后再与支撑在带角／边缘流形上的其他量子场论粘合。举几个例子，六维共形物质可由作为七维超杨-米尔斯理论（SYM）理论探针的 M5膜实现，也可以实现为 F理论中的 7膜交叉 [149, 150], ；而通过在 $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ 上构造 M理论得到的五维 $\mathcal{T}_N$ 理论（参见例如 [151]），则可视为三个七维超杨-米尔斯理论的三价结点。已知还有许多其他例子，但它们共有的一般性质是：量子场论作为体系统中的缺陷而实现。这并不应令读者感到意外：在某种意义上，这不过是对标准“相交膜”图景的推广；该图景在弦论 / M理论实现许多箭图规范理论时得到了广泛应用。当然，膜与几何奇点往往彼此对偶，区别在于几何奇点能够容纳的自由度谱略广，其中包括一些无法用微扰方法描述的自由度。

[1]关于这一方向的近期研究，部分列表可参见例如 [4–147] ；近期综述可参见 [148] 。

在这方面，一个自然的出发点是考虑体系统本身就是一个 $D>4$ 维相互作用共形场论（CFT）。高维超对称共形场论（SCFT）不存在严格边缘形变 [152,153]，因此我们可以将其视为本征强耦合的理论（也就是说，它们无法通过对高斯固定点进行微扰而得到）：在超对称量子场论（SQFT）的研究中，这些系统已知能够带来丰富的新现象。以此为出发点，我们可以探讨：当交叉和交汇被视为体理论时，是否会在低维空间上支撑局域自由度。我们主要关注与五维相互作用体理论耦合的四维 $\mathcal{N}=1$ 边缘模，不过显然还有许多值得探讨的自然推广。

从自下而上的视角研究这一问题颇具挑战性。首先，即使是寻找保留四维 $\mathcal{N}=1$ 超对称的真空态，也绝非必然能够做到。此外，与红外自由体的情形相比，我们可以预期，会存在不允许解耦极限的四维/五维耦合。从这个意义上说，这样构造出的四维理论最好被视为强耦合体理论内部的局域自由度。事实上，根据一般理由，人们预期所得的四维理论通常会在深红外区支持相互作用自由度，因此是尺度不变的。另一方面，与体区的耦合意味着它没有定义良好的应力能量张量，因此严格说来，它本身并不是一个共形场论；更好的理解是，它提供了局域缺陷模。为强调这些要点，我们将这些四维系统称为“准超共形场论”。[2]

本文旨在为利用M理论在奇异的 G_2-全纯空间上的几何来构建这类理论提供一个广泛的模板。我们提醒读者，7维 G_2-全纯空间是M理论中七个额外维度的模型，并会产生四个时空维度中的物理理论，综述见 [154]。在这一框架下，许多有趣的物理学都局域在七个额外维度中特殊类型的奇点附近，例如，余维四轨形奇点会产生非阿贝尔规范对称性 [155]，而特定的余维七圆锥奇点则支持手征费米子 [156]。我们将利用这样一个事实：许多已知的完备非紧 G_2-全纯空间都具有轨形奇点，因此，给定这样一个空间 X，它便自然带有余维四、六，有时还有余维七奇点的交叉构型。X 通常包含一个闭紧子流形M，其体积可以改变；在 M 收缩至零大小的极限下，X 会形成一个圆锥奇点，而这些量子场论扇区则转而由带角流形承载，因此最好将其视为理论交汇，而非单纯的交叉。从例子中我们将看到，可能出现的构型相当丰富复杂；若没有M理论提供的前瞻视野，这些构型很难想象。若改为考虑在此类空间上的IIA型或IIB理论，则会得到三维理论。

[2]据我们所知，这种用法与纯场论背景中遇到的相关现象相兼容。

我们的主要示例涉及对由光滑 G_2-holonomy 流形的离散商空间得到的几何取奇异极限。我们主要关注Bryant 和Salamon [157] 其中 X 是 S^4或 $\mathbb{CP}^2$上的反自对偶二形式丛，即 $X = \Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(S^4)$或 $X = \Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(\mathbb{CP}^2)$。取商空间 X/Γ ，其中 Γ 是 X 的等距变换的一个有限子群，通常将得到一个轨形，其上分布着局域于余维四、六和七子空间的各种奇点。在 S^4 或轨形中的 $\mathbb{CP}^2$ 4-环为无限大小的极限下，每个余维六奇点都可以被视为构造了一个五维超共形场论，其味对称性由局域于余维四轨形轨迹上的七维超对称杨-米尔斯扇区控制。在 S^4 或 $\mathbb{CP}^2$具有有限大小的极限下，我们发现五维超共形场论局域于特殊点（例如， S^4的北极和南极），其相互味对称性的某些子群由于四元环的有限体积而被对角规范化。这一规范化过程只保留四维 $\mathcal{N} = 1$超对称，因为耦合本身非平凡地依赖于相对于 G_2 锥的径向方向的位置。这一过程还会抬升五维模空间的某些方向：局部卡拉比–丘流形的爆破模（用于定义每个五维超共形场论）不会保留在局部 G_2 几何中。在四元环塌缩至零大小的极限下，这些五维超共形场论扇区形成一个由支撑在实半直线 $\mathbb{R}_{\geq 0}$上的交汇构成的构型。

从场论的角度看，这些几何为构造较为复杂、且具有局域化缺陷模的体系统提供了一种通用方法。我们的考量中隐含着一个选择，即为缺陷附近的体模指定特定的边界条件。这一隐含选择相当于采用平凡的边界条件（即不开启任何体场分布），并令其趋近边界。原则上，也可以考虑引入进一步的非几何装饰，例如“T-brane 数据”（参见例如 $[158, 159]$），但我们将这种可能性留待未来研究。

因此，在这一设定下，我们可以利用几何来研究四维局域化缺陷模的一些基本特征。例如，由于我们有明确的群作用，可以据此从延伸至我们的 G_2-holonomy 空间边界的奇点中识别非阿贝尔（零形式）味对称代数。在 S^4 情形下——本文将其作为贯穿全文的主要示例——当 S^4 收缩为一点时， X 是以 $\partial X = \mathbb{CP}^3$ 为底的度量锥，而群作用自然延拓至商空间 $\mathbb{CP}^3/\Gamma$。将体区五维超共形场论视为七维理论的交汇，由此得到的四维理论也可视为七维系统的交汇（见图1）。这有助于说明体区与边界之间存在非平凡耦合：一个动力学模量场（与S^4的大小相关）会触发味对称性的自发破缺，而该对称性存在于收缩极限中。

边界几何的拓扑使人们能够理解更精细的结构，例如非阿贝尔味对称群的整体形式（0-形式对称性）、离散高形式对称性，以及可能将这些结构交织在一起的高阶群结构。与文献中分析了相关现象的其他例子相比（参见例如 $[18, 26, 30, 31, 84–86, 160]$），缺陷受到屏蔽的方式

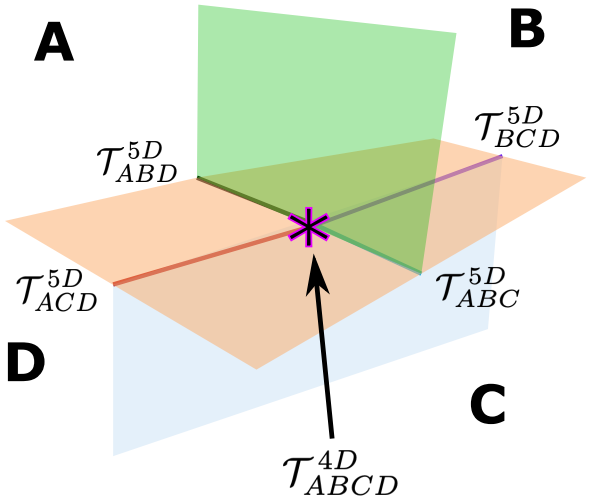


图1：在四个七维理论的交汇处得到的四维 $\mathcal{N}=1$ 准超共形场论示例，上方标记为**A**、**B**、**C**和**D** 。

之所以稍微更微妙一些，是因为锥尖端的四元环并不是边界中的真正环。

尽管如此，我们发现，边界拓扑仍能准确描述体五维超共形场论扇区以及四维准超共形场论扇区的高阶对称性。

除形如 $\Lambda^2_{\rm ASD}(S^4)/\Gamma$ 的商空间外，我们还考虑由形如 $X=\Lambda^2_{\rm ASD}(M)$ 的 G_2 holonomy空间上的完整 Bryant-Salamon度量产生的四维理论，其中 M 是一个紧致自对偶爱因斯坦四维轨形，例如 $M=\mathbb{WCP}^2$ 的情形，或 [156] 中讨论的更一般示例。我们将展示，后者会产生相当复杂的广义多边形夸克结构。

我们得到的这些系统所具有的主要新特征如下：

- 位置依赖耦合。 通常，与七维规范理论相关的余维四轨迹具有 $S^2\times\mathbb{R}_{\geq 0}$ 的拓扑，其中 S^2 沿着 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 方向变化，对应于 G_2 锥的径向方向。我们将其解释为所涉及的各种五维超共形场论的位置依赖规范耦合，从而有效地破坏五维洛伦兹不变性。这产生了新型的广义夸尔，其中共形物质是五维的，但规范化涉及位置依赖耦合。

- 准超共形场论。 对于大多数四维 / 五维系统，我们看到它们源自五维超共形场论沿共同的四维子空间的交汇。体理论是强耦合的，因此我们预计边缘模也支持相互作用自由度。由于边缘模并未与体区完全解耦，我们称之为准超共形场论；

- 对称性中的 继承。 当延展的带电体算符可以终止于边缘 e,

相互作用边缘模理论继承了相应的高阶对称性（次数相应发生了偏移）；

- 对称性破缺。 对于对应于 G_2 锥的四维/五维系统，我们可以通过比较奇点链接的对称性与消解后奇点的对称性，追踪自发对称性破缺；

本文其余部分安排如下。第2节说明如何将若干已知的几何工程化超共形场论视为高维体系统中的局域模式。随后，第3节详细分析形如 X/Γ 、其中 $X = \Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(S^4)$ 的轨形。接着，我们在第4节展示由此得到的一些理论。第5节研究这些准超共形场论的一些广义对称性。第6节通过更多关于一般 G_2-全纯性锥的明确例子，给出由此产生的界面实例。这包括具有闭合多边形广义夸尔结构且节点数任意的例子。第7节给出结论。关于高阶对称性计算的一些补充技术细节放在附录中。这包括对连续 k形式对称性的简要讨论、更一般的商空间，以及若干关于不同同调群计算的补充细节。

2 体区 / 边界系统的几何工程

为展开下文对 G_2-全纯轨形的分析，本节将若干众所周知的 $D \geq 4$ 超对称理论重新诠释为高维体区量子场论系统中的缺陷。我们通常会遇到两种情况。第一种情况下，局域自由度与体区解耦，此时我们得到一个超共形场论。第二种情况下，体区与界面发生非平凡耦合，因此我们得到的实际上是一个准超共形场论，也就是说，定义它时不能不同时参照体区。

2.1 超共形场论与准超共形场论的工程构造

这里我们想要考察通过弦论 / M理论中的适当背景对给定量子场论进行几何工程的一些一般特征。因此，我们引入记号 $\mathscr{S}$ 和 $D_{\mathscr{S}}$，其中 $\mathscr{S}$ 是 IIA、IIB、M 的简写，而 $D_{\mathscr{S}}$ 是相应的时空维数。

为了通过几何工程构造量子场论，我们指定一个非紧致的 d 维背景 X^d ，其上有一个余维为 d 的局域奇点；它也可以支持非孤立奇点，但相互作用自由度因此将位于一个维数为 $D_{\mathscr{S}} - d$ 的低维子空间上。在 X^d 非紧致空间上工作意味着

低维系统与低维引力解耦。[3] 这给出了如下对应关系：

$$\mathscr{S} \text{ on } \mathbb{R}^{1,D-1} \times X^d \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{T}_{X^d}^{(\mathscr{S})} \in \mathrm{QFT}_D \qquad D = D_{\mathscr{S}} - d. \tag{2.1}$$

特别是，当背景 X^d 保留某些超荷时，理论 $\mathcal{T}_{(\mathscr{S})\ X^d}$ 就是超对称的。例如，当 X^d 是具有特殊全纯性的局部流形时，便属于这种情况。本文将注意力限制在后一种情形，因为我们主要关注可借助 G_2-全纯空间描述的界面。

我们通常会关注具有奇点的背景。在该奇点处，我们可以预期存在局域的相互作用自由度。[4] 一大类例子都具有如下形式的度量锥：

$$X^d = \mathcal{C}(Y^{d-1}) \qquad ds^2_{X^d} = dr^2 + r^2 ds^2_{Y^{d-1}}. \tag{2.2}$$

以这种方式继续下去，我们会遇到两种可能的情形：

- X^d **是一个孤立奇点**：锥尖处的奇点是余维为 d 的孤立奇点。在这种情况下，通过几何工程，我们得到一个实际的 SCFT；
- X^d **是一个非孤立奇点**：锥尖处的奇点产生于支撑在更高余维子集上的奇点相交之处。用场论的术语来说，我们通常可以将这些奇点视为支撑在带角或带边缘的流形上，因此得到一个理论的交汇点。锥尖处的局域自由度可能解耦，也可能不解耦。这里我们考虑两种可能性：
  - **局域化超共形场论**：如果体区奇点在红外是自由的，那么局域化模式在红外解耦，我们便得到一个超共形场论；
  - **局域化准超共形场论**：如果体区奇点在红外中支持一个超共形场论，那么局域化模可能不会与体区完全解耦，我们将这种情况称为准超共形场论。

局域自由度可能是自由的，也可能是相互作用的：区分非平凡动力学的恰当标准取决于 $\mathscr{S}$ 和 X^d （也就是说，取决于针对 $\mathscr{S}$理论所考虑的背景类型），因此需要逐案研究。可用于识别非平凡定点的一个标准是：相互非局域的 BPS 激发同时变为无质量。例如，在所有已知的六维超共形场论中（近期综述见 [162, 163] ），张量支模空间包含二缠绕 BPS 弦，它们在不动点 [164–166]处的张力趋于零。类似地，四维的 Argyres-Douglas 不动点 [167] 的特征是相互非局域的 BPS 玻色子同时变为无质量。

[3]为便于阐述，我们在此假设背景具有平凡的整体结构：若非如此， $\mathscr{S}$-理论会为 X^d 赋予一个理论希尔伯特空间，其中各理论具有相同的局部动力学，但扩展算子的谱各不相同 [18, 31, 161]。[4]在深红外区域，我们有可能只剩下自由场，但通常情况并非如此。

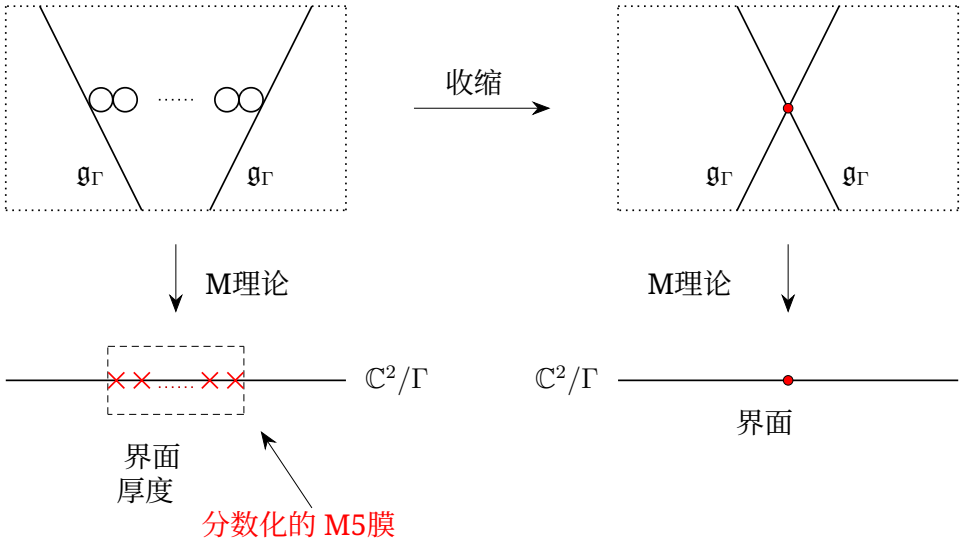


图 2：作为界面示例的六维共形物质。

2.2 一些广为人知的例子

为说明上述考量，我们现在转而讨论一些具体例子。

2.2.1 六维例子

六维超共形场论的几何工程近年来取得了大量进展——参见 [162, 163] 近期综述。

或许，能够产生非平凡相互作用六维系统的孤立奇点中，最简单的例子是 ADE 奇点：在 IIB 弦理论中，$\mathbb{C}^2/\Gamma_{ADE}$ 对应于 $\Gamma_{ADE} \subset SU(2)$ 个 ADE 类型的有限子群。

F理论允许更丰富的背景和更低的超对称性，因此产生了大量的六维 $\mathcal{N} = (1, 0)$ 理论。文献 [168, 169]、[5] 对所有能够支撑六维超共形场论的椭圆纤维化卡拉比–丘三fold进行了分类。此类六维超共形场论的基本构件是共形物质理论 [150], ，它们产生于F理论中一对非紧奇点的交汇处。更准确地说，存在这样一种几何结构：椭圆纤维化在两条非紧曲线上退化（产生一对Kodaira 奇点），这两条曲线在一点横截相交，共形物质就位于该点。根据F理论/M理论对偶性 [173] ，共形物质理论可理解为两个李代数为 $\mathfrak{g}_\Gamma$ 的7D 超对称杨–米尔斯理论副本之间的界面。M理论中，七维规范理论由 $\mathcal{T}_{(M)}\ \mathbb{C}^2/\Gamma$实现，其轨迹是一个七维平面。该平面的七个方向中有六个由M5膜占据

[5]所有已知的六维超共形场论都可以通过这种方式实现，不过，卡拉比–丘几何的诠释有时可能存在歧义，这一点可以通过可能存在的“冻结”奇点来体现。有关进一步讨论，参见例如 [170–172]。

（由于奇点的存在，这些M5膜可以发生分裂）。M5膜沿第七个方向的位置决定了界面的厚度；在六维场论中，这又被解释为张量支（见图2）。在几何中，也可以找到类似的解释。只需考虑界面具有厚度的相，此相可通过吹起F理论模型底空间中的奇点得到（见图2左上）。在此处，我们可以放大一条非紧曲线与一条紧曲线相交处轨迹的邻域，从而得到构造体区规范理论的几何结构。

共形物质理论的六维味对称性 [150] 也可以从这样一个事实来理解：这些模型源于作为理论 $\mathcal{T}_{(\mathrm{M})\ \mathbb{C}^2/\Gamma}$两个副本之间的界面。这对于 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')$ 类型的共形物质同样成立 [150], ，其对应于如下示意形式的界面

$$\left(\mathcal{T}^{(\mathrm{M})}_{X^4_\Gamma}\right)_{7D} \quad \Big|\Big| \ (\mathfrak{g},\mathfrak{g}')_{6d} \ \Big|\Big| \quad \left(\mathcal{T}^{(\mathrm{M})}_{X^4_{\Gamma'}}\right)_{7D} . \tag{2.3}$$

从这一视角来看， [174] 的裂变与融合（另请参见 [175]）可以被解释为高维规范理论之间界面层面的操作。

2.2.2 五维示例

另一个经过充分研究的例子是M理论在 X^6 一个具有典范奇点的Calabi-Yau 三维流形上[6], ，在这种情况下，理论 $\mathcal{T}_{(\mathrm{M})\ X^6}$ 是一个五维 $\mathcal{N}=1$ SCFT [181–183] （另请参见 [184,185]）。在这一背景下，两类理论都有许多广为人知的例子。这里我们将重点介绍一些与后续章节相关的例子。

孤立奇点的例子包括以下一系列五维 $\mathcal{N}=1$ E_N 超共形场论，其中$N=0$, ..., 8（见 [181,182,186]）。后者可在M理论中通过一个我们记为 $X^6_{(N)}$的孤立奇点获得。奇点 $X^6_{(N)}$ 由光滑的局部Calabi-Yau三维流形 $K\to \mathrm{dP}_N$得到，其中dP_N 表示 $\mathbb{CP}^2$ 在一般位置进行 N 次爆破，而 K指的是典范丛。当我们将底空间dP_N 曲面的体积收缩至零时，就得到一个五维超共形场论。 $N=0$的情形是一个没有规范理论相的模型示例。 $1\le N\le 8$ 的情形对应于具有 $N_f=N-1$个基本味的 $SU(2)$规范理论，其中规范耦合被形式上调节至无穷强。在 $N=9$ 的情形下，可得到六维E-string的五维KK理论——关于五维超共形场论几何工程的最新详细综述，见 [187] 。

[6]产生共形不动点的一个必要条件是，在卡拉比－丘模空间中，我们到达奇点的距离有限。然而，讨论 M理论的时空度量也很重要，因为一些非紧致流形具有渐近锥形卡拉比－丘度量，而另一些则只允许不完备度量。已知，对于某些典范奇点，完备度量的存在受到阻碍 [176,177]。具有有限 $\Gamma\subset SU(3)$ 的轨形 $\mathbb{C}^3/\Gamma$ 构成了一大类具有 AC 完备卡拉比－丘度量的例子 [178–180]。

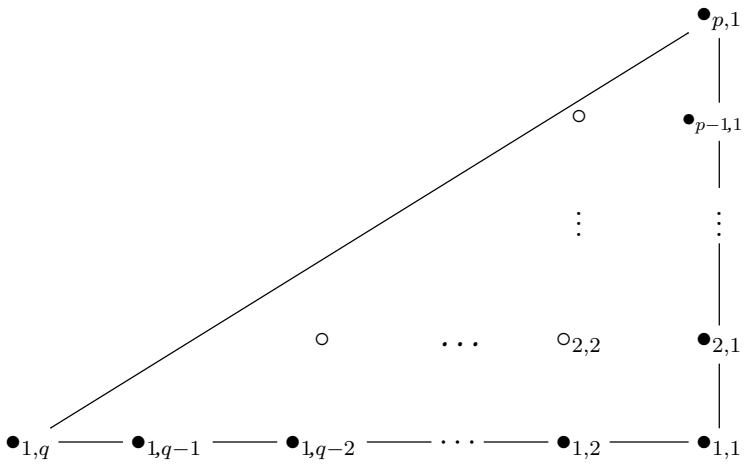


图3：$X^6_{p,\ q}$ 奇点的扭结图。

非孤立奇点的一类例子由 CY_3 奇点给出

$$X^6_{p,q} \equiv \mathbb{C}^3/(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)\,, \tag{2.4}$$

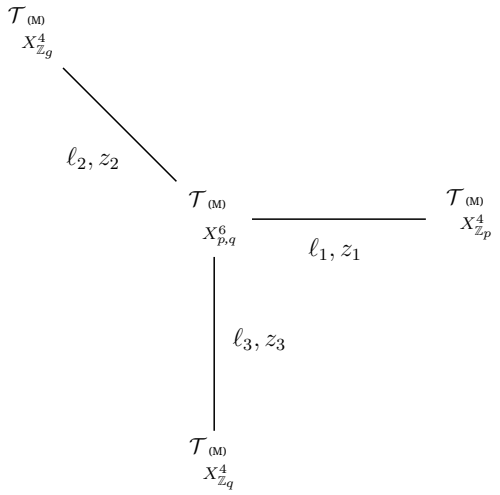
其中循环群的两种作用由以下内容给出

$$\mathbb{Z}_p:\ \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha^{-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{Z}_q:\ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \beta & \\ & & \beta^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

且 $\alpha = \exp(2\pi i/p)$ 和 $\beta = \exp(2\pi i/q)$ 分别是单位根的 primite p 次和 q 次根。在这一几何中，沿着直线 $\ell_3 = \{z_1 = z_2 = 0\}$ 有一个 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ 奇点，沿着直线 $\ell_1 = \{z_2 = z_3 = 0\}$ 有一个 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_q$ 奇点，而沿着直线 $\ell_2 = \{z_1 = z_3 = 0\}$ 有一个 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_g$ 奇点，其 $g = \gcd(p,\ q)$。扭结图如图3所示。

该理论 $\mathcal{T}^{(\mathrm{M})}_{\mathbb{C}^3/\ (\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)}$ 产生于三个不同的七维规范理论的交汇处。在覆盖空间 $\mathbb{C}^3$ 中，每个七维超对称杨-米尔斯扇区都支撑在一个锥上

$S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$，它们交汇形成一个三价结点：



(2.6)

在我们涉及 G_2 锥的轨形的具体例子中，我们经常会遇到 $p = q = N$的特殊情况，并将其称为 $\mathcal{T}_N$ 理论：

$$\mathcal{T}_N \equiv \mathcal{T}^{(\mathrm{M})}_{X^6_{N,N}} \,. \tag{2.7}$$

值得一提的是，对于所有模型 $\mathcal{T}^{(\mathrm{M})}_{X^6_{p,\,q}}$ 高阶形式对称群都是平凡的 [30, 31]。利用更一般的奇点，可以得到具有高阶对称性的系统 [55, 72, 84–86, 160],，我们也会遇到这类情形的例子。最后补充一点，在五维中，对五维味对称性进行规范化（例如在 [188] 中讨论的；另见 [189]），也可以解释为对五维味对称性进行规范化，从而导致不同理论的“融合”（按照 [174] 的含义）。

2.2.3 四维例子

如果考虑同一类 CY_3 奇点上的 II 型超弦背景，就能在四维情形中得到类似的结构。这里我们仅以 CY_3 型奇点为例$X^6_{p,\,q}$来说明这一点。

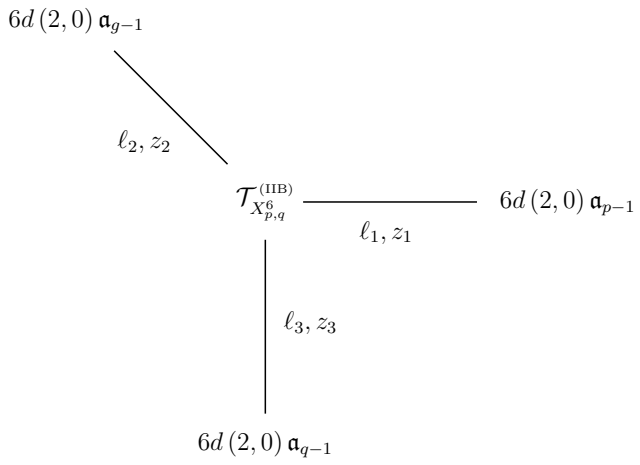
首先考虑 $X^6_{p,\,q}$ 上的 IIA型背景。由于IIA是通过 M理论的圆约化得到的，我们看到，确实可以直接从前面讨论过的五维理论出发，并下降到四维。在适当的解耦极限下，体区六维理论与三个六维 $\mathcal{N} = (1, 1)$超杨-米尔斯理论相关联。特别是，如果我们考虑 $p = q = N$ 的情形，结点上的理论就是四维 $\mathcal{N} = 2$ $\mathcal{T}_N$ 理论 [190], ，如今实现为由三个六维 $\mathcal{N} = (1, 1)$ $\mathfrak{su}(N)$ 超杨-米尔斯理论在结点处支撑的理论。[7]

[7]正如近期在 [50], 中指出的，进一步沿圆降维后，最终会得到彼此镜像对偶的 3D $\mathcal{N} = 4$ 理论。这提示我们，LST 交汇的 T 对偶可能适用于 3D $\mathcal{N} = 2$ 理论对偶性这一课题，我们将留待未来研究。

接下来考虑同一几何 $X^6_{p,\ q}$ 上的 IIB 型理论。在此背景下，我们有：

$$6d\,(2,0)\,\mathfrak{a}_{k-1}\ \text{theory} \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{T}^{(\mathrm{IIB})}_{X^4_{\mathbb{Z}_k}} \tag{2.8}$$

因此，我们在六维 $\mathcal{N}=$ (2,0) 理论的交界处得到了一系列四维 $\mathcal{N}=2$ “边缘模”理论：



(2.9)

关于这些理论$\mathcal{T}^{(\mathrm{IIB})}_{X^6_{p\ q}}$ ，目前所知甚少；关于一些初步分析，感兴趣的读者可参阅 [50, 63, 77]。

3 四维 $\mathcal{N}=1$ 边缘模通过 G_2 锥

在上一节中，我们给出了各种例子，说明高维理论如何实现相互作用的低维自由度。这些例子的一个普遍特征是，“体模”通常相对简单，也就是说，在长距离尺度上，它们可由高维拉格朗日场论描述，而且通常不会在红外区实现相互作用量子场论。自然会想到一个问题：考虑同样具有强耦合动力学的体理论，能否构造出更一般的体 / 边界对应？一种实现方式是对这类强耦合理论取交叉与交汇。

如前所述，从自下而上的角度来看，构造此类界面颇具挑战性，原因之一在于我们现在所考虑的是其自身就具有强耦合的体理论。然而，从几何学角度来看，情况并没有太大不同，实际上还可以为如何构造此类理论提供一般性的指导。在本节中，我们将展示，额外七个维度以一个具有完整度量且全纯群为 G_2 的空间 X 建模的M理论框架，会自动生成五维超共形场论与其他五维超共形场论及七维味量子场论之间恰当的交叉与交汇。

为了构造这类最简单的例子，我们将从考虑 X_a 开始，

一个光滑、非紧致的 G_2 全纯流形，其度量 $ds^2(X_a)$ 渐近于一个度量锥。 X_a 包含一个闭合的紧致四维子流形， M 其体积由 a 决定，而 a 是背景度量的一个参数。在讨论拓扑特征时，我们常简写为 X ，表示满足 $a \neq 0$ 的 X_a 。在极限 $a \to 0$ 下， X_0 具有一个孤立的圆锥奇点。在最简单的情形中， $ds^2(X_a)$ 将具有连续的等距变换群 Isom(X_a)，我们可以考虑在 X_a/Γ 上紧化的 M 理论，其中 Γ 是 Isom(X_a) 的一个有限子群。商空间 X_a/Γ 保留了与母理论相同的一组超荷，但现在具有各种轨形奇点。其中一些奇点局域在塌缩圈上，另一些则沿着 X_a的非紧子空间延伸。我们将这些非紧致位置理解为高维体理论，它们可能拥有自身非平凡的动力学。当 $a \to 0$ 时，锥尖将被解释为四维“边缘模”，它由 G_2 锥 X_0 的商空间实现。首先要指出的是，非紧致 G_2 全纯空间中的奇点此前已有许多相关研究，但通常是为了构造拉格朗日场论的例子（例如，局域在余维四奇点上的规范理论、余维六奇点上的矢量型物质，以及余维七奇点上的手征物质 [156]）。在此，我们旨在考察更广泛的一类奇点，包括它们之间进一步的交叉。

首先，我们简要综述施加商空间之前相关 G_2 锥的几何。令 r 表示锥的径向方向，这些几何的度量具有如下渐近形式：

$$ds_X^2 = dr^2 + r^2 ds_{\partial X}^2 \quad \text{as} \quad r \to \infty. \tag{3.1}$$

Bryant 和 Salamon [157], 发现了这类 AC G_2-全纯流形的首批例子，其总空间有以下三种类型之一：

- $X = \mathbb{S}(S^3)$， S^3的旋量丛
- $X = \Lambda^2_{\text{反自对偶}}(S^4)$， S^4上的反自对偶二形式丛
- $X = \Lambda^2_{\text{反自对偶}}(\mathbb{CP}^2)$， $\mathbb{CP}^2$上的反自对偶二形式丛

例如，参见 [191–198] ，其中有更多相关讨论和例子。还要指出，如果允许正在塌缩的四元环本身存在轨形奇点，也可以考虑任意自对偶爱因斯坦四维轨形 [157] 上的反自对偶二形式丛；我们将在下文讨论此类例子（例如参见 [156]及其中的参考文献）。

出于技术原因，我们主要关注这样一些情况：在这些情况下，我们可以利用经典几何可靠地读出四维界面理论的某些特征。特别是，这一简化假设意味着，我们将主要省略存在紧三维圈的情况，因为预计欧几里得M2膜会对经典几何以及场论动力学产生量子修正。[8]

[8]例如参见 [199] 以了解 另可参阅 F理论中“共形尤卡瓦耦合”背景下的相关讨论，其中欧几里得的

接下来，我们主要关注$X_a = \Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(S^4)$，因为大多数相关物理现象已经出现在该空间的奇异商空间中。不过，为完整起见，在第6节中，我们将介绍一些构造 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(\mathbb{CP}^2)$ 的商空间的例子，并结合一些进一步推广讨论 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(\mathbb{WCP}^2)$ 的情形。

本节的其余部分安排如下。我们首先简要综述Atiyah和Witten在 [200]中研究的关于M理论在$X_a = \Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(S^4)$上的几何和物理学。然后，我们转向构造 X_a/Γ形式的商空间。根据 Γ的选择，我们发现 X_a/Γ中轨形奇点构型存在大量可能性，从而得到具有边缘模且在物理上截然不同的理论。本节的目标是给出一个一般性的刻画，主要通过一个具体例子加以说明。在第4节中，我们将介绍其他例子，这些例子展现了一系列相关现象。

3.1 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(S^4)$ 的几何与物理学

为引出下文的讨论，让我们简要综述 M理论在 $X_a = \Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(S^4)$上的几何与物理学，即 S^4 上反自对偶（ASD）二形式的丛。我们的讨论密切遵循 [200], 中的讨论，更多细节请参见该处。正如 [157], 中所发现的，该空间允许一个完备的 G_2-全纯度量，并且是渐近锥形（AC）的:

$$ds(X_a)^2 = \frac{dr^2}{1-\left(\frac{a}{r}\right)^4} + \frac{r^2}{4}\left(1-\left(\frac{a}{r}\right)^4\right)|D_A u|^2 + \frac{r^2}{2}ds^2_{S^4}, \tag{3.2}$$

其中 u_i 是纤维上的三个坐标，满足 Λ_{ASD} $\Sigma_i u_i u_i = 1$。 $D_A u_i = du_i + \varepsilon_{ijk}A_j u_k$ 是由 S^4 上的度量诱导的联络，即 A_j 是与 S^4上的正手征自旋联络相关联的 $SO(3)$ 规范联络。由 S^4 给出的圆度量 $ds^2_{S^4}$ 被固定为标量曲率 $R = 12$ ，径向坐标的取值范围为 $a \le r < \infty$。注意，在 Bryant-Salamon度量中，将 $ds^2_{S^4}$ 替换为任意具有 $R = 12$的完备自爱因斯坦度量，都会得到完备的 G_2 全纯度量。然而，由于 $\mathbb{CP}^2$（配备其标准 K¨ahler 度量）是唯一其他具有这种度量的光滑定向4维流形，所有其他此类 Bryant-Salamon渐近圆锥（AC）例子都基于爱因斯坦4维轨形。在 X_a的边界处， $r \to \infty$ 和 Bryant-Salamon度量渐近于一个度量锥。该锥的截面是单位反自对偶二形式构成的空间，也称为 S^4的扭量空间，即有： $\partial X_a = \mathrm{Tw}(S^4) = \mathbb{CP}^3$。度量中的参数$a$ 显然决定了 X_a中心处 S^4 的大小；该中心自然就是 ASD 二形式丛的零截面。当 $a \to 0$时， S^4 收缩为一点，而X_0 本身在此极限下变为圆锥奇点。因此，通过粘合一个有限大小的4维球面，可以消解或平滑截面为 $\mathbb{CP}^3$ 的圆锥奇点。

接下来考察该模型所实现的四维物理。正如 [200], 所发现的，该度量的一个重要特征是，由 a 参数化的体积模是一个 L^2 可归一化的

D3 膜修正会改变由 7 膜三重交叉实现的碰撞体理论的几何。

零模。因此，这个模在四维理论中表现为一个无质量、可动力学演化的实标量场。与之相关的还有一个可归一化的三形式 [201], ，其调和代表描述了 M理论三形式 C的相应零模。二者结合，得到一个复标量，这正是四维 $\mathcal{N}=1$ 超对称所要求的。更准确地说，复标量 Φ 的形式为:

$$\Phi = V_{S^4} \exp\left(i \int_F C \right), \tag{3.3}$$

其中， V_{S^4} 表示 S^4 在 $r=a$ （零截面）处的体积，而三形式势在丛的纤维 F 上积分。

如 [200]中所述， Φ 带有全局 $U(1)$对称性的荷，该对称性源自C场的规范变换。非零的 Φ 真空期望值（vev）会在 $a \neq 0$ 且 X 光滑时出现，它打破了这一对称性；这与第二贝蒂数 $b^2(\partial X) = b^2(X) + 1$的事实相符。因此，参考文献 [200] 提出，这个 G_2 锥的四维动力学仅仅是一个自由手征超场的动力学。值得注意的是，也可以将一张M5膜包裹在锥顶端的 S^4 上。这会在四维理论中产生一种类似弦的激发，它与一个二形式势耦合；该势来自M理论的磁对偶六形式势在 S^4上的约化。不过，这不会在四维理论中产生任何新的动力学；它已由 $U(1)$的自发对称性破缺所涵盖。事实上，要获得额外的自由度，我们需要电粒子和/或磁粒子变得轻，而本例中并未发生这种情况。

3.2 等距变换

在介绍了几何 $X_a = \Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(S^4)$ 后，我们现在转而讨论其等距变换。我们将利用这一点来确定商空间 X_a/Γ 中 Γ $\mathrm{Isom}(X_a)$ 的一个有限子群所对应的奇点。首先，我们注意到，在方程（3.2）中，度量 $ds^2_{S^4}$ 具有一个 $SO(5) \simeq Sp(2)/\mathbb{Z}_2$ 等距变换群，它对应于绕 S^4的旋转。对于任意有限的 $\Gamma \subset SO(5)$，我们注意到，由于 Γ 是一个保持定向的等距变换，相应的 3-形式 G_2-结构也保持不变，因此， X_a/Γ 也是一个 G_2-全纯空间，所以在这一背景下的 M理论将导出一个四维 $\mathcal{N}=1$ 理论。为了研究由此产生的几何，并进一步提取相应有效场论的信息，我们现在将更详细地考察由这类有限商空间生成的几何。随后，我们将能够解释从这一出发点构造出的不同物理理论。

为进一步讨论，我们现在描述 $SO(5)$ 在零截面S^4 以及边界 $\mathbb{CP}^3 = \partial X$ 上的群作用，并约定一些记号。我们将 S^4 描述为 $\mathbb{HP}^1$，即四元数射影直线；按照我们的约定，四元数生成元将标记为 i、j、k，因此一般四元数 $q \in \mathbb{H}$ 将表示为:

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, \text{ with } q_i \in \mathbb{R}\,. \tag{3.4}$$

那么， $\mathbb{CP}^3$ 和 S^4 都可以视为 $\mathbb{C}^4\backslash\{0\} \simeq \mathbb{H}^2\backslash\{0\}$ 在齐次坐标所指定的等价关系下得到的适当商空间：

$$\mathbb{CP}^3 \;:\; [Z_1, Z_2, Z_3, Z_4] \sim [\lambda Z_1, \lambda Z_2, \lambda Z_3, \lambda Z_4] \quad (\text{for } \lambda \in \mathbb{C}^*) \tag{3.5}$$

$$\mathbb{HP}^1 \;:\; [Q_1, Q_2] \sim [\lambda Q_1, \lambda Q_2] \quad (\text{for } \lambda \in \mathbb{H}^*)\,. \tag{3.6}$$

这种表示方式的优点是，扭量空间的纤维化一目了然。事实上，在纤维化 $S^2 \hookrightarrow \mathbb{CP}^3 \to S^4$ 中，通过将每个复数 $Z_r = \mathbf{Re}Z_r + i\mathbf{Im}Z_r$ 视为四元数，并在齐次坐标上进行投影，即可得到到底空间的投影：

$$\mathbb{CP}^3 \;\to\; \mathbb{HP}^1 \tag{3.7}$$

$$[Z_1, Z_2, Z_3, Z_4] \;\to\; [Z_1 + Z_2 j, Z_3 + Z_4 j]\,. \tag{3.8}$$

显然，齐次坐标上存在一个明显的 $SU(4)$ 群作用，其中 $\mathbb{CP}^3$ （按照我们的约定，将其视为行向量）。同理，我们还观察到， $\mathbb{HP}^1$ 的四元数齐次坐标上存在一个 $U(2, \mathbb{H}) = Sp(2)$ 群作用。为了与为我们的 $\mathbb{CP}^3$ 选定的复结构保持兼容，我们约定采用右乘。给定 $U(2, \mathbb{H})$ 的一个元素（即一个 2×2 矩阵，其元素为四元数，且其厄米共轭等于其逆矩阵），其显式群作用为：

$$[Q_1, Q_2] \to [Q_1\lambda_{11} + Q_2\lambda_{21}, Q_1\lambda_{12} + Q_2\lambda_{22}], \tag{3.9}$$

采用显然的记号。这自然地提升为对 $\mathbb{CP}^3$ 的齐次坐标的群作用。[9] 请注意，只有一个 $SO(5) \simeq Sp(2)/\mathbb{Z}_2$ 会忠实地作用于该几何。

此外，还存在一个自然的 $Sp(1)_{(1)} \times Sp(1)_{(2)} \subset Sp(2)$ 子群，由对各个四元数坐标进行右乘生成：

$$[Q_1, Q_2] \to [Q_1\lambda_1, Q_2\lambda_2], \tag{3.10}$$

采用显然的记号。为了完整规定 $SO(5)$在 X_a上的作用，我们还需要说明 $SO(5)$如何作用于反自对偶二形式丛。对我们的目的而言，只需在由局部四元数坐标 $q_{\text{North}} = Q_2^{-1}Q_1$和 $q_{\text{South}} = Q_1^{-1}Q_2$ 参数化的两个仿射坐标片中（即 $Q_2 \neq 0$ 和 $Q_1 \neq 0$所在的坐标片）加以说明即可。在此，值得注意的是，在 $\mathbb{R}^4$上，自对偶二形式和反自对偶二形式分别按$(\mathbf{3},\mathbf{1})$和

[9]为此，注意，对四元数 $(Z_1 + Z_2 j)$ 右乘一个一般四元数 $(\Lambda_1 + \Lambda_2 j)$，其中 Z_r 和 Λ_r 是复数，可以写作 $(Z_1 + Z_2 j)\,(\Lambda_1 + \Lambda_2 j) = (Z_1\Lambda_1 - Z_2\Lambda_2^*) + (Z_2\Lambda_1^* + Z_1\Lambda_2)j$；也就是说，它是作用于双重态 Z_r 的线性映射。

(1、3)，对应于 $Sp(1)_{(1)} \times Sp(1)_{(2)} \simeq Spin(4)$。考虑到这一点，请注意，在我们的局部坐标片中，这两个四元数坐标在第 (3.10) 行的群作用下变换如下：

$$q_{\text{North}} \to \lambda_2^{-1} q_{\text{North}} \lambda_1 \tag{3.11}$$

$$q_{\text{South}} \to \lambda_1^{-1} q_{\text{South}} \lambda_2 . \tag{3.12}$$

因此，首先注意到二形式 $dq_{\text{North}} \wedge dq^*_{\text{North}}$ 在 $Sp(1)^{(1)}$ 下保持不变，而 $dq^*_{\text{North}} \wedge dq_{\text{North}}$ 在 $Sp(1)^{(2)}$ 下保持不变（因为群作用由单位范数四元数给出）。通过遍历相应 $Sp(1)$ 群作用下的整个轨道，我们可以构造出完整的反自对偶二形式集合。注意，在南极处角色相反，即 $dq_{\text{South}} \wedge dq^*_{\text{South}}$ 转而在 $Sp(1)^{(2)}$ 下保持不变。在局部，通常将局部坐标片 $\mathbb{R}^7$ 写作 $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}$ 会比较方便，但北极和南极处的复结构不同。我们写作：

$$q_{\text{North}} = v_1 + v_2 j \, , \quad q_{\text{South}} = v_1' + v_2' j \, , \tag{3.13}$$

复坐标为 v_1、v_2、v_1'、$v_2' \in \mathbb{C}$。在每个坐标片中，反自对偶二形式可用对 v_3、t 和 v_3'、t' 来参数化，其中 v_3、$v_3' \in \mathbb{C}$ 和 t、$t' \in \mathbb{R}$。这样一来，识别关系 $\mathbb{R}^7 = \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}$ 就显而易见了，而坐标片由以下参数化：

$$\begin{aligned} &\text{North}: \quad (v_1, v_2, v_3, t) \\ &\text{South}: \quad (v_1', v_2', v_3', t') \end{aligned} \tag{3.14}$$

并且 Γ 在局部上作用于垂直于由 t, t' 参数化的直线的方向。

如前所述，我们注意到，在每个局部片中，都有一个五维轨形超共形场论，其形式由商空间 $\mathbb{C}^3/\Gamma$ 指定，不过在北极和南极处，复结构和群作用的选择有所不同。在纯五维极限下，我们得到一个具有八个实超荷的理论，以及相应的库仑分支真空态。从几何上看，这些与爆破模相关。需要注意的是，在 G_2 设定下，其中一些爆破现在受到阻碍。在某种程度上，这完全在意料之中，因为我们现在只保留了四个实超荷。这也意味着，这些五维系统可能存在的“规范理论相”，在完整系统中最终可能无法实现。

3.3 体区视角

我们将要讨论的许多例子都有一个共同特征：出现一个相互作用的体区，它与 G_2 锥尖处的边缘模耦合。为研究这一点，我们首先考察锥尖具有有限大小（零截面具有有限体积）的几何，然后解释在压缩极限下会发生什么。

在具有有限大小 S^4的几何中，所得的商空间 X_a/Γ 将在 S^4 的北极和南极处产生奇点，并且还可能出现其他奇点

延伸于两个极点之间。为便于说明，我们现在聚焦于阿贝尔 $\Gamma \subset Sp(1)_{(1)} \times Sp(1)_{(2)}$ 的不动点集，该不动点集由复相位的乘法给出。

对于此类群作用，我们在 X_a 中发现了以下类型的不动点集：

1. 拓扑为 $\mathbb{R}$ 的余维六轨迹：此类型最多有两个不连通的不动点集。沿 $X_a = \Lambda^2_{\text{ASD}}(S^4)$ 径向延伸时，它们包含在一个纤维中，并投影到 S^4 的北极或南极，从而在 X_a/Γ 中给出体区五维超共形场论。

2. 拓扑为 $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ 的余维 4 轨迹：此类轨迹最多有两个互不连通的不动点集。它们包含在 S^4 北极或南极上方的 $X_a = \Lambda^2_{\text{ASD}}(S^4)$ 的完整纤维中。在 X_a/Γ 中，它们产生奇点，构造具有 A 型规范群的 7 维 SYM 体模。

3. 余维4轨迹 $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$，在 $\{0\} \times \mathbb{R}$处发生余维6增强：这种情形是前两种情形的组合。在 Λ^2_{ASD}（S^4）$/\Gamma$，该几何降维为具有 A 型味对称性的五维超共形场论。

4. 余维 4 轨迹 $S^2 \times \mathbb{R}$ 在 ({北极}∪{南极})×ℝ处发生余维六增强：这里 $S^2 \subset S^4$ 和 {北极}，{南极} 表示它们共同的北极和南极。余维六轨迹沿 $\mathbb{R}$与情形 1 相同。固定半径处的余维 4 轨迹是连接余维六轨迹的紧致、互不相交的二维球面。在 X_a/Γ 中，这些轨迹给出 A 型味对称性膜，并在五维中被规范化。

我们强调，在 X_a/Γ中，将余维 4 奇异轨迹解释为五维规范对称性或味对称性，分别取决于垂直于五维超共形场论的固定点分量是紧致的还是非紧致的。当在 $X_a \to S^4/\Gamma$ 中为（垂直的）水平时，它们分别是（非）紧致的，因为在阿贝尔例子中，作为超共形场论轨迹，它们必然沿径向/垂直方向延伸。

由于我们对几何有一种首选的径向切片方式，因此可以将所有这些五维理论想象成沿该方向向外延伸。从零截面 S^4/Γ 的视角来看，这些五维理论在局部由形如 $\mathbb{C}^3/\Gamma \times \mathbb{R}$的几何所刻画。然而，在零截面坍缩的极限下，这些五维理论可能会沿实线因子被“一分为二”。因此，更恰当的看法是将几何视为构建出一个连接点；当零截面具有非零大小时，其结构会在各种交叉处变得平滑。在这一图景中，锥形几何顶端局域化了四维自由度——边缘模。

总而言之，我们通常会遇到各自具有味对称性的独立五维超共形场论。对于阿贝尔群作用，这些味对称性集中在北极和南极，因此我们将它们分别记作 $\mathcal{T}^{\text{North}}$ 和 $\mathcal{T}^{\text{South}}$。紧致的 S^4 将这两个理论耦合在一起。结果是，它们共有的某些味对称性被规范化，因为局部模型的味定位点如今沿着 S^4中的一个紧致子空间延伸。

[10]我们在附录B中简要讨论一些其他现象，例如与非阿贝尔群作用相关的紧致余维六轨迹。

五维规范耦合的强度由 $V(r)$ 指定，它是 7D 超对称杨–米尔斯理论所包裹的循环的体积：

$$\frac{1}{g_{5D}^2} \sim V(r), \tag{3.15}$$

在自然单位制下，忽略 2 和 π 的因子。这个体积之所以依赖径向方向，恰恰是因为随着 r 取值增大，SYM 理论所包裹的循环体积也随之增大。注意，当 $r \to \infty$ 时，五维规范对称性会重新转变为味对称性，因为 $V \to \infty$。该函数在 $r = a$ 处达到最小值，因此 $a \to 0$ 极限形式上处于强五维规范耦合下；这有力地暗示，圆锥奇点处的物理学支持非平凡相互作用。

因此，我们可以将五维规范理论视为定义在一个翘曲空间上，其中翘曲仅局限于度量的径向方向。这体现在标准作用中：

$$S_{5D} \supset -\frac{1}{4}\int d^4x \int dr\ \sqrt{\det g}\ V(r)\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}), \tag{3.16}$$

需要指出的是，度量在 r 方向上是非平凡的 .

到目前为止，我们关注的是体区五维理论的结构。不过请注意，我们的空间在 $r = a$ 处有一个边界，而且（正如上文综述的那样）存在一个复化的体积模量，它可以解释为一个四维场 Φ [200] 的真空期望值。回到方程（3.16），这进而意味着五维体与四维边缘模之间存在耦合。将 $V(r)$ 提升为场 Φ 的非平凡函数后，我们便能看到这一耦合留下的痕迹。

现在让我们更详细地分析由此产生的四维系统与这个五维体区的耦合。按照 [202, 203], 中概述的一般步骤，我们可以将五维场视为一组四维场，它们由锥的径向方向上局部坐标为 r 的额外维度中的各点标记。从这一视角来看，五维 $\mathcal{N} = 1$ 矢量多重态会产生一系列无穷多个四维 $\mathcal{N} = 2$ 矢量多重态，并具有一个四维边缘耦合τ。我们提出的做法是将这个边缘耦合提升为一个四维 $\mathcal{N} = 1$ 手征超场。这样，我们就得到了五维系统与四维系统之间的最小耦合：[11]

$$S_{\text{4D / 5D}} \supset \int d^4x \int dr\sqrt{\det g}\int d^2\theta\ \delta(r-a)h\left(\frac{\Phi(x,r)}{f}\right)\mathrm{Tr}(\mathcal{W}^2) + h.c., \tag{3.17}$$

或者，稍作改写：

$$S_{\text{4D / 5D}} \supset \int d^4x \int d^2\theta\ h\left(\frac{\Phi}{f}\right)\mathrm{Tr}(\mathcal{W}^2)|_{r=a} + h.c., \tag{3.18}$$

显然不 性。在上文中，我们引入了一个尺度 f，这是由量纲 l

[11]这里有一个小小的微妙之处，因为手征超场局域于奇异锥的尖端。尽管如此，戈德斯通定理保证这种无质量模仍然存在，并且会在 $r = a$ 附近与体区耦合。

分析所要求的。这个背景值由我们围绕其展开的背景真空期望值决定，也就是说，它取决于 S^4/Γ 的最小体积。

需要澄清的是，严格来说，我们应将局域在五维系统末端的涨落与作为五维系统耦合之源的涨落区分开来。不过，由于两者之间存在最小耦合，我们可以将这些源与边界项混为一谈；下文中我们也将不加区分地使用这两种说法。无论如何，显然我们有一个带有规范耦合的五维系统，而该系统与一个受限于边界的局域涨落相耦合。正如我们已经指出的，在 $\langle\Phi\rangle \to 0$ 的奇异极限下，五维规范理论被外推至无限耦合。因此，我们可以将其视为一个五维体区，它在局域的余维一缺陷附近逐渐变得耦合更强。

3.4 四维准共形场论

当零截面收缩至零大小时，我们得到一个局域在 G_2 锥尖端的四维边缘模。由于该尖端是奇异的，我们预期会遇到局域自由度。这些自由度不一定能够与体模解耦，因此一般会存在五维/四维耦合。事实上，我们已经解释过，四维模量Φ 通过形如 $h(\Phi/f)\mathrm{Tr}F^2$ 的函数与五维规范理论因子相耦合。

尽管界面支持无能隙激发，但由于与五维体区耦合，四维理论可能不存在独立于体区而定义良好的应力能量张量。论证这种情况普遍存在的一种方式是注意到，插入$\mathcal{O}_{4D}$ 态必然会产生五维应力能量，进而使人无法定义守恒的四维应力张量。

此外，由于五维超共形场论总是相互作用的（即它们的三点算符乘积展开系数是非平凡的），如果四维边界未与体区解耦，那么四维理论的三点系数也必然是非平凡的。这是因为我们总能将一个体算符移至边界上，从而得到体-边界展开，如下所示： [204]

$$\lim_{r\to 0}\mathcal{O}_{5D}(x,r) \sim \sum_i \langle \mathcal{O}_{5D}\mathcal{O}^i_{4D}\rangle \mathcal{O}^i_{4D}(x) \tag{3.19}$$

其中， i 标记边界上的所有四维局域算符， r 是该点到五维边界的距离，而 x 是四维边界上的一个点。现在，如果五维算符乘积展开关系是非平凡的，并且体-边界二点函数 $\langle \mathcal{O}_{5D}\mathcal{O}^i_{4D}\rangle$ 非零，那么这就意味着四维算符乘积展开关系必然是非平凡的。

这里有一条一般性评论：在许多构造超共形场论的弦论方案中，人们通常会考虑高维体理论的缺陷／边缘模。在那些情形与当前情形之间的区别在于，高维体

在红外下通常是平凡的，也就是说，它的三点函数是平凡的。[12] 在目前的情形下，体区通常是一个相互作用的无能隙系统。因此，是否存在一种解耦极限，只保留系统的四维模式，尚不明确。

3.5 对称性增强

让我们通过研究这些系统的对称性及其对边缘模的作用，进一步证明非平凡体区／边界耦合的存在。考虑我们的五维／四维系统的味对称性因子的结构。这些轨形几何中的许多都具有一个相当普遍的特征：$X_a/\Gamma = \Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(S^4)/\Gamma$ 的局部片中的奇点，往往是 X_0/Γ中奇点的子集，而 X_0/Γ是一个以 $\mathbb{CP}^3/\Gamma$为底的锥。从几何角度看，这表明发生了自发对称性破缺，破缺尺度由 $\langle\Phi\rangle$决定，也就是 S^4/Γ的体积模。当我们将体积模调至零时，应该会看到额外的非紧致味位置涌现。我们确实会反复遇到这一现象，并将其解释为奇点所承载的紫外与红外味对称性之间的区别。

在当前情形中，存在一种独特的增强模式：四维紫外味对称性由两份五维红外规范对称性和一份五维红外味对称性组成。这是因为我们的味对称性通过支撑在形如 $\mathbb{R}_{\geq 0} \times S^2$ 和 $\mathbb{R} \times S^2$ 的非紧致三维圈上的 7D 超对称杨–米尔斯理论实现，其中 S^2 要么集中在 X_a/Γ 的反自对偶纤维方向上，要么分别位于 S^4/Γ底空间内的一个 2-循环上。在后一种情形中，请注意，被 7D 超对称杨–米尔斯理论填充的 $\mathbb{R} \times S^2$ 实直线因子分裂为 $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$，而 S^2 在 $a \to 0$时坍缩，从而将这些轨迹一分为二。当零截面具有有限体积时，这会产生一个味对称性因子 $\mathfrak{g}^{(\mathrm{diag})}$；但在坍缩极限下，它会分裂为两个不同的副本，$\mathfrak{g}^{(+)} \times \mathfrak{g}^{(-)}$。7D 超对称杨–米尔斯理论因子不会发生这种加倍。因此我们得出结论，红外味对称性的一般形式为：

$$\mathfrak{g}_{IR} = \mathfrak{g}_{7D} \times \mathfrak{g}_{5D}^{(\mathrm{diag})}, \tag{3.20}$$

而 UV 味对称性的形式为：

$$\mathfrak{g}_{UV} = \mathfrak{g}_{7D} \times \mathfrak{g}_{5D}^{(+)} \times \mathfrak{g}_{5D}^{(-)}, \tag{3.21}$$

采用显然的记号。

此时值得记住的是，在 $\mathfrak{g}_{UV} \to \mathfrak{g}_{IR}$ 的自发对称性破缺中，UV 对称性始终以某种方式存在，只不过是以适当的 WZ 项的形式呈现。沿着G_2 锥的径向切片向外移动，就可以看出这一点：在这里，$\mathfrak{g}_{5D}^{(+)}$ 和 $\mathfrak{g}_{5D}^{(-)}$ 都存在，并延伸至边界 $\mathbb{CP}^3$。这也

[12]例如，E-string理论可通过某个 E_8 9膜的探测M5膜实现；五维 $\mathcal{T}_N$ 理论则可作为三个七维超对称杨–米尔斯理论的交汇。

表明，导致体区对称性破缺的自由度是一个局域在锥尖附近的四维模式。图 7 展示了在 G_2 锥几何中的这种对称性破缺。

有了这些考虑，我们原则上可以转而研究 $SO(5)$ 的具体有限子群，并构造相应的商空间 X_a/Γ。我们在第4节中针对若干不同的例子进行了这一工作，主要聚焦于一类丰富的阿贝尔群作用，不过我们也在第6节和附录B中考虑了更一般的可能性。在本节的其余部分，我们将考察一个说明性例子。

3.6 说明性例：耦合 $\mathcal{T}_N$ 理论

现在我们给出一个说明性例子，以展示上文所述的一些一般性考量。我们的出发点是从M理论在轨形 $\mathbb{C}^3/(\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N)$上得到的五维 $\mathcal{T}_N$ 理论，其中对 $\mathbb{C}^3$ 的作用由对角矩阵 $\mathrm{diag}(1, \eta^{-1}, \eta)$ 和 $\mathrm{diag}(\omega^{-1}, 1, \omega)$ 生成，其中 ω, η 是本原的 N次单位根。对 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(S^4)$ 的两个坐标片的作用为：

$$(v_1, v_2, v_3, t) \rightarrow (\omega v_1, \eta^{-1} v_2, \eta\omega^{-1} v_3, t) \tag{3.22}$$

$$(v_1', v_2', v_3', t') \rightarrow (\omega^{-1} v_1', \eta^{-1} v_2', \eta\omega v_3', t')\,. \tag{3.23}$$

由此可见， X_a 中的不动点如下：

(i.) 一份 $S^2 \times \mathbb{R}$，来自形如 η^k 的元素，

(ii.) 一份 $S^2 \times \mathbb{R}$，来自形如 ω^k 的元素，

(iii.) 两份 $\mathbb{R}^3$，来自形如 $(\eta\omega)^k$ 和 $(\eta^{-1}\omega)^k$ 的元素，

(iv.) 两份 $\mathbb{R}$，来自其他形如 $(\eta^k\omega^l)$ 的元素，其中 $k \neq \pm l$。以上所有分支都沿着这两条特定的直线相交。

当 X_a 退化为锥 X_0 时，分支 (i.) 和 (ii.) 各自变为两份 $\mathbb{R}^3$，并在原点相交；而 (iv.) 中的每对直线则变为两份 $\mathbb{R}^+$，也在原点相交。因此，我们可以认为， X_0 上的理论源自四份在原点相交的五维 $\mathcal{T}_N$ 理论。奇异轨迹的结构如图1所示。四份 $\mathcal{T}_N$ 通常具有 $\mathfrak{su}(N)^{12}$ 全局对称性，但在这里，我们看到得到的四维理论具有 $\mathfrak{su}(N)^6$ 味对称性，因此这四个理论必定以某种方式耦合，使它们共享 $\mathfrak{su}(N)$ 因子。当 X_0 变形为X_a 时，这就变成了定义在 $\mathbb{R}$ 上的两份 $\mathcal{T}_N$ 理论，但其对称群不是 $\mathfrak{su}(N)^6$，而是来自分支 (i.)、(ii.) 和 (iii.) 的 $\mathfrak{su}(N)^4$ 。

为了描述这个特定例子的物理学，考察参数 a 的各种极限会很有帮助。特别是，当 $a \to \infty$ 时，五维理论已经解耦，

当 $0 \leq a < \infty$时，这些理论现在彼此耦合，而当 $a \to 0$ 时，我们有一个与四维准SCFT耦合的五维体。有关此情况下各种理论的示意图，请参见图 4。

让我们考虑一种特殊情形：轨形 S^4/Γ 的体积已扩展至无限大，即渐近极限 $a \to \infty$。在此极限下，两个不动点彼此解耦，因此分别考察它们很有意义。在这一渐近极限下，北极不动点附近的几何呈现如下形式：

$$\text{Decompactified Limit: } \mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N \times \mathbb{R}, \tag{3.24}$$

这就是五维时空 $\mathbb{R}^{1,\,3} \times \mathbb{R}$上的五维 $\mathcal{T}_N$ 理论的几何。由于我们有一个北极和一个南极，因此得到两个这样的理论。注意，在南极附近，Calabi-Yau 的取向相对于北极处的几何发生了反转；但由于它位于 S^4的另一极，这一效应得到了补偿，因此在此极限下，每个系统都保留相同的八个实超荷。总而言之，在此极限下，我们得到了两个五维理论：

$$\underbrace{[\mathfrak{su}(N)] - (\mathcal{T}_N) - \left[\mathfrak{su}(N)^2\right]}_{\text{North Patch}} \times \underbrace{\left[\mathfrak{su}(N)^2\right] - (\mathcal{T}_N) - [\mathfrak{su}(N)]}_{\text{South Patch}}. \tag{3.25}$$

这里，圆括号表示共形不动点，方括号表示五维系统的整体对称性。我们可以将这些五维味对称性视为非紧致空间上的七维规范理论。[13]

当我们有一个有限大小的零截面时，7D SYM 因子对整体对称性的贡献形式如下：

$$\mathfrak{g}_{7D} = \mathfrak{su}(N)_{\text{North}} \times \mathfrak{su}(N)_{\text{South}}, \tag{3.26}$$

而来自规范化五维 SYM 扇区的项形式为：

$$\mathfrak{g}_{5D} = \mathfrak{su}(N)^2_{\text{diag}}, \tag{3.27}$$

因此，红外非阿贝尔味对称性是：

$$\mathfrak{g}_{IR} = \mathfrak{g}_{7D} \times \mathfrak{g}_{5D} = \mathfrak{su}(N)_{\text{North}} \times \mathfrak{su}(N)^2_{\text{diag}} \times \mathfrak{su}(N)_{\text{South}}. \tag{3.28}$$

在零截面收缩至零尺寸的极限下，我们看到五维超对称杨-米尔斯扇区发生了有效的“倍增”，但七维超对称杨-米尔斯扇区并未发生这种倍增。因此，紫外非阿贝尔味对称性为：

$$\mathfrak{g}_{UV} = \mathfrak{g}_{7D} \times \mathfrak{g}^2_{5D} = \mathfrak{su}(N)_{\text{North}} \times \mathfrak{su}(N)^4_{\text{diag}} \times \mathfrak{su}(N)_{\text{South}} = \mathfrak{su}(N)^6. \tag{3.29}$$

[13]在本次讨论中　我们忽略与味对称群整体形式相关的微妙之处。 .

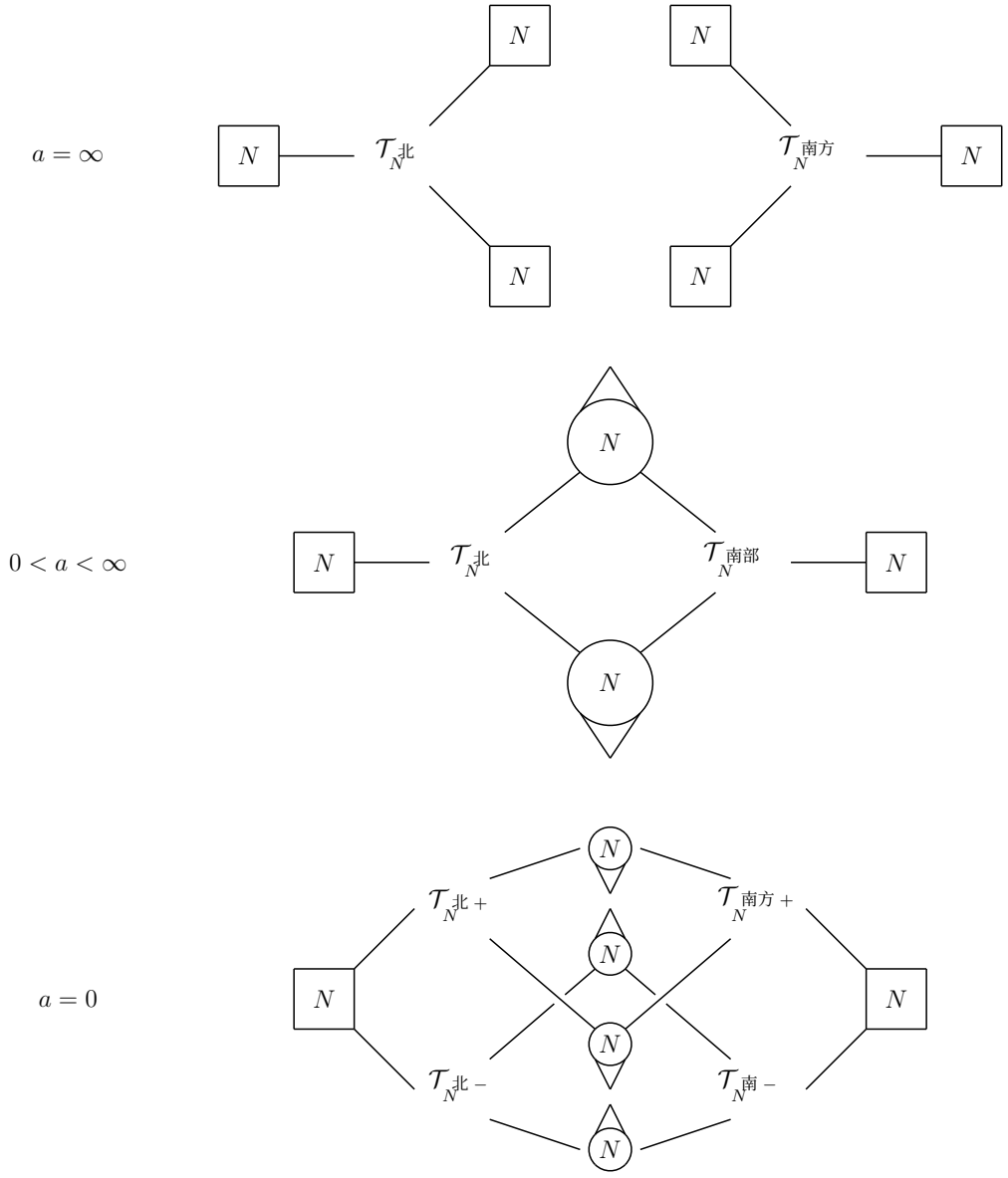


图 4：零截面 Vol(S^4/Γ) $\sim a$ 取不同大小时，五维体理论的三种示意图。方形（圆形）节点表示五维中的味对称性（规范对称性）。规范节点上的锥表示一种规范化，它通过依赖于一个五维方向（即 X_a 中的径向方向）的规范耦合，破坏五维庞加莱对称性。在耦合不变的四维横向方向上，四维 $\mathcal{N} = 1$ 超对称性得以保留。$a = \infty$ ：两个彼此解耦的五维 $\mathcal{T}_N$ 理论，形式上位于无限体积 S^4/Γ 的北极／南极。 $0 < a < \infty$ ：味轨迹在五维 SCFT 位置的横向方向上被紧致化，这些横向切片的体积取决于它们所在的 X_a 径向壳层。 $a = 0$： S^4/Γ 坍缩，几何呈锥形。支撑在北极和南极上的 $\mathcal{T}_N$ 理论分解为支撑在两条 $\mathbb{R}^{\pm}$半直线上的 $\mathcal{T}_N^{\pm}$ 。五维规范对称性轨迹也包含 $\mathbb{R}$ ，并以类似方式分解。作为五维味对称性出现的七维超对称杨–米尔斯理论因子则不会发生这种分裂。

这与在边界 $\mathbb{CP}^3/\Gamma$ 处观察到的奇点相符。我们发现，群作用 Γ 有六个 $\mathbb{CP}^1$，每一个都局部支持一个局部形式为 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_N$ 的 A_{N-1} 奇点。在 G_2 锥中，其中两个 $\mathbb{CP}^1$ 可以视为一条$\Lambda^2_{\text{ASD}} \simeq \mathbb{R}^3$ 纤维的边界 S^2 ，因此它在五维理论中仍然是一种味对称性。其余支持 A 型奇点的 $\mathbb{CP}^1$则支撑在一个紧致的 2-循环上，该循环从 S^4/Γ的北极延伸至南极。追踪这些边界$\mathbb{CP}^1$在 X_a内部的形态，我们看到它们在零截面处两两相接。可以将支撑在 S^4/Γ紧致 2-循环上的七维 SYM 理论的位置依赖体积视为被规范化到局域于北极和南极的味对称性的一个对角子群。

4 阿贝尔商空间的例子

在上一节中，我们对形如 X_a/Γ 的 $X_a = \Lambda^2_{\text{ASD}}(S^4)$ 的商空间进行了总体讨论。在本节中，我们将更详细地讨论 Γ 一个阿贝尔群[14]群通过以下方式嵌入 $Sp(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(5)$ 等距变换的情形：

$$\Gamma \hookrightarrow (Sp(1)_{(1)} \times Sp(1)_2)/\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow Sp(2)/\mathbb{Z}_2. \tag{4.1}$$

我们重点讨论这样的情形：群作用始终通过复相位在 $\mathbb{HP}^1 = S^4$ 的齐次四元数坐标上进行右乘。我们的处理具有一般性，因为涵盖了所有形如 $\Gamma = \mathbb{Z}_K$ 和 $\Gamma = \mathbb{Z}_K \times \mathbb{Z}_L$ 的阿贝尔群作用，尽管由此产生的奇点结构可能以敏感的方式取决于 K， L 的整除性质以及群作用的具体权重。因此，我们主要关注这一设定中出现的代表性现象。[15] 我们首先分析 Γ为循环群的情形，然后转而讨论 Γ为两个循环因子的乘积的情形。

4.1 具有一般 $\Gamma = \mathbb{Z}_K$ 的单个循环因子

对于只有一个循环群因子的情况，只需将 $\lambda_1 = \zeta^a$ 和 $\lambda_2 = \zeta^b$ 设为 $\zeta = \exp(2\pi i/K)$ 以及某个 a, b ，二者都是(3.11)中的整数权重。在$\Lambda^2_{\text{ASD}}(S^4)$的各个坐标片上，(3.13) 中引入的坐标上的群作用随后呈现为：

$$(v_1, v_2, v_3, t) \rightarrow (\zeta^{a-b}v_1, \zeta^{-a-b}v_2, \zeta^{2b}v_3, t) \tag{4.2}$$

$$(v'_1, v'_2, v'_3, t') \rightarrow (\zeta^{b-a}v'_1, \zeta^{-a-b}v'_2, \zeta^{2a}v'_3, t'). \tag{4.3}$$

[14]我们还在附录B.1中讨论了一个具有非阿贝尔群作用的例子。与阿贝尔群作用不同，非阿贝尔群作用可以产生紧致的余维六奇点。[15]在某种程度上，这个问题归结为对所有可能的五维轨形共形场论进行系统性处理，这是一个已在 [84, 160, 205]中研究过的主题。

在北极和南极坐标片中，我们都看到了形如 $\mathbb{C}^3/\Gamma\times\mathbb{R}$的局部奇点，不过它们分别对应不同的复结构和群作用。每个五维超共形场论单独来看都会保留八个实超荷，但组合系统只保留四个实超荷。

为分析由此产生的奇点，方便起见，我们写作 $c=a-b$和 $d=-a-b$。例如，在$\Lambda^2_{\rm ASD}(S^4)$的坐标片上，我们有：

$$(v_1,v_2,v_3,t) \;\to\; (\zeta^c v_1,\zeta^d v_2,\zeta^{-c-d}v_3,t) \tag{4.4}$$
$$(v_1',v_2',v_3',t') \;\to\; (\zeta^{-c} v_1',\zeta^d v_2',\zeta^{c-d}v_3',t'). \tag{4.5}$$

单独来看，M理论在一个 $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_K$ 奇点上会产生一个具有味对称性的五维超共形场论。在北极和南极，局部模型分别呈现具有非阿贝尔李代数因子的味对称性

$$\mathfrak{su}((|c|,K))_{\rm North}\times\mathfrak{su}((|d|,K))_{\rm North}\times\mathfrak{su}((|c+d|,K))_{\rm North} \tag{4.6}$$
$$\mathfrak{su}((|c|,K))_{\rm South}\times\mathfrak{su}((|d|,K))_{\rm South}\times\mathfrak{su}((|c-d|,K))_{\rm South} \tag{4.7}$$

其中，我们用 (n,m) 表示整数 n 和m的最大公约数。然而请注意，尽管 v_3 （以及 v_3'）方向始终是非紧致的， v_1 和v_2 却是 S^4内部的坐标。尤其是，这意味着支撑这些对的轨迹

$$\mathfrak{su}((|c|,K))_{\rm North},\,\mathfrak{su}((|c|,K))_{\rm South} \;\to\; \mathfrak{su}((|c|,K)) \tag{4.8}$$
$$\mathfrak{su}((|d|,K))_{\rm North},\,\mathfrak{su}((|d|,K))_{\rm South} \;\to\; \mathfrak{su}((|d|,K)) \tag{4.9}$$

在两个四元数坐标片之间变换时会彼此识别，并合并为一条轨迹。紧化到同一条轨迹意味着五维对称性被规范化为一个对角子群。因此，在每个局部坐标片中观察到的六个味对称性因子中，我们在五维中只保留 $\mathfrak{su}((|c+d|,K))_{\rm North}\times\mathfrak{su}((|c-d|,K))_{\rm South}$味对称性。

从示意图上看，我们将五维构型表示为图5所示。除了这一基本结- 构之外，我们还应牢记，与 $\mathfrak{su}((|c|,K))\times\mathfrak{su}((|d|,K))$相关联的五维规范耦合，是根据给定径向壳层上味定位点的体积，沿径向方向纤维化的。此外，由于 S^4/Γ 具有非平凡的挠二维圈（见附录C），我们通过将M2膜缠绕在这些二维圈上而获得额外的有质量模。调-节真空期望值 $\langle\Phi\rangle\to 0$ 后，相较于 [200] 中所考虑的光滑情形，这些态变得较轻，并导致额外的动力学。

4.2 具有特化 $\Gamma=\mathbb{Z}_K$ 的单循环因子

现在，我们通过对整数 K、 a 和 b 作出不同选择，来探讨各种理论相当多样的情形；这些整数指定了 G_2 锥 X 的 $\mathbb{Z}_K$ 商空间。我们不进行穷尽分析，只是举例说明不同的选择会带来修正。

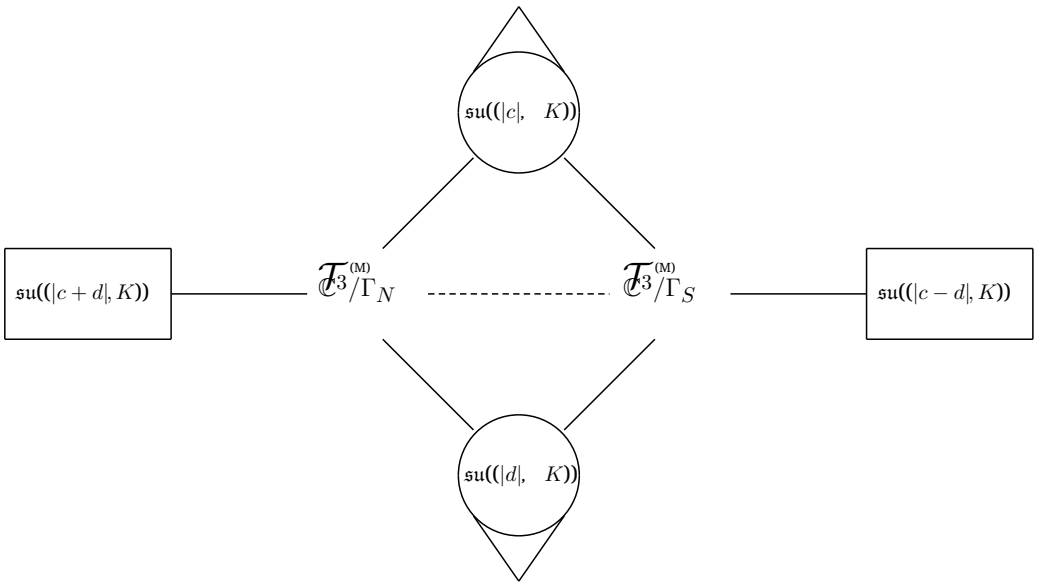


图5：具有 $\Gamma = \mathbb{Z}_K$的一般五维理论。在两个五维超共形场论扇区之间的两对味对称性位置被规范化，形成圆形节点，同时保留一对味对称性，形成方形节点。显然，$\Gamma = \Gamma_N = \Gamma_S$ 与下标区分了北极和南极处的群作用。虚线表示由缠绕在 S^4/Γ的一个可能的2-循环上的M2膜产生的一个大质量模。规范节点的锥表示一种五维规范化，其规范耦合取决于 r 径向坐标，并且依赖于 G_2整体单值群空间，从而保留四维超对称。

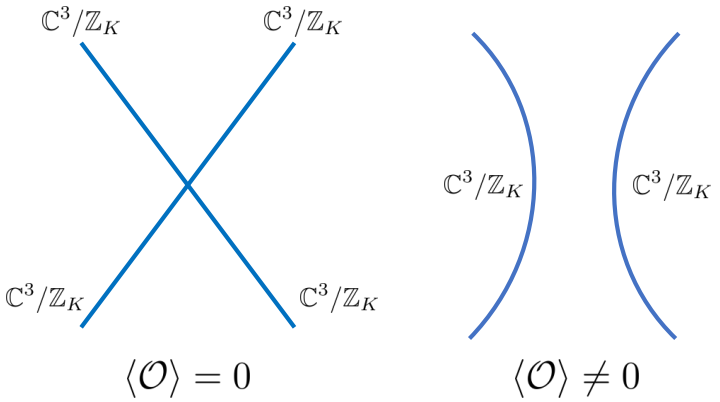


图 6：Quadrion的分裂。LEFT: 对应于Quadrion理论的奇点，即五维超共形场论的四价结点。 RIGHT: 对锥尖进行解析会触发分裂模式，形成一对五维超共形场论。

在味对称性因子的数量以及图5中该图的各种子图方面。

例：Quadrion 理论。 对于这一类例子，我们将 $\Gamma = \mathbb{Z}_K$ 和群作用特化为式 (4.4) 和 (4.5) 中参数化的形式，并要求非零权重满足

$$(|c|, K) = (|d|, K) = (|c+d|, K) = (|c-d|, K) = 1. \tag{4.10}$$

在这些约束下，局部模型 $\mathbb{C}^3/\Gamma$ 是孤立奇点，相应的五维超共形场论没有明显的非阿贝尔味对称性。在 G_2-holonomy 空间中，我们发现了两条余维六奇点线，它们由局部坐标 t, t' 参数化，位于北极和南极上方的纤维中。底空间 S^4/Γ 包含挠二维圈 $H_2(S^4/\Gamma) \cong \mathbb{Z}_K$，我们还从缠绕膜中获得了额外的有质量态。

在锥形极限Vol$(S^4/\Gamma) \to 0$ 下，这对奇点线变形为由四个余维六奇点组成的集合，每个奇点的径向世界体为 $\mathbb{R}_+$，横向几何为 $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_K$。四条线在 G_2 锥的尖端处以余维-7相交，见图6（左）。在此极限下，扭转 2-循环 $H_2(S^4/\Gamma)$ 被压缩，并且我们获得了额外的轻自由度。

我们将这类四维 $\mathcal{N} = 1$ *Quadrion* 理论称为Quadrion理论。它们之所以是准超共形场论，是因为它们与体区五维理论 $\mathcal{T}_{(M)}$ $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_K$耦合。我们拥有一个四价结点（见图1），这意味着可能存在局域边缘模。

当 Vol$(S^4/\Gamma) = \langle \Phi \rangle \neq 0$ 时， S^4/Γ，几何变为图 6（右）所示的形式；也就是说，剩下的只有两个五维超共形场论。我们将这一效应解释为一种流

从 Quadrion 理论流向另一种重新组合的界面，在该界面中，部分味对称性破缺为对角子群，并且五维超共形场论在深红外中解耦。

例：纯味 / 双基本物质 虽然 Quadrion 轨形几何仅包含余维六奇点，但这里我们考虑另一极端情况，即轨形几何中仅包含余维四奇点。这些情况此前已在 $[156, 200]$ 中讨论过，并且与由两组堆叠构成的 IIA 型背景对偶，每组包含 K 个 D6膜。低能理论由一个处于双基本表示（$\mathbf{K}$，$\mathbf{K}$）中的手征多重态 $\mathcal{O}$ 构成。为该算符赋予真空期望值会触发一种破缺模式，同时解析锥尖。该过程可用算符的一种味中性组合来描述。

具体而言，该 $\mathbb{Z}_K$ 作用为

$$[Z_1, Z_2, Z_3, Z_4] \to [\lambda Z_1, \lambda Z_2, \lambda^{-1} Z_3, \lambda^{-1} Z_4] \tag{4.11}$$

其中，若 K 为奇数，则这是一个 K次单位根；若 K 为偶数，则为 $2K$ 。[16] 有两个不动点，一个位于 $Z_1 = Z_2 = 0$ ，另一个位于 $Z_3 = Z_4 = 0$ ，它们投影到 S^4 底空间中的同一个 S^2 。这意味着，在已解析相中，味定位点的拓扑为 $S^2 \times \mathbb{R}$ ；在未解析相中则为 $\mathbb{R}^3 \cup \mathbb{R}^3$ 。因此，四维味代数从 $\mathfrak{su}(K) \times \mathfrak{su}(K)$变为 $\mathfrak{su}(K)$。

例：与双基本物质耦合的 Quadrion。对于这类例子，我们将 $\Gamma = \mathbb{Z}_K$ 特化为具有（4.4）和（4.5）行中所示的群作用，现将其重述如下：

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, v_3, t) &\to (\zeta^c v_1, \zeta^d v_2, \zeta^{-c-d} v_3, t) && (4.12) \\ (v_1', v_2', v_3', t') &\to (\zeta^{-c} v_1', \zeta^d v_2', \zeta^{c-d} v_3', t'). && (4.13) \end{aligned}$$

我们放宽 Quadrion 约束（4.10），允许权重 t 非零 o

$$(|c|, K) = (|c+d|, K) = (|c-d|, K) = 1, \quad K = md, \tag{4.14}$$

对于某些整数 m， $d > 1$。在 G_2-全纯轨形中，与 Quadrion 的情形相同，我们再次得到支撑五维超共形场论的余维六奇点（见图 6）；但现在局部五维超共形场论扇区呈现简单的非阿贝尔味对称代数 $\mathfrak{su}(d)$，其沿 v_1， v_1'， v_3， $v_3' = 0$ 由局部坐标 v_2， v_2'， t， t'参数化。底空间 S^4/Γ 再次包含挠二维圈 $H_2(S^4/\Gamma) \cong \mathbb{Z}_m$ ，并且存在来自缠绕膜的有质量态。

所以，在这两种 th 在北极和南极坐标片中，我们有一个具有 $\mathfrak{su}(d)$ 味对称性的五维超共形场论 r

[16]在这种情况下， $\mathbb{Z}_{2K}/\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_K$ 实际上作用于几何。

。在紧致的 S^4/Γ 中，这一对称性由一个紧致二维子空间承载。为证明这一点，考察群作用在边界几何 $\mathbb{CP}^3$ 上会有所帮助。令 $\rho \in \mathbb{Z}_K$ 为一个生成元。ρ^m 对齐次坐标的作用为：

$$\rho^m : [Z_1, Z_2, Z_3, Z_4] \to [\zeta^{am} Z_1, \zeta^{-am} Z_2, \zeta^{bm} Z_3, \zeta^{-bm} Z_4]. \tag{4.15}$$

其中 $c + d = -2b$ 和 $c - d = 2a$。根据假设，$K = md = -m(a + b)$，因此 $\zeta^{am} = \zeta^{-bm}$，且作用变为（其中 $\xi = \zeta^a$）：

$$\rho^m : [Z_1, Z_2, Z_3, Z_4] \to [\xi^m Z_1, \xi^{-m} Z_2, \xi^m Z_3, \xi^{-m} Z_4]. \tag{4.16}$$

因此，我们有两个与边界相交的余维 4 轨迹

$$\text{Order } d \text{ fixed point loci in } \mathbb{CP}^3 : \quad (Z_1 = Z_4 = 0), \quad (Z_2 = Z_3 = 0)\,, \tag{4.17}$$

并且 $\mathbb{CP}^3/\mathbb{Z}_d$ 与 $\mathbb{Z}_d \cong \langle x^m \rangle$ 有两球面那么多的 $\mathfrak{su}(d)$ 奇点，它们还要在 $\mathbb{CP}^3/\mathbb{Z}_K$中进一步取商。

不动点集在 S^4 底空间中投影到同一个 S^2 ，因为北极和南极坐标片中各只有一个 A_{d-1}奇点。这意味着在已解析相中，$\text{Vol}(S^4) \neq 0$，不动点集是连通的，其拓扑为 $\mathbb{R} \times S^2$，并在 $\{\pm\infty\} \times S^2$处与边界相交。在四维理论中，这意味着我们有一个 $\mathfrak{su}(d)$ 味对称性。

与其他例子非常相似，一旦我们压缩零截面，就会出现进一步的增强。事实上，在边界 $\mathbb{CP}^3/\Gamma$ 中，我们观察到有两个 $\mathbb{CP}^1$，其中每一个在局部都支持一个 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_d$ 奇点。因此，我们得出结论，存在四维味对称性增强到 $\mathfrak{su}(d) \times \mathfrak{su}(d)$。其物理解释是，存在一个四维双基本算符 $\mathcal{O}_{4D}$ 获得了真空期望值，从而触发了向对角 $\mathfrak{su}(d)$ 的破缺模式。可以将其视为前一个例子的推广，其中有一个自由双基本 Φ，同样存在一个与赋予 S^4有限体积相关的平坦方向。

例：与味堆栈相交的 5维超共形场论。考虑这样一种特殊情况也很有意义：其中一个 $Sp(1)$ 因子在几何上作用平凡。只需令$\lambda_2 = 1$ 并令 $\lambda_1 = \zeta = \exp(2\pi i/K)$，其中 K是一个本原的单位根。在 $\Lambda^2_{\text{ASD}}(S^4)$的各个坐标片上，群作用的形式为：

$$(v_1, v_2, v_3, t) \quad \to \quad (\zeta v_1, \zeta^{-1} v_2, v_3, t) \tag{4.18}$$

$$(v_1', v_2', v_3', t') \quad \to \quad (\zeta^{-1} v_1', \zeta^{-1} v_2', \zeta^2 v_3', t') \tag{4.19}$$

而在渐近的 $\mathbb{CP}^3$ 上，我们有如下作用

$$[Z_1, Z_2, Z_3, Z_4] \to [\zeta Z_1, \zeta^{-1} Z_2, Z_3, Z_4]. \tag{4.20}$$

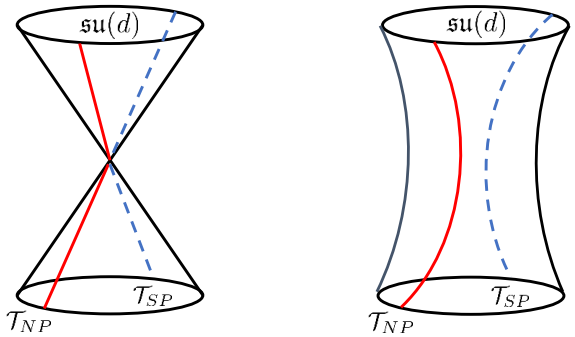


图 7：与双基本物质耦合的 Quadrion 的几何。黑色轨迹表示一个 A_{d-1} 奇点，红色/蓝色线分别表示五维超共形场论 $\mathcal{T}^{\text{North}}$ 和 $\mathcal{T}^{\text{South}}$。开启双基本算符 $\mathcal{O}$ 的真空期望值会使味对称代数从 $\mathfrak{su}(d) \times \mathfrak{su}(d)$破缺为 $\mathfrak{su}(d)$。

因此，在这种情况下，我们观察到北极处存在一个规范代数为 $\mathfrak{su}(K)$ 的七维超杨–米尔斯理论（即，它占据 v_3 和 t 方向）。南极处仍有一个由五维超共形场论刻画的奇点。在这种情况下，南极处的味对称性取决于 K 是偶数还是奇数。当 K 为偶数时，味对称性为 $\mathfrak{su}(2)_{\text{South}}$，沿着 $v_1' = v_2' = 0$分布。因此，在完整的几何中，它仍是一种味对称性（在五维中未被规范化）。当 K 为奇数时，则不存在对称因子。

我们也可以从边界几何（4.20）得出类似结论。这里在 $Z_1 = Z_2 = 0$处有一个由 A_{K-1} 奇点构成的球面。另一方面，当 $Z_3 = Z_4 = 0$ 时，我们发现一个对偶数 K 平凡作用的 $\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}_K$，这表明了前文所述的 A_1 味定位点。此外，$Z_2 = Z_3 = Z_4 = 0$ 和 $Z_1 = Z_3 = Z_4 = 0$ 受到完整 $\mathbb{Z}_K$ 的平凡作用，并标记了余维六轨迹与边界的交点。对于 K 为奇数的情形，见图 8。最后补充一点，在这种情形下我们有 $H_2(S^4/\Gamma) = 0$，因此缠绕的 M2 膜不会带来额外的超对称态。

4.3 具有一般 $\Gamma = \mathbb{Z}_K \times \mathbb{Z}_L$ 的两个循环因子

一般地，考虑 $\Gamma = \mathbb{Z}_K \times \mathbb{Z}_L$，并分别用 η, ω 表示本原的 K次、 L次单位根。令 $\lambda_1 = \eta^a \omega^b$ 和 $\lambda_2 = \eta^c \omega^d$ 满足 a, b, c, d 为整数。那么，群在 $\Lambda^2_{\text{ASD}}(S^4)$的各个坐标片上的作用形式为：

$$(v_1, v_2, v_3, t) \rightarrow (\eta^{a-c}\omega^{b-d}v_1, \eta^{-a-c}\omega^{-b-d}v_2, \eta^{2c}\omega^{2d}v_3, t) \tag{4.21}$$

$$(v_1', v_2', v_3', t') \rightarrow (\eta^{c-a}\omega^{d-b}v_1', \eta^{-a-c}\omega^{-b-d}v_2', \eta^{2a}\omega^{2b}v_3', t'). \tag{4.22}$$

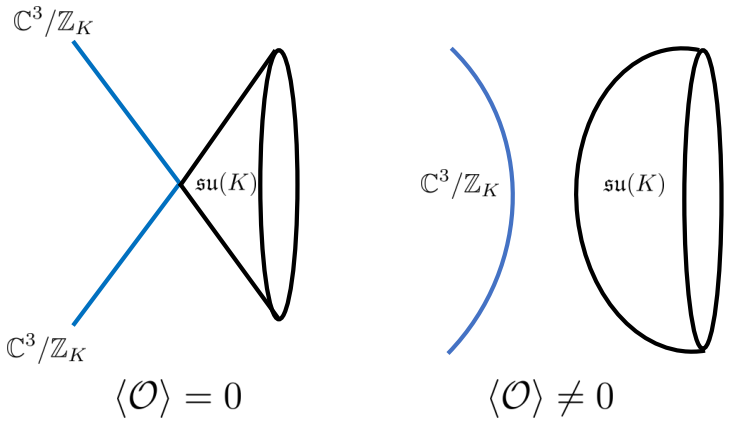


图 8：左侧展示了位于一个 $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_K$ 奇点处的五维超共形场论几何；该奇点在未解析相 $\langle\mathcal{O}\rangle = 0$ 中与一个 $\mathfrak{su}(K)$ 味定位点相交。右侧展示了已解析相 $\langle\mathcal{O}\rangle \neq 0$

在北极和南极坐标片中，我们回顾一下，几何的一般形式为 $\mathbb{C}^3/\Gamma \times \mathbb{R}$，不过，由此得到的特定理论对 K, L 的整除性质以及指数 a, b, c, d 的整除性质十分敏感。尽管这些因素并非唯一地决定嵌入 (4.1)，但要点是，与只有一个循环群因子的情形大致相同，我们会得到一些被规范化的味对称性，也就是说，它们不位于 $v_1 = v_2 = 0$。

例： $\mathcal{N} = 1$ **类似三点函数的对**。作为一个说明性案例研究，我们将范围限定为$a = c$ 和 $b = -d$。此时，一般作用特化为：

$$(v_1, v_2, v_3, t) \rightarrow (\omega^{2b} v_1, \eta^{-2a} v_2, \eta^{2a}\omega^{-2b} v_3, t) \tag{4.23}$$
$$(v_1', v_2', v_3', t') \rightarrow (\omega^{-2b} v_1', \eta^{-2a} v_2', \eta^{2a}\omega^{2b} v_3', t'). \tag{4.24}$$

在基底四维球面 S^4 中，我们发现由 $v_i = 0$ 给出的不动点平面，其中 $i = 1, 2$；在局部片之间转换时，相应的平面 $v_i' = 0$ 将它们紧化为二维球面。沿着 t 逐个局部片延伸这些轨迹，并令 v_3, $v_3' = 0$，我们发现总共有两个四维味对称位置，它们从五维视角来看是规范化的。最后令 $v_1 = v_2 = 0$ 和$v_1' = v_2' = 0$，我们还发现另外两个四维味对称位置；从五维视角来看，它们也都是味位置。

Let 现在我们进一步专门讨论 $a = b = 1$，其作用形式为 :

$$(v_1, v_2, v_3, t) \rightarrow (\omega^{2} v_1, \eta^{-2} v_2, \eta^{2}\omega^{-2} v_3, t) \tag{4.25}$$
$$(v_1', v_2', v_3', t') \rightarrow (\omega^{-2} v_1', \eta^{-2} v_2', \eta^{2}\omega^{2} v_3', t'). \tag{4.26}$$

如果 K，L 为奇数（分别为偶数），我们定义 $N \equiv K$（分别为 $K/2$）和 $M = L$（分别为 $L/2$）。现在，在几何上有效作用的群为 $\Gamma = \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$。在北极和南极，我们现在有两个 $\mathbb{C}^3/(\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M)$ 类型的奇点。它们在局部构造出 $\mathcal{T}_{(\mathrm{M})}{}^{X^6_{N,\,M}}$ 的副本，这在第 2.2.2 节中有讨论；并且当 $N = M$ 时，还会构造出众所周知的五维三节点理论 $\mathcal{T}_N$。商空间 X/Γ 现在将两个 $\mathcal{T}_{(\mathrm{M})}{}^{X^6_{N,\,M}}$ 理论耦合起来，同时保留四个实超荷。

一般的 a, b 的情况也相当类似。首先请注意，要求存在有效群作用意味着 $(2a, K) = (2b, L) = 1$。然而，若情况并非如此，则有效作用子群为

$$\Gamma' = \mathbb{Z}_{K'} \times \mathbb{Z}_{L'}\,, \quad K' = K/(2a, K)\,, \quad L' = L/(2b, L)\,. \tag{4.27}$$

局部模型 $\mathbb{C}^3/(\mathbb{Z}_{K'} \times \mathbb{Z}_{L'})$ 现在实现在北极和南极。由一个这样的奇点构造的五维超共形场论具有如下味对称代数：

$$\mathfrak{su}(K') \times \mathfrak{su}(L') \times \mathfrak{su}((K', L'))\,. \tag{4.28}$$

在转到紧致零截面时，味对称性

$$(\mathfrak{su}(K') \times \mathfrak{su}(L'))_{\mathrm{North}} \times (\mathfrak{su}(K') \times \mathfrak{su}(L'))_{\mathrm{South}} \;\to\; (\mathfrak{su}(K') \times \mathfrak{su}(L'))_{\mathrm{diag}} \tag{4.29}$$

在北极和南极处被规范化为对角子群。$\mathfrak{su}((K', L'))_{\mathrm{North}} \times \mathfrak{su}((K', L'))_{\mathrm{South}}$ 因子在五维中仍是味对称性。

从四维理论的角度来看，我们观察到一种味对称性

$$\mathfrak{su}((K', L'))_{\mathrm{North}} \times (\mathfrak{su}(K') \times \mathfrak{su}(L'))_{\mathrm{diag}} \times \mathfrak{su}((K', L'))_{\mathrm{South}}\,. \tag{4.30}$$

在零截面塌缩的极限下，还会进一步增强为

$$\mathfrak{su}((K', L'))_{\mathrm{North}} \times \mathfrak{su}(K')^2 \times \mathfrak{su}(L')^2 \times \mathfrak{su}((K', L'))_{\mathrm{South}}\,, \tag{4.31}$$

采用显而易见的记号。最后请注意，在这类例子中，我们有 $H_2(S^4/\Gamma) = 0$，并且在零截面塌缩的奇异极限下，不会出现由缠绕在 2-循环上的膜带来的额外无质量模。放宽条件 $a = c$ 和 $b = -d$ 后，可以考虑更一般的情形，而这些模型的几何在很大程度上相似。

5 广义对称性

在上一节中，我们通过对 G_2 锥取轨形，引入了若干四维 $\mathcal{N} = 1$边缘模理论。本节将转而讨论这些理论的高阶对称性。与文献中先前探讨的情形相比，这里有若干重要的微妙之处和区别。首先，体区本身已经是一个相互作用系统。通过追踪谱

在高维理论中的重缺陷，我们可以询问它们在四维理论中的归宿。我们将此称为“对称性继承”。一些结构，例如高形式对称性，会以自然的方式下降到四维系统中。一个直接的应用是，我们可以利用这一点读出非阿贝尔味对称性的整体形式。另一方面，一些结构，例如五维超共形场论的 2-群（其中涉及五维理论中 0-形式和 1-形式对称性的交织），并不会自动下降为边缘模理论中的高阶群结构。我们将更完整地处理这一问题留待未来工作。

本节其余部分安排如下。我们首先简要综述如何在几何工程超量子场论中实现缺陷，尤其是如何借此读出各种广义对称性。由于五维和七维理论构成了我们各种边缘模理论的体自由度，接下来我们简要综述这些背景中遇到的一些广义对称性。随后，我们计算上一节所实现理论的各种高形式对称性。我们发现，这些理论通常同时具有离散和连续的高阶对称性；关于后者，参见附录 A。最后，我们通过若干示例说明这些特征。这里我们主要关注 0-形式对称性，因为它决定了味对称性的整体结构。

5.1 缠绕膜所揭示的对称性综述

通过弦理论中的纯几何背景 X 实现的场论，其整体对称性[17] 由拓扑对称性算符及其表示（即缺陷算符）来规定。二者均由缠绕膜实现，在许多情况下，可以通过研究缺陷算符或对称性算符 [18, 30, 31, 106–108]提取系统的整体对称性数据。我们简要综述这两种视角。

第一种视角着重于将缺陷算符构造为缠绕在非紧致相对循环上的膜 $\mathbb{E}_*(X,\ \partial X)$。这里的 $\mathbb{E}$ 是某种广义[18] 同调理论 [18,30,31]。在大多数情况下，M理论中相关的同调理论是奇异同调 $\mathbb{E}_* = H_*$，借助它，缺陷算符被归入所谓的缺陷群 [18, 26, 30, 31]:

$$\mathbb{D} = \oplus_k \mathbb{D}^{(k)}\,, \qquad \mathbb{D}^{(k)} = \mathbb{D}^{(k)}_{\text{M2}} \oplus \mathbb{D}^{(k)}_{\text{M5}}\,. \tag{5.1}$$

缺陷群包含通过 M2 膜和

[17]我们将讨论范围限定为源自 X 拓扑、而非度量数据（例如等距变换）的SQFT内部对称性。[18]另请参阅 [200]，其中从背景场的角度指出了这一点。

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^{(k)}_{\mathrm{M2}} &\cong \frac{H_{3-k}(X,\partial X)}{H_{3-k}(X)} \cong H_{3-k-1}(\partial X)\big|_{\mathrm{trivial}} \\ \mathbb{D}^{(k)}_{\mathrm{M5}} &\cong \frac{H_{6-k}(X,\partial X)}{H_{6-k}(X)} \cong H_{6-k-1}(\partial X)\big|_{\mathrm{trivial}}\,.\end{aligned} \tag{5.2}$$

这里，子群 $\mathbb{D}^{(k)}$ 收集 k维缺陷，这些缺陷受 k形式对称性作用；$|_{\mathrm{trivial}}$ 表示将包含映射 $\partial X \hookrightarrow X$ 提升到同调后，对其核的限制。

严格来说，在这样的局部几何 X 上工作会得到一个相对场论，依照 [2, 4, 206, 207]的意义而言。为了更充分地说明由给定几何背景定义的 SQFT，还必须给出各个背景场／通量在“无穷远处”的边界条件。粗略地说，我们将锥形几何 X 的径向方向视为拓扑场论的“类时”方向，然后把边界视为该拓扑场论的一个态。在该系统中指定一组极大可交换算符，就相当于选择一种“极化”。[19]

只有选择边界条件或极化后，才能得到绝对理论

$$\Lambda = \oplus_k \Lambda_{(k)},, \qquad \Lambda_{(k)} \subset \mathbb{D}^{(k)}\,, \qquad \mathcal{E}^{(k)} = \Lambda^{\vee}_{(k)} \equiv \mathrm{Hom}(\Lambda_{(k)}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \tag{5.3}$$

它确定了缺陷算符的一个极大互相局域子群。随后通过庞特里亚金对偶推知 k形式对称性 $\mathcal{E}^{(k)}$，记作 $\vee$。因此，由几何 X构造的给定绝对理论所导出的所有相对理论的对称性，都是缺陷群的庞特里亚金对偶的子群 $\oplus_k \mathcal{E}^{(k)} \subset \mathbb{D}^{\vee}$。在下一节中，我们将只考虑纯电极化，所有缺陷算符均由缠绕的 M2 膜构造。

第二种视角侧重于通过将膜缠绕在时空的渐近边界[106–108]上，来构造作用于缺陷算符的拓扑对称性算符（另见 [109]）。这些算符之所以具有拓扑性质，是因为它们与所构造量子场论的动力学自由度相距无限远，并且源自缠绕在形式上具有无限体积的圈上的膜。它们对带电算符的作用由与构成缺陷群 $\mathbb{D}$ 的缺陷算符之间的拓扑链接决定。这一视角的一个重要特征是，它会自动指向其他结构，例如附属于每个此类对称性算符的拓扑场论。然而，就本文的目的而言，我们主要关注于确定缺陷的谱

[19]由于 G_4 与 G_7 [26, 208]之间的通量不对易，因此有必要选取一个极大各向同性子格，其中通量算符彼此对易；这可由电磁对偶膜所包裹的循环之间的链接形式几何化地描述。由此确定一组极大的两两局域缺陷，并以相对量子场论为起点，进而得到一个绝对量子场论。这种子格若纯粹由电荷或磁荷构成，则天然满足两两局域。此过程有一个重要的微妙之处：11维三形式势的 Chern-Simons 项会使由G_7 通量指定的磁变量的编织关系更加复杂。这也是通常采用电极化更为简单的另一个原因。

以及与之相关的高阶对称性。

现在，只要渐近边界 ∂X 是奇异的，这两种观点都会变得更加复杂。[20] 对于第4节中汇总的 G_2-holonomy 轨形，渐近边界包含余维-4 和/或 -6 的奇异轨迹。在这种情况下，如 $[85, 86]$, 所示，还必须考虑不仅环绕 $H_*(\partial X)|_{\text{trivial}}$的 M2 膜和 M5膜，还要考虑与将奇异轨迹从 ∂X中切除/将其粘接回去相关的 Mayer-Vietoris 序列中出现的同调群。如果定义 $\Sigma \subset \partial X$ 为奇异轨迹，并将$T(\Sigma)$定义为其管状邻域，那么我们将[21] 环绕其的 M2 膜解释为

$$H_{3-k}(T(\Sigma), \partial T(\Sigma)) \cong H_{3-k-1}(\partial T(\Sigma))|_{\text{trivial}} \tag{5.4}$$

作为沿着在 Σ处与边界相交的非紧致奇异轨迹局域化的 SCFT 的电 k-形式对称性所带电的缺陷算符。边界 $\partial T(\Sigma)$ 是光滑的，因此其上的 M5膜

$$H_*(\partial T(\Sigma)) \tag{5.5}$$

构造边缘模理论 Σ [108] 的对称性算符。

最后补充一点，在缺陷群中，0-形式对称性的扭转贡献对应于非阿贝尔味对称性因子的中心，而自由部分则对应于额外的 $U(1)$ 对称性因子。

5.2 对称性继承

由于我们在体理论中有局域化模，因此可以预期，体区的一些对称性将通过我们称为“继承”的过程作用于这些边缘模。我们强调，这是一种相当普遍的概念，在存在体区／边界系统时均适用。

从背景 X 出发，理论 $\mathcal{T}_X$ 具有缺陷群 $\mathbb{D}(X)$，它编码了该理论的高阶对称性。在通过体理论与边缘模的交叉和交汇实现的理论中，讨论各个奇异轨迹 $V_i \subset X$ 会有所帮助；这些轨迹单独定义了完整系统 $\mathcal{T}_X$的构建模块 $\mathcal{T}_{V_i}$ 。其中每个 $\mathcal{T}_{V_i}$ 都有自己的缺陷群 $\mathbb{D}(V_i)$，以及与之对应的一组高形式对称性。在构建 $\mathcal{T}_X$的过程中，其中一些对称性会被规范化或破缺，但关于$\mathcal{T}_{V_i}$ 的缺陷／对称算符的命运，以及它们如何嵌入完整理论 $\mathcal{T}_X$，仍有一个明确的问题。通过比较二者，并追踪将对称性缺陷推至边界时产生的跃变（体区的 p 形式对称性会变成边界的（$p-1$）形式对称性），便可以确定哪一组.....

[20]原则上，可以考虑对所有奇点进行完整解析，包括边界处的奇点，但这通常会掩盖该系统的非阿贝尔味对称性。[21]在下文中，我们将不明确说明 $|_{\text{trivial}}$ 限定。注意，当四维理论处于其模空间中的 SCFT 点时，该条件会自动得到满足。

体理论的带电算符 $\mathcal{T}_{V_i}$ 可以作用于 $\mathcal{T}_X$的边缘模。

体区中的对称性：正是因为我们预计某些体广义对称性会下降到我们的边缘模上，所以现在我们简要综述一下我们可能会遇到的各种结构。五维理论和七维理论的高阶对称性已有研究，例如见 [30,31,55,84–86,160]。我们的处理将遵循 [85,86] 中给出的方法。

首先，所考虑的七维理论源于如下类型的局部几何$\mathbb{C}^2/\Gamma$ ，其中 $\Gamma \subset SU(2)$是具有ADE分类的有限群。若我们记与 Γ 相关联的单连通李群为 G_Γ，则可得线缺陷群同构于中心 Z_{G_Γ}。这些线由包裹在锥上的M2膜构成，而这些锥位于渐近边界的 1-循环 $H_1(S^3/\Gamma) \cong Z_{G_\Gamma}$ 上。这给出了由 1-形式对称性作用的完整电缺陷算符集合。

所考虑的五维理论源自如下类型的局部几何：$\mathbb{C}^3/\Gamma$ 其中$\Gamma \subset SU(3)$ 是有限群（分类见 [209–211]）。这里，电缺陷源于缠绕在非紧致三维圈和2-循环上的 M2 膜。它们对应五维理论中的局部算符/线算符，并受0-形式与1-形式对称群作用。相关循环实际上是挠性的，分别是 $H_2(S^5/\Gamma)$ 和 $H_1(S^5/\Gamma)$ 中元素上的锥。

这些0-形式与1-形式对称性可以结合成一个2-群。记 $(S^5/\Gamma)^\circ$ 为移除了奇点 Σ 的商空间 S^5/Γ 。那么，关于由 $(S^5/\Gamma)^\circ$ 和管状邻域 $T(\Sigma)$构成的覆盖的 Mayer-Vietoris 序列包含以下正合子序列

$$0 \;\to\; H_2(S^5/\Gamma) \;\to\; H_1(\partial T(\Sigma)) \;\to\; H_1((S^5/\Gamma)^\circ) \;\to\; H_1(S^5/\Gamma) \;\to\; 0 \tag{5.6}$$

并检测味对称群的射影表示中的算符，因此也检测由1-形式对称群对0-形式对称群作扩张而形成2-群 [66,69]的情形。非平凡的2-群由该序列在第三项处不分裂来刻画。

现在，我们从对称性继承的角度重新诠释这一关于五维理论中 2-群的结果。为简单起见，我们考虑一个具体例子： $SU(p)_p$ 超对称杨–米尔斯理论，对应于奇点 $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_{2p}$。在电框架中，我们有一个 2-群，将五维理论的 $\mathbb{Z}_p^{(1)}$形式对称性与该模型的 $SO(3)^{(0)}$ 0形式对称性混合起来。后者源自体七维超对称杨-米尔斯理论，对应于 $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_{2p}$ 轨形中的一个非紧致 A_1 轨迹。七维理论具有 $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ 中心对称性，它在五维边界上诱导出一种 $\mathbb{Z}_2^{(0)}$ 0形式对称性。后者对五维中无法被屏蔽、因而在射影表示中变换的线算符之荷进行参数化。这导出了正合序列

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_{2p} \to \mathbb{Z}_p \to 0 \tag{5.7}$$

其中 $\mathbb{Z}_{2p}$ 对应于被在全局对称群 [69]的确定表示下变换的算符屏蔽的线算符之荷。这由边界 $S^5/\mathbb{Z}_{2p}$ 上的 Mayer-Vietoris 序列编码，其中挖去了 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ 不变轨迹。这是

对称性继承的一个例子：边缘算符的相容边界条件由直线 (5.7) 参数化。事实上，对于 $[85,86]$,的 Mayer-Vietoris 论证，关键是存在延伸至边界的扩展奇点，从而产生一个奇点轨迹。如今，后者可以用高维体理论来解释。这一讨论也适用于由 G_2 锥的轨形产生的四维边缘理论。

四维边缘模的对称性继承：我们预期，在具有四维边缘模的系统中，体系统各构成部分的对称性也可能以自然的方式作用于完整理论。在此背景下，对称性继承将沿 Σ 局域化的 SCFT 的对称性与渐近锥形几何 X 尖端处低维模的对称性联系起来。从物理角度看，只需考虑体理论的拓扑对称性算符，并将它们完全推至边缘。从几何角度看，对称性继承由边界映射量化

$$\partial_n : H_n(\partial X) \to H_{n-1}(\partial T(\Sigma)) \tag{5.8}$$

这些映射取自关于覆盖$\partial X = (\partial X \setminus \Sigma) \cup T(\Sigma)$的 Mayer-Vietoris 长正合序列。由于 k-形式对称性取值于这些群的 Pontryagin 对偶群，而映射 $(\partial_n)^\vee$ （由 Pontryagin 对偶性所指定的逆变函子诱导）方向与式 (5.8) 相反，因此这说明了五维/七维理论的对称性如何映射到四维理论的对称性。一般而言，此映射可能具有非平凡的核与余核，因此我们在研究对称性继承时，将考察五维/七维理论中的哪些对称性不会成为四维对称性，以及哪些四维对称性并非源自高维体。

为了更详细地说明这一过程，我们进一步聚焦于电极化，并考察五维/七维线算符如何继承为四维局域算符。为此，我们需要考虑五维/七维理论在轨形化G_2-全纯空间中的几何实现，亦即将其视为该空间的子集。 G_2 锥的径向方向属于五维/七维世界体积，因此，一条线可以沿径向取向，从锥尖延伸至无穷远。在 G_2-全纯空间中，五维/七维理论局部模型里与该线相关的圈不再能在全局上成立。相反，在给定径向壳层中，覆盖 1-循环的相关锥必须是二维圈的限制。此类二维圈可以延伸于不同的五维/七维轨迹之间。M2膜缠绕在这样的二维圈上，会在四维中产生一个局域算符，其形态类似于五维/七维系统中的一组线算符。这类局域算符是高维线算符通过“限制”到 G_2 锥尖而继承下来的。将所有四维局域算符对继承而来的局域算符取商，便得到四维系统的内禀局域算符。

所有这些都由边界映射量化

$$\partial_2 : H_2(\partial X_0) \to H_1(\partial T(\Sigma)) \tag{5.9}$$

Mayer-Vietoris序列的。其中 X_0 表示带有坍缩零截面的 G_2 锥，而 $T(\Sigma)$ 表示其在渐近边界 ∂X_0中奇点的管状邻域。映射 ∂_2 将给定半径处的一个 2-循环映射到一个1-循环（的锥）。因此，像$\mathrm{Im}\,\partial_2$同构于继承对称性，而核 $\mathrm{Ker}\,\partial_2$ 同构于内禀对称性。前者由后者扩张

$$0 \;\to\; \mathrm{Ker}\,\partial_2 \;\to\; H_2(\partial X_0) \;\to\; \mathrm{Im}\,\partial_2 \;\to\; 0\,. \tag{5.10}$$

在下面的例子中，我们发现这个短正合列是分裂的。

同理，我们也可以考察五维理论的0-形式对称性，这些对称性通常与七维超对称杨-米尔斯扇区相关联（将其视为另一个“体理论”）。正如我们在第4节中已经看到的，这些对称性连同某些五维规范对称性，会直接下降为四维理论的味对称性。继承的一个有趣特点是，在某些情况下，缺陷群的贡献最终会变得平凡。这是因为，一旦我们进行一致的五维规范化，通常就会纳入额外的态；与用于构造体理论的孤立五维理论相比，这些态最终会改变四维边缘模理论中味群／味对称性的整体形式。

在我们的某些五维理论中，还可能存在更复杂的结构，例如通过2-群结构使0-形式与1-形式对称性相互纠缠（例如见 [55, 85, 86]）。正因为体区0-形式对称性的结构往往会受到五维规范化效应的改变，这也会影响此类高阶群结构本身。尽管如此，我们将这些现象的全面研究留待未来工作。

5.3 自发对称性破缺

我们的 G_2 锥轨形的一个重要特征是，对锥尖进行解析最终往往会破坏系统的某些对称性。我们已经在第4节中解释过，当存在非阿贝尔味对称性时，这种现象是普遍存在的，并表明锥尖处存在受这些对称性作用的局域自由度。

自然要问，我们是否可以对系统的各种广义对称性进行类似的分析。处理这个问题的一种方法是分别计算锥尖端解析前后的缺陷群。此处值得指出的是，在许多以往关于缺陷群的研究中，考察的是一类特殊的 k形式对称性，在这类对称性中，解析过程不会改变其结构（如 [18, 30, 31]所示）。例如，对于通过形如 $\mathbb{C}^3/\Gamma_{SU(3)}$的轨形实现的五维超共形场论，提取缺陷群的一种方法是显式解析几何 [160], ，但也可以直接利用体卡拉比-丘流形及其边界$S^5/\Gamma_{SU(3)}$的奇异同调来研究。我们在此处考察的一些情形所面临的问题是，一般而言，一个空间经爆破和平滑变形后可以具有不同的贝蒂数，而这进而

这意味着，原则上，缺陷群的结构会对这类变化敏感。因此，先验地说，我们可以预期，视我们的 G_2 锥是否已被解析，缺陷群的结构会有所不同。为强调这一点，我们有时会写作$\mathbb{D}(X_0)$和 $\mathbb{D}(X)$，分别表示奇异情形和已解析情形下的缺陷群。类似地，我们用 $\mathcal{E}(X_0)$和 $\mathcal{E}(X)$分别表示几何 X_0 和 X对应的缺陷群的电子群。出于前文概述的技术原因，我们主要将注意力限于电极化。在我们考虑的所有例子中，被破缺的缺陷群部分确实仅仅是对 0-形式对称性的贡献。关于各种连续 k-形式对称性的更多讨论，请参见附录 A。

然而，从边界的角度来看， ∂X 的拓扑不会因这类局域形变（无论是爆破还是光滑化）而改变。因此， [108]的分析表明，将膜包裹在“无穷远处”不会受到此类操作的影响；同样地，在奇点相和已解析相中，拓扑对称性算符都将保持不变。这与<style id='3'>自发对称性破缺完全相容：理论仍然保留原有的对称性，但带有该对称性电荷的局域自由度谱确实可能发生变化。[22]

5.4 例

在阐明了高阶对称性的一些一般特征后，我们现在转向对一些具体例子的分析。我们用来读出各种高阶对称性，以及这些对称性如何在边缘模系统中传承下来的核心数学工具，是对相关同调群的计算。对于 ∂X_0°的同调群，即去除了奇点的边界几何，需要额外注意一点，因为该几何有时会形变收缩到一个低维空间。为隐含地表示这一特征，当我们给出 $H_*(\partial X_0^\circ)$的生成元时，因此只列出非平凡的最高次数项贡献；也就是说，并非所有情况下都“完整列到 6”。

5.4.1 Quadrion 理论

首先，再来考察 Quadrion 理论。在北极和南极坐标片上的商空间为： $\Gamma = \mathbb{Z}_K$ 和 $\zeta = \exp(2\pi i/K)$,

$$(v_1, v_2, v_3, t) \sim (\zeta^c v_1, \zeta^d v_2, \zeta^{-c-d} v_3, t) \tag{5.11}$$

$$(v_1', v_2', v_3', t') \sim (\zeta^{-c} v_1', \zeta^d v_2', \zeta^{c-d} v_3', t'). \tag{5.12}$$

[22]例如，考虑 $(SU(N) \times SU(N))/\mathbb{Z}_N$ 的标量双基本表示的真空期望值 .

并满足以下指数约束

$$(|c|, K) = (|d|, K) = (|c+d|, K) = (|c-d|, K) = 1. \tag{5.13}$$

几何 X_0 由同调群刻画

$$\begin{aligned} H_*(X_0, \partial X_0)/H_*(X_0) &\cong \{0, 0, 0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_K^2, 0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_K, 0, \mathbb{Z}\} \\ H_*(\partial X_0) &\cong \{\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_K^2, 0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_K, 0, \mathbb{Z}\} \\ H_*(\partial X_0^\circ) &\cong \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_K, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_K^2, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^3\} \\ H_*(X, \partial X)/H_*(X) &\cong \{0, 0, 0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_K, 0, \mathbb{Z}_K, 0, \mathbb{Z}\} \end{aligned} \tag{5.14}$$

以及缺陷群的 Pontryagin 对偶刻画，可将其解释为可能的高形式对称群 $\mathcal{E} = \mathbb{D}_{\mathrm{M2}}^{\vee}$（在电极化下）。因此，我们发现，在零截面塌缩的极限下（通过 $H_*(X_0,\ \partial X_0)/H_*(X_0)$）

$$\mathcal{E}(X_0) = U(1)^{(0)} \times (\mathbb{Z}_K^{(0)})^2 . \tag{5.15}$$

由缺陷群贡献的四维 0-形式对称性为 $U(1) \times \mathbb{Z}_K^2$。我们将挠元解释为非阿贝尔味对称群的中心。通过研究边界映射，我们可以确定哪些贡献是从五维继承而来的

$$\partial_2 : H_2(\partial X_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_K^2 \to H_1(\partial T(\Sigma)) = \mathbb{Z}_K^4 \tag{5.16}$$

Mayer-Vietoris 序列中覆盖 $\partial X_0 = \partial X_0^\circ \cup T(\Sigma)$ 对应的边界映射。该边界映射说明了式 (5.4) 中给出的五维缺陷的内部支撑如何粘合成四维缺陷，因此这些缺陷继承自五维。对称性继承自以下五维理论：四份 $\mathcal{T}_{(\mathrm{M})\,\mathbb{C}^3/\Gamma}$，并且我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\partial_2) &= \left\{ \begin{array}{c} \text{4D 0-form symmetries that do not come from} \\ \text{5D bulk 1-form symmetries} \end{array} \right\} \\ \mathrm{Coker}(\partial_2) &= \left\{ \begin{array}{c} \text{5D 1-form symmetries that are transparent} \\ \text{to the 4D edge modes} \end{array} \right\} \\ \mathrm{Im}(\partial_2) &= \left\{ \begin{array}{c} \text{5D 1-form symmetries that are faithful 0-form} \\ \text{symmetries acting on the 4D edge modes} \end{array} \right\} . \end{aligned}$$

为了描述这些群，我们考虑生成这些群的循环

$$H_2(\partial X_0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_K^2 \cong ((\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/K\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}_K . \tag{5.17}$$

为此，让我们在 S^4 上引入一个坐标 y 作为高度坐标，其中北极和南极分别位于 $y = +1$ 和 $y = -1$。于是，(5.17) 中的因子 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 由此产生。

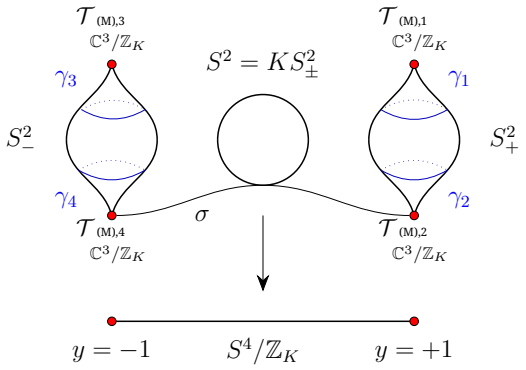


图 9：与 Quadrion 理论相关联的扭量空间示意图。在 $B = S^4/\mathbb{Z}_K$ 上的纤维化展示了两个例外纤维，它们投影到 $y = \pm 1$，并在建模为 $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_K$ 的余维六奇点 Σ 对之间延伸。Σ 由四个红点组成。水平 2-循环 σ 投影到 $H_2(S^4/\Gamma)$ 的生成元。分数纤维 $S^2_\pm$沿着一个挠性 1-循环 γ_i（蓝色）与每个奇点管状邻域的边界相交。2-循环 σ 具有类似的相交模式（未绘出）。

通过垂直循环，它们是投影到底空间的北极和南极的两个纤维类 $S^2_\pm$，其坐标分别为 $S^4/\Gamma \quad y = \pm 1$。然而，这些纤维是刚性的，倍数 $KS^2_\pm$ 与扭量空间 ∂X_0的通用2-球面纤维 S^2 同调，因此 $KS^2_\pm$ 是同调的。计及这一等价性，我们发现对 $H_2(\partial X_0)$有一个 $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/K\mathbb{Z}$ 的贡献，其中 $K\mathbb{Z}$ 沿对角线嵌入。剩余 $\mathbb{Z}_K$ 因子的生成元 σ 是水平的，它是 $H_2(S^4/\Gamma)$的挠性生成元在总空间中的提升，见图 9。

为了描述 ∂_2 的像，我们选取 $\mathbb{Z}^4_K$ 的自然基，其中每个因子都与 $S^5/\mathbb{Z}_K$ 中连接每个余维 6 奇点的挠性 1-循环 γ_i 相关联。采用这些约定后，我们得到。

$$\begin{aligned} \partial_2 : \quad ((\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/K\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}_K &\to \mathbb{Z}^4_K \\ (n, m, h) &\mapsto (n + h, n, m + h, m) \end{aligned} \tag{5.18}$$

我们可以轻松计算出

$$\mathrm{Ker}(\partial_2) = K\mathbb{Z} \tag{5.19}$$

$$\mathrm{Coker}(\partial_2) = \mathbb{Z}_K \tag{5.20}$$

$$\mathrm{Im}(\partial_2) = \mathbb{Z}^3_K \,. \tag{5.21}$$

现在让我们在缺陷算符层面讨论继承对称性。考虑一个包裹在 $S^2_\pm$上的M2膜。纤维 $S^2_\pm$ 在如图9 所示的由 $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_K$ 建模的奇点对之间延伸。限制到五维理论的局部模型 $T(\Sigma)$ 后，我们发现 $S^2_\pm$ 分解为四个锥，它们位于挠性的 1-循环 γ_i 上，并生成$H_1(\partial T(\Sigma)) \cong \mathbb{Z}^4_K$。这些是 $T(K)$ 中由 M2 膜包裹、用于构造

五维理论中的线缺陷。同样地，我们发现水平2-循环 σ 限制为两个锥。总的来说，因此我们有 $\partial_2^\vee$ 将五维理论的1-形式对称性子群 $\mathbb{Z}_K^3$ 推前，并将其嵌入四维0-形式对称性群 $U(1)\times\mathbb{Z}_K^2$。

赋予 $S^4/\mathbb{Z}_K$ 一个有限体积后，对称性破缺如下：[23]

$$\mathcal{E}(X_0)\to\mathcal{E}(X) \tag{5.22}$$

$$U(1)^{(0)}\times\mathbb{Z}_K^{(0)}\times\mathbb{Z}_K^{(0)}\to U(1)^{(0)}\times\mathbb{Z}_K^{(0)}. \tag{5.23}$$

5.4.2 与双基本物质耦合的 Quadrion

接下来考虑 Quadrion 与双基本物质耦合的例子。北极和南极坐标片上的商空间为（$\Gamma=\mathbb{Z}_K$ 和 $\zeta=\exp(2\pi i/K)$），

$$(v_1,v_2,v_3,t) \;\to\; (\zeta^c v_1,\zeta^d v_2,\zeta^{-c-d}v_3,t) \tag{5.24}$$

$$(v_1',v_2',v_3',t') \;\to\; (\zeta^{-c} v_1',\zeta^d v_2',\zeta^{c-d}v_3',t'). \tag{5.25}$$

指数的约束为

$$(|c|,K)=(|c+d|,K)=(|c-d|,K)=1,\quad K=md, \tag{5.26}$$

其中 $m,d>1$ 为某些整数。相关的同调群为:

$$\begin{aligned} H_*(X_0,\partial X_0)/H_*(X_0)&\cong\{0,0,0,\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_m^2,0,\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_K,0,\mathbb{Z}\}\\ H_*(\partial X_0)&\cong\{\mathbb{Z},0,\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_m^2,0,\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_K,0,\mathbb{Z}\}\\ H_*(\partial X_0^\circ)&\cong\{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_K,\mathbb{Z},\mathbb{Z}^2\oplus\mathbb{Z}_m^2,\mathbb{Z},\mathbb{Z}\}\\ H_*(X,\partial X)/H_*(X)&\cong\{0,0,0,\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_m,0,\mathbb{Z}_K,0,\mathbb{Z}\}\end{aligned} \tag{5.27}$$

因此，缺陷群的电极化为

$$\mathcal{E}(X_0)=U(1)^{(0)}\times(\mathbb{Z}_m^{(0)})^2. \tag{5.28}$$

接下来，回顾一下，味对称代数为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{su}(d)\times\mathfrak{su}(d)\times\mathfrak{u}(1)$。味对称群由边界映射确定。

$$\partial_2: H_2(\partial X_0)\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_m^2\quad\to\quad H_1(\partial T(\Sigma))\cong((\mathbb{Z}_K\oplus\mathbb{Z}_K)/\mathbb{Z}_d)^2\cong(\mathbb{Z}_K\oplus\mathbb{Z}_m)^2 \tag{5.29}$$

其定义域由纤维 $S^2_\pm$、投影到底空间北极和南极的两个纤维类以及 σ 生成，陪域则由四个 Hopf 圆生成（见图 10 ）。与 Quadrion 的情形类似，我们可以将四个 1- 循环 γ_i 与 K 中包含的四个余维六奇点对应起来。这些生成了 $\mathbb{Z}_K^4$，而对 $\mathbb{Z}_d^2$ 取商会将线性

[23]我们可由此得到相对同调群 $H_*(X,\partial X)/H_*(X)$。

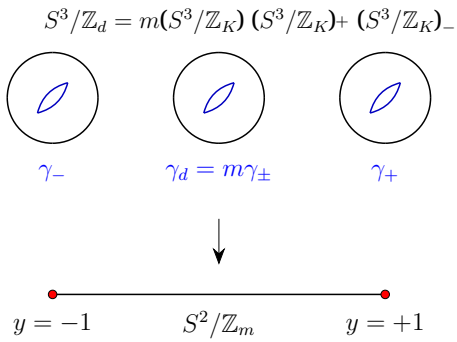


图10：Quadrion与双基本物质耦合时Hopf纤维化的几何。边界 $\partial T(\Sigma)$ 有两个连通分支，图中展示了其中一个。该边界分支纤维化于泪滴 $S^2/\mathbb{Z}_m$ 之上，其纤维包括一般的透镜空间纤维 $S^3/\mathbb{Z}_d$以及两个例外纤维 $S^3/\mathbb{Z}_K$ ，分别投影到其位于 $y = \pm 1$的北极和南极。Hopf圆 $\gamma_\pm$ 是刚性的；然而， $m\gamma_\pm$ 与一般透镜空间纤维的Hopf圆同调，因此 $\gamma_\pm$ 会对第一同调群产生 $(\mathbb{Z}_K \oplus \mathbb{Z}_K)/\mathbb{Z}_d \cong \mathbb{Z}_K \oplus \mathbb{Z}_m$ 贡献。

倍数按对进行识别，依据是连接它们的味膜。我们得到

$$\mathrm{Ker}(\partial_2) = K\mathbb{Z} \tag{5.30}$$
$$\mathrm{Coker}(\partial_2) = \mathbb{Z}_K \tag{5.31}$$
$$\mathrm{Im}(\partial_2) = \mathbb{Z}_K \oplus \mathbb{Z}_m^2\,. \tag{5.32}$$

在这个例子中，0-形式对称性继承自两个五维/七维系统的1-形式对称性，每个系统的电线缺陷群都同构于 $\mathbb{Z}_K \times \mathbb{Z}_m$。一个五维/七维系统由两个通过 $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_{md}$ 构造的五维超共形场论粘合而成，使得两个 $\mathfrak{su}(d)$ 轨迹紧化，从而对味对称性进行对角规范化。通过对称性继承，我们发现 X_0 相（即准超共形场论相）中的四维味对称群为：

$$G_F = \frac{SU(d) \times SU(d) \times U(1)}{\mathbb{Z}_K(m,0,1) \times \mathbb{Z}_K(0,m,1)} \times \mathbb{Z}_m^2 \tag{5.33}$$

具有从两个五维/七维系统继承而来的 $\mathbb{Z}_K \times \mathbb{Z}_m^2$ 子群。

赋予 $S^4/\mathbb{Z}_K$ 有限体积后，一些零形式对称性会破缺：

$$\mathcal{E}(X_0) \to \mathcal{E}(X) \tag{5.34}$$
$$U(1)^{(0)} \times \mathbb{Z}_m^{(0)} \times \mathbb{Z}_m^{(0)} \to U(1)^{(0)} \times \mathbb{Z}_m^{(0)}. \tag{5.35}$$

5.4.3 五维超共形场论与味堆叠相交

接下来考虑由与味堆栈相交的五维超共形场论构成的系统。北极和南极图册上的商空间分别为（其中 $\Gamma = \mathbb{Z}_K$ 和 $\zeta = \exp(2\pi i/K)$）：

$$\begin{aligned}(v_1, v_2, v_3, t) &\to (\zeta v_1, \zeta^{-1} v_2, v_3, t) \qquad (5.36)\\ (v_1', v_2', v_3', t') &\to (\zeta^{-1} v_1', \zeta^{-1} v_2', \zeta^2 v_3', t')\,. \qquad (5.37)\end{aligned}$$

相关的同调群为：

$$\begin{aligned} H_*(X_0, \partial X_0)/H_*(X_0) &\cong \{0,0,0,\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_K,0,\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_K,0,\mathbb{Z}\}\\ H_*(\partial X_0) &\cong \{\mathbb{Z},0,\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_K,0,\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_K,0,\mathbb{Z}\}\\ H_*(\partial X_0^\circ) &\cong \begin{cases}\{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_K,\mathbb{Z},\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_K,\mathbb{Z},\mathbb{Z}^2\} & K \text{ odd}\\ \{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_K,\mathbb{Z},\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_K,0,\mathbb{Z}\} & K \text{ even}\end{cases}\\ H_*(X, \partial X)/H_*(X) &\cong \{0,0,0,\mathbb{Z},0,\mathbb{Z}_K,0,\mathbb{Z}\}\end{aligned} \qquad (5.38)$$

因此，缺陷群的电极化的庞加莱对偶为

$$\mathcal{E}(X_0) = U(1)^{(0)} \times \mathbb{Z}_K^{(0)}. \qquad (5.39)$$

回到第4节，当 K 分别为偶数和奇数时，味对称代数为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(K) \times \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{u}(1)$ 和$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(K) \times \mathfrak{u}(1)$。因此，准 SCFT 相中的味对称群为：

$$\begin{aligned} G_F &= \frac{SU(K)\times SU(2)}{\mathbb{Z}_2(K/2,1)} \times U(1) && (K \text{ 偶数})\\ G_F &= \frac{SU(K)\times U(1)}{\mathbb{Z}_K(1,1)} && (K \text{ odd})\end{aligned} \qquad (5.40)$$

对 $S^4/\mathbb{Z}_K$ 赋予有限体积后，缺陷群的电极化的庞特里亚金对偶破缺为

$$\mathcal{E}(X) = U(1)^{(0)} \qquad (5.41)$$

5.4.4 类似 Trinion 的对

作为最后一个例子，我们考虑类似三元组的对，其中我们将 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(S^4)$ 按 $\Gamma = \mathbb{Z}_K \times \mathbb{Z}_L$取商。令 $\omega = \exp(2\pi i/K)$ 和 $\eta = \exp(2\pi i/L)$，北极和南极上的群作用为：

$$\begin{aligned}(v_1, v_2, v_3, t) &\to (\omega^{2b} v_1, \eta^{-2a} v_2, \eta^{2a}\omega^{-2b} v_3, t) \qquad (5.42)\\ (v_1', v_2', v_3', t') &\to (\omega^{-2b} v_1', \eta^{-2a} v_2', \eta^{2a}\omega^{2b} v_3', t'). \qquad (5.43)\end{aligned}$$

定义 $K' = \gcd(K, 2a)$ 和 $L' = \gcd(L, 2b)$。相关的同调群为：

$$\begin{aligned} H_*(X_0, \partial X_0)/H_*(X_0) &\cong \{0, 0, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{\gcd(K',L')}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{K'} \oplus \mathbb{Z}_{L'} 0, \mathbb{Z}\} \\ H_*(\partial X_0) &\cong \{\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{\gcd(K',L')}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{K'} \oplus \mathbb{Z}_{L'}, 0, \mathbb{Z}\} \\ H_*(\partial X_0^\circ) &\cong \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{K'} \oplus \mathbb{Z}_{L'}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{\gcd(K',L')}, \mathbb{Z}^5, \mathbb{Z}^3\} \\ H_*(X, \partial X)/H_*(X) &\cong \{0, 0, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{\gcd(K',L')}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{K'} \oplus \mathbb{Z}_{L'} 0, \mathbb{Z}\}, \end{aligned} \tag{5.44}$$

而从缺陷群中读出的电对称性仅仅是

$$\mathcal{E}_{\mathrm{SCFT}} = U(1)^{(0)}. \tag{5.45}$$

味对称代数为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(1) \times \mathfrak{su}(K') \times \mathfrak{su}(L') \times \mathfrak{su}(\gcd(K', L'))$。我们再次可以通过研究该映射来确定味群的整体结构

$$\partial_2 : H_2(\partial X) \cong \mathbb{Z} \ \to \ H_1(\partial T(\Sigma)) \, . \tag{5.46}$$

群 $H_2(\partial X)$ 由投影到 $y, y' = 1$ 的纤维生成，这些纤维由 Γ 固定，我们分别将它们记为 $S^2_\pm$。它们是一般扭量空间纤维的 $\mathrm{lcm}(K', L')$ 重折叠。两种选择是同调的。每当 $\gcd(K', L') \neq 1$ 时，我们发现它们包含在奇点轨迹 Σ 中，特别是，它们不与 $\partial T(\Sigma)$ 相交。因此 $\partial_2 = 0$。换言之，味对称群为：

$$G_F = PSU((K', L')) \times PSU(K')^2 \times PSU(L')^2 \times PSU((K', L')) \times U(1) \, . \tag{5.47}$$

6 Further Examples

在前几节中，我们主要关注空间 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(S^4)$ 及其被等距变换的有限子群取商所得的商空间。这类几何中遇到的许多结构，都可以自然地推广到具有完备 AC 度量的其他 G_2-全纯空间。在这方面，取 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(M)$ 上的 Bryant-Salamon 度量，可以得到一类自然的例子：它们是自对偶爱因斯坦四维轨形 M 上反自对偶二形式丛及其商空间。我们将首先讨论 $M = \mathbb{CP}^2$ 及其离散商空间，并简要重访加权射影空间 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(\mathbb{WCP}^2)$ 上的反自对偶二形式丛这一情形；该情形已在 [156] 中讨论，并探讨其与本文研究内容的关系。我们还将展示，从一个八维环境几何出发，所有这些涉及由阿贝尔群作用产生的轨形奇点的不同情形，都可以统一在一个构造中。

6.1 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(\mathbb{CP}^2)$的物理学与几何

为我们的分析作铺垫，我们先简要综述 $X = \Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(\mathbb{CP}^2)$ 的物理学与几何，以及其完备的 AC Bryant-Salamon 度量。在这种情形下，∂X 是六维流形 $\mathbb{F}$，即 $\mathbb{CP}^2$ 的扭量空间。它也称为旗流形，可表示为商空间 $SU(3)/U(1) \times U(1)$。

由于我们将关注对 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(\mathbb{CP}^2)$ 取有限商空间，因此有必要对边界几何 $\partial X = \mathbb{F}$ 给出更统一的刻画。该空间可视为 $\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2$ 中的一个二次曲面。考虑两个 $\mathbb{CP}^2$ 的副本，分别记为 $\mathbb{CP}^2_V$ 和 $\mathbb{CP}^2_W$，其齐次坐标分别为 V_i 和 W_i，对应于 $i = 1, 2, 3$。旗流形由零点集 $V \cdot W = V_1W_1 + V_2W_2 + V_3W_3 = 0$ 扫出的超曲面参数化（例如参见 [212]，其中有清晰的阐述）：

$$\mathbb{F} = \{([V_1 : V_2 : V_3], [W_1 : W_2 : W_3]) \in \mathbb{CP}^2_V \times \mathbb{CP}^2_W \,\big|\, V \cdot W = 0\}. \tag{6.1}$$

旗流形 $\mathbb{F}$ 存在如下由叉积给出的 twistor 纤维化 $\pi : \mathbb{F} \to \mathbb{CP}^2_U$：

$$\begin{aligned} \pi([V_1, V_2, V_3], [W_1, W_2, W_3]) &= [V_2^* W_3 - V_3^* W_2, V_3^* W_1 - V_1^* W_3, V_1^* W_2 - V_2^* W_1] \\ &\equiv [U_1, U_2, U_3]. \end{aligned} \tag{6.2}$$

注意，该映射不是全纯的。总而言之，实际上我们有三个不同的 $\mathbb{CP}^2$：$\mathbb{CP}^2_U$、$\mathbb{CP}^2_V$ 和 $\mathbb{CP}^2_W$。如 [200], 中所述，当零截面收缩至零大小时，这三个 $\mathbb{CP}^2$ 的作用可以互换；这可解释为一种 $\mathbb{Z}_3$ 对称性，而当我们将锥 X_0 的尖端解析到有限大小时，该对称性便会破缺。事实上，描述这一情形所需的最小场内容是三个四维 $\mathcal{N} = 1$ 手征超场 Φ_i，它们通过三次超势 $\Phi_1\Phi_2\Phi_3$ 耦合；其中一个 Φ_i 的真空期望值为给定几何的 $\mathbb{CP}^2$ 体积模量提供参数化。[24]

() 的对称性现在让我们转而讨论 $X = \Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(\mathbb{CP}^2)$ 的对称性，包括零截面收缩至零大小的极限 X_0。首先，我们注意到，由于 $\mathbb{F} = SU(3)/U(1) \times U(1)$ 是一个陪集空间，它显然具有 $SU(3)$ 群作用。对于作为 $\mathbb{CP}^2_V \times \mathbb{CP}^2_W$ 中超曲面的参数化形式，当 $A \in SU(3)$ 时，我们有：

$$A \cdot (V, W) = (A^* V, AW), \tag{6.3}$$

其中，A 表示对由 W_i组成的列向量进行左乘，而 A^* 表示复共轭（但非转置）矩阵，对由 V_i组成的列向量进行左乘。$SU(3)$ 的中心平凡作用，因此我们实际上描述的是

[24]人们可能会问，这是否已经是四维中存在相互作用定点的证据。例如，如果我们考虑在同一个奇异几何上的IIA，所谓的"XYZ模型"将导致一个非平凡定点。这里的极限次序有所不同，特别是，四维中的同一个三次耦合是边缘无关的。

$\mathbb{F}$上的一个 $PSU(3)$ 自同构。$\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(\mathbb{CP}^2)$上的 G_2-度量在渐近情况下体现出这些作为等距变换[200]的对称性。除了这些连续对称性之外，还存在一些离散群。它们对旗流形坐标的作用如下：

$$\mathbb{Z}_2 \subset S_3: \quad \sigma_2 \cdot (V, W) = (W^*, V^*) \tag{6.4}$$
$$\mathbb{Z}_3 \subset S_3: \quad \sigma_3 \cdot (U, V, W) = (W, V, U), \tag{6.5}$$

其中第二行还包含了一个涉及扭量空间底空间 $\mathbb{CP}^2_U$ 的置换。因此， $\mathbb{F}$ 的完整等距对称群为 $PSU(3) \times S_3$。对于 X_0，这一对称性仍然保留，但在具有几何 X 的已解析相中，S_3 的 $\mathbb{Z}_3$ 子群被破坏。

6.1.1 阿贝尔群作用

现在我们进一步专门讨论阿贝尔群作用。 $PSU(3)$ 的极大环面是商空间 $U(1)_1 \times U(1)_2/\mathbb{Z}_3$。令 α 和 β 分别表示 $U(1)_1$ 和 $U(1)_2$ 中的元素。于是，我们在旗流形 $\mathbb{F}$ 上有如下作用：[25]

$$([V_1, V_2, V_3], [W_1, W_2, W_3]) \;\mapsto\; ([\alpha V_1, \beta V_2, V_3], [\alpha^{-1} W_1, \beta^{-1} W_2, W_3]). \tag{6.6}$$

为了了解不动点集，考虑纤维化 $\mathbb{F} \to \mathbb{CP}^2_V$。这倾向于几何模空间的三个分支之一，但我们将说明经过翻转变换后不动点集如何改变。余维为 6 的不动点可能出现在底空间的三个位置： $\{V_1 = V_2 = 0\}$， $\{V_2 = V_3 = 0\}$， 和/或 $\{V_3 = V_1 = 0\}$。注意，条件 $V_1 = V_2 = 0$ 根据 $\mathbb{CP}^2_V \times \mathbb{CP}^2_W$ 中用于定义方程 $\mathbb{F}$ 的条件 $V \cdot W = V_1 W_1 + V_2 W_2 + V_3 W_3 = 0$，意味着 $W_3 = 0$。

现在，我们可以用三个不同的局部片覆盖 $\mathbb{CP}^2_V$，并且在每个局部片中，群作用都写作

$$\begin{aligned}
[V_1/V_3, V_2/V_3, 1] &\;\mapsto\; [\alpha V_1/V_3, \beta V_2/V_3, 1] \\
[V_1/Y_2, 1, V_3/V_2] &\;\mapsto\; [\alpha\beta^{-1} V_1/V_2, 1, \beta^{-1} V_3/V_2] \\
[1, V_2/V_1, V_3/V_1] &\;\mapsto\; [1, \alpha^{-1}\beta V_2/V_1, \alpha^{-1} V_3/V_1].
\end{aligned} \tag{6.7}$$

聚焦于（$V_3 \neq 0$）局部片，可通过坐标 W_1/W_2 或 W_2/W_1 在纤维方向上对其作局部延拓，具体取决于我们位于纤维的北极（ $W_2 = 0$）还是南极（ $W_1 = 0$）。这种加倍现象在 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(S^4)/\Gamma$ 几何中很常见：两个奇异轨迹可以投影到底空间中的同一轨迹 S^4，这表示一个连通的奇异轨迹（余维为 6 或 4），它从渐近无穷远处出发，穿过零截面，延伸至另一个渐近无穷远处的轨迹。通过瓣变换，可以置换哪些“出射”奇点与各个“入射”奇点相匹配，

[25]这里我们利用坐标的齐次性，选择了 $PSU(3)$ 群作用的一种便捷表示。

因此，我们现在列出 $SU(3)/U(1)^2$ 的六个 $\mathbb{C}^3$ 坐标片上的极大环面作用：

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2, x_3) &\mapsto (\alpha x_1, \beta^{-1} x_2, \alpha^{-1}\beta x_3) \\
(x_1', x_2', x_3') &\mapsto (\alpha^{-1} x_1', \beta x_2', \alpha\beta^{-1} x_3') \\
(y_1, y_2, y_3) &\mapsto (\alpha^{-1}\beta y_1, \beta^{-1} y_2, \alpha y_3) \\
(y_1', y_2', y_3') &\mapsto (\alpha\beta^{-1} y_1', \beta y_2', \alpha^{-1} y_3') \\
(z_1, z_2, z_3) &\mapsto (\alpha^{-1}\beta z_1, \alpha z_2, \beta^{-1} z_3) \\
(z_1', z_2', z_3') &\mapsto (\alpha\beta^{-1} z_1', \alpha^{-1} z_2', \beta z_3').
\end{aligned} \tag{6.8}$$

x_i 和 x_i' 坐标参数化了位于 $\mathbb{P}^1$ 纤维中、以北极和南极为中心的 $\mathbb{C}^3$ 局部片，其上方是 $V_1 = V_2 = 0$。它们定义如下：

$$x_1 = V_1/V_3, \quad x_2 = (V_2/V_3)^*, \quad x_3 = W_1/W_2 \tag{6.9}$$

$$x_1' = (V_1/V_3)^*, \quad x_2' = V_2/V_3, \quad x_3' = W_2/W_1 \tag{6.10}$$

由此可见，$\mathbb{C}^3$ 局部片的复结构不一定与 $\mathbb{CP}^2_V$ 底空间的复结构一致。坐标 y_i 和 y_i' 同样与 $V_3 = V_1 = 0$相关联，而 z_i 和 z_i' 则与 $V_2 = V_3 = 0$ 相关联，它们的定义可通过适当的循环置换得到。

6.2 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(\mathbb{CP}^2)/\Gamma$的例子

现在我们来看一些商空间 $X = \Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(\mathbb{CP}^2)/\Gamma$ 的具体例子，其中 Γ 是有限阿贝尔群。我们的目的并非详尽讨论，而是展示其中一些定性特征。首先，我们作一个一般性的说明：对有限阿贝尔群取商不会产生电 1-形式对称性。这是因为我们生成的所有奇点都延伸至无穷远处，因此发现 Γ 的每个元素在 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(\mathbb{CP}^2)$ 的边界上都有不动点。根据 Armstrong 定理，[213] 因而有 $\pi_1(\partial X/\Gamma) = 0$，这些模型不像基于 S^4 商空间的例子那样具有离散 1-形式对称性。因此，它们与那些例子的主要区别在于其奇异轨迹的结构，而这正是我们分析的重点。

6.2.1 具有一般 $\Gamma = \mathbb{Z}_K$ 的单个循环因子

在考虑 $\Gamma = \mathbb{Z}_K$时，我们需要指定其生成元如何嵌入 $U(1)_1 \times U(1)_2$ 中。该嵌入由整数 a, b 参数化，并设置 $\alpha = \zeta^a$ 和 $\beta = \zeta^b$，其中$\zeta = \exp(2\pi i/K)$。由此我们发现，群作用在各种（未加撇号的）坐标片上的形式为

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2, x_3, t_x) &\mapsto (\zeta^a x_1, \zeta^{-b} x_2, \zeta^{-a+b} x_3, t_x) \\
(y_1, y_2, y_3, t_y) &\mapsto (\zeta^{-a+b} y_1, \zeta^{-b} y_2, \zeta^a y_3, t_y) \\
(z_1, z_2, z_3, t_z) &\mapsto (\zeta^{-a+b} z_1, \zeta^a z_2, \zeta^{-b} z_3, t_z)
\end{aligned} \tag{6.11}$$

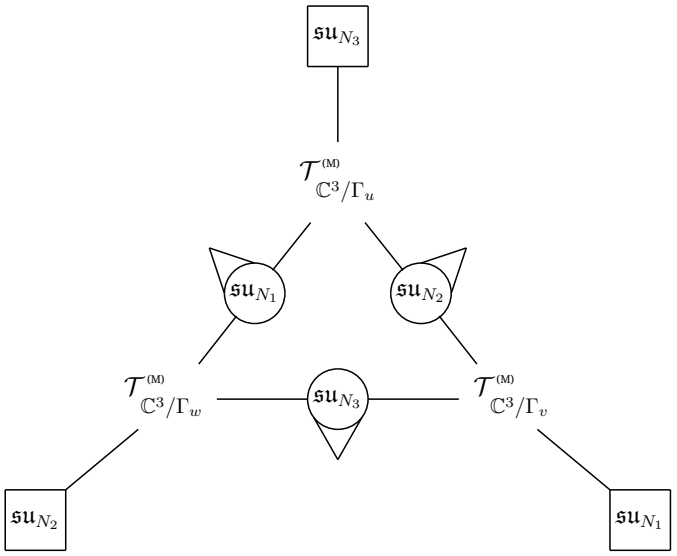


图11：与 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(\mathbb{CP}^2)/\Gamma$ 相关的五维理论，其群作用为 $\Gamma = \mathbb{Z}_K$。规范节点的锥表示一种五维规范化，其规范耦合取决于 G_2-holonomy 空间的径向坐标r ，从而保留四维 $\mathcal{N} = 1$ 超对称。

其中，在锥的每个局部片中，我们都指定了对 $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}$ 的作用，而群作用仅作用于 $\mathbb{C}^3$。每个局部片的行为与 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(S^4)$ 的商空间情形非常相似。我们来定义

$$N_1 = \gcd(K, |a|)\,, \quad N_2 = \gcd(K, |b|)\,, \quad N_3 = \gcd(K, |a-b|). \tag{6.12}$$

随后，我们可以将所得的五维理论网络呈现如图11所示。所有这些因子都被解释为四维边缘模理论中的味对称性。

注意，在五维理论中，支撑五维规范化的紧致 S^2的体积彼此相关。在固定的径向切片上，我们可以比较群作用前后每个 S^2 的体积。每个 S^2都会使其缩小 N_i/K 倍，从而得到以下三个规范耦合之间的关系：

$$\frac{1}{N_1}\frac{1}{g_1^{5\mathrm{D}}(r)^2} = \frac{1}{N_2}\frac{1}{g_2^{5\mathrm{D}}(r)^2} = \frac{1}{N_3}\frac{1}{g_3^{5\mathrm{D}}(r)^2} \tag{6.13}$$

其中， $g_i^{5\mathrm{D}}(r)$ 是半径为 r 的 G_2 锥中 $\mathfrak{su}(N_i)$ 的规范耦合。

例：Sexion 理论。 这些理论的特征是 $N_i = 1$ ，其中不存在余维四轨迹，因此它们类似于我们先前讨论过的 Quadrion 轨形。在这种情况下，只有由 $\mathbb{C}^3/\Gamma \times \mathbb{R}$ 建模的余维六轨迹。一个具体例子是 $K = 7$和 $a = 1$ 以及 $b = 2$。当 $\mathbb{CP}^2$ 塌缩时，我们会在三份 $\mathbb{C}^3/\Gamma \times \mathbb{R}_+$ 与 $\mathbb{C}^3/\Gamma \times \mathbb{R}_-$ 相交的位置得到一个余维七奇点。参见图12。

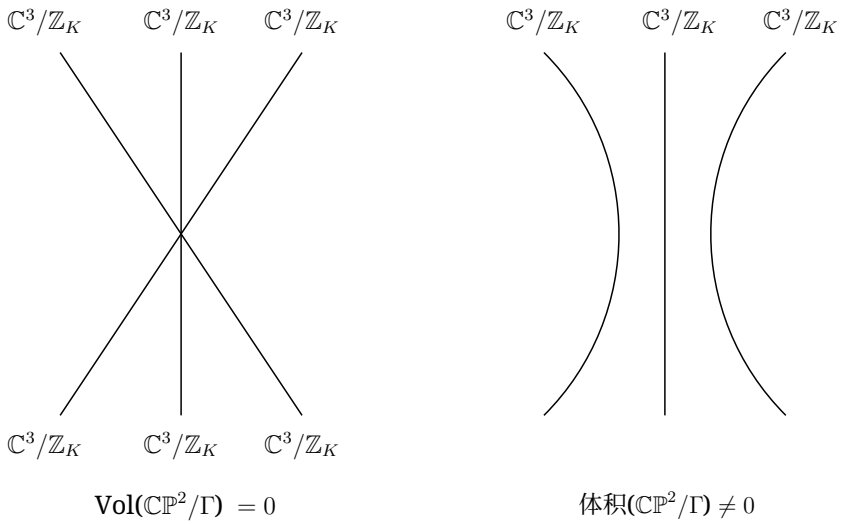


图12：打破 Sexion。 LEFT: 对应于一个Sexion理论的奇点，即一个由五维超共形场论组成的六价结点。 RIGHT: 对锥尖进行解析会触发一种打破模式，生成三个五维超共形场论。注意，这是几何模空间的三个分支之一；当翻转到另外两个分支时，五维超共形场论轨迹将由左图中顶端线段与底端线段的不同组合配对构成。

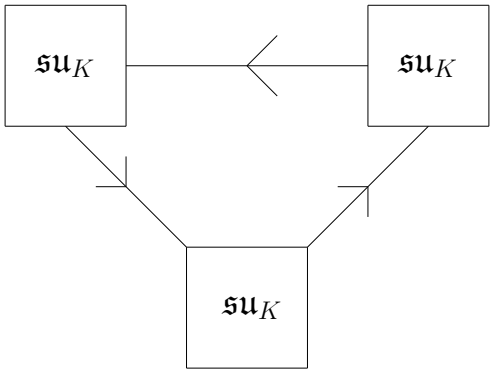


图13：与纯味轨形几何相关的低能四维 $\mathcal{N} = 1$物质的箭图。此处，连线表示双基本手征多重态，环表示三次超势。

例：纯味／耦合双基本 另一方面，我们可以考虑只包含余维四奇点的轨形几何。这些几何可通过取 $a = 0$、 $b = 0$ 或 $a = b$ 得到，而它们各自都意味着[26] $\mathbb{Z}_K \subset SU(2)$。这些 $\mathbb{Z}_K$ 商空间在形式上与 [200], 中给出的、将 Λ^2_{ASD}（$\mathbb{CP}^2$）降至 IIA 的 $U(1)$ 商空间相同；后者对应于在 $\mathbb{R}^6$ 中于一点相交的三个 D6膜。由此例生成的四维理论包含处于双基本表示中的四维 $\mathcal{N} = 1$ 手征多重态，并具有一个味不变超势耦合，该耦合由一条依次经过每个对称因子一次的闭合回路生成（见图13）。

[26]我们还假设 $\mathbb{Z}_K$ 对几何施加有效作用，因此，例如，如果 $a = 0$，我们假设 $\gcd(K, |b|) = 1$。

与底空间为 S^4/Γ 的情形的讨论一样，我们现在可以对 N_i 施加不同的约束，使其实现夸尔 11 的不同秩和连通性性质。不过，这里的讨论与已经分析过的情形类似，留给热心的读者自行探索。

6.3 使用 $\mathbb{WCP}^2$ 底空间的推广

在前几节中，我们首先研究了光滑 G_2-全纯空间，随后通过对离散等距变换取商空间，从这些空间构造出大类轨形。在本节中，我们通过考虑加权射影空间 $\mathbb{WCP}^2_{q_1,\,q_2,\,q_3}$ 上最先在 [156]中分析的反自对偶二形式丛，直接转向奇异几何。这类空间的等距变换群为 $U(1)^2$，原则上我们还可以对其离散子群取进一步的商空间。然而，即使不进行这类商空间构造，我们也已经发现了与此处先前讨论过的结构相似的奇异结构，因此我们选择将重点放在这些结构上。

为了给接下来的讨论搭建框架，我们将加权射影空间的射影坐标记为 Z_i，并引入整数。

$$n_1 = \gcd(q_2, q_3)\,, \qquad n_2 = \gcd(q_3, q_1)\,, \qquad n_3 = \gcd(q_1, q_2)\,, \tag{6.14}$$

$$r_1 = \gcd(q_1, |q_2 - q_3|)\,, \qquad r_2 = \gcd(q_2, |q_3 - q_1|)\,, \qquad r_3 = \gcd(q_3, |q_1 - q_2|)\,. \tag{6.15}$$

这些构型使得 3 个二维球面上存在 A_{n_i-1} ADE 奇点 $Z_i = 0$，而 A_{r_k-1} ADE 奇点则充满纤维，并投影到一个点，其 $Z_k = 1$ 坐标均为零。

总体而言，这些奇异轨迹的结构与 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(\mathbb{CP}^2)/\Gamma$ 中的类似，因此我们仍可将五维构型表示为图12所示，并作如下识别：$N_i = n_i$ 和 $N_i' = r_i$。

Kawasaki 在 [214]中证明，加权射影空间的同调群与非加权射影空间的同调群同构，特别地，我们有

$$H_2(\mathbb{WCP}^2_{q_1,q_2,q_3}) = \mathbb{Z} \tag{6.16}$$

该群无挠。与前文详细讨论过的底空间为 S^4 的情形相比，我们因此发现，膜缠绕挠二维圈不会产生额外的有质量模。不过，缠绕生成这一同调群的球面会产生额外的模。当射影空间的体积趋于零时，在半经典极限下，电粒子和磁弦都会变轻，因此我们仍预期圆锥奇点处存在有趣的物理学。

6.4 统一与进一步推广

在介绍了许多不同的例之后，对本文所考察的各种空间提供一个统一的视角也很有帮助。我们基本上遵循这一讨论

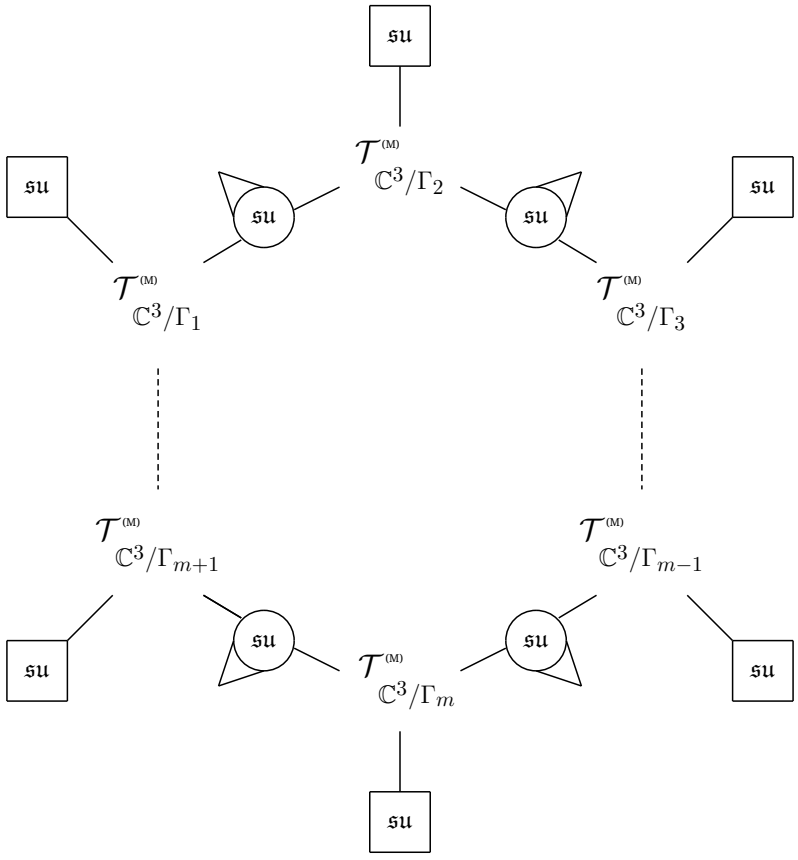


图14：与 n-苯几何（苯的推广）相关联的夸尔。我们省略了五维规范对称性和味对称性的秩。五维规范化保留四维$\mathcal{N}=1$ 超对称，但由于规范耦合依赖径向坐标而破坏了五维洛伦兹对称性。M2膜缠绕在零截面的挠周期上还可能产生更多有质量模。一般而言，$\Gamma_i \neq \Gamma_j$。相应的余维-4和-6奇异轨迹是非紧致的。虚线表示一个项链。规范节点的锥表示一种五维规范化，其规范耦合依赖于 r 该 G_2-holonomy空间的径向坐标，从而保留四维 $\mathcal{N}=1$ 超对称。

见 [156]。

相关构造依赖于将超Kähler商构造应用于平坦空间 $\mathbb{H}^{n+2}$。 $SU(2) \times Sp(n+2)$作用于该空间，其中 $Sp(n+2)$从右侧作用并保持三个复结构，而 $SU(2)$从左侧作用并旋转这些复结构。令 $H \subset Sp(n+2)$表示一个维数为 n的子群。超Kähler商 $\mathscr{X} = \mathbb{H}^{n+2}//H$的维数为 8，并继承了一个带有环面 $U(1)$的 $SU(2)$作用。商空间 $X_0 = \mathscr{X}/U(1)$是一个锥，并允许形变为 X；后者是商空间 $\mathscr{X}/SU(2)$的链接上的反自对偶二形式丛，而该链接一般是一个带有自对偶爱因斯坦度量的紧致四维轨形。

让我们更详细地考察例 $H = U(1)^n \subset Sp(n+2)$。对于 $\mathbb{H}^{m+2}$ 中的第 m个四元数平面，我们有四元数坐标 $Q_m = a_m + b_m j$，并考虑带有超Kähler矩映射的作用

$$\begin{aligned} \mu^\alpha_{\mathbb{R}}(p) &= \sum_{m=1}^{n+2} p^\alpha_m (|a_m|^2 - |b_m|^2) \\ \mu^\alpha_{\mathbb{C}}(p) &= \sum_{m=1}^{n+2} p^\alpha_m a_m b^*_m \,. \end{aligned} \tag{6.17}$$

这里，$\alpha = 1, \ldots, k$和 p表示 $n(n+2)$ 个整数 p^α_i，它们被组织成 n $U(1)$ 个长度为 $n+2$ 的荷矢量 p^α。于是我们有

$$\mathscr{X} = \left(\bigcap_{\alpha=1}^{k} (\mu^\alpha_{\mathbb{R}})^{-1}(0) \cap (\mu^\alpha_{\mathbb{C}})^{-1}(0) \right) / U(1)^n \tag{6.18}$$

我们再对一个额外的 $U(1)$ 取商空间，它的作用为 $(a_i, b_i) \mapsto (\lambda a_i, \lambda b_i)$，其中 $\lambda = \exp(i\phi)$，由此得到锥 $X_0 = \mathscr{X}/U(1)$。将 X_0 化解为 X 的螺栓 M 为

$$M = \left[S^{4n+7} \cap \left(\bigcap_{\alpha=1}^{k} (\mu^\alpha_{\mathbb{R}})^{-1}(0) \cap (\mu^\alpha_{\mathbb{C}})^{-1}(0) \right) \right] / U(1)^n \times SU(2) \,. \tag{6.19}$$

例如，当 $n = 0$ 时，我们有 $M = S^7/SU(2) = S^4$；而当 $n = 1$，荷矢量为 (p_1, p_2, p_3) 时，可得 $M = \mathbb{WCP}$，其权重为 $(p_2 + p_3, p_1 + p_3, p_1 + p_2)$；或者在所有 p_i 都为偶数 [156] 时，取其一半。从这里继续取有限商空间，就涵盖了此前的所有例子。

对于这个例子，可以通过注意到 $U(1)^2 \subset Sp(n+2)$ 作用在底空间上来直观地理解底空间 M，因此我们得到一个以实二维底空间 P 为底的环面纤维化 $T^2 \hookrightarrow B \to P$。根据超凯勒商构造，$P$ 必须是单连通的，因此其一般形式是一个带有边界边和顶点的多边形。在 P 的边上，T^2 纤维退化为一个圆；而在顶点处，纤维则完全塌缩。因此，纤维沿着各条边描绘出一串在顶点处相接的二维球面。借助

这一点，当 $n \geq 2$ 时，我们得到图5和图11的自然推广，如图14所示。更确切地说，我们有 $n+2$ 5 维超共形场论 $\mathcal{T}_{(\mathrm{M})\,\mathbb{C}^3/\Gamma_m}$，每个都带有至多三个局部味位置。在 G_2-全纯轨形中，其中一些味位置现在位于紧致子空间上，这通常会导致三个局部味对称性中的两个在五维被规范化（具有位置依赖规范耦合）。这种规范化将相邻的五维超共形场论配对，并对共同的对角子群进行规范化，因此每个五维理论通常只剩下一个“未规范化”的味对称性（非紧致二维循环上的七维超对称杨-米尔斯理论）。事实上，第三个在五维仍是味对称性，并充满反自对偶二形式丛的整个纤维。因此，我们通常预期会有拓扑为 $S^2 \times \mathbb{R}$ 的 $n+2$ 奇异轨迹，以及拓扑为 $\mathbb{R}^3$ 的 $n+2$ 轨迹。因此，在四维中，我们发现一个味对称性，其包含 $2n+4$ 个单李代数味因子。

当我们将 bolt $X \to X_0$ 收缩时，五维规范位置会变形为 $S^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \cup \mathbb{R}^3$，而五维味位置的拓扑保持不变。因此，呼吸模会自发地将 $n+2$ 对五维 $\mathfrak{su}$ 规范对称性破缺为其对角子群。

显然，若将上述构造推广到非阿贝尔群 H，进一步通过离散等距变换对 X 取商以引入额外奇点，或与 [215]中提出的构造建立联系，都会非常有趣。这些问题留待未来研究。

7 结论

SQFT 的交汇与交叉提供了一种通用方法，用以构造体自由度与局域在低维缺陷上的模之间的耦合。本文展示了如何构造这类例子，其中体区本身是一个强耦合系统。我们构造中的关键几何要素是渐近锥形的 G_2-全纯轨形。当该空间的零截面具有有限大小时，我们可以将这一几何解释为通过味对称性的对角规范化而耦合起来的五维超共形场论。当零截面收缩至零大小时，便会产生一个四维准超共形场论边缘模，它与五维体模存在非平凡耦合。我们利用这一几何视角提取了非阿贝尔味对称性，以及五维理论的各种离散高形式对称性及其向四维系统的传递。在本节余下部分，我们将讨论一些自然的推广方向。

在体理论的结构确立之后，自然可以研究流入准 SCFT 自由度的反常。提取这些数据的一种方法是确定五维／七维体理论的拓扑项，并据此提取各种连续反常和离散反常等量。

在很大程度上，我们的分析都围绕一类特殊的商空间展开： X/Γ其中 Γ是一个阿贝尔群，它在 X上的群作用格外简单。研究由更一般的阿贝尔群作用所生成的几何也会很有趣；此外，

作为真正的非阿贝尔群作用。这些作用将带来额外的新颖结构以及非平凡的体区／边界耦合。附录B对这些内容作了初步介绍。

在相同的商空间 X/Γ 上考虑IIA 弦理论以构造 3D $\mathcal{N}=2$ 准超共形场论也是很自然的。此类例子的一个有趣特征是，与其四维对应理论相比，3D $\mathcal{N}=2$ 理论的红外动力学已经能够展现出新的强耦合现象。相关的一点是，在此类背景中的 IIB 弦理论很可能会展现出不同的强耦合动力学，这仅仅是因为IIA和 IIB 在 ADE 奇点上的理论可能导致截然不同的红外行为。

虽然我们主要关注 G_2-全纯空间，但也可以考虑对 M理论以及 IIA/IIB在 $Spin(7)$-全纯空间上的相关分析。这将产生 3D $\mathcal{N}=1$ 背景中的准超共形场论示例（在M理论的情况下），以及对于 IIA和 IIB，分别具有 $\mathcal{N}=(1,1)$和 $\mathcal{N}=(0,2)$ 超对称性的 2D 准超共形场论。

我们拥有一个完备的 G_2-holonomy 空间这一条件，对五维体理论组合并耦合到四维边缘模的方式施加了非平凡的限制。例如，在 G_2 空间中，对五维超共形场论的味对称性进行五维规范化，通常还伴随着一个规范耦合，该耦合取决于 AC G_2-holonomy 度量中的径向位置。这表明，能够支持边缘模的 $D>4$ 理论交汇必须满足自洽性约束。我们不禁猜想，正如沼泽地计划（见 [216]）对有效场论何时能够与量子引力一致耦合施加非平凡的限制一样，也可能存在一些“难以察觉”的自下而上一致性条件，而从自上而下的视角来看，这些条件却很容易识别。[27] 要在当前语境下实现这一点，需要对非紧致特殊全纯空间中的可能奇点进行一般性分类。这是一个颇具挑战性的课题，毫无疑问，出于许多原因，它都值得研究。

[27]这一猜想的一个精确定义是：任何自洽的 d维量子场论都必须能够与某种 $D\geq d$维引力理论自洽地耦合， [162], 其中 D可取某个值。值得注意的是，量子场论的任何弦论实现都会自动满足这一要求。

致谢

我们感谢 D. Xie 在本项目尚处于初期发展阶段时与我们合作。MDZ 感谢 C. Closset 和 I. Garcı́a-Etxebarria 就相关主题进行的多次讨论。本工作始于 2019 年在 KITP 举行的“物理学与特殊全纯性”会议，BSA、MDZ 和 JJH 感谢会议组织者在会议期间的热情款待。本工作的一部分于 2023年 在 KITP 举行的“物理学与特殊全纯性”会议期间完成，BSA 和 MH 感谢会议组织者在会议期间的热情款待。BSA 的工作由 Simons Foundation 的一项资助支持（#488569，Bobby Acharya）。MDZ 的工作获得了欧洲研究理事会（ERC）根据欧盟“地平线 2020”研究与创新计划提供的资助（资助协议编号 851931）。MDZ 还感谢 Simons Foundation 资助 #888984（Simons Collaboration on Global Categorical Symmetries）的支持。JJH 和 ET 的工作由美国能源部（高能物理项目）资助，项目编号 DE-SC0013528。JJH 和 MH 的工作还部分获得宾夕法尼亚大学 University Research Foundation 的资助。MH 的工作还获得 Simons Foundation Collaboration 资助 #724069“几何、分析与物理学中的特殊全纯性”的支持。

连续 k形式对称性

在本附录中，我们重点关注形式为 $U(1)^{(k)}$ 的连续高形式对称性集合，它们出现在我们对 G_2-全纯流形 $\Lambda^2_{\text{ASD}}(S^4)$ 的所有商空间中。具体而言，我们分析这些对称性下的带电对象是什么，确定这些对称性是否在已解析相 $\text{Vol}(S^4) \neq 0$ 中自发破缺，以及这些带电对象在已解析相中的命运。

回顾一下，我们用 $X_0 = \text{Cone}(\mathbb{CP}^3)$ 表示未解析的 G_2 锥，并用 $X = X = \Lambda^2_{\text{ASD}}(S^4)$ 表示几何的已解析相。我们强调，虽然这个未取商的几何实现了一个自由手征多重态 Φ [200]，但本小节中的讨论可推广到 X_0 的商空间，因为 $\mathbb{CP}^3$ 的（余）同调类在这些商空间下仍然存在。

令 $\mathbb{M}_4$ 为横向于 G_2-holonomy 几何的四维时空，则我们可以沿着 $\mathbb{M}_4 \times \mathbb{CP}^3$ 对 11 维超引力形式 C_3 和 C_6 进行 KK 展开：[29]

$$C_3 = a_1 \wedge \omega_2 \tag{A.1}$$

$$C_6 = b_4 \wedge \omega_2 + b_2 \wedge \omega_4 + b_0 \wedge \text{Vol}_{\mathbb{CP}^3} \tag{A.2}$$

其中 $\omega_2 \in H^2(\mathbb{CP}^2, \mathbb{Z})$ 是超平面类，$\omega_4 = \omega_2^2$，且 $\text{Vol}_{\mathbb{CP}^3} = \omega_2^3$。

[28]商空间之后可能还存在额外的连续非阿贝尔 0-形式对称性，但本节我们仅讨论阿贝尔对称性。[29]我们忽略展开分量 $C_3 \supset a_3$，因为原本可能的缺陷算符只是一个不会包裹径向方向的 M2膜。

我们看到，场 a_i 和 b_i 是高阶形式对称性的背景场

$$U(1)_{b_0}^{(-1)} \times U(1)_{a_1}^{(0)} \times U(1)_{b_2}^{(1)} \times U(1)_{b_4}^{(3)} \tag{A.3}$$

中 M_4 上的四维 SQFT，其中下标表示背景场。将 [200] 中的论证推广到高形式对称性后可知，在 X_0 或 X 中自发破缺的对称性，是那些对应于无法延拓到体区的 $\mathbb{CP}^3$ 上同调类的对称性。换言之，若嵌入映射的拉回

$$\iota^* : \ H^i(X) \to H^i(\mathbb{CP}^3) \tag{A.4}$$

是平凡的，则该对称性会自发破缺。为理解其中原因，我们具体考察 $U(1)^{(0)}$，此时 $H^2(X) = 0$，因为 $\Lambda^2_{\text{ASD}}(S^4)$ 收缩到 S^4，由此可见，我们只能将 (A.1) 中的 $C_3 = a_1 \wedge \omega_2$ 延拓到体区 X，使其满足 $C_3 = a_1 \wedge \widetilde{\omega}_2$，其中 $d\widetilde{\omega}_2 \neq 0$。$U(1)^{(0)}$ 规范变换 $a_1 \to a_1 + d\lambda_0$ 不再是对称性，因为 $dC_3 = da_1 \wedge \widetilde{\omega} - a_1 \wedge d\widetilde{\omega}$ 不再保持不变。对于 X_0，有一个微妙之处：虽然对 $j > 0$，$H^j(X_0) = 0$，但我们只能通过将 ω_2 （及其幂）延拓为 $X_0^\circ \simeq \mathbb{CP}^3 \times \mathbb{R}_{r>\epsilon}$ 上的闭形式，并要求 ω_2 沿 r 保持常数，以满足 $(d_{\mathbb{CP}^3} + d_r)\omega_2 = 0$，从而将展开式 (A.1) 延拓到 X_0 的一个稠密子集。由此可得，(A.3) 中的所有对称性确实都是未解析相的对称性。

现在我们已经有了判断其中一个 $U(1)^{(k)}$ 对称性何时破缺的标准（A.4），我们声称，在解析为 X 后自发破缺的对称性为

$$\text{Broken Symmetries: } U(1)^{(0)}. \tag{A.5}$$

这可以通过观察下式得出

$$H^*(X) = \{\mathbb{Z}, 0, 0, 0, \mathbb{Z}, 0, 0, 0\} \tag{A.6}$$

这立即说明，嵌入映射（A.4）的拉回是平凡的，特别是对于 $i = 2$ 和 $i = 6$而言。此外，$\iota^* : H^4(X) \to H^4(\partial X)$ 是一个双射这一事实告诉我们，$U(1)^{(1)}$ 对称性未破缺。后一结论可通过考察相对上同调中的长正合序列得到

$$... \to H^4(X, \partial X) \to H^4(X) \xrightarrow{\iota^*} H^4(\partial X) \to H^5(X, \partial X) \to ... \tag{A.7}$$

并注意到，根据庞加莱-勒夫谢茨对偶性 $H^4(X, \partial X) = H_3(X) = 0$ 和 $H^5(X, \partial X) = H_2(X) = 0$。重要的是，请注意，尽管 $b_4 \wedge \omega_2 \subset C_6$ 和 ω_2 无法展开到体区中，因而我们可以得出结论：$U(1)^{(0)}$ 已被破缺，但我们仍将 $U(1)^{(3)}$ 排除在列表（A.5）之外。原因在于，假定存在的 NG 玻色子是一个无质量的三形式场，而在四维中它不具有一致的动能项。这与 Coleman-Mermin-Wagner（CMW）定理的高形式推广一致 [217]。

简要谈谈与（A.5）相关的南部-戈德斯通（NG）玻色子，首先注意，$U(1)^{(-1)}$ 不会有 NG 玻色子，因为它将是一个（-1）形式场；而 $U(1)^{(3)}$ 的 NG 玻色子不传播，因为在四维中无法为三形式写出动能项。[30] 因此，我们只剩下 $U(1)^{(0)}$ 的 NG 玻色子，这一点已在 [200]中讨论过。不出所料，它是标量 Φ 的相位（对于四维（准）超共形场论的情况则为 $\mathcal{O}$ ）。这是因为沿着 M_4 保持常数的 C_3 规范变换（并令 a_3=0）作用为 $\delta C_3 = d(a_1 \wedge \widetilde{\omega}_2) = -a_1 \wedge d\widetilde{\omega}_2$，从而使 Φ的相位变换为

$$\delta(e^{i\int_{\mathbb{R}^3} C_3}) = e^{i\int_{\mathbb{R}^3} d\widetilde{\omega}_2} = e^{i\int_{S^2} \widetilde{\omega}_2} \neq 0. \tag{A.8}$$

现在我们继续讨论 $U(1)^{(k)}$ 对称性的带电对象。为了避免 CMW 定理带来的微妙问题，并且由于（-1）-形式对称性没有带电缺陷算符，我们将范围限定在 $k=0$ 和 $k=1$ 。对于未解析几何 X_0，与未破缺对称性相关的带电对象为

$$U(1)^{(0)} : \mathrm{M2}(\mathrm{Cone}(\gamma_2)) \quad U(1)^{(1)} : \mathrm{M5}(\mathrm{Cone}(\gamma_4)) \tag{A.9}$$

其中，γ_2和 γ_4分别是 H_2（$\mathbb{CP}^3$、$\mathbb{Z}$）和 H_4（$\mathbb{CP}^3$、$\mathbb{Z}$）的生成元。与此同时，在已解析几何 X中，存在受未破缺1-形式对称性作用的动力学对象：

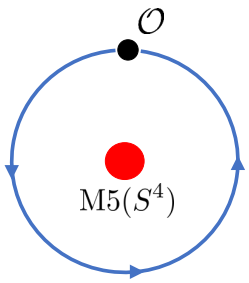
$$U(1)^{(1)} : \ \mathrm{M5}(S^4). \tag{A.10}$$

注意，由于 M5膜包裹了一个有限大小的 S^4，这在四维理论中产生了一个具有有限张力的类弦激发，其张力正比于 $\langle\Phi\rangle$ （对于四维准超共形场论则正比于 $\langle\mathcal{O}\rangle$ ）。我们可以看到，该 M5膜在 Φ 的相位中诱导出单值化，这与阿贝尔希格斯理论中的尼尔森-奥莱森涡旋类似[31]，这是因为对于任意与相关 M5膜世界体相链接的四维流形 N_4，都有 $\int_{N_4} G_4 = N_{M5} = 1$ 。我们看到，当 S^1 在四维时空内部与 M5膜世界体相链接时（见图15），$\mathbb{R}^3$ 是 Λ^2_{ASD}（S^4）的一个纤维（它与零截面相交一次），这就是一个这样的例子，因而会导致单值化。

B 进一步的商空间

在正文中，我们重点讨论了有限阿贝尔群对渐近锥形 G_2-全纯流形的等距商空间，这些流形没有紧三维圈。在本附录中，我们考虑更一般类型的商空间。我们给出了 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(S^4)$的一个有限非阿贝尔商空间的例子，以及渐近锥形$G_2$-全纯流形的阿贝尔商空间的例子，这些流形具有紧三维圈；更确切地说，是旋量丛 $\mathbb{S}(S^3)$的有限阿贝尔商空间。

[30]这可能会对该理论产生一些拓扑效应，其确切影响留待未来研究。[31]当然，这里的关键区别在于，自由手征多重态在 Φ 获得真空期望值后仍然是无能隙的。



$$\log(\langle\mathcal{O}\rangle) \to \log(\langle\mathcal{O}\rangle) + 2\pi i$$

图15：由缠绕在 $\Lambda^2_{ASD}(S^4)/\Gamma$的零截面上的M5膜产生的四维理论中，弦缺陷横向方向的示意图。该对象的张力为 $T \sim \langle\mathcal{O}\rangle$，带有 $U(1)^{(1)}$ 对称性荷，并在垂直于弦的平面内诱导 $\langle\mathcal{O}\rangle$ 的相位发生单值化。

B.1 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(S^4)$ 的非阿贝尔商

在第 3 节和第 4 节中，我们考察了有限阿贝尔群作用 $\Gamma \subset Sp(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(5)$作用于 G_2-全纯空间 $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(S^4)$的情形。这些构造，以及本节前一小节中讨论的构造，有一个共同特征：存在非紧致的余维 6 不动点集。这些不动点集沿径向延伸，如 Quadrion 和 Sexion 中的情形；正是这一特征，使得这些几何结构能够被解释为与五维体耦合的四维边缘模。

当考虑有限非阿贝尔群 $\Gamma \subset SO(5)$ 时，余维六不动点集不一定是非紧致的。在这种情况下，我们首先分别考虑各个元素 Γ 的不动点集，由此生成一个 Γ 的有限阿贝尔子群，因此此前讨论的不动点集特征仍然适用。特别是，余维四不动点集在拓扑上要么是 $\mathbb{R}^3$，要么是 $S^2 \times \mathbb{R}$。此时，紧致的余维六轨迹会出现在后者的交叉处。

因此，局部而言，紧致的余维六轨迹取形为 $S^1 \times \mathbb{C}^3/\Gamma'$，其中 $\Gamma' \subset SU(3)$为某个有限量。圆 S^1 包含于底空间 S^4 中，因此在锥形极限下塌缩。因此，界面理论是某个五维 $\mathcal{N} = 1$ 理论，该理论紧致化在一个圆上，并带有某种扭曲背景分布构型，使所得理论保持一半的超对称性，从而得到一个四维 $\mathcal{N} = 1$ 理论。

彻底穷举 $SO(5)$ 的有限子群，并列出所有能够以这种方式构造的物理系统，将会非常有趣。不过，更为完整的探讨留待未来工作；此处我们将专注于一个具备非阿贝尔商许多显著特征的例子。

例： 考虑有限群 $\Gamma_{D_{K+2}} \subset Sp(1) \simeq SU(2)$，其中 $\Gamma_{D_{K+2}}$ 是阶为 $4K$ 的二元二面体群，由矩阵生成

$$\lambda = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{i\pi}{K}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{i\pi}{K}\right) \end{pmatrix}, \qquad \mu = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{B.1}$$

通过左乘作用于元素为 (z_1, z_2) 的列向量。用四元数 $Q = z_1 + z_2 j$ 表示时，此作用可通过四元数右乘得到，令 $\lambda = \exp(i\pi/K)$ 和 $\mu = ij = k$。

我们取 $\Gamma_{D_{K+2}}$ 在 $Sp(1)_{(1)} \times Sp(1)_{(2)} \subset Sp(2)$ 中的对角嵌入。由此，北极坐标片的底空间坐标上的作用为

$$\begin{aligned} \lambda: \quad & Q_2^{-1}Q_1 = v_1 + v_2 j \quad \to \quad \lambda^{-1}Q_2^{-1}Q_1\lambda = \lambda^2 v_1 + v_2 j \\ \mu: \quad & Q_2^{-1}Q_1 = v_1 + v_2 j \quad \to \quad \mu^{-1}Q_2^{-1}Q_1\mu = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 j \end{aligned} \tag{B.2}$$

群作用在边界 $\mathbb{CP}^3$ 上是：

$$\begin{aligned} \lambda: \quad & [Z_1, Z_2, Z_3, Z_4] \to [\lambda Z_1, \lambda^{-1} Z_2, \lambda Z_3, \lambda^{-1} Z_4] \\ \mu: \quad & [Z_1, Z_2, Z_3, Z_4] \to [iZ_2, iZ_1, iZ_4, iZ_3]\,. \end{aligned} \tag{B.3}$$

这里我们应注意到，由于 $\lambda^K = \mu^2 = -1$ 不产生作用，几何仅受到商群 $\Gamma \equiv \Gamma_{D_{k+2}}/\mathbb{Z}_2$ 的作用。我们还看到，生成元满足 $\mu\lambda = \lambda^{-1}\mu$，因此每个元素都可以表示为 $\mu^n\lambda^m$，从而完整地参数化该作用。在 Λ^2_{ASD}（S^4）的北极和南极坐标片上，完整的作用为

$$\lambda: \quad (v_1, v_2, v_3, t) \to (\lambda^2 v_1, v_2, \lambda^{-2} v_3, t) \tag{B.4}$$

$$\mu: \quad (v_1, v_2, v_3, t) \to (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, -t) \tag{B.5}$$

$$\lambda: \quad (v_1', v_2', v_3', t') \to (\lambda^{-2} v_1', v_2', \lambda^2 v_3', t') \tag{B.6}$$

$$\mu: \quad (v_1', v_2', v_3', t') \to (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3', -t')\,. \tag{B.7}$$

为提取不动点集，我们关注群作用中由各个元素分别固定的轨迹：

- λ^m：由该元素生成的阿贝尔子群的阶为 $K/\gcd(K,\ m)$。对于不同的 m，这些元素彼此对易，因此它们的不动点集重合。底空间的北极坐标片上的不动点集为 $v_1 = 0$。在G_2-全纯轨形中，不动点集沿径向延伸为 $S^2 \times \mathbb{R}$ 的一个副本。

- $\mu\lambda^m$：由该元素生成的阿贝尔子群的阶为 2。底空间 S^4 北极坐标片上的不动点轨迹为 $\operatorname{Im} v_2 = 0$ 和 $v_1 = c \times \lambda^{-m}$，其中实常数为 c。在 G_2-holonomy 轨形内，不动点轨迹沿径向延伸为 $S^2 \times \mathbb{R}$ 的一个副本。

- μ ： 由此元素生成的阿贝尔子群的阶为2。底空间 S^4 在北极坐标片上的固定点轨迹是 $\mathrm{Im}\, v_1 = \mathrm{Im}\, v_2 = 0$。在 G_2-holonomy 轨形内，固定点轨迹沿径向延伸为 $S^2 \times \mathbb{R}$ 的一个副本。

这些不动点集给出以下奇点：

- $\mathfrak{su}(n)$ 轨迹位于 $\mathbb{R}_{\geq 0} \times S^2/\Gamma$ 上：注意，所有二阶元素都作为 $(v_2,\ t) \to (v_2,\ -t)$ 作用，因此固定点轨迹被对折为一半，成为 G_2-holonomy轨形中的一个 $\mathfrak{su}(n)$ 轨迹，并具有一个渐近边界。
- $\mathfrak{su}(2)$轨迹位于 $\mathbb{R} \times S^2/\Gamma$：请注意， Γ 将所有阶为 2 的不动点集归为一个轨道。在 G_2-单值群轨形中，只有一个 $\mathfrak{su}(2)$ 轨迹。

这里 $S^2/\Gamma \subset S^4/\Gamma$。如上所写，作用并非显然是全纯的。然而，如果将新坐标定义为

$$(w_1, w_2, w_3) \equiv \Big(\mathrm{Re}(v_1) + i\mathrm{Re}(v_3), \mathrm{Im}(v_1) + i\mathrm{Im}(v_3), \mathrm{Im}(v_2) + it\Big) \tag{B.8}$$

$$(w_1', w_2', w_3') \equiv \Big(\mathrm{Re}(v_1') + i\mathrm{Re}(v_3'), \mathrm{Im}(v_1') + i\mathrm{Im}(v_3'), \mathrm{Im}(v_2') + it'\Big) \tag{B.9}$$

于是该群以全纯方式作用，其中有 $\theta = 2\pi i/K$，

$$\lambda = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{B.10}$$

让我们讨论该设置的物理学。为此，首先注意到这些不动点沿着圆相交。

$$S^1 = \{v_1, v_1' = 0\,;\ \mathrm{Im}\, v_2, \mathrm{Im}\, v_2' = 0\}\,. \tag{B.11}$$

因此， $\Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(S^4)/\Gamma$ 包含一个紧致的余维六奇点轨迹，其模型为$S^1 \times \mathbb{C}^3/\Gamma'$，并具有如（B.10）中的 Γ'。现在我们考虑 $\mathbb{C}^3/\Gamma'$的非分歧解析的贝蒂数。 Γ' 的所有元素都是初等的，其年龄为 1，因此 $b_4 = 0$。因此，在此例中，我们没有发现局域在 S^1上的彼此非局域的无质量自由度。

现在让我们考察从锥形极限X_0 到已解析几何 X时对称性的增强或破缺。从奇异锥过渡到已解析相时，我们发现其破缺模式为：

$$\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(n) \ \to\ \mathfrak{su}(2)_{\mathrm{diag}} \times \mathfrak{su}(n)\,, \tag{B.12}$$

由于边界仅包含单个 S^2/Γ 量的$\mathfrak{su}(n)$奇点，或者等价地，由于奇点轨迹沿半直线$\mathbb{R}_{\geq 0}$延伸，$\mathfrak{su}(n)$因而未被破缺。

B.2 旋量丛 $\mathbb{S}(S^3)$的商空间

现在我们给出一个具有紧致 3-循环的商空间示例。三维球面上的旋量丛$X = \mathbb{S}(S^3)$具有等距变换Isom$(X) = SU(2)^3$。边界 $\partial X = S^3 \times S^3$ 可分别参数化为单位范数的四元数 (x, y)。在此参数化下，等距变换的作用为

$$(x, y) \mapsto (pxr, qyr) \tag{B.13}$$

其中， p, q, r是单位四元数，用于参数化 Isom$(X) = SU(2)_p \times SU(2)_q \times SU(2)_r$。我们用 x 参数化旋量丛纤维中的 S^3 ；这类三维球面在 X中拓扑平凡。我们用 y 参数化旋量丛的底空间 S^3 。

一般而言，有限阿贝尔子群取如下形式

$$\Gamma \cong \mathbb{Z}_{K_1} \times \mathbb{Z}_{K_2} \times \mathbb{Z}_{K_3} \tag{B.14}$$

并由嵌入进一步指定

$$\Gamma \hookrightarrow SU(2)_p \times SU(2)_q \times SU(2)_r \tag{B.15}$$

其中， $\mathbb{Z}_{K_i}$ 的生成元映射为三元组 $(\omega^{l_i}, \omega^{m_i}, \omega^{n_i})$，其中 ω 生成 $SU(2)$ 中阶为 K_i 的有限阿贝尔子群，且 $l_i, m_i, n_i \in \mathbb{Z}$和 $i = 1, 2, 3$。

现在我们专门讨论这样一类有限阿贝尔商空间： $\Gamma \cong \mathbb{Z}_P \times \mathbb{Z}_Q \times \mathbb{Z}_R$ 的阶为 PQR，其中 $\mathbb{Z}_P \subset SU(2)_p$、 $\mathbb{Z}_Q \subset SU(2)_q$且 $\mathbb{Z}_R \subset SU(2)_r$。进一步假设 $R = \gcd(P, Q)$，并按显然的记号分别将生成元记为 $\gamma_p, \gamma_q, \gamma_r$。不动点集如下:

- $(1, \gamma_q^{Q/R}, \gamma_r)$沿一条圆 S_1^1在零截面上具有不动点，相应的阶为 R 的子群给出一个阶为 R 且余维-6的不动点。
- $(\gamma_p^{P/R}, \gamma_q^{Q/R}, \gamma_r)$固定了旋量丛底空间中的一个圆 S_1^1，并且在该圆上每个点的上方，沿纤维方向都有一个平面 F_1 ；由该元素生成的阶为 R 的子群给出阶为 R 且余维为 4 的不动点。
- $(-\gamma_p^{P/R}, \gamma_q^{Q/R}, \gamma_r)$在旋量丛的底空间中固定一个圆 S_1^1，并且在该圆上的每个点上方的纤维方向中都有一个平面 F_2 ；由该元素生成的 R 阶子群给出 R 阶不动点和余维 4。

- $(1, -\gamma_q^{Q/R}, \gamma_r)$在零截面的一个圆 S_2^1上具有不动点，对应的阶为 R 的子群给出阶为 R 的不动点和余维-6。
- $(\gamma_p^{P/R}, -\gamma_q^{Q/R}, \gamma_r)$固定旋量丛底空间中的一个圆 S_2^1，并且在该圆上的每个点上方，纤维方向上都有一个平面 F_2 ，由该元素生成的 R 阶子群给出 R 阶不动点和余维-4。

- $(-\gamma_p^{P/R}, -\gamma_q^{Q/R}, \gamma_r)$在旋量丛的底空间中固定一个圆 S_2^1，并且在该圆上的每个点上方的纤维方向中都有一个平面 F_1，由该元素生成的 R 阶子群给出阶为 R 且余维为4的不动点。

- $\gamma_p \in SU(2)_p$ 固定旋量丛的零截面，子群 $\mathbb{Z}_P$ 在零截面上产生阶为 P、余维为 4 的不动点集。
- $\gamma_q \in SU(2)_q$ 的作用没有不动点。
- $\gamma_r \in SU(2)_r$ 的作用没有不动点。

因此可得以下奇点

- 沿零截面中两条互不相交且彼此链接的圆形成的余维 6 模型，模掉 Γ。

- 沿零截面形成的余维 4 模型，模掉 Γ；该轨迹与两个余维 6 的圆均相交。

- 以 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_R$ 为模型的余维-4结构，具有一个紧致圆方向和两个非紧致方向。总共有四个这样的轨迹，其中两两相交于余维-6的圆；当它们不在零截面处相交时，彼此不相交。

关键在于，A_{P-1} 奇点的轨迹是紧的，因此我们在四维中具有规范对称性（而不是像前面的例子那样在五维中）。此外，支撑五维超共形场论的余维六轨迹是紧的！然而，我们现在有一个可以被欧几里得M2膜缠绕的紧3-循环，因此经典几何会受到量子修正。显然，这些例子展现了许多有趣的物理学，我们将详细分析留待未来工作。

为结束本节，我们给出一个关于该几何的四维（而非五维）夸尔图景，见图16。请注意，正如紧致余维-4轨迹如何在余维六轨迹之间延伸所描述的那样，这种规范化只保留四维 $\mathcal{N}=1$ 超对称。

C 同调群计算

在本附录中，我们汇总了用于计算电极化中广义对称性的各种同调群计算结果。在解释磁极化时需要格外谨慎，这一问题留待未来的工作处理。

为铺垫下文的分析，我们回顾本附录中所考察的各种几何对象及其拓扑性质。我们将详细考察反自对偶二形式丛

$$X = \Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(M)/\Gamma\,, \qquad M = S^4\,, \tag{C.1}$$

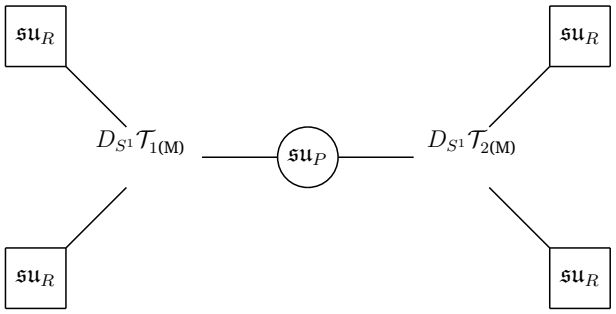


图16： $\mathbb{S}(S^3)/\Gamma$ 的四维夸尔，含有 $\Gamma \cong \mathbb{Z}_P \times \mathbb{Z}_Q \times \mathbb{Z}_R$ 和 $R = \gcd(P,\ Q)$，其中 D_{S^1}表示圆约化。五维超共形场论 $\mathcal{T}_{(\mathrm{M})\ 1,\ 2}$ 建模于$\mathbb{C}^3/\Gamma'_{1,\ 2}$ 之上，其中$\Gamma'_{1,\ 2} \cong \mathbb{Z}_P \times \mathbb{Z}_R$彼此同构，但实现了 Γ的不同子群。圆形（矩形）节点表示几何中一个（非）紧致的余维 4 奇点轨迹。

其渐近边界为 $\partial X = \mathbb{CP}^3/\Gamma$ ，具有一般的二球面纤维。该边界是奇异的，其奇异轨迹为

$$\mathrm{Sing}(\partial X) = \Sigma\,. \tag{C.2}$$

奇点 Σ 由余维 4 和余维 6 奇点组成，它们分别支撑在二维球面的楔和上以及点处。其补集

$$\partial X^\circ = \partial X \setminus \Sigma \tag{C.3}$$

是光滑边界。在本附录中，我们计算同调群

$$H_*(X) \cong H_*(M/\Gamma)\,, \qquad H_*(X, \partial X)/H_*(X)\,, \qquad H_*(\partial X)\,, \qquad H_*(\partial X^\circ)\,. \tag{C.4}$$

所有同调群的系数均为整数。

最终，所有同调群都将通过应用 Mayer-Vietoris 序列来计算，其覆盖由带有如下坐标的北极和南极坐标片给出：

$$\text{North Patch } W_N : \qquad (v_1, v_2, v_3, t) \tag{C.5}$$

$$\text{South Patch } W_S : \qquad (v'_1, v'_2, v'_3, t') \tag{C.6}$$

零截面 $v_3 = v'_3 = t = t' = 0$ 由坐标 v_1, v_2 和 v'_1,v'_2参数化。我们引入坐标 $1 - y^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2$ ，并类似地引入 y' ，它们分别表示每个 $\mathbb{C}^2$副本中单位球的半径。于是，零截面上的坐标满足关系

$$v'_1 = \frac{\bar{v}_1}{1 - y^2}\,, \qquad v'_2 = -\frac{v_2}{1 - y^2}\,, \tag{C.7}$$

沿着 3-球面 $y,\ y' = 0$。或者，采用四元数形式表述 $(v_1 + v_2 j)^{-1} \equiv v'_1 + v'_2 j$ 。于是，总空间在 $y = y' = 0$ 处粘合，由两半组成；这两半分别由丛 Λ^- 反自对偶(S^4) 的纤维构成，并投影到上方的两个单位球。过渡

纤维坐标上的函数可通过考虑反自对偶二形式得出。粘合区域由投影到 $y = y' = 0$ 的纤维构成；由 (C.7) 可知，粘合方式使其在所识别的 $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ 纤维的径向 S^2 壳层上实现一个次数为 -1 的映射。

回顾一下阿贝尔商空间，其中 $\Gamma = \mathbb{Z}_K$ 和 $\zeta = \exp(2\pi i/K)$,

$$\begin{aligned} W_N: \quad & (v_1, v_2, v_3, t) \quad \to \quad (\zeta^c v_1, \zeta^d v_2, \zeta^{-c-d} v_3, t) && \text{(C.8)} \\ W_S: \quad & (v_1', v_2', v_3', t') \quad \to \quad (\zeta^{-c} v_1', \zeta^d v_2', \zeta^{c-d} v_3', t'). && \text{(C.9)} \end{aligned}$$

在正文中，我们讨论了其中的三种情形，

$$\begin{aligned} &\text{Case 1}: \quad (c,K) = (d,K) = (c+d,K) = (c-d,K) = 1 \\ &\text{Case 2}: \quad (c,K) = (c+d,K) = (c-d,K) = 1\,, \quad K = md \\ &\text{Case 3}: \quad c = -d = 1\,, \end{aligned} \tag{C.10}$$

以及阿贝尔商空间，其中 $\Gamma = \mathbb{Z}_K \times \mathbb{Z}_L$ 和 $\omega = \exp(2\pi i/K)$ $\eta = \exp(2\pi i/L)$,

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, v_3, t) \quad &\to \quad (\eta^{a-c}\omega^{b-d} v_1, \eta^{-a-c}\omega^{-b-d} v_2, \eta^{2c}\omega^{2d} v_3, t) && \text{(C.11)} \\ (v_1', v_2', v_3', t') \quad &\to \quad (\eta^{c-a}\omega^{d-b} v_1', \eta^{-a-c}\omega^{-b-d} v_2', \eta^{2a}\omega^{2b} v_3', t'). && \text{(C.12)} \end{aligned}$$

在正文中，我们讨论了其中的一个例子，

$$\text{Case 4}: \quad a = c\,,\ b = -d\,. \tag{C.13}$$

首先计算折叠零截面 S^4/Γ 的同调群。注意到 S^4/Γ 是沿坐标 y, y' 对 S^3/Γ 作悬挂得到的，我们得到

$$\begin{aligned} &\text{Case 1}: \quad H_*(S^4/\Gamma) \cong \{\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}_K, 0, \mathbb{Z}\} \\ &\text{Case 2}: \quad H_*(S^4/\Gamma) \cong \{\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}_m, 0, \mathbb{Z}\} \\ &\text{Case 3}: \quad H_*(S^4/\Gamma) \cong \{\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}_K, 0, \mathbb{Z}\} \\ &\text{Case 4}: \quad H_*(S^4/\Gamma) \cong \{\mathbb{Z}, 0, 0, 0, \mathbb{Z}\} \end{aligned} \tag{C.14}$$

因此，除了最后一种情形外，我们都发现了由缠绕在挠 2-循环上的 M2膜产生的有质量模；当 S^4/Γ 收缩为一个点时，这些模会变为无质量模。

我们现在通过 Mayer-Vietoris 长正合序列计算同调群 $H_n(\partial X)$。

$$\ldots \ \to \ H_n(W_N \cap W_S) \ \xrightarrow{\iota_n} \ H_n(W_N) \oplus H_n(W_S) \ \to \ H_n(\partial X) \ \xrightarrow{\partial_n} \ \ldots \tag{C.15}$$

其中我们选择北极和南极图册 $W_{N,S}$ ，使得它们的交集为$Y/\Gamma \equiv Y_\Gamma$。这里， Y是所有底空间坐标为 $y, y' = 0$ 的纤维的集合，在拓扑上$Y = S^3 \times S^2$。因此，我们首先通过 Mayer- 计算同调群 $H_n(Y_\Gamma)$。

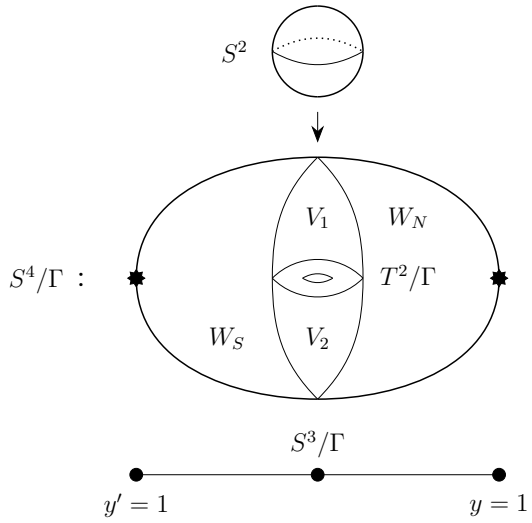


图17：用于构造各种 Mayer–Vietoris 正合序列的分解示意图。我们展示了 ∂X 纤维化在由 y 参数化的区间上， Y_Γ 为纤维， y'。

维耶托里斯长正合序列

$$\ldots \;\to\; H_n(V_1 \cap V_2) \;\xrightarrow{\iota_n}\; H_n(V_1) \oplus H_n(V_2) \;\to\; H_n(Y_\Gamma) \;\xrightarrow{\partial_n}\; \ldots . \tag{C.16}$$

此处，覆盖 $Y_\Gamma = V_1 \cup V_2$ 来自一个覆盖 $Y = U_1 \cup U_2$，而 U_i 是拓扑实心环面，它们来自将 S^3 正则分解为两个实心环面，再与纤维 S^2 作积。分解示意图见图17。由此我们计算得:

$$\begin{aligned}
&\text{Case 1}: \quad H_*(Y_\Gamma) = \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_K, \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_K, 0, \mathbb{Z}\} \\
&\text{Case 2}: \quad H_*(Y_\Gamma) = \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_K, 0, \mathbb{Z}\} \\
&\text{Case 3}: \quad H_*(Y_\Gamma) = \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_K, \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_K, 0, \mathbb{Z}\} \\
&\text{Case 4}: \quad H_*(Y_\Gamma) = \{\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{\gcd(K',L')}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{K'} \oplus \mathbb{Z}_{L'}, 0, \mathbb{Z}\}
\end{aligned} \tag{C.17}$$

其中 $K' =$ 是 $K, 2a$ 的最大公约数， $L' =$ 是 $L, 2b$ 的最大公约数。将这些结果代入下一个 Mayer–Vietoris 正合序列，我们得到

$$\begin{aligned}
&\text{Case 1}: \quad H_*(\partial X) = \{\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_K^2, 0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_K, 0, \mathbb{Z}\} \\
&\text{Case 2}: \quad H_*(\partial X) = \{\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_m^2, 0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_K, 0, \mathbb{Z}\} \\
&\text{Case 3}: \quad H_*(\partial X) = \{\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_K, 0, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_K, 0, \mathbb{Z}\} \\
&\text{Case 4}: \quad H_*(\partial X) = \{\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{\gcd(K',L')}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{K'} \oplus \mathbb{Z}_{L'}, 0, \mathbb{Z}\} .
\end{aligned} \tag{C.18}$$

接下来我们计算同调群 $H_n(\partial X^\circ)$。计算通过 Lefschetz-

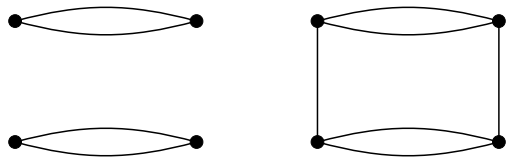


图18：渐近情形4中的不动点集 $\mathbb{CP}^3$，以楔和的形式呈现。线条表示二维球面。左：$\gcd(K',L')=1$。右：$\gcd(K',L')\neq 1$.

对偶和变形等价得出

$$H_n(\partial X^\circ)\cong H^{6-n}(\partial X^\circ,\partial(\partial X^\circ))\cong H^{6-n}(\partial X,\Sigma) \tag{C.19}$$

使我们能够使用对（$\partial X,\Sigma$）的相对上同调长正合序列。这些同构使我们能够利用相对而言较为奇异的轨迹 Σ 的简单拓扑结构，它们是：

$$\begin{aligned}
&\text{Case 1}: \quad \Sigma = *_1 \dot\cup *_2 \dot\cup *_3 \dot\cup *_4 \\
&\text{Case 2}: \quad \Sigma = S^2 \dot\cup S^2 \\
&\text{Case 3}: \quad \Sigma = \begin{cases} S^2 \dot\cup S^2\,, & K \text{ even} \\ S^2 \dot\cup *_1 \dot\cup *_2\,, & K \text{ odd} \end{cases} \\
&\text{Case 4}: \quad \Sigma = \begin{cases} \vee_{i=1}^4 S_i^2\,, & \gcd(K',L')=1 \\ \vee_{i=1}^6 S_i^2\,, & \gcd(K',L')\neq 1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{C.20}$$

其中 $\dot\cup$ 表示不交并，$*_i$ 表示一个点，最后一行中的楔和如图18所示。由此我们计算得到

$$\begin{aligned}
&\text{Case 1}: \quad H_*(\partial X^\circ) = \{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_K,\mathbb{Z},\mathbb{Z}_K^2,\mathbb{Z},\mathbb{Z}^3\} \\
&\text{Case 2}: \quad H_*(\partial X^\circ) = \{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_K,\mathbb{Z},\mathbb{Z}^2\oplus\mathbb{Z}_m^2,\mathbb{Z},\mathbb{Z}\} \\
&\text{Case 3}: \quad H_*(\partial X^\circ) = \begin{cases} \{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_K,\mathbb{Z},\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_K,\mathbb{Z},\mathbb{Z}^2\} & K \text{ odd} \\ \{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_K,\mathbb{Z},\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_K,0,\mathbb{Z}\} & K \text{ even} \end{cases} \\
&\text{Case 4}: \quad H_*(\partial X^\circ) = \{\mathbb{Z},\mathbb{Z}_{K'}\oplus\mathbb{Z}_{L'},\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{\gcd(K',L')},\mathbb{Z}^5,\mathbb{Z}^3\}
\end{aligned} \tag{C.21}$$

其中对于情形4，我们只给出了 $\gcd(K',\ L')\neq 1$ 时一般情形的结果。在这里，可以通过考察 $H_n(\partial X,\ \Sigma)$，利用泛系数定理来检查低维中的同调群的秩。在更高维中，完整的群由正合性推出，因为 Σ 是低维的。

最后，我们利用对 $(X,\ \partial X)$ 的相对同调长正合序列，计算同调商 $H_n(X,\ \partial X)/H_n(X)$。这里唯一非平凡的计算出现在次数 $n=4$，其中 ∂X 中的自由循环是 $\mathbb{CP}^2$ 中超平面类的商空间。

而在 X 中，它们是 S^4 的商空间。这里有 $H_4(Z,\ \partial Z) \cong H^3(Z) \cong H^3(S^4) = 0$，其中光滑空间为 $Z = \Lambda^2_{\mathrm{ASD}}(S^4)$；类似地，$H_5(Z,\ \partial Z) = 0$。我们看到，$\mathbb{CP}^2$ 在包含到体区后并未变为平凡，而是 $[\mathbb{CP}^2] \mapsto [S^4]$ 于同调中。我们发现这一性质在商空间中得以保留，最终计算得到：

$$\begin{aligned}
&\text{Case 1}: \quad H_*(X,\partial X)/H_*(X) = \{0,0,0,\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_K,0,\mathbb{Z}_K,0,\mathbb{Z}\}\\
&\text{Case 2}: \quad H_*(X,\partial X)/H_*(X) = \{0,0,0,\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_m,0,\mathbb{Z}_K,0,\mathbb{Z}\}\\
&\text{Case 3}: \quad H_*(X,\partial X)/H_*(X) = \{0,0,0,\mathbb{Z},0,\mathbb{Z}_K,0,\mathbb{Z}\}\\
&\text{Case 4}: \quad H_*(X,\partial X)/H_*(X) = \{0,0,0,\mathbb{Z},\mathbb{Z}_{\gcd(K',L')},\mathbb{Z}_{K'}\oplus\mathbb{Z}_{L'},0,\mathbb{Z}\}\,.
\end{aligned} \tag{C.22}$$

参考文献

[1] G. W. Moore and N. Seiberg, 《经典与量子共形场论》, *Commun. Math. Phys.* **123** (1989) 177.[2] D. S. Freed and C. Teleman, 《相对量子场论》, *Commun. Math. Phys*

.

326 (2014) 459–476, arXiv:1212.1692 [hep-th].[3] D. S. Freed, G. W. Moore, and C. Teleman, 《量子场论中的拓扑对称性》, arXiv:2209.07471 [hep-th].[4] D. Gaiotto, A. Kapustin, N. Seiberg, and B. Willett, 《广义整体对称性》, 高能物理杂志 **02** (2015) 172, arXiv:1412.5148 [hep-th].[5] Z. Wan and J. Wang, 《高阶反常、高阶对称性与配边 I：通过广义配边理论对高阶对称性保护拓扑态及其边界费米子/玻色子反常进行分类》, *Ann. Math. Sci.Appl.* **4** 第 2 期, (2019) 107–311, arXiv:1812.11967 [hep-th].[6] R. Thorngren and Y. Wang, 《反常对称性止于边界》, *JHEP***09** (2021年) 017, arXiv:2012.15861 [hep-th].[7] D. Gaiotto and J. Kulp, 《轨形群胚》, 高能物理杂志 **02** (2021年) 132,arXiv:2008.05960 [hep-th].[8] S. Gukov, P.-S. Hsin, and D. Pei, 《$T[M]$ 理论的广义整体对称性。第一部分》, 高能物理杂志 **04** (2021年) 232, arXiv:2010.15890 [hep-th].[9] F. Apruzzi, F. Bonetti, I. G. Etxebarria, S. S. Hosseini, and S. Schafer-Nameki, 《弦理论中的对称性拓扑场论》, arXiv:2112.02092 [hep-th].[10] M. Del Zotto and I. Garcia Etxebarria, 《来自红外的整体结构》, arXiv:2204.06495 [hep-th].[11] F. Apruzzi, 《六维中的高阶形式对称性拓扑场论》, arXiv:2203.10063 [hep-th].[12] J. Kaidi, K. Ohmori, and Y. Zheng, 《非可逆缺陷的对称性拓扑场论》, arXiv:2209.11062 [hep-th].[13] V. Bashmakov, M. Del Zotto, A. Hasan, and J. Kaidi, 《非可逆对称性 o

f

类 $\mathcal{S}$ 理论", arXiv:2211.05138 [hep-th].[14] D. Gaiotto、G. W. Moore 和 A. Neitzke, 《框架 BPS 态》, 《数学物理进展》**17** 第 2 期, （2013）241–397, arXiv:1006.0146 [hep-th]。

[15] A. Kapustin 和 R. Thorngren，《晶格上的拓扑场论、离散 θ 角与禁闭》，《数学物理进展》18 第 5 期，（2014）1233–1247，arXiv:1308.2926 [hep-th].
[16] A. Kapustin 和 R. Thorngren，《规范理论的高阶对称性与有能隙相》，arXiv:1309.4721 [hep-th].[17] O. Aharony、N. Seiberg 和 Y. Tachikawa，《读懂四维规范理论的字里行间》，高能物理杂志 08 （2013）115，arXiv:1305.0318 [hep-t

h].

[18] M. Del Zotto、J. J. Heckman、D. S. Park 和 T. Rudelius，“关于缺陷群 of

一个 6D 超共形场论，”《*Lett. Math. Phys.*》106 第 6 期，（2016）765–786, arXiv:1503.04806[hep-th].[19] E. Sharpe，“量子场论中广义整体对称性的注记，”《*Fortschritte der Physik*》63（2015）659–682, arXiv:1508.04770 [hep-th].[20] J. J. Heckman 和 L. Tizzano，“六维分数量子霍尔效应，”高能物理杂志 05（2018）120, arXiv:1708.02250 [hep-th].[21] Y. Tachikawa，“关于有限子群的规范化，”*SciPost Phys.* 8 第 1 期，（2020年）015,arXiv:1712.09542 [hep-th].[22] C. C´ordova、T. T. Dumitrescu 和 K. Intriligator，“探索 2-群全局对称性，”高能物理杂志 02 （2019）184, arXiv:1802.04790 [hep-th].[23] F. Benini、C. C´ordova 和 P.-S. Hsin，“关于 2-群全局对称性及其反常，”高能物理杂志 03 （2019）118, arXiv:1803.09336 [hep-th].[24] P.-S. Hsin、H. T. Lam 和 N. Seiberg，“关于一形式整体对称性的评论

ies

及其在 3d 和 4d 中的规范化，”*SciPost Phys.* 6 第 3 期，（2019）039, arXiv:1812.04716 [hep-th]。[25] R.Thorngren 和Y.Wang，“融合范畴对称性 I: 反常流入与有能隙相”，arXiv:1912.02817 [hep-th]。[26] I. Garcia Etxebarria、B. Heidenreich 和 D. Regalado，“IIB 通量非交换性

ty

以及场论的整体结构，”高能物理杂志 10 (2019) 169, arXiv:1908.0802[hep-th].7
[27] J. Eckhard, H. Kim, S. Schafer-Nameki, 和 B. Willett，“高形式对称性

，

Bethe 真空态与 3d-3d 对应,”高能物理杂志 01 (2020) 101, arXiv:1910.14086 [hep-th].

[28] Z. Wan、J. Wang 和 Y. Zheng，“高阶反常、高阶对称性与配边 II：洛伦兹对称性扩展与富化玻色／费米量子规范理论”，Ann. Math. Sci. Appl. 05 no. 2, (2020) 171–257,arXiv:1912.13504 [hep-th].[29] O. Bergman、Y. Tachikawa 和 G. Zafrir，“ABJM 型理论中的广义对称性与全息”，高能物理杂志 07 (2020) 077, arXiv:2004.05350 [hep-th].[30] D. R. Morrison、S. Schafer-Nameki 和 B. Willett，“五维中的高形式对称性”，高能物理杂志 09 (2020) 024, arXiv:2005.12296 [hep-th].[31] F. Albertini、M. Del Zotto、I. Garcia Etxebarria 和 S. S. Hosseini，“高形式对称性与 M理论”， arXiv:2005.12831 [hep-th].[32] P.-S. Hsin 和 H. T. Lam，“离散 θ 角、对称性与反常”，SciPost Phys. 10 no. 2, (2021) 032, arXiv:2007.05915 [hep-th].[33] I. Bah、F. Bonetti 和 R. Minasian，“由卷绕 M5膜得到的超共形场论中的离散与高形式对称性”，高能物理杂志 03 (2021) 196, arXiv:2007.15003 [hep-th].[34] M. Del Zotto、I. Garcia Etxebarria 和 S. S. Hosseini，“Argyres-Douglas 理论的高形式对称性”，高能物理杂志 10 (2020) 056, arXiv:2007.15603 [hep-th].[35] I. Hason、Z. Komargodski 和 R. Thorngren，“对称性破缺相中的反常匹配：畴壁、CPT 与 S mith 同构”，SciPost Phys. 8 no. 4, (2020) 062, arXiv:1910.14039 [hep-th].[36] L. Bhardwaj 和 S. Sch¨afer-Nameki，“六维与五维理论的高形式对称性”，高能物理杂志 02 (2021) 159, arXiv:2008.09600 [hep-th].[37] F. Apruzzi、M. Dierigl 和 L. Lin，“六维中离散 1-形式对称性的命运”，SciPost Phys. 12 no. 2, (2022) 047, arXiv:2008.09117 [hep-th].[38] C. Cordova、T. T. Dumitrescu 和 K. Intriligator，“六维量子场论中的 2-群全局对称性与反常”，高能物理杂志 04 (2021) 252, arXiv:2009.00138 [hep-th].[39] R. Thorngren，“拓扑量子场论、对称性破缺与有限规范理论在 $3+1$维中的应用”，Phys. Rev. B 101 no. 24, (2020) 245160, arXiv:2001.11938[cond-mat.str-el].[40] M. Del Zotto 和 K. Ohmori，“六维小弦理论的 2-群对称性与 T 对偶”，Annales Henri Poincare 22 no. 7, (2021) 2451–2474, arXiv:2009.03489[hep-th].

[41] P. Benetti Genolini 和 L. Tizzano，“五维中的瞬子、对称性与反常”，高能物理杂志 04 (2021) 188, arXiv:2009.07873 [hep-th].[42] M. Yu，“(1+1)维理论的对称性与反常：2-群与对称性分数化”，高能物理杂志 08 (2021) 061, arXiv:2010.01136 [hep-th].[43] L. Bhardwaj、Y. Lee 和 Y. Tachikawa，“具有 $\mathbb{Z}_2$ 对称性的量子场论上的$SL(2,\mathbb{Z})$作用与 Brown-Kervaire 不变量”，高能物理杂志 11 (2020) 141,arXiv:2009.10099 [hep-th].[44] O. DeWolfe 和 K. Higginbotham，“通过 AdS/CFT中的电磁对偶实现广义对称性与2-群”，《物理评论D》103卷第2期（2021）026011,arXiv:2010.06594 [hep-th].[45] N. Iqbal 和 N. Poovuttikul，“2-群全局对称性、流体动力学与全息”，arXiv:2010.00320 [hep-th].[46] Y. Hidaka、M. Nitta 和 R. Yokokura，“轴子电动力学中的全局3-群对称性与 't Hooft 反常”，高能物理杂志 01 (2021) 173, arXiv:2009.14368[hep-th].[47] T. D. Brennan 和 C. Cordova，“轴子、高阶群与涌现对称性”，高能物理杂志 02 (2022) 145, arXiv:2011.09600 [hep-th].[48] Z. Komargodski、K. Ohmori、K. Roumpedakis 和 S. Seifnashri，“伴随QCD_2,的对称性与弦”，高能物理杂志 03 (2021) 103, arXiv:2008.07567 [hep-th].[49] C. Closset、S. Giacomelli、S. Schafer-Nameki 和 Y.-N. Wang，“五维与四维超共形场论：典范奇点、三节点与S对偶性”，高能物理杂志 05 (2021) 274,arXiv:2012.12827 [hep-th].[50] C. Closset、S. Schafer-Nameki 和 Y.-N. Wang，“库仑支与希格斯支，来自

m

规范奇点：第 0 部分， arXiv:2007.15600 [hep-th].[51] L. Bhardwaj、M. Hubner 和 S. Schafer-Nameki，《四维 $\mathcal{N}=2$S 类理论的 1-形式对称性》，*SciPost Phys.* **11** （2021年）096， arXiv:2102.01693 [hep-th]..[52] M. Nguyen、Y. Tanizaki 和 M. Unsal，《二维杨-米尔斯理论中的非可逆 1-形式对称性与卡西米尔标度》，《物理评论*D*》 **104** 第 6 期，（2021年）065003, arXiv:2104.01824 [hep-th].[53] B. Heidenreich、J. McNamara、M. Montero、M. Reece、T. Rudelius 和 I. Valenzuela，《非可逆整体对称性与谱完备性,

”

高能物理杂志 09 (2021年) 203, arXiv:2104.07036 [hep-th].

[54] F. Apruzzi, M. van Beest, D. S. W. Gould, and S. Schäfer-Nameki, "Holography, 1-形式对称性和禁闭，"《物理评论*D*》**104** 第6期，（2021年）066005, arXiv:2104.12764 [hep-th].[55] F. Apruzzi、L. Bhardwaj、J. Oh 和 S. Schafer-Nameki，《五维超共形场论中味对称性的整体形式与2-群对称性》，arXiv:2105.08724 [hep-th].[56] S. S. Hosseini 和 R. Moscrop，《Maruyoshi-Song 流与 $D_p^b(G)$ 理论的缺陷群》，高能物理杂志**10** （2021年）119, arXiv:2106.03878 [hep-th].[57] M. Cvetic、M. Dierigl、L. Lin 和 H. Y. Zhang，《M-/F理论对偶中的高形式对称性及其反常》，《物理评论*D*》**104** 第12期，（2021年）126019,arXiv:2106.07654 [hep-th].[58] M. Buican 和 H. Jiang，《1-形式对称性、孤立的 $\mathcal{N}=2$ 超共形场论与卡拉比-丘三维簇》，高能物理杂志**12** （2021年）024, arXiv:2106.09807 [hep-th].[59] L. Bhardwaj、M. Hubner 和 S. Schafer-Nameki，《将禁闭从拉格朗日量中解放出来：来自六维 $\mathcal{N}=(2,0)$ 的四维 $\mathcal{N}=1$ 中的1-形式对称性与线》，*SciPostPhys.* **12** 第1期，（2022年）040, arXiv:2106.10265 [hep-th].[60] N. Iqbal 和 J. McGreevy，《平均弦场论：1-形式对称性的朗道-金兹堡理论》，arXiv:2106.12610 [hep-th].[61] A. P. Braun、M. Larfors 和 P.-K. Oehlmann，《与引力耦合的六维超共形场论中的规范化二形式对称性》，高能物理杂志**12** （2021年）132, arXiv:2106.13198 [hep-th].[62] M. Cveti˘c、J. J. Heckman、E. Torres 和 G. Zoccarato，《关于物质的思考

f

三维 $\mathcal{N}=1$ 真空态与局部 $Spin(7)$ 紧化，"《物理评论*D*》**105** 第2期，（2022）026008，arXiv:2107.00025 [hep-th].[63] C. Closset 和 H. Magureanu，《秩一四维 U-平面 $\mathcal{N}=2$ KK 理论》，*SciPost Phys.* **12** 第2期，（2022）065, arXiv:2107.03509 [hep-th].[64] R. Thorngren 和 Y. Wang，《融合范畴对称性 II：$c=1$及其拓展中的范畴现象》，arXiv:2106.12577 [hep-th].[65] E. Sharpe，《拓扑算符、不可逆对称性与分解》，arXiv:2108.13423 [hep-th].[66] L. Bhardwaj，《类 S 中的 2-群对称性》，*SciPost Phys.* **12** 第5期，（2022）152, arXiv:2107.06816 [hep-th].[67] Y. Hidaka、M. Nitta 和 R. Yokokura，《拓扑轴子电动力学与 4-群对称性》，《物理评论快报*B*》**823** （2021）136762, arXiv:2107.08753 [hep-th]。

[68] Y. Lee 和 Y. Zheng, 《关于共形对称性与连续高形式对称性之间相容性的评论》, 《物理评论D》104 第8期, （2021）085005, arXiv:2108.00732 [hep-th].[69] Y. Lee、K. Ohmori 和 Y. Tachikawa, 《跨越 Intriligator-Seiberg 对偶的高阶对称性匹配》, 高能物理杂志 10（2021）114, arXiv:2108.05369 [hep-th].[70] Y. Hidaka、M. Nitta 和 R. Yokokura, 《拓扑轴子电动力学中的全局 4-群对称性与 't Hooft 反常》, PTEP 2022 第4期, （2022）04A109, arXiv:2108.12564 [hep-th].[71] M. Koide、Y. Nagoya 和 S. Yamaguchi, 《四维 $\mathbb{Z}_2$ 纯晶格规范理论中的不可逆拓扑缺陷》, PTEP 2022 第1期, （2022）013B03, arXiv:2109.05992 [hep-th].[72] F. Apruzzi、L. Bhardwaj、D. S. W. Gould 和 S. Schafer-Nameki, 《六维中的 2-群对称性及其分类》, SciPost Phys. 12 第3期, （2022）098, arXiv:2110.14647 [hep-th].[73] J. Kaidi、K. Ohmori 和 Y. Zheng, 《（$3+1$）维规范理论中的 Kramers-Wannier 类对偶缺陷》, 《物理评论快报》128 第11期, （2022）111601, arXiv:2111.01141 [hep-th].[74] Y. Choi、C. Cordova、P.-S. Hsin、H. T. Lam 和 S.-H. Shao, 《 $3+1$维中的不可逆对偶缺陷》, 《物理评论D》105 第12期, （2022）125016, arXiv:2111.01139 [hep-th].[75] I. Bah、F. Bonetti、E. Leung 和 P. Weck, 《探测通量背景的 M5膜》, arXiv:2111.01790 [hep-th].[76] S. Gukov、D. Pei、C. Reid 和 A. Shehper, 《二维拓扑量子场论的对称性与一般群的等变 Verlinde 公式》, arXiv:2111.08032 [hep-th].[77] C. Closset、S. Sch¨afer-Nameki 和 Y.-N. Wang, 《由典范奇点得到库仑支与希格斯支。第一部分：具有光滑 Calabi-Yau 解析的超曲面》, 高能物理杂志 04（2022）061, arXiv:2111.13564 [hep-th].[78] M. Yu, 《三维拓扑序中的范畴对称性规范化与体区重构》, arXiv:2111.13697 [hep-th].[79] E. Beratto、N. Mekareeya 和 M. Sacchi, 《ABJ 理论及相关理论的零形式与一形式对称性》, 高能物理杂志 04（2022）126, arXiv:2112.09531 [hep-th].[80] L. Bhardwaj、S. Giacomelli、M. H¨ubner 和 S. Sch¨afer-Nameki, 《相对理论中的相对缺陷：类 S 中受困的高形式对称性与不规则标记点》, arXiv:2201.00018 [hep-th]。

[81] A. Debray、M. Dierigl、J. J. Heckman 和 M. Montero，“那个本不该存在的反常IIB”，《*Fortschritte der Physik*》**70** （2022年）2100168, arXiv:2107.14227 [hep-th].[82] J. Wang 和 Y.-Z. You，“大统一之间的规范增强量子临界性：范畴高阶对称性收缩”， arXiv:2111.10369[hep-th].[83] M. Cveti˘c、M. Dierigl、L. Lin 和 H. Y. Zhang，“由交汇构造的所有八维和九维弦真空”，《物理评论*D*》**106** 第2期，（2022年）026007,arXiv:2203.03644 [hep-th].[84] M. Del Zotto、J. J. Heckman、S. N. Meynet、R. Moscrop 和 H. Y. Zhang，“五维轨形共形场论的高阶对称性”，《物理评论*D*》**106** 第4期，（2022年）046010, arXiv:2201.08372 [hep-th].[85] M. Cveti˘c、J. J. Heckman、M. H¨ubner 和 E. Torres，“通过切割与粘合轨形实现零形式、一形式和二群对称性”, arXiv:2203.10102 [hep-th].[86] M. Del Zotto、I. G. Etxebarria 和 S. Schafer-Nameki，“2-群对称性与M理论”， arXiv:2203.10097 [hep-th].[87] L. Bhardwaj、L. Bottini、S. Schafer-Nameki 和 A. Tiwari，“非可逆高阶范畴对称性”, arXiv:2204.06564 [hep-th].[88] Y. Hayashi 和 Y. Tanizaki，“Cardy-Rabinovici模型的非可逆自对偶缺陷与混合引力反常”， arXiv:2204.07440 [hep-th].[89] J. Kaidi、G. Zafrir 和 Y. Zheng，“ $\mathcal{N} = 4$ SYM的不可逆对称性与扭曲紧化”, arXiv:2205.01104 [hep-th].[90] K. Roumpedakis、S. Seifnashri 和 S.-H. Shao，“高阶规范化与非可逆凝聚缺陷”， arXiv:2204.02407 [hep-th].[91] Y. Choi、H. T. Lam 和 S.-H. Shao，“标准模型中的非可逆全局对称性”， arXiv:2205.05086 [hep-th].[92] Y. Choi、C. Cordova、P.-S. Hsin、H. T. Lam 和 S.-H. Shao，“ $3+1$维中的非可逆凝聚、对偶与三重对偶缺陷”， arXiv:2204.09025[hep-th].[93] G. Arias-Tamargo 和 D. Rodriguez-Gomez，“离散规范化与谱完备性中的不可逆对称性”， arXiv:2204.07523 [hep-th].[94] C. Cordova 和 K. Ohmori，“非可逆手征对称性与指数层级”, arXiv:2205.06243 [hep-th].

[95] L. Bhardwaj、M. Bullimore、A. E. V. Ferrari 和 S. Schafer-Nameki, 《孤子缺陷的广义对称性反常》, arXiv:2205.15330 [hep-th].[96] V. Benedetti、H. Casini 和 J. M. Magan, 《量子场论中的广义对称性与诺特定理》, arXiv:2205.03412 [hep-th].[97] L. Bhardwaj 和 D. S. W. Gould, 《非连通的0-形式对称性与2-群对称性》, arXiv:2206.01287 [hep-th].[98] A. Antinucci、G. Galati 和 G.Rizi, 《连续2-范畴对称性与杨-米尔斯理论》, arXiv:2206.05646 [hep-th].[99] F. Carta、S. Giacomelli、N. Mekareeya 和 A. Mininno, 《1-形式对称性及例外 Argyres-Douglas 理论的动力学后果》, 高能物理杂志 06 (2022年) 059, arXiv:2203.16550 [hep-th].[100] J. J. Heckman、C. Lawrie、L. Lin、H. Y.Zhang 和 G. Zoccarato, 《六维超共形场论、中心-味对称性与 Stiefel-Whitney 紧化》, 《物理评论*D*》**106** 第6期, (2022年) 066003, arXiv:2205.03411 [hep-th].[101] F. Baume、J. J. Heckman 和 C. Lawrie, 《六维超共形场论的超自旋链》, arXiv:2208.02272 [hep-th].[102] Y. Choi、H. T. Lam 和 S.-H. Shao, 《不可逆时间反演对称性》, arXiv:2208.04331 [hep-th].[103] L. Bhardwaj、S. Schafer-Nameki 和 J. Wu, 《普适不可逆对称性》, arXiv:2208.05973 [hep-th].[104] L. Lin、D. Robbins 和 E. Sharpe, 《分解、凝聚缺陷与融合》, arXiv:2208.05982 [hep-th].[105] T. Bartsch、M. Bullimore、A. E. V. Ferrari 和 J. Pearson, 《不可逆对称性与高阶表示论 I》, arXiv:2208.05993 [hep-th].[106] F. Apruzzi、I. Bah、F. Bonetti 和 S.Schafer-Nameki, 《来自全息与膜的不可逆对称性》, arXiv:2208.07373 [hep-th].[107] I. Garcia Etxebarria, 《膜与不可逆对称性》, arXiv:2208.07508[hep-th].[108] J. J. Heckman、M. H¨ubner、E. Torres 和 H.Y. Zhang, 《广义对称性算符背后的膜》, 《*Fortschritte der Physik*》**71** 第1期, (2023年) 2200180,arXiv:2209.03343 [hep-th].[109] J. J. Heckman、M. Hubner、E. Torres、X. Yu 和 H. Y. Zhang, 《拓扑对偶缺陷的自顶向下方法》, arXiv:2212.09743 [hep-th].

[110] A. Cherman、T. Jacobson 和 M. Neuzil, 《1-形式对称性与大 N 量子色动力学》, arXiv:2209.00027 [hep-th]。[111] D.-C. Lu 和 Z. Sun, 《二维共形场论中的三重对偶缺陷》, arXiv:2208.06077[hep-th]。[112] P. Niro、K. Roumpedakis 和 O. Sela, 《探索自由理论中的不可逆对称性》, arXiv:2209.11166 [hep-th]。[113] N. Mekareeya 和 M. Sacchi, 《混合反常、二群、不可逆对称性与三维超共形指标》, arXiv:2210.02466 [hep-th]。[114] M. van Beest、D. S. W. Gould、S. Schafer-Nameki 和 Y.-N. Wang, 《来自 M理论的三维量子场论的对称性拓扑场论》, arXiv:2210.03703 [hep-th]。[115] A. Antinucci、F. Benini、C. Copetti、G. Galati 和 G. Rizi, 《非可逆自对偶对称性的全息》, arXiv:2210.09146 [hep-th]。[116] S. Giaccari 和 R. Volpato, 《重新审视弦轨形》, arXiv:2210.10034[hep-th]。[117] C. Cordova、S. Hong、S. Koren 和 K. Ohmori, 《来自广义对称性破缺的中微子质量》, arXiv:2211.07639 [hep-ph]。[118] I. Garcia Etxebarria 和 N. Iqbal, 《连续非可逆对称性的戈德斯通定理》, arXiv:2211.09570 [hep-th]。[119] Y. Choi、H. T. Lam 和 S.-H. Shao, 《非可逆高斯定律与轴子》, arXiv:2212.04499 [hep-th]。[120] D. Robbins、E. Sharpe 和 T. Vandermeulen, 《分解、平凡作用的对称性与拓扑算符》, arXiv:2211.14332 [hep-th]。[121] L. Bhardwaj、S. Schafer-Nameki 和 A. Tiwari, 《不可逆对称性的统一构造》, arXiv:2212.06159 [hep-th]。[122] L. Bhardwaj、L. E. Bottini、S. Schafer-Nameki 和 A. Tiwari, 《非可逆对称性网络》, arXiv:2212.06842 [hep-th]。[123] T. Bartsch、M. Bullimore、A. E. V. Ferrari 和 J. Pearson, 《不可逆对称性与高阶表示论 II》, arXiv:2212.07393 [hep-th]。[124] P. Agrawal、J. Fan、B. Heidenreich、M. Reece 和 M. Strassler, 《大型强子对撞机双光子超额启发的实验考量》, arXiv:1512.05775[hep-ph]。

[125] D. G. Robbins、E. Sharpe 和 T. Vandermeulen，《轨形中的量子对称性 s
与分解，”高能物理杂志 **02** (2022) 108, arXiv:2107.12386 [hep-th].[126] D. G. Robbins、E. Sharpe 和 T.Vandermeulen，“通过分解解析反常”，国际现代物理杂志 *A* **36** 第 29 期，(2021) 2150220, arXiv:2107.1355[hep-th].[127] T.-C. Huang、Y.-H. 2
Lin 和 S. Seifnashri，“构造具有非可逆对称性的二维拓扑场论”，高能物理杂志 **12** (2021) 028,arXiv:2110.02958 [hep-th].[128] K. Inamura，“具有融合范畴对称性的有能隙相晶格模型”，高能物理杂志 **03** (2022) 036,
arXiv:2110.12882 [cond-mat.str-el].[129] A. Cherman、T. Jacobson 和 M. Neuzil，“普适形变”，*SciPost Phys.***12** 第 4 期，(2022) 116,
arXiv:2111.00078 [hep-th].[130] E. Sharpe，“分解简介”，
arXiv:2204.09117 [hep-th].[131] V. Bashmakov、M. Del Zotto 和 A.Hasan，“四维中不可逆对称性的六维起源”， arXiv:2206.07073 [hep-th].[132] K. Inamura，“ $1+1$ 维融合范畴对称性的费米子化”，arXiv:2206.13159 [cond-mat.str-el].[133] J. A. Damia、R. Argurio 和 E. Garcia-Valdecasas，“五维中的非可逆缺陷、边界与全息”，
arXiv:2207.02831 [hep-th].[134] Y.-H. Lin、M. Okada、S. Seifnashri 和 Y. Tachikawa，“态的渐近密度
es
具有不可逆对称性的二维共形场论中的.....，” arXiv:2208.05495 [hep-th].[135] I. M. Burbano、J. Kulp 和 J. Neuser，《 E_8中的对偶缺陷》， arXiv:2112.1432 3
[hep-th].[136] J. A. Damia、R. Argurio 和 L. Tizzano，《三维连续广义对称性》，
arXiv:2206.14093 [hep-th].[137] A. Apte、C. Cordova 和 H. T. Lam，《不可逆对称性导致的有能隙相障碍》， arXiv:2212.14605 [hep-th].[138] S. Nawata、M. Sperling、H. E. Wang 和 Z. Zhong，《具有 1-形式对称性的 3d $\mathcal{N}=4$ 镜像对称性》，
arXiv:2301.02409 [hep-th].[139] L. Bhardwaj、M. Bullimore、A. E. V. Ferrari 和 S. Schafer-Nameki，《3d $\mathcal{N}=4$ 超共形场论的广义对称性与反常》，
arXiv:2301.02249 [hep-th].

[140] J. Kaidi、E. Nardoni、G. Zafrir 和 Y. Zheng，《不可逆对称性的对称性拓扑场论与反常》 arXiv:2301.07112 [hep-th]。[141] A. Debray、M. Dierigl、J. J. Heckman 和 M. Montero，《IIBordia 编年史：对偶性、配边与沼泽地》，arXiv:2302.00007 [hep-th]。[142] M. Del Zotto、M. Liu 和 P.-K. Oehlmann，《六维杂化小弦理论与F理论几何：导论》，3，2023年。 arXiv:2303.13502 [hep-th]。[143] M. Etheredge、I. Garcia Etxebarria、B. Heidenreich 和 S. Rauch，《$\mathcal{N}=3$ S折叠中的膜与对称性》， arXiv:2302.14068 [hep-th]。[144] Y.-H. Lin 和 S.-H. Shao，《不可逆对称性的自举》，arXiv:2302.13900 [hep-th]。[145] A. Amariti、D. Morgante、A. Pasternak、S. Rota 和 V. Tatitscheff，《$\mathcal{N}=3$ S折叠中的一形式对称性》，arXiv:2303.07299 [hep-th]。[146] F. Carta、S. Giacomelli、N. Mekareeya 和 A. Mininno，《关于 Argyres-Douglas 理论中不可逆对称性的评论》， arXiv:2303.16216 [hep-th]。[147] M. Koide、Y. Nagoya 和 S. Yamaguchi，《四维中的不可逆对称性与边界》， arXiv:2304.01550 [hep-th]。[148] C. Cordova、T. T. Dumitrescu、K. Intriligator 和 S.-H. Shao，《Snowmass白皮书：量子场论及其他领域中的广义对称性》，发表于2022年 Snowmass夏季研究。5，2022年。 arXiv:2205.09545 [hep-th]。[149] D. Gaiotto 和 A. Tomasiello，《六维 (1,0) 理论的全息》，高能物理杂志 12 (2014) 003， arXiv:1404.0711 [hep-th]。[150] M. Del Zotto、J. J. Heckman、A. Tomasiello 和 C. Vafa，《六维共形物质》，高能物理杂志 02 (2015) 054，arXiv:1407.6359 [hep-th]。[151] F. Benini、S. Benvenuti 和 Y. Tachikawa，《五膜网络与 $\mathcal{N}=2$超共形场论》，高能物理杂志 09 (2009) 052，arXiv:0906.0359 [hep-th]。[152] J. Louis 和 S. L¨ust，《半极大超引力中的超对称 AdS_7 背景与 (1, 0) 超共形场论的边缘算符》，高能物理杂志 10 (2015) 120，arXiv:1506.08040 [hep-th]。[153] C. Cordova、T. T. Dumitrescu 和 K. Intriligator，《超共形理论的形变》，高能物理杂志 11 (2016) 135， arXiv:1602.01217 [hep-th]。[154] B. S. Acharya 和 S. Gukov，《M理论与特殊整体性流形的奇点》，Phys. Rept. 392 (2004) 121–189， arXiv:hep-th/0409191。

[155] B. S. Acharya, 《在 M 理论中实现 $N = 1$ 超杨–米尔斯》, arXiv:hep-th/0011089.[156] B. S. Acharya 和 E. Witten, 《来自具有 G_2 holonomy 的流形的手征费米子》, arXiv:hep-th/0109152.[157] R. L. Bryant 和 S. M. Salamon, 《关于构造具有例外holonomy 的某些完备度量》, 《杜克数学杂志》58卷第3期, （1989年6月）829–850页。[158] S. Cecotti、C. Cordova、J. J. Heckman 和 C. Vafa, 《T-膜与单值化》, 高能物理杂志 07 (2011) 030, arXiv:1010.5780 [hep-th].[159] R. Barbosa、M. Cveti˘c、J. J. Heckman、C. Lawrie、E. Torres 和 G. Zoccarato, 《T-膜与 G_2 背景》, 《物理评论D》101卷第2期, （2020年）026015, arXiv:1906.02212 [hep-th].[160] J. Tian 和 Y.-N. Wang, 《来自 $\mathbb{C}^3$ 轨形的五维和六维超共形场论》, SciPost Phys. 12卷第4期, （2022年）127, arXiv:2110.15129 [hep-th].[161] I. Garcia Etxebarria、B. Heidenreich 和 D. Regalado, 《IIB通量非交换性与场论的整体结构》, 高能物理杂志 10 (2019) 169, arXiv:1908.08027[hep-th].[162] J. J. Heckman 和 T. Rudelius, 《六维超共形场论的自顶向下方法》, J. Phys. A 52卷第9期, （2019年）093001, arXiv:1805.06467 [hep-th].[163] P. C. Argyres、J. J. Heckman、K. Intriligator 和 M. Martone, 《关于超共形场论的Snowmass白皮书》, arXiv:2202.07683 [hep-th].[164] A. Strominger, 《开放p膜》, Phys. Lett. B 383 (1996) 44–47, arXiv:hep-th/9512059.[165] E. Witten, 《关于弦动力学的一些评论》, 载于《STRINGS 95：弦理论的未来展望》, 第501–523页。1995年7月。arXiv:hep-th/9507121.[166] N. Seiberg 和 E. Witten, 《关于六维弦动力学的评论》, Nucl. Phys. B 471 (1996) 121–134, arXiv:hep-th/9603003.[167] P. C. Argyres 和 M. R. Douglas, 《SU(3)超对称规范理论中的新现象》, Nucl. Phys. B 448 (1995) 93–126, arXiv:hep-th/9505062.[168] J. J. Heckman、D. R. Morrison 和 C. Vafa, 《六维超共形场论分类与广义ADE轨形化》, 高能物理杂志 05 (2014) 028, arXiv:1312.5746 [hep-th]. [勘误：高能物理杂志 06，017 (2015)].[169] J. J. Heckman、D. R. Morrison、T. Rudelius 和 C. Vafa, 《六维超共形场论的原子分类》, 《Fortschritte der Physik》63 (2015) 468–530, arXiv:1502.05405 [hep-th]。

[170] Y. Tachikawa，《M理论和F理论中的冻结奇点》，高能物理杂志 06 (2016) 128, arXiv:1508.06679 [hep-th].[171] L. Bhardwaj、D. R. Morrison、Y. Tachikawa 和 A. Tomasiello，《F理论的冻结相》，高能物理杂志 08 (2018) 138, arXiv:1805.09070 [hep-th].[172] L. Bhardwaj、M. Del Zotto、J. J. Heckman、D. R. Morrison、T. Rudelius 和 C. Vafa，《F理论与小弦分类》，《物理评论D》93卷第8期，（2016年）086002，arXiv:1511.05565 [hep-th]. [勘误：Phys.Rev.D 100，029901 (2019)].[173] C. Vafa，《F理论的证据》，Nucl. Phys. B 469 (1996) 403–418, arXiv:hep-th/9602022.[174] J. J. Heckman、T. Rudelius 和 A. Tomasiello，《裂变、融合与六维重整化群流》，高能物理杂志 02 (2019) 167，arXiv:1807.10274 [hep-th].[175] M. Del Zotto 和 G. Lockhart，《六维超共形场论中BPS弦的普适特征》，高能物理杂志 08 (2018) 173，arXiv:1804.09694 [hep-th].[176] J. P. Gauntlett、D. Martelli、J. Sparks 和 S.-T. Yau，《Sasaki–Einstein度量存在性的障碍》，Commun. Math. Phys. 273 (2007) 803–827，arXiv:hep-th/0607080.[177] Tristan C Collins 和 G´abor Sz´ekelyhidi，《Sasaki–Einstein度量与K–稳定性》，Geom. Top. 23卷第3期，（2019年）1339–1413页。[178] Y. Ito，《三面奇点的保正则解析》，Proc. Jap. Acad., Ser. A, Math. Sci. 70卷第5期，（1994年）131–136页。[179] S.-S. Roan，《三维Gorenstein轨形的极小解析》，Topology 35 (1996) 489–508。[180] C. van Coevering，《保正则解析上的Ricci平坦K¨ahler度量及K¨ahler锥》，Mathematische Annalen 347 (2008) 581–611。[181] D. R. Morrison 和 N. Seiberg，《极端跃迁与五维超对称场论》，Nucl. Phys. B 483 (1997) 229–247, arXiv:hep-th/9609070.[182] M. R. Douglas、S. H. Katz 和 C. Vafa，《小瞬子、Del Pezzo曲面与I-prime型理论》，Nucl. Phys. B 497 (1997) 155–172, arXiv:hep-th/9609071.[183] K. A. Intriligator、D. R. Morrison 和 N. Seiberg，《五维超对称规范理论与Calabi–Yau空间的退化》，Nucl. Phys. B 497 (1997) 56–100, arXiv:hep-th/9702198。

[184] D. Xie 和 S.-T. Yau, 《三维典范奇点与五维$\mathcal{N}=1$ 超共形场论》, 高能物理杂志 06 (2017) 134, arXiv:1704.00799 [hep-th]。[185] C. Closset、M. Del Zotto 和 V. Saxena, 《五维超共形场论与规范理论相：M理论/IIA型视角》, SciPost Phys. 6 no. 5, (2019) 052,arXiv:1812.10451 [hep-th]。[186] N. Seiberg, 《五维超对称场论、非平庸不动点与弦动力学》, Phys. Lett. B 388 (1996) 753–760, arXiv:hep-th/9608111。[187] P. Jefferson、S. Katz、H.-C. Kim 和 C. Vafa, 《五维超共形场论的几何分类》, 高能物理杂志 04 (2018) 103, arXiv:1801.04036 [hep-th]。[188] H. Hayashi、P. Jefferson、H.-C. Kim、K. Ohmori 和 C. Vafa, 《超共形场论、全息与拓扑弦》, arXiv:1905.00116 [hep-th]。[189] F. Apruzzi、S. Schafer-Nameki 和 Y.-N. Wang, 《通过解耦与粘合得到的五维超共形场论》, 高能物理杂志 08 (2020) 153, arXiv:1912.04264 [hep-th]。[190] D. Gaiotto, 《$\mathcal{N}=2$ 对偶性》, 高能物理杂志 08 (2012) 034, arXiv:0904.2715 [hep-th]。[191] M. Cvetic、G. Gibbons、H. Lu 和 C. Pope, 《具有$Spin$(7)和 G_2 holonomy 的余维一流形》, 《物理评论D》65 (2002) 106004,arXiv:hep-th/0108245。[192] M. Cvetic、G. W. Gibbons、H. Lu 和 C. N. Pope, 《定向平面与 G(2) 和 spin(7) 度量中的坍缩》, Annals Phys. 310 (2004) 265–301, arXiv:hep-th/0111096。[193] Z. W. Chong、M. Cvetic、G. W. Gibbons、H. Lu、C. N. Pope 和 P. Wagner, 《G(2) holonomy 的一般度量与收缩极限》, Nucl. Phys. B 638 (2002) 459–482, arXiv:hep-th/0204064。[194] M. Cvetic、G. W. Gibbons、H. Lu 和 C. N. Pope, 《Bianchi IX 自对偶爱因斯坦度量与奇异 G(2) 流形》, Class. Quant. Grav. 20 (2003) 4239–4268,arXiv:hep-th/0206151。[195] A. Corti、M. Haskins、J. Nordstr¨om 和 T. Pacini, 《通过半 Fano 三维簇得到的 G_2-流形与结合子流形》, 《杜克数学杂志》164 no. 10, (2015) 1971–2092,arXiv:1207.4470 [math.DG]。[196] L. Foscolo 和 M. Haskins, 《新的 G2 holonomy 锥，以及六球面和一对三球面乘积上的奇异近 Kähler 结构》, Annals Math. 185 (2017) 59–130, arXiv:1501.07838 [math.DG]。

[197] L. Foscolo、M. Haskins 和 J. Nordstr¨om, 《由渐近锥形卡拉比–丘三维簇构造的完备非紧 G_2流形》, 《杜克数学杂志》170 no. 15, (2021) 3323–3416, arXiv:1709.04904 [math.DG]。[198] L. Foscolo、M. Haskins 和 J. Nordstr¨om, 《无穷多个新的完备余维一 G_2-流形族: G_2 Taub-NUT 空间和 Eguchi-Hanson 空间的类比》, arXiv:1805.02612 [math.DG]。[199] F. Apruzzi、J. J. Heckman、D. R. Morrison 和 L. Tizzano, 《具有共形物质的四维规范理论》, 高能物理杂志 09 (2018) 088, arXiv:1803.00582 [hep-th]。[200] M. Atiyah 和 E. Witten, 《具有 G_2 holonomy 的流形上的 M理论动力学》, 《数学物理进展》6 (2003) 1–106, arXiv:hep-th/0107177。[201] M. Cvetic、G. W. Gibbons、H. Lu 和 C. N. Pope, 《超对称非奇异分数D-2膜与 NS-NS 2膜》, Nucl. Phys. B 606 (2001) 18–44, arXiv:hep-th/0101096。[202] N. Marcus、A. Sagnotti 和 W. Siegel, 《以四维超场表述的十维超对称杨-米尔斯理论》, Nucl. Phys. B 224 (1983) 159。[203] N. Arkani-Hamed、T. Gregoire 和 J. G. Wacker, 《四维超空间中的高维超对称》, 高能物理杂志 03 (2002) 055, arXiv:hep-th/0101233。[204] M. Bill`o、V. Gon¸calves、E. Lauria 和 M. Meineri, 《共形场论中的缺陷》, 高能物理杂志 04 (2016) 091, arXiv:1601.02883 [hep-th]。[205] B. Acharya、N. Lambert、M. Najjar、E. E. Svanes 和 J. Tian, 《五维 T_N-理论离散对称性的规范化》, 高能物理杂志 04 (2022) 114,arXiv:2110.14441 [hep-th]。[206] E. Witten, 《AdS/CFT对应与拓扑场论》, 高能物理杂志 12 (1998) 012, arXiv:hep-th/9812012。[207] N. Seiberg 和 W. Taylor, 《电荷格与六维超引力的一致性》, 高能物理杂志 06 (2011) 001, arXiv:1103.0019 [hep-th]。[208] D. S. Freed、G. W. Moore 和 G. Segal, 《通量的不确定性》, Commun. Math. Phys. 271 (2007) 247–274, arXiv:hep-th/0605198。[209] G. B. M., 《有限群理论及其应用》, Nature 98 no. 2456, (1916) 225–226。

[210] W. M. Fairbairn、T. Fulton 和 W. H. Klink，《有限且不连通的子群 o f su_3 及其在基本粒子谱中的应用，”《数学物理学杂志》（纽约）（美国）**5** (1964年) 1038.[211] W. Fairbairn 和 T. Fulton，“su(3) 的有限子群的一些评论，”《数学物理学杂志》**23** (1982年) 1747–1748.[212] A. Altavilla、E. Ballico、M. C. Brambilla 和 S. Salamon，“旗流形的扭量几何，”《数学时代》**303** (2023年) 43, arXiv:2112.11100 [math.DG].[213] M. A. Armstrong，“不连续群轨道空间的基本群，”剑桥哲学学会数学学报 **64** 第 2 期，(1968 年) 299–301.[214] T. Kawasaki，“ 扭曲射影空间与透镜复形的上同调，”《数学年刊》**206** 第3期，(1973年) 243–248.[215] A. P. Braun、E. Sabag、M. Sacchi 和 S. Schafer-Nameki，“G_2-流形：来自四维$\mathcal{N} = 1$ 理论，第一部分：畴壁，” arXiv:2304.01193 [hep-th].[216] C. Vafa，“弦景观与沼泽地，” arXiv:hep-th/0509212[hep-th].[217] E. Lake，“高形式对称性与自发对称性破缺，” arXiv:1802.07747 [hep-th].