arXiv:2304.03332v1 [math.SG] 6 Apr 2023

关于辛 DQ-代数簇的分类

PAUL BRESSLER 和 JUAN DIEGO ROJAS

Abstract. 在辛流形上局部定义的 DQ-代数丛构成一个 2-gerbe。通过将 P. Deligne 的方法应用于 DQ-代数丛，我们证明这个 2-gerbe 存在一个典范的全局截面；也就是说，每个辛流形都存在一个典范的 DQ-代数丛，用以量子化结构层。该构造依赖于非阿贝尔上同调的方法以及 Weyl 代数中的局部计算。作为推论，我们得到辛 DQ-代数丛的分类。

1. 引言

变形量子化最初是在代数（层）的背景下发展起来的，但 M. Kashiwara [Kashiwara, 1996]和 M. Kontsevich [Kontsevich, 2001] 的工作表明，代数丛叠这一更广阔的背景为该理论提供了一个自然的框架。这些进展促成了 M. Kashiwara 和 P. Schapira [Kashiwara & Schapira, 2012]对 DQ-代数丛的引入。

流形 X 上的 DQ-代数丛的经典极限不是结构层 $\mathcal{O}_X$，而是 $\mathcal{O}_X^\times$-gerbe 的线性版本。gerbe 的变形量子化研究始于 [Bressler, Gorokhovsky, Nest & Tsygan, 2007]，其中推广了此前关于结合代数（层）的变形的各种结果。特别地，利用 B.V. Fedosov 方法的一个扩张，对辛流形上的 gerbe 的变形量子化进行了分类。

关于 C^∞ 设定下辛变形量子化的存在性与分类问题，已由 M. De Wilde 和 P.B.A. Lecomte [De Wilde & Lecomte, 1983, De Wilde & Lecomte, 1985], 以及 B.V. Fedosov [Fedosov, 1985]解决。P. Deligne 在 [Deligne, 1995]中介绍了他们的工作，并运用了一些非阿贝尔上同调工具。在本文中，我们将 [Deligne, 1995] 的方法应用于辛 DQ-代数丛的分类问题。

假设 X 是一个辛流形，其辛形式记为 ω。由于所有局部定义且产生 ω 的 DQ-代数丛在局部都是等价的，因此这类对象构成的 2-叠 $\mathfrak{DQ}_X^\omega$ 实际上是一个 2-gerbe。此外，对于任意局部定义的 DQ-代数丛 $\mathcal{C} \in \mathfrak{DQ}_X^\omega$，其自等价构成的叠等价于 $\mathbb{C}[[t]]^\times[1]$ 这一 $\mathbb{C}[[t]]^\times$-托ors gerbe，因此，$\mathfrak{DQ}_X^\omega$ 是（即在局部等价于）由 $\mathbb{C}[[t]]^\times$-gerbe 构成的 2-gerbe $\mathbb{C}[[t]]^\times[2]$ 的一个扭曲形式。因此，(X,ω)的变形量子化存在性问题可改述为证明 2-范畴 $\mathfrak{DQ}_X^\omega(X)$非空的问题。

本工作的主要结果，定理 7.1 表明情况确实如此，而且事实上存在一个典范的量子化$\mathsf{C}_{can} \in \mathfrak{DQ}^{\omega}_X(X)$，而定理 7.2 则以 $\mathfrak{DQ}^{\omega}_X$ 与 $\mathbb{C}[[t]]^\times[2]$ 之间的典范等价的形式给出了分类问题的答案，该等价在 $\pi_0\,\mathfrak{DQ}^{\omega}_X(X)$和 $H^2(X;\,\mathbb{C}[[t]]^\times)$ 的等价类或量子化集合之间诱导出一个双射。

此前，M. Kashiwara、A. D'Agnolo 和 P. Polesello 已在复解析背景下，借助微分算子与 WKB 算子的代数层，建立了典范量子化的存在性以及分类结果，见 [Kashiwara, 1996], [D'Agnolo & Polesello, 2005], [Polesello, 2008], [D'Agnolo & Kashiwara, 2011]。

这里的处理依赖于 Moyal-Weyl 星乘积的初等性质，并大量运用阿贝尔（高阶）托ors 与 gerbe 理论。为了统一处理一系列情形，其中既包括普通的 C^∞ 流形，也包括复解析流形，我们在自然的一般性框架下工作：考虑配备可积复分布 P 的 C^∞流形 X，并要求其满足技术条件 (A.1.1)（定义和记号见附录 A）。

本文组织如下。第 2 节回顾辛 DQ-代数的基础知识，并遵循 [Deligne, 1995] 的工作，在 DQ-代数上引入膨胀等变结构（DES）。第 3 节回顾 DQ-代数丛的基本定义和事实，并描述赋予 DES 的辛 DQ-代数丛之叠。第 4 节专门研究 DES 在经典极限映射下的行为。第 5 节在辛 DQ-代数丛上引入自对偶结构，并描述赋予自对偶结构的辛 DQ-代数丛之叠。第 6 节定义 DES 与自对偶结构相容的含义，并描述赋予相容的 DES 和自对偶结构的辛 DQ-代数丛之叠。第 7 节确定典范量子化，并陈述辛 DQ-代数丛的分类结果。

为方便读者，我们附上两个附录，其中的内容在很大程度上借鉴自 [Bressler, Gorokhovsky, Nest & Tsygan, 2017]。附录 A 总结了存在可积复分布时关于微积分的相关基本事实。附录 B 简要介绍了阿贝尔（高阶）torsor 和 gerbe 的基本理论，并引入了本文正文中通篇使用的记号。关于该主题的更详细介绍，可参见 [Breen, 1994] 和 [Milne, 2003]。

2. DQ-algebras

全文中，X 是一个 C^∞ 流形，配备了满足 (A.1.1) 的可积复分布 P（定义和记号见附录 A）。我们用 O_X（分别用 $\mathsf{O}^{X/\mathscr{P}}$）表示复值 C^∞ 函数的层（分别表示 P-不变函数的子层）。

在复流形的背景下，DQ-代数这一概念由[Kashiwara & Schapira 2012]引入。

2.1. 星积。O$^{X/\mathscr{P}}$上的星积是一个

$$\mathscr{O}_{X/\mathscr{P}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_{X/\mathscr{P}} \to \mathscr{O}_{X/\mathscr{P}}[[t]].$$

形式为

$$f \otimes g \mapsto f \star g = fg + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(f,g)t^i, \tag{2.1.1}$$

的映射，其中 P_i 为双微分算子。这样的映射唯一地延拓为一个 $\mathbb{C}[[t]]$-双线性映射

$$\mathscr{O}_{X/\mathscr{P}}[[t]] \otimes_{\mathbb{C}[[t]]} \mathscr{O}_{X/\mathscr{P}}[[t]] \to \mathscr{O}_{X/\mathscr{P}}[[t]]$$

并且要求后者在 O$_{X/\mathscr{P}}$[[t]]上定义一个结合的含单位 $\mathbb{C}[[t]]$-代数结构。

命题 2.1（[Kashiwara & Schapira，2012，命题 2.2.3]）。设 $\star$ 和 $\star'$为星积，且设 φ: (O $_{X/\mathscr{P}}$[[t]],$\star$) $\to$(O $_{X/\mathscr{P}}$[[t]],$\star'$) 是 $\mathbb{C}[[t]]$-代数的一个态射。那么，存在唯一的微分算子序列 $\{R_i\}_{i\geq 0}$ 作用于 X_∞，使得对于任意 $f \in$O $_{X/\mathscr{P}}$，有 $R_0 = 1$和 $\varphi(f) = \sum R_i(f)t^i$。特别地，$\varphi$是一个$_{i=0}$同构。

备注 2.2。论文 [Kashiwara & Schapira，2012] ，尤其是其中的命题 2.2.3，讨论的是全纯情形，即 P 为复结构的情形。不过，很容易看出，其证明以及所依据的结果也适用于一般的可积分布。

2.2. DQ-代数。DQ-代数是一个 $\mathbb{C}[[t]]$-代数层，局部同构于 O $_{X/\mathscr{P}}$上的星积。对于 DQ-代数 $\mathbb{A}$，存在一个典范同构 $\mathbb{A}/t\cdot\mathbb{A} \cong$O$^{X/\mathscr{P}}$。因此，存在一个典范映射（模 t 约化） $\mathbb{A} \xrightarrow{\sigma}$ O $_{X/\mathscr{P}}$的 $\mathbb{C}[[t]]$-代数。

DQ-代数态射是 $\mathbb{C}[[t]]$-代数层之间的态射。

2.3. 相关的泊松结构。假设 $\mathbb{A}$ 是一个 DQ-代数。复合

$$\mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \xrightarrow{[\cdot,\cdot]} \mathbb{A} \xrightarrow{\sigma} \mathscr{O}_{X/\mathscr{P}}$$

是平凡的。因此，交换子 $\mathbb{A}\otimes\mathbb{A} \xrightarrow{[\cdot,\cdot]} \mathbb{A}$ 取值于 $t\mathbb{A}$。复合

$$\mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \xrightarrow{[\cdot,\cdot]} t\mathbb{A} \xrightarrow{t^{-1}} \mathbb{A} \xrightarrow{\sigma} \mathscr{O}_{X/\mathscr{P}}$$

唯一分解为

$$\mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \xrightarrow{\sigma\otimes\sigma} \mathscr{O}_{X/\mathscr{P}} \otimes \mathscr{O}_{X/\mathscr{P}} \xrightarrow{\{\cdot,\cdot\}} \mathscr{O}_{X/\mathscr{P}}$$

后一个映射，$\{\cdot,\cdot\}$: O $_{X/\mathscr{P}}$ ⊗ O $_{X/\mathscr{P}}$ → O $_{X/\mathscr{P}}$是 O $_{X/\mathscr{P}}$上的泊松括号，因此对应于一个双向量 $\pi \in \Gamma(X;\bigwedge^2 \mathrm{T}_{X/\mathscr{P}})$。

引理 2.3（[Bressler, Gorokhovsky, Nest & Tsygan，2017，引理 2.6]）。局部同构的 DQ-代数产生相同的相伴泊松括号。

2.4. 辛 DQ-代数。若 DQ-代数的相伴泊松结构是非退化的，则称其为辛 DQ-代数。

例 2.4。设 $\{\cdot,\cdot\}$ 是 O$_{X/\mathscr{P}}$ 上的辛泊松括号。因此，rk$_{\mathcal{O}_{X/\mathscr{P}}}$ T$_{X/\mathscr{P}}$ 为偶数，即对于适当的 n，其等于 $2n$ 。设 $U \subset X$ 为一个开子集，且 $p_i, q_i \in$ O $_{X/\mathscr{P}}(U)$，$i = 1, \ldots, n$ 满足典范关系。我们将与 $dp_1, \ldots, dp_n, dq_1, \ldots, dq_n$ 对偶的基记为 $\frac{\partial}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial p_n}$, $\frac{\partial}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial q_n}$。Moyal-Weyl 乘积定义为

$$f \star g = \exp\left(\frac{t}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\otimes\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}\otimes\frac{\partial}{\partial p_i}\right)\right) f \otimes g\Big|_{\Delta}$$

其中，对角线上的限制 Δ 表示乘法映射 O $_{X/\mathscr{P}}\otimes_{\mathbb{C}}$ O$_{X/\mathscr{P}}$ →O$^{X/\mathscr{P}}$。

命题2.5（量子 Darboux引理）。设 $\mathbb{A}$ 是一个辛 DQ-代数。那么，每个点 $x \in X$ 都有一个邻域 $x \in U \subset X$ ，使得对于一组函数 $p_i, q_i \in$O$_{X/\mathscr{P}}(U)$，$i = 1, .., 1$ 2rkT$^{X/\mathscr{P}}$，它们满足典范关系，存在截面 $\widehat{p}_i, \widehat{q}_i \in \mathbb{A}(U)$，使得 $\sigma(\widehat{p}_i) = p_i$, $\sigma(\widehat{q}_i) = q_i$ 且且$[\widehat{p}_i, \widehat{p}_j] = [\widehat{q}_i, \widehat{q}_j] = 0$, $[\widehat{p}_i, \widehat{q}_j] = \delta_{ij}$。

推论2.6.

(1) 具有相同关联泊松括号的辛 DQ-代数局部同构。(2) 单位映射 $\mathbb{C}[[t]] \to \mathbb{A}$ 是到中心的同构。(3) 该序列

$$0 \to \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]] \to \frac{1}{t}\mathbb{A} \xrightarrow{\mathrm{ad}} \mathrm{Der}_{\mathbb{C}[[t]]}(\mathbb{A}) \to 0 \tag{2.4.1}$$

是正合的。

（4）群序列

$$1 \to \exp(\mathbb{C}[[t]]) \to \exp(\mathbb{A}) \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathbb{A}) \to 1 \tag{2.4.2}$$

是正合的。

在 (2.4.2) 中，exp(𝔸) 是与赋有交换子括号的幂零李代数 $\mathbb{A}$ 相关联的幂单群，而映射 exp(𝔸) →Aut(𝔸) 由“exp”(a) ↦ exp(ad(a)) 给出。 ——

证明。由命题 2.5 及 Moyal-Weyl 星乘积的众所周知性质可得。□

2.5. 膨胀等变结构。设 $\mathbb{A}$ 是一个辛 DQ-代数。包含映射 $\mathbb{C}[[t]] \to \mathbb{A}$ 是到中心的单射，因此存在一个典范同构 $\mathbb{C}[[t]] \cong \mathsf{Z}(\mathbb{A})$。“限制到中心”给出了映射

$$(\cdot)|_{\mathsf{Z}(\mathbb{A})} \colon \operatorname{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{A}) \to \operatorname{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[[t]]).$$

下文中，我们将导子 $\dfrac{d}{dt}$记为 ∂_t。

引理 2.7. 在 X 的局部，存在 $D \in \mathbf{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{A})$，使得 $D|_{\mathsf{Z}(\mathbb{A})} = t\partial_t$。

证明。由于问题是局部的，只需考虑例 2.4 中描述的 Moyal-Weyl 乘积情形。容易看出，向量场 $\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(p_i\dfrac{\partial}{\partial p_i}+q_i\dfrac{\partial}{\partial q_i}\right)$ 在 $\mathcal{O}_{X/\mathscr{P}}(U)$ 上的自然作用是 Moyal-Weyl 乘积的一个导子。因此，$D = t\partial_t + \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(p_i\dfrac{\partial}{\partial p_i} + q_i\dfrac{\partial}{\partial q_i}\right)$ 具有所需的性质。

□

令 $\mathfrak{l}$ 表示由导子 $t\partial_t$ 局部生成的 $\mathbf{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[[t]])$ 的 $\mathbb{C}$-子模。我们通过拉回方块定义 $\mathbf{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{A})$ 的一个子层 $\mathfrak{L}(\mathbb{A})$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{L}(\mathbb{A}) & \longrightarrow & \mathfrak{l} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{A}) & \xrightarrow{(\cdot)|_{\mathsf{Z}(\mathbb{A})}} & \operatorname{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[[t]]) \end{array}$$

推论 2.8。该序列

$$0 \to \operatorname{Der}_{\mathbb{C}[[t]]}(\mathbb{A}) \to \mathfrak{L}(\mathbb{A}) \xrightarrow{(\cdot)|_{\mathsf{Z}(\mathbb{A})}} \mathfrak{l} \to 0 \tag{2.5.1}$$

是正合的。

将扩张 (2.5.1) 与扩张 (2.4.1) 拼接，得到正合列

$$0 \to \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]] \to \frac{1}{t}\mathbb{A} \xrightarrow{\mathrm{ad}} \mathfrak{L}(\mathbb{A}) \xrightarrow{(\cdot)|_{\mathsf{Z}(\mathbb{A})}} \mathfrak{l} \to 0 \tag{2.5.2}$$

由于扩张 (2.5.1) 在 X 上局部可分裂，正合列 (2.5.2) 导出一个 $\mathbf{Hom}(\mathfrak{l}, \dfrac{1}{t}\mathbb{C}[[t]])[1] \cong \dfrac{1}{t}\mathbb{C}[[t]][1]$-托ors（见 B.7），记为 $\mathbf{DES}(\mathbb{A})$。

在（辛DQ-代数） $\mathbb{A}$ 上的膨胀等变结构（DES）是一个对象 $\widetilde{\mathfrak{L}} \in \mathbf{DES}(\mathbb{A})$。具体而言， $\mathbb{A}$ 上的 DES 是 $\widetilde{\mathfrak{L}}$ 对 $\mathfrak{l}$ 通过 $\dfrac{1}{t}\mathbb{A}$ 进行的扩张，其提升

$\mathfrak{L}$, 即存在一个向量空间层的交换图

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]] & = & \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]] & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \frac{1}{t}\mathbb{A} & \longrightarrow & \widetilde{\mathfrak{L}} & \longrightarrow & \mathfrak{l} & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle \mathrm{ad}}\downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Der}_{\mathbb{C}[[t]]}(\mathbb{A}) & \longrightarrow & \mathfrak{L}(\mathbb{A}) & \xrightarrow{(\cdot)|_{\mathfrak{z}(\mathbb{A})}} & \mathfrak{l} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
\tag{2.5.3}
$$

具有正合行与列。

~2.6. DES 上的典范括号。DES $\mathfrak{L}$ 在 $\mathbb{A}$ 上具有典范的~李代数层结构。设 $D \in \mathfrak{L}$ 为一个局部定义的截面，它映射到 $t\partial_t$。那么， $\widetilde{\mathfrak{L}}$的每个截面都具有如下形式： $a + \lambda \cdot D$, $a \in \frac{1}{t}\mathbb{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$。 $\mathfrak{L}$ 上的括号~定义如下：

$$
[a_1 + \lambda_1 \cdot D, a_2 + \lambda_2 \cdot D] = [a_1, a_2] + \lambda_1 \cdot \overline{D}(a_2) - \lambda_2 \cdot \overline{D}(a_2), \tag{2.6.1}
$$

其中， $\overline{D}$ 是 D 在 $\mathfrak{L}(\mathbb{A})$ 中的像。

引理 2.9. 括号 (2.6.1) 与 D 的选取无关。

证明。事实上，任何其他选取都具有如下形式： $D + b$，其中 $b \in \frac{1}{t}\mathbb{A}$。于是，

$a_i + \lambda_i \cdot D = (a_i - \lambda_i b) + \lambda_i \cdot (D + b)$, $i = 1, 2$, 且

$$
[a_1 - \lambda_1 b, a_2 - \lambda_2 b] + \lambda_1 \cdot \overline{(D+b)}(a_2 - \lambda_1 b) - \lambda_2 \cdot \overline{(D+b)}(a_2 - \lambda_2 b) \\
= [a_1, a_2] + \lambda_1 \cdot \overline{D}(a_2) - \lambda_2 \cdot \overline{D}(a_2).
$$

□

~由于映射 $\mathfrak{L} \to \mathfrak{l}$ 在 X上局部存在截面，因此，上述描述的李代数结构是良定义的。我们将上述李代数结构称为规范的。

命题 2.10.

(1)规范括号赋予DES李代数的结构。 (2) 图 (2.5.3) 中的所有映射都是李代数同态。

(3) DES 的态射是关于典范括号的李代数态射。

证明。直接计算留给读者。 □

2.7. 可逆元的典范作用。设 $\mathbb{A}$是一个辛 DQ-代数$\widetilde{}$，且 $\mathfrak{L}$ 是 $\mathbb{A}$上的 DES。一个自同构 $\phi\colon \mathbb{A}\to\mathbb{A}$ 诱导出一个李代数自同构 $\mathsf{c}(\phi)\colon \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{A})\to\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{A})$，定义如下：$D\mapsto\phi\circ D\circ\phi^{-1}$。自同构$\mathsf{c}(\phi)$保持子代数 $\mathrm{Der}^{\mathbb{C}[[t]]}(\mathbb{A})$ 和 $\mathfrak{L}(\mathbb{A})$，并在 $\mathfrak{l}$上诱导出平凡自同构。

可逆元群 $\mathbb{A}^\times$（$\mathbb{A}$的可逆元素）通过共轭作用于后者；对于 $u\in\mathbb{A}^\times$，我们用 $\mathsf{c}(u)$ 表示相应的 $\mathbb{A}$ 自同构。

$\widetilde{}$引理 2.11. 假设 $\mathfrak{L}$ 是 $\mathbb{A}$ 和 $u\in\mathbb{A}^\times$上的 DES。

(1) 由 $\mathsf{c}(u)$ 诱导的 $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{A})$ 的自同构由 $D\mapsto D-\mathrm{ad}(D(u)\cdot u^{-1})$ 给出。(2) 公式

$$D\mapsto D-[D,u]\cdot u^{-1}=D-\overline{D}(u)\cdot u^{-1}, \tag{2.7.1}$$

其中 $u\in\mathbb{A}^\times$ 和 $\overline{D}$ 是 D 在 $\mathfrak{L}(\mathbb{A})$ 中的像，定义了 $\mathbb{A}^\times$ 对 $\sim_{\mathfrak{L}}$ 的作用。

(3) 映射 $\frac{1}{t}\mathbb{A}\to\widetilde{\mathfrak{L}}\to\mathfrak{L}(\mathbb{A})$ 是 $\mathbb{A}^\times$-等变的。

证明。直接计算留给读者。 □

我们将把由 (2.7.1) 定义的作用称为典范作用。

2.8. DES 的推前。设 $\phi\colon \mathbb{A}_1\to\mathbb{A}_0$ 是辛 DQ-代数之间的态射。态射 ϕ 限制后，在分别与 $\mathbb{C}[[t]]$ 认同的中心之间给出恒等映射，并诱导出李代数态射 $\mathsf{c}(\phi)\colon \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{A}_1)\to\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{A}_0)$，其定义为 $D\mapsto\phi\circ D\circ\phi^{-1}$。因此，$\mathsf{c}(\phi)$ 导出交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]] & \longrightarrow & \frac{1}{t}\mathbb{A}_1 & \xrightarrow{\mathrm{ad}} & \mathfrak{L}(\mathbb{A}_1) & \longrightarrow & \mathfrak{l} & \longrightarrow & 0\\
 & & \| & & \phi\downarrow & & \mathsf{c}(\phi)\downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]] & \longrightarrow & \frac{1}{t}\mathbb{A}_0 & \xrightarrow{\mathrm{ad}} & \mathfrak{L}(\mathbb{A}_0) & \longrightarrow & \mathfrak{l} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

因此，是 $\mathrm{Hom}(\mathfrak{l},\frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]])[1]\cong\underline{\frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]][1]}$-托ors 的态射

$$\phi_*\colon \underline{\mathrm{DES}}(\mathbb{A}_1)\to\underline{\mathrm{DES}}(\mathbb{A}_0) \tag{2.8.1}$$

3. Symplectic DQ-algebroids

定义 3.1（[Kashiwara & Schapira，2012，定义 2.3.1]）。DQ-代数丛 C 是一个 $\mathbb{C}[[t]]$-代数丛，满足：对于每个开集 $U \subseteq X$，若 C $(U) \neq \varnothing$，且任意$L \in$C (U)，则 $\mathbb{C}[[t]]$-代数自同态 $\mathscr{C}(L)$ 是 U 上的 DQ- 代数。

换言之，DQ-代数丛是一个在局部等价于星积的 $\mathbb{C}[[t]]$-代数丛。

命题 3.2（[Bressler, Gorokhovsky, Nest & Tsygan，2017，命题 7.3]）。存在唯一的泊松括号

$$\{\cdot,\cdot\}^{\mathscr{C}}\colon \mathcal{O}_{X/\mathscr{P}} \otimes \mathcal{O}_{X/\mathscr{P}} \to \mathcal{O}_{X/\mathscr{P}}$$

使得对于任意 $U \subset X$with C $(U) \neq \varnothing$以及任意 $L \in$C (U)，$\{\cdot,\cdot\}^{\mathscr{C}}$在 U上的限制与 DQ-代数自同态 End$\mathscr{C}(L)$ 相关联的泊松括号一致。

记 $\pi^{\mathscr{C}} \in \Gamma(X;\ \bigwedge^2 \mathrm{T}^{X/\mathscr{P}})$ 为与 $\{\cdot,\cdot\}^{\mathscr{C}}$对应的泊松双向量。

赋值 C $\mapsto \pi^{\mathscr{C}}$给出典范态射

$$\mathfrak{DQ}_{X/\mathscr{P}} \to \Lambda^2 \mathscr{T}_{X/\mathscr{P}} \tag{3.0.1}$$

对于 $\pi \in \Gamma(X; \Lambda^2 \mathrm{T}^{X/\mathscr{P}})$，我们用 $\mathfrak{DQ}^{\pi}_{X/\mathscr{P}}$表示 (3.0.1) 在 π 上的纤维。

3.1. 辛 DQ-代数丛。若 $\omega \in \Gamma(X; \Omega^{2\,cl}_{X/}{}_{,\mathscr{P}})$ 是一个辛形式，且 $\pi = \omega^{-1}$，我们将 $\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}$ 记为 2-叠 $\mathfrak{DQ}^{\pi}_{X/\mathscr{P}_0}$

例 3.3. 设 (X, ω) 是一个辛流形。假设 $U \subset X$ 是一个开子集，其坐标满足例 2.4 中的典范关系。我们用 $\mathbb{A}_{MW} := (\mathrm{O}_{U/\mathscr{P}}[[t]], \star)$ 表示相应的 Moyal-Weyl 代数。则 $\mathbb{A}^{+}_{MW}$（见附录 B.9）是 $\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}(U)$ 的一个对象。

命题 3.4.

(1) 对任意辛 DQ-代数群胚 C，典范态射 $\mathbb{C}[[t]] \to \mathrm{Z}(\mathrm{C})$ 是一个同构。(2) 对任意辛 DQ-代数群胚 C，典范态射（见附录 B.9）$\mathbb{C}[[t]]^{\times}[1] \to \mathrm{Aut}^{\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}}(\mathrm{C})$ 与态射 $\mathrm{Aut}^{\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}}(\mathrm{C}) \to \mathbb{C}[[t]]^{\times}[1]\colon F \mapsto \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{C})}(\mathrm{Id}, F)$ 互为拟逆的幺半范畴等价。(3) 2-叠 $\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}$是一个 $\mathbb{C}[[t]]^{\times}[1]$-gerbe（见附录 B.5）。

证明。回想一下，辛 DQ-代数群胚 C 局部等价于 $\mathbb{A}^{+}$，其中 $\mathbb{A}$是一个辛 DQ-代数。

(1) 这个问题在 X 上是局部的。因此，$\mathrm{Z}(\mathrm{C}) \cong \mathrm{Z}(\mathbb{A})$，结论由推论2.6的(2)得出。(2) 由于 $\mathbb{A}$ 的所有自同构都是内自同构，结论由推论2.6的(4)得出。

(3) 鉴于等价 Aut(C) $\to$ $\mathbb{C}[[t]]^{\times}[1]$，只需证明 $\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}$ 局部非空且局部连通。例3.3表明 $\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}$ 局部非空。局部连通性由推论2.6的(1)得出。

□

3.2. DES 增强。设 C 是一个辛 DQ-代数丛。

对于 $L_i \in$ C，$\widetilde{\mathfrak{L}}_i \in$ DES($\underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{C}}(L_i)$)，$i = 0, 1$，一个态射 $(L_1, \widetilde{\sim}\mathfrak{L}_1) \to (L_0, \mathfrak{L}_0)$ 是一对 (f, s)，其中 $f\colon L_1 \to L_0$ 是 C 中的一个同构，且 $s\colon \mathfrak{L}_1 \to \mathfrak{L}_0$ 是 k-向量空间层的一个态射，使得图表

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{t}\underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{C}}(L_1) & \longrightarrow & \widetilde{\mathfrak{L}}_1 & \longrightarrow & \mathfrak{l} \\ {\scriptstyle \mathsf{c}(f)}\downarrow & & {\scriptstyle s}\downarrow & & \| \\ \frac{1}{t}\underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{C}}(L_0) & \longrightarrow & \widetilde{\mathfrak{L}}_0 & \longrightarrow & \mathfrak{l} \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]] & \longrightarrow & \widetilde{\mathfrak{L}}_1 & \longrightarrow & \mathfrak{L}(\underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{C}}(L_1)) \\ \| & & {\scriptstyle s}\downarrow & & {\scriptstyle \mathsf{c}(f)}\downarrow \\ \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]] & \longrightarrow & \widetilde{\mathfrak{L}}_0 & \longrightarrow & \mathfrak{L}(\underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{C}}(L_0)) \end{array}$$

交换。态射的复合按显然的方式定义。

我们用.....表示 $\widetilde{\mathsf{C}}$ 该叠具有（局部定义的）对象对 $(L, \widetilde{\sim}\underline{\mathfrak{L}})$，$L \in$ C，$\mathfrak{L} \in$ DES(自同态$_{\mathscr{C}}(L)$)以及如上定义的态射。赋值 $(L, \mathfrak{L}) \mapsto L$ 延拓为态射

$$p_{\mathscr{C}}\colon \widetilde{\mathscr{C}} \to i\mathscr{C}$$

这使得 $\widetilde{\ }$C 成为一个在 iC上以Ext $^1(\mathfrak{l}, \underline{\frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]]})$-托ors 为纤维的范畴。

3.3. DES 增强的函子性。设 $F\colon \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_0$ 是辛 DQ-代数丛之间的 1-态射。对于 $L \in \mathsf{C}_1$，这一 DQ-代数态射

$$F\colon \underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{C}_1}(L) \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{C}_0}(F(L))$$

产生栈态射

$$F_*\colon \underline{\mathrm{DES}}(\underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{C}_1}(L)) \to \underline{\mathrm{DES}}(\underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{C}_0}(F(L)))\ .$$

如 2.8 中所述。

$\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim$映射 $(L,\mathfrak{L}) \mapsto F(L,\mathfrak{L}) := (F(L)\ F_*\mathfrak{L})$ 可扩张为栈态射$\sim$ $\sim$ $\sim F\colon \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_0$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathscr{C}_1} & \xrightarrow{\widetilde{F}} & \widetilde{\mathscr{C}_0} \\ {\scriptstyle p_{\mathscr{C}_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{\mathscr{C}_0}} \\ i\mathscr{C}_1 & \xrightarrow{F} & i\mathscr{C}_0 \end{array}$$

是交换的，并表示 $\mathsf{E}\,\mathsf{x}\,\mathsf{t}^1(\mathfrak{l},\mathbb{C}[[t]])$-托ors 之间的一个态射。

3.4. 2-态射的作用。设 $F_i\colon \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_0, i = 0, 1$, 是辛 DQ-代数丛之间的 1-态射，且 $f\colon F_1 \to F_0$ 是一个 2- 态射。对于 $L \in \mathsf{C}_1$，复合

$$\underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{C}_1}(L) \xrightarrow{F_1} \underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{C}_0}(F_1(L)) \xrightarrow{\mathsf{c}(f)} \underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{C}_0}(F_0(L))$$

与映射 $\mathrm{End}_{\mathscr{C}_1}(L) \xrightarrow{F_0} \mathrm{End}_{\mathscr{C}_0}(F_0(L))$ 相一致。因此，对于 $(L,\widetilde{\mathfrak{L}}) \in \widetilde{\mathsf{C}}_1$，存在一个典范同构 $\mathsf{c}(f)_*F_{1*}\mathfrak{L} \cong F_{0*}\mathfrak{L}$。令 $f_{*L}\colon F_{1*}\mathfrak{L} \to F_{0*}\mathfrak{L}$ 表示复合 $F_{1*}\mathfrak{L} \to \mathsf{c}(f)_*F_{1*}\mathfrak{L} \xrightarrow{=} F_{0*}\mathfrak{L}$。2-态射 $f_*\colon F_{1*} \to F_{0*}$ 定义为 $L \mapsto f_{*L}$。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$由 f诱导的 2-态射 $F_1 \to F_0$： $F_1 \to F_0$ 定义为

$$\widetilde{f} := (f, f_*)\colon \widetilde{F_1} \to \widetilde{F_0}.$$

定义 3.5. 辛 DQ-代数丛$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$C 上的膨胀等变结构（DES）是投影 $p_{\mathscr{C}}\colon \mathsf{C} \to i\mathsf{C}$ 的一个截面 $\nabla\colon i\mathsf{C} \to \mathsf{C}$，使得对于 $L \in \mathsf{C}$，所诱导的映射

$$\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathscr{C}}(L) = \underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{C}}(L)^\times \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\widetilde{\mathscr{C}}}(\nabla(L))$$

与典范作用 2.7 重合。

C 上 DES 的一个态射 $f\colon \nabla_1 \to \nabla_0$ 是投影$p_{\mathscr{C}}$的截面态射，即 $f \diamond \mathrm{Id}_{p_{\mathscr{C}}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}}$。

我们将 C 上 DES 的范畴记为 DES(C)。赋值 $U \mapsto$DES(C $|_U$) 延拓为一个群胚叠，记为 DES(C)。

3.5. 具有 DES 的辛 DQ-代数丛。配备 DES 的辛 DQ-代数丛以下述方式构成一个 2-范畴。

对象 对象是一些对 (C ∇)，其中 C 是一个辛 DQ-代数群胚，且 $\nabla \in$DES(C)。

1-态射：设 C_i是辛DQ-代数丛，且 $\nabla_i \in$DES(C $_i$)、$i = 0$、1，一个 1-态射 (C_1, ∇_1) $\to$ (C_0, ∇_0) 是一对 (F,θ)，其中 $F\colon \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_0$是一个 1-态射，并且

$$\theta\colon \widetilde{F} \circ \nabla_1 \to \nabla_0 \circ F$$

$\widetilde{\ }$是1-态射之间的一个 2-态射 $\mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_0$，其与相应的投影相容，即，复合

$$F = p_{\mathscr{C}_0} \circ \widetilde{F} \circ \nabla_1 \xrightarrow{\mathtt{Id}_{p_{\mathscr{C}_0}} \diamond \theta} p_{\mathscr{C}_0} \circ \nabla_0 \circ F$$

与 $\mathtt{Id}_F$ 重合。

复合：假设 $(\mathsf{C}_2, \nabla_2) \xrightarrow{(G,\rho)} (\mathsf{C}_1, \nabla_1) \xrightarrow{(F,\theta)} (\mathsf{C}_0, \nabla_0)$ 是 1-态射。复合

$$\nabla_2 \circ \widetilde{G \circ F} = \nabla_2 \circ \widetilde{G} \circ \widetilde{F} \xrightarrow{\rho \diamond \mathtt{Id}_{\widetilde{F}}} G \circ \nabla_1 \circ \widetilde{F} \xrightarrow{\mathtt{Id}_G \diamond \theta} G \circ F \circ \nabla_0 \tag{3.5.1}$$

导出 1-态射 $(\mathsf{C}_2, \nabla_2) \to (\mathsf{C}_0, \nabla_0)$，其定义为复合 $(G, \rho) \circ (F, \theta)$。

恒等：恒等态射 $\mathtt{Id}_{(\mathscr{C},\nabla)}$ 由对 $(\mathtt{Id}_{\mathscr{C}}\ \mathtt{Id}_{\nabla})$ 给出。

2-态射：假设 (F_i, θ_i)、$i = 0$、1 是 1-态射 $(\mathsf{C}_1, \nabla_1) \to (\mathsf{C}_0, \nabla_0)$。2- 态射 $f\colon (F_1, \theta_1) \to (F_0, \theta_0)$ 是一个 2-态射 $f\colon F_1 \to F_0$，使得该图表

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{F_1} \circ \nabla_1 & \xrightarrow{\theta_1} & \nabla_0 \circ F_1 \\ {\scriptstyle \widetilde{f} \diamond \mathtt{Id}_{\nabla_1}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathtt{Id}_{\nabla_0} \diamond f} \\ \widetilde{F_0} \circ \nabla_1 & \xrightarrow{\theta_0} & \nabla_0 \circ F_0 \end{array}$$

是交换的。

复合：2-态射的水平复合和垂直复合定义为范畴的2-范畴中的相应复合。

$\frown\!\!\!\!\sim$对于辛形式 ω，我们将由 $\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}$ 表示具有（局部定义的）对象对 $(\mathsf{C}\ \nabla)$ 的 2-叠，其中 $\mathsf{C} \in \mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}$，$\nabla \in \mathrm{DES}(\mathsf{C})$，且 1-态射和 2-态射如$\frown\!\!\!\!\sim$上所述。赋值 $(\mathsf{C}\ \nabla) \mapsto \mathsf{C}$ 扩展为一个态射 $\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}} \to \mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}$。

$\widetilde{\ }$例 3.6。设 $\mathbb{A}$ 是一个辛 DQ-代数。令 $\mathfrak{L} \in \mathrm{DES}(\mathbb{A})$。对于一个$\widetilde{\ }$开子集 $U \subseteq X$，赋值 $* \mapsto (*, \mathfrak{L}|_U)$ 可扩张为一个函子 $\nabla_{\widetilde{\mathfrak{L}},\, U}\colon\ \mathbb{A}(U)^+ \to \sim\!\!\!\!\frown\ \mathbb{A}^+(U)$。由于 $\mathbb{A}^+$ 是一个叠，随着 U 变化，函子 $\nabla_{\widetilde{\mathfrak{L}},\, U}$ 给出栈态射 $\nabla_{\widetilde{\mathfrak{L}}}\colon\ \mathbb{A}^+ \to \mathbb{A}^+$，它是一个 DES。赋值 $\mathfrak{L} \mapsto \nabla_{\widetilde{\mathfrak{L}}}$ 定义了一个栈态射 $\mathrm{DES}(\mathbb{A}) \to \mathrm{DES}(\mathbb{A}^+)$，它是一个等价。其拟逆由 $\nabla \mapsto \nabla(*)$ 给出。

3.6. 假设 ∇ 是辛 DQ-代数群胚 C 上的 DES，且 $(F, \theta) \in \mathrm{Aut}(\mathsf{C}\ \nabla)$。与 $\mathtt{Id}_{\nabla}$ 进行水平复合，得到 $\mathbb{C}[[t]]$-模之间的映射

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{C})}(\mathtt{Id}_{\mathscr{C}}, F) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Hom}}(i\mathscr{C}, \widetilde{C})}(\nabla, \nabla \circ F)\colon \psi \mapsto \mathtt{Id}_{\nabla} \diamond \psi.$$

另一个映射由以下复合给出

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{C})}(\mathtt{Id}_{\mathscr{C}}, F) \xrightarrow{\widetilde{(\cdot)}} \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Aut}}(\widetilde{\mathscr{C}})}(\mathtt{Id}_{\widetilde{\mathscr{C}}}, \widetilde{F}) \xrightarrow{(\cdot)\diamond \mathtt{Id}_{\nabla}} \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Hom}}(i\mathscr{C}, \widetilde{C})}(\nabla, \widetilde{F}\circ\nabla) \xrightarrow{\theta\circ(\cdot)} \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Hom}}(i\mathscr{C}, \widetilde{C})}(\nabla, \nabla\circ F)$$

由于，对于 $\psi \in \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{C})}(\mathtt{Id}_{\mathscr{C}} F)$,

$$\mathtt{Id}_{p_{\mathscr{C}}} \diamond (\theta \circ (\widetilde{\psi} \diamond \mathtt{Id}_{\nabla})) = (\mathtt{Id}_{p_{\mathscr{C}}} \diamond \theta) \circ (\mathtt{Id}_{p_{\mathscr{C}}} \diamond \mathtt{Id}_{\nabla} \diamond \psi) = \mathtt{Id}_F \circ (\psi \diamond \mathtt{Id}_{p_{\mathscr{C}}} \diamond \mathtt{Id}_{\nabla}) = \psi = \mathtt{Id}_{p_{\mathscr{C}}} \diamond (\mathtt{Id}_{\nabla} \diamond \psi)$$

~由此可知，$\theta \circ (\psi \diamond \mathtt{Id}_{\nabla})$ 和 $\mathtt{Id}_{\nabla} \diamond \psi$ 属于 $\mathrm{Aut}_{\mathrm{DES}(\mathscr{C})}(\nabla) = \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]]$ 作用在 ~~$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Hom}}(i\mathscr{C}\, \widetilde{C})}(\nabla, \nabla\circ F)$~~上的~~同一~~轨道。因此，差映射

$$c(F,\theta)\colon \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{C})}(\mathtt{Id}_{\mathscr{C}}, F) \to \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]] \tag{3.6.1}$$

由公式给出

$$c(F,\theta)(\psi) = \theta \circ (\widetilde{\psi} \diamond \mathtt{Id}_{\nabla}) - \mathtt{Id}_{\nabla} \diamond \psi$$

被定义。

引理 3.7。映射 (3.6.1) 满足

$$c(F,\theta)(f\cdot\psi) = c(F,\theta)(\psi) + t\partial_t \log(f)\ ,$$

其中 $\psi \in \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{C})}(\mathtt{Id}_{\mathscr{C}} F)$ 和 $f \in \mathbb{C}[[t]]^{\times}$。

证明。由于 $c(f\cdot\psi) = c(f)$，可知对于任意 $L \in \mathsf{C}$，由 $\theta \circ (\psi \diamond \mathtt{Id}_{\nabla})$ 和 $\theta \circ (f\cdot\psi \diamond \mathtt{Id}_{\nabla})$ 诱导的映射 $\nabla(L) \xrightarrow{\sim} \nabla(F(L))$ 相同。因此，

$$c(F,\theta)(f\cdot\psi) - c(F,\theta)(\psi) = (\theta \circ (\widetilde{f\cdot\psi} \diamond \mathtt{Id}_{\nabla}) - \mathtt{Id}_{\nabla} \diamond (f\cdot\psi)) - (\theta \circ (\widetilde{f\psi} \diamond \mathtt{Id}_{\nabla}) - \mathtt{Id}_{\nabla} \diamond \psi) = -(\mathtt{Id}_{\nabla} \diamond (f\cdot\psi) - \mathtt{Id}_{\nabla} \diamond \psi) = -\mathtt{Id}_{\nabla} \diamond (f\cdot\psi - \psi)$$

后一个表达式是利用嵌入 $\mathbb{C}[[t]]^{\times} \subset \mathrm{Aut}(L)$ 以及单位元的典范作用 (2.7.1) 计算得到的。具体而言，对于满足 $D|_{\mathsf{Z}(\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(L))} = t\frac{d}{dt} = t\partial_t$ 的 $f \in \mathbb{C}[[t]]^{\times}$ 和 $D \in \nabla(L)$，典范作用由下式给出

$$D \mapsto D - \overline{D}(f)\cdot f^{-1} = D - t\partial_t \log(f)$$

这就得到了所需结果。 □

推论 3.8. 这对 $(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{C})}(\mathtt{Id}_{\mathscr{C}} F),\ c(F,\theta))$ 是一个 $(\mathbb{C}[[t]]^{\times} \xrightarrow{t\partial_t \text{对数}} \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]]$- 托ors。

赋值 $(F,\theta)\ \mapsto$(Hom$_{\underline{\mathrm{Aut}(\mathscr{C})}}(\underline{\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}}F)\ c(F,\theta)$) 可扩张为一个态射

$$\underline{\mathrm{Aut}}_{\widetilde{\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}}}(\mathscr{C},\nabla)\to(\mathbb{C}[[t]]^{\times}\xrightarrow{t\partial_t\log}\frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]])[1]\ . \tag{3.6.2}$$

典范态射 $\mathbb{C}[[t]]^{\times}[1]\to$ Aut$^{\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}}$(C) 提升为态射

$$(\mathbb{C}[[t]]^{\times}\xrightarrow{t\partial_t\log}\frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]])[1]\to\underline{\mathrm{Aut}}_{\widetilde{\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}}}(\mathscr{C},\nabla)\colon(T,c)\mapsto(T\otimes(\cdot),c). \tag{3.6.3}$$

命题 3.9。

(1) 态射 (3.6.3) 与态射 (3.6.2) 互为拟逆幺半范畴等价。(2) 2-叠 $\widetilde{\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}}$是一个 $(\mathbb{C}[[t]]^{\times}\xrightarrow{t\partial_t\ \text{对数}}\frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]])[1]$-gerbe。

证明。显然，(3.6.3) 与态射 (3.6.2) 互为拟逆。

鉴于等价 Aut$^{\widetilde{\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}}}$(C $\underline{\nabla}$) $\cong(\mathbb{C}[[t]]^{\times}\xrightarrow{t\partial_t\ \text{对数}}\frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]])[1]$，接下来只需证明 $\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}$ 局部非空且局部连通。这些性质源于以下事实：任意辛 DQ- 代数丛局部等价于形如 $\mathbb{A}^{+}$ 的对象，其中 $\mathbb{A}$ 是一个辛 DQ-代数，以及例 3.6。□

4. Classical limits of DES

4.1.DQ-代数上DES 的经典极限。设 $\mathbb{A}$ 是一个辛DQ-代数。令 π 表示其相应的泊松双向量，并令 $\omega=\pi^{-1}$ 表示相应的辛形式。

令 $F_i\mathbb{A}=t^{-i}\mathbb{A}$。$t$-进滤链 $F_\bullet\mathbb{A}$ 诱导出记为 $F_\bullet$Der$_{\mathbb{C}}(\mathbb{A})$ 的滤链，因此得到滤链 $F_\bullet$ Der$^{\mathbb{C}[[t]]}(\mathbb{A})$、 $F_\bullet\mathfrak{L}(\mathbb{A})$。

引理 4.1.

Gr$^{F}_{\bullet}\,\mathbb{A}=\mathrm{O}_{X/\mathscr{P}}[t]$，其泊松结构由 $t\pi$ 给出。

(2)

$$\mathrm{Der}^{i}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_{X/\mathscr{P}}[t])=\begin{cases}0 & if\ i\geq 2\\ \mathscr{O}_X\cdot\partial_t & if\ i=1\\ t^{-i}\left(\mathscr{T}_{X/\mathscr{P}}\oplus\mathscr{O}_{X/\mathscr{P}}\otimes\mathfrak{l}\right) & if\ i\leq 0\end{cases}$$

证明。留给读者完成。□

令 Der$^0_{\mathbb{C}}$(O $_{X/\mathscr{P}}[t],t\pi$) 表示 Der$^0_{\mathbb{C}}$(O$_{X/\mathscr{P}}[t]$) 的子层，其中包含保持 $t\pi$ 的导子，即满足 $[D,t\pi]_{SN}=0$ 的那些 $D\in$Der$^0_{\mathbb{C}}$(O$_{X/\mathscr{P}}[t]$)。下文中，我们用 $[\ ,\ ]_{SN}$ 表示 Schouten-Nijenhuis 括号。对于 $\lambda\in\mathbb{C}$,

$$[t\pi,\xi+\lambda\cdot t\partial_t]_{SN}=t([\pi,\xi]_{SN}+\lambda\pi)\ ,$$

即 $\xi+\lambda\cdot t\partial_t\in$Der$^0_{\mathbb{C}}$(O$_{X/\mathscr{P}}[t],t\pi$) $\Leftrightarrow[\pi,\xi]_{SN}+\lambda\pi=0$。

该层 $\mathrm{T}_{X/}^{\pi-\mathtt{conf}}{}_{\mathscr{P}}$（$\pi$-）共形向量场的 af 由拉回方块定义

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{T}_{X/\mathscr{P}}^{\pi-\mathtt{conf}} & \longrightarrow & \mathrm{Der}^0_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_{X/\mathscr{P}}[t], t\pi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{l} & \xrightarrow{1\otimes \mathrm{Id}} & \mathscr{O}_{X/\mathscr{P}} \otimes \mathfrak{l} \end{array}$$

映射 $\mathrm{T}_{X/}^{\pi-\mathtt{conf}}{}_{\mathscr{P}} \to \mathrm{T}^{X/\mathscr{P}}$ 是单态射，因此我们可以且将把前者视为后者的子层。

引理 4.2。

(1) 映射 $\mathrm{Gr}_0^F \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{A}) \to \mathrm{Der}^0_{\mathbb{C}}(\mathrm{O}_{X/\mathscr{P}}[t])$ 是单射，其像为 $\mathrm{Der}^0_{\mathbb{C}}(\mathrm{O}_{X/\mathscr{P}}[t], t\pi)$。(2) 映射 $\mathrm{Gr}_0^F \mathrm{Der}^{\mathbb{C}[[t]]}(\mathbb{A}) \to \mathrm{Gr}_0^F \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{A})$ 是单射，且复合 $\mathrm{Gr}_0^F \mathrm{Der}^{\mathbb{C}[[t]]}(\mathbb{A}) \to \mathrm{Gr}_0^F \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{A}) \to \mathrm{Der}^0_{\mathbb{C}}(\mathrm{O}_{X/\mathscr{P}}[t])$ 的像等于 $\mathrm{T}^{\pi}_{X/\mathscr{P}}$。(3) 映射 $\mathrm{Gr}_0^F \mathfrak{L}(\mathbb{A}) \to \mathrm{Der}^0_{\mathbb{C}}(\mathrm{O}_{X/\mathscr{P}}[t])$ 是单射，其像为 $\mathrm{T}_{X/}^{\pi-\mathtt{conf}}{}_{\mathscr{P}}$。

证明。留给读者。 □

由于 π 是非退化的，Lichnerowicz-Poisson 复形

$$0 \to \frac{1}{t}\mathscr{O}_{X/\mathscr{P}} \xrightarrow{[t\pi,\cdot]_{SN}} \mathscr{T}_{X/\mathscr{P}} \xrightarrow{[t\pi,\cdot]_{SN}} t \cdot \bigwedge{}^2 \mathscr{T}_{X/\mathscr{P}} \xrightarrow{[t\pi,\cdot]_{SN}} \cdots \tag{4.1.1}$$

满足 Poincar´e 引理。

在下文中，我们将利用整体截面 $t\partial_t$ 把 $\mathfrak{l}$ 与 $\mathbb{C}$ 等同。因此，存在一个典范映射 $\mathrm{T}_{X/}^{\pi-\mathtt{conf}}{}_{\mathscr{P}} \to \mathbb{C}$。

命题 4.3。图表

(4.1.2)

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \frac{1}{t}\mathbb{C} & \longrightarrow & \frac{1}{t}\mathscr{O}_X & \xrightarrow{[t\pi,\cdot]_{SN}} & \mathscr{T}_{X/\mathscr{P}}^{\pi-\mathtt{conf}} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\mapsto t\pi} & & \\ 0 & \longrightarrow & \frac{1}{t}\mathbb{C} & \longrightarrow & \frac{1}{t}\mathscr{O}_{X/\mathscr{P}} & \xrightarrow{[t\pi,\cdot]_{SN}} & \mathscr{T}_{X/\mathscr{P}} & \xrightarrow{[t\pi,\cdot]_{SN}} & t \cdot \bigwedge{}^2 \mathscr{T}_{X/\mathscr{P}} & \xrightarrow{[t\pi,\cdot]_{SN}} & \cdots \end{array}$$

其中底行是复形 (4.1.1)，该图表是一个具有正合行的拉回图表。因此，顶行表示 $H^2(X; \frac{1}{t}\mathbb{C})$ 中 $\frac{1}{t}\omega$ 的类。

证明。由引理 4.1、引理 4.2 和庞加莱引理可得。 □

The 主符号映射 $\sigma_{\mathbb{A}}\colon \mathbb{A}\to \mathsf{O}_X$ 导出正合列的映射 *s*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]] & \longrightarrow & \frac{1}{t}\mathbb{A} & \xrightarrow{\mathrm{ad}} & \mathfrak{L}(\mathbb{A}) & \xrightarrow{(\cdot)|_{\mathsf{Z}(\mathbb{A})}} & \mathfrak{l} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{\mathbb{A}}} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{\mathbb{A}}} & & \downarrow{\scriptstyle t\partial_t\mapsto 1} \\ 0 & \longrightarrow & \frac{1}{t}\mathbb{C} & \longrightarrow & \frac{1}{t}\mathscr{O}_{X/\mathscr{P}} & \xrightarrow{[t\pi,\cdot]_{SN}} & \mathscr{T}^{\pi-\mathtt{conf}}_{X/\mathscr{P}} & \longrightarrow & \mathbb{C} \longrightarrow 0 \end{array}$$

因此得到托orsor态射（附录 B.7）

$$\mathrm{gr}\colon \underline{\mathrm{DES}}(\mathbb{A})\to \int \frac{1}{t}\omega, \tag{4.1.3}$$

其中，$\int \frac{1}{t}\omega$ 表示与 Picard 叠态射 $\frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]][1]\xrightarrow{\sigma}\frac{1}{t}\mathbb{C}[1]$ 相对应的 $\frac{1}{t}\mathbb{C}[1]$-托orsor，该托orsor对应于（4.1.2）的顶行。

态射（4.1.3）关于 $\mathbb{A}$ 是自然的，即它与直接像函子（2.8.1）可交换。

4.2. 其他障碍。由于复形映射

$$(\mathbb{C}^\times \xrightarrow{0}\frac{1}{t}\mathbb{C}\oplus\mathbb{C})\to(\mathbb{C}[[t]]^\times \xrightarrow{t\partial_t\log}\frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]])$$

是拟同构，因此可得一个典范等价

$$(\mathbb{C}[[t]]^\times \xrightarrow{t\partial_t\log}\frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]])[3]\cong \mathbb{C}^\times[3]\times\frac{1}{t}\mathbb{C}[2]\times\mathbb{C}[2]\ . \tag{4.2.1}$$

因此，$\widetilde{\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}}$确定了一个 $\pi_0(\mathbb{C}^\times[3](X)\times\frac{1}{t}\mathbb{C}[2](X)\times\mathbb{C}[2](X)) = H^3(X;\mathbb{C}^\times)\times H^2(X;\frac{1}{t}\mathbb{C})\times H^2(X;\mathbb{C})$中的类。在 [Deligne 的第 7.7 节中，P. Deligne 将最后两个分量称为寄生障碍。

4.3. DQ-代数丛上 DES 的经典极限。对于 $\mathsf{C}\in\widetilde{\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}}$，赋值 $\mathsf{C}\ni(L,\mathfrak{L})\mapsto \mathrm{gr}\ \mathfrak{L}$（参见 3.2 和 (4.1.3)）扩展为一个函子

$$\widetilde{\mathrm{gr}}_{\mathscr{C}}\colon \widetilde{\mathscr{C}}\to\int\frac{1}{t}\omega$$

它关于 Picard 叠态射是等变的

$$\underline{\mathscr{E}xt}^1(\mathfrak{l},\frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]])\cong\frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]][1]\to\frac{1}{t}\mathbb{C}[1]$$

该态射由模 t 约化诱导。

对于一个1-态射 $F\colon \mathsf{C}_1\to\mathsf{C}_0$ 以及 $(L,\mathfrak{L})\in\mathsf{C}_1$，映射自同态 $\underline{\mathscr{C}_1}(L)\to$ 自同态 $\mathscr{C}_0(F(L))$ 在模 t 约化后诱导出恒等映射。因此，同构 $\mathfrak{L}\to$

$\mathfrak{L} \to \mathrm{gr}_{F_*\mathfrak{L}}$。此外，函子$\sim F\colon \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_0$满足 $\sim\mathrm{gr}_{\mathscr{C}_0} \circ F = \sim\mathrm{gr}_{\mathscr{C}_1}$。

对于 $(\mathsf{C}, \nabla) \in \widetilde{\mathfrak{DR}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}}$，复合 $i\mathsf{C} \xrightarrow{\nabla} \sim\mathsf{C} \xrightarrow{\sim\mathrm{gr}_{\mathscr{C}}} \int \frac{1}{t}\omega$ 局部常值。对于一个 1-态射 $(F, \theta)\colon (\mathsf{C}_1, \nabla_1) \to (\mathsf{C}_0, \nabla_0)$，2-态射 θ 诱导出态射 $\mathrm{gr}(\theta)\colon \sim\mathrm{gr}_{\mathscr{C}_1}{}^{\nabla_1}(i\mathsf{C}_1) \to \sim\mathrm{gr}_{\mathscr{C}_0}{}^{\nabla_0}(i\mathsf{C}_0)$。特别地，在识别及 (3.6.3) 下，赋值 $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}, \nabla) \ni (F, \theta) \mapsto \mathrm{gr}(\theta) \in \frac{1}{t}\mathbb{C}$ 定义了一个函子（其目标范畴是离散的），该函子对应于 Picard 叠态射 $(\mathbb{C}[[t]]^\times \xrightarrow{t\partial_t \log} \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]])[1] \to \frac{1}{t}\mathbb{C}[1]$。我们将上述讨论总结为以下命题。

命题 4.4. 赋值 $\mathfrak{DR}^{\omega}_{X/\mathscr{P}} \ni (\mathsf{C}, \nabla) \mapsto \sim\mathrm{gr}_{\mathscr{C}}\nabla(i\mathsf{C}) \in \int \frac{1}{t}\omega$ 扩张为托orsor态射

$$\widetilde{\mathrm{gr}}\colon \widetilde{\mathfrak{DR}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}} \to \int \frac{1}{t}\omega \tag{4.3.1}$$

相对于 Picard 叠态射 $\left(\mathbb{C}[[t]]^\times \xrightarrow{t\partial_t \text{对数}} \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]]\right)[2] \to \frac{1}{t}\mathbb{C}[1]$。

因此，在态射 $(\mathbb{C}[[t]]^\times \xrightarrow{t\partial_t \log} \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]])[3] \to \frac{1}{t}\mathbb{C}[2]$ 下，$(\mathbb{C}[[t]]^\times \xrightarrow{t\partial_t \log} \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]])[1]$-gerbe $\widetilde{\mathfrak{DR}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}}$ 被映射到 $\frac{1}{t}\mathbb{C}$-gerbe $\int \frac{1}{t}\omega$。特别地，$\widetilde{\mathfrak{DR}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}}$ 在 $H^2(X; \frac{1}{t}\mathbb{C})$ 中的类的分量等于 $\frac{1}{t}\omega$ 的上同调类。

5. Self-duality structures

5.1. 自对偶。我们用 $a\colon \mathbb{C}[[t]] \to \mathbb{C}[[t]]$ 表示由$t \mapsto -t$确定的自同构。注意，a是一个对合：$a \circ a = \mathrm{Id}$。对于 $\mathbb{C}[[t]]$-模 M，我们用aM 表示带有由复合 $\mathbb{C}[[t]] \xrightarrow{a} \mathbb{C}[[t]] \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$给出的 $\mathbb{C}[[t]]$-模结构的 $\mathbb{C}$-向量空间 M。

自同构 $\mathbb{C}[[t]] \xrightarrow{a} \mathbb{C}[[t]]$ 诱导出自同构 $a\colon \mathfrak{DR}_{X/\mathscr{P}} \to \mathfrak{DR}_{X/\mathscr{P}}$。对于 $\mathsf{C} \in \mathfrak{DR}_{X/\mathscr{P}}$，DQ-代数丛 $a\mathsf{C}$ 具有如下描述：

对象：代数胚 $a\mathsf{C}$与C 具有相同的对象；对于 $L \in \mathsf{C}$ 中的一个对象，记 aL 为 $a\mathsf{C}$ 中的相应对象

态射：对于 $L_0, L_1 \in \mathsf{C}$，$\mathrm{Hom}_{a\mathscr{C}}(aL_1, aL_0) = a\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(L_1, L_0)$。

DQ-代数丛 $(a\mathsf{C})^{\mathrm{op}}$ 与 $a(\mathsf{C}^{\mathrm{op}})$ 重合。我们将 $(a\mathsf{C})^{\mathrm{op}}$ 和 $a(\mathsf{C}^{\mathrm{op}})$ 的共同值记为 $\mathsf{C}^\dagger$。赋值 $\mathsf{C} \mapsto \mathsf{C}^\dagger$ 延拓为一个态射 $(\bullet)^\dagger\colon \mathfrak{DR}_{X/\mathscr{P}} \to \mathfrak{DR}^{\mathrm{co}}_{X/\mathscr{P}}$[1] 函子 $(\bullet)^\dagger$ 是一个对合：$\mathsf{C}^{\dagger\dagger} = \mathsf{C}$。此外，

[1]对于 2-范畴 $\mathfrak{S}$，2-范畴 $\mathfrak{S}^{\mathrm{co}}$ 具有相同的对象和 1-态射，其中 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}^{\mathrm{co}}}(\cdot,\cdot) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(\cdot,\cdot)^{\mathrm{op}}$。

若 $\mathsf{C}\in\mathfrak{DQ}^{\pi}_{X/\mathscr{P}}$，则 $\mathsf{C}^{\dagger}\in\mathfrak{DQ}^{\pi}_{X/\mathscr{P}}$，即对合 $(\bullet)^{\dagger}$ 限制为对合 $(\bullet)^{\dagger}:\mathfrak{DQ}^{\pi}_{X/\mathscr{P}}\to\mathfrak{DQ}^{\pi}_{X/\mathscr{P}}$.

代数丛 $\mathsf{C}^{\dagger}$ 有如下描述：

对象：代数丛 $\mathsf{C}^{\dagger}$ 与 C 具有相同的对象；对于对象 $L\in\mathsf{C}$，我们用 $L^{\dagger}$ 表示 $a\mathsf{C}$ 中对应的对象

态射：对于 $L_0,L_1\in\mathsf{C}$，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\dagger}}(L_1^{\dagger},L_0^{\dagger})=a\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(L_0,L_1)$。

1-态射 $F:\mathsf{C}_1\to\mathsf{C}_0$ 诱导出 1-态射 $F^{\dagger}:\mathsf{C}_1^{\dagger}\to\mathsf{C}_0^{\dagger}$，其中 $F^{\dagger}(L^{\dagger})=F(L)^{\dagger}$，其对态射的作用由下式给出

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_0^{\dagger}}(L_1^{\dagger},L_0^{\dagger})=a\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_0}(L_0,L_1)&\xrightarrow{F}a\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1}(F(L_0),F(L_1))\\&=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1^{\dagger}}(F(L_1)^{\dagger},F(L_0)^{\dagger})=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1^{\dagger}}(F^{\dagger}(L_1^{\dagger}),F^{\dagger}(L_0^{\dagger}))\end{aligned}$$

对于 $F,G:\mathsf{C}_1\to\mathsf{C}_0$ 以及 $L\in\mathsf{C}_1$，

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_0}(F^{\dagger}(L^{\dagger}),G^{\dagger}(L^{\dagger}))=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_0}(F(L)^{\dagger},G(L)^{\dagger})=a\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_0}(G(L),F(L)).$$

因此，

$\mathrm{Hom}(F^{\dagger},G^{\dagger})=a\,\mathrm{Hom}(G,F)$，并且 $\mathrm{Hom}^{\mathfrak{DQ}_{X/\mathscr{P}}}(\mathsf{C}_1^{\dagger},\mathsf{C}_0^{\dagger})=a\,\mathrm{Hom}^{\mathfrak{DQ}_{X/\mathscr{P}}}(\mathsf{C}_1,\mathsf{C}_0)^{\mathrm{op}}$.

对于函子 $F:\mathsf{C}\to\mathsf{C}^{\dagger}$，函子 $F^{\dagger}:\mathsf{C}^{\dagger}\to\mathsf{C}^{\dagger\dagger}=\mathsf{C}$ 在对象上的定义为$F^{\dagger}(L^{\dagger})=F(L)$。对于 $L_0,L_1\in\mathsf{C}$，映射 $F^{\dagger}:\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\dagger}}(L_1^{\dagger},L_0^{\dagger})\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F(L_1)\ F(L_0))$ 是映射 $aF:\ a\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(L_0,L_1)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F(L_1)\ F(L_0)$

定义 5.1. DQ-代数丛 C 上的自对偶结构是一个 1-态射 $T:\mathsf{C}\to\mathsf{C}^{\dagger}$。

5.2. 具有自对偶结构的 DQ-代数丛。配备自对偶结构的 DQ-代数丛构成一个 2-范畴。

对象：对象是形如 $(\mathsf{C}\ \ T)$ 的对，其中 C 是一个 DQ-代数丛，T是 C 上的一个自对偶结构。

1-态射：设 (C_i,T_i)，$i=0,1$ 是配备了转置结构的 DQ-代数丛。一个 1-态射 $(F,\xi):(\mathsf{C}_1,T_1)\to(\mathsf{C}_0,T_0)$ 是一对 (F,ξ)，其中 $F:\mathsf{C}_1\to\mathsf{C}_0$是一个 1- 态射，而 $\xi:\ T_0\circ F\to F^{\dagger}\circ T_1$ 是 1-态射 $\mathsf{C}_1\to\mathsf{C}_0^{\dagger}$之间的一个 2-态射。

复合：设 $(\mathsf{C}_2,T_2)\xrightarrow{(G,\eta)}(\mathsf{C}_1,T_1)\xrightarrow{(F,\xi)}(\mathsf{C}_0,T_0)$ 是 1-态射。复合

$$T_0\circ F\circ G\xrightarrow{\xi\diamond\mathrm{Id}_G}F^{\dagger}\circ T_1\circ G\xrightarrow{\mathrm{Id}_{F^{\dagger}}\diamond\eta}F^{\dagger}\circ G^{\dagger}\circ T_2=(F\circ G)^{\dagger}\circ T_2\tag{5.2.1}$$

给出 1-态射 $(F\circ G,\text{(5.2.1)}):(\mathsf{C}_2,T_2)\to(\mathsf{C}_0,T_0)$，其定义为复合 $(F,\xi)\circ(G,\eta)$。

恒等：恒等 1-态射 $\mathrm{Id}_{(\mathscr{C},T)}$ 由这一对给出 $(\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}\ \mathrm{Id}_{\mathrm{Id}_T})$。

2-态射：设 (F_i,ξ_i)，$i=0,1$ 是 1-态射 $(\mathsf{C}_1,T_1)\to(\mathsf{C}_0,T_0)$. 2-态射 $f\colon(F_1,\xi_1)\to(F_0,\xi_0)$ 是一个 2- 态射 $f\colon F_1\to F_0$，满足

$$(f^\dagger\diamond\mathtt{Id}_{T_1})\circ\xi_0\circ(\mathtt{Id}_{T_0}\diamond f)=\xi_1$$

复合：2-态射的水平与垂直复合定义为范畴的2-范畴中的复合。

我们将由局部定义的对象为对 $(\mathsf{C}\quad T)$、其中 $\mathsf{C}\in\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}$，且 1-态射和 2-态射如上所述的 2-叠记作 $\mathfrak{DQ}^{\omega,\mathtt{t}}_{X/\mathscr{P}}$。

例 5.2. 对于辛 DQ-代数 $\mathbb{A}$，DQ-代数丛 $(\mathbb{A}^\dagger)^+$ 和 $(\mathbb{A}^+)^\dagger$ 相同。因此，DQ-代数态射 $\mathbb{A}\xrightarrow{\phi}\mathbb{A}^\dagger$ 通过 $\mathbb{A}^+\xrightarrow{\phi^+}(\mathbb{A}^\dagger)^+=(\mathbb{A}^+)^\dagger$ 在 $\mathbb{A}^+$ 上诱导出一个自对偶结构。

令 $\mathbb{A}_{MW}=(\mathsf{O}_{X/\mathscr{P}}[[t]],\star)$ 为例 2.4 中的莫亚尔-外尔星积。容易验证，$\mathsf{O}_{X/\mathscr{P}}[[t]]$ 的恒等映射是一个同构 $\mathbb{A}_{MW}\to\mathbb{A}^\dagger_{MW}$，从现在起我们将 $\mathbb{A}^\dagger_{MW}$ 与 $\mathbb{A}_{MW}$ 视为相同。

因此，$(\mathbb{A}^+_{MW})^\dagger=\mathbb{A}^+_{MW}$ 和恒等态射是$\mathbb{A}^+_{MW}$ 上的自对偶结构，我们将其记为 T_{can}。

特别地，任何态射 $\phi\colon\mathbb{A}_{MW}\to\mathbb{A}^\dagger_{MW}$都是 $\mathbb{A}_{MW}$的自同构。根据推论2.6，$\mathbb{A}_{MW}$ 的任何自同构都是内自同构。因此，$\mathbb{A}^+_{MW}$ 上的任何自对偶结构都同构于 T_{can}。

5.3. 假设 T 是辛 DQ-代数群胚 C 上的一个自对偶结构，且 $(F,\xi)\in\mathrm{Aut}_{\mathfrak{DQ}^{\omega,\mathtt{t}}_{X/\mathscr{P}}}(\mathsf{C}\quad T)$。

对于 $\alpha,\beta\in\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{C})}(\mathtt{Id}_{\mathscr{C}}F)$，令 $\langle\alpha,\beta\rangle_\xi\colon T\to T$ 表示复合

$$T=T\circ\mathtt{Id}_{\mathscr{C}}\xrightarrow{\mathtt{Id}_T\diamond\alpha}T\circ F\xrightarrow{\xi}F^\dagger\circ T\xrightarrow{\beta^\dagger\diamond\mathtt{Id}_T}\mathtt{Id}_{\mathscr{C}}\circ T=T$$

赋值$(\alpha,\beta)\mapsto\langle\alpha,\beta\rangle_\xi$定义了一个“厄米”配对

(5.3.1)

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{(F,\xi)}\colon\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{C})}(\mathtt{Id}_{\mathscr{C}},F)\times a\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{C})}(\mathtt{Id}_{\mathscr{C}},F)\to\underline{\mathrm{End}}_{\underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{C},\mathscr{C}^\dagger)}(T)=\mathbb{C}[[t]]^\times\ .$$

Let

(5.3.2)
$$\mathfrak{q}_{(F,\xi)}\colon\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{C})}(\mathtt{Id}_{\mathscr{C}},F)\to\mathbb{C}[[t]]^\times$$

表示由 $\mathfrak{q}_{(F,\xi)}(\alpha)=\langle\alpha,\alpha\rangle_{(F,\xi)}$ 给出的相关二次型。

令 $\mathfrak{q}_0\colon\ \mathbb{C}[[t]]^\times\to\mathbb{C}[[t]]^\times$ 表示映射 $f(t)\mapsto f(t)\cdot f(-t)$。

引理 5.3。映射 (5.3.2) 满足 $\mathfrak{q}_{(F,\xi)}(f\cdot\alpha)=\mathfrak{q}_0(f)\cdot\mathfrak{q}_{(F,\xi)}(\alpha)$。

证明。由于配对 (5.3.1) 满足 $\langle f(t)\cdot\alpha,g(t)\cdot\beta\rangle_{(F,\xi)}=f(t)\cdot g(-t)\cdot\langle\alpha,\beta\rangle_{(F,\xi)}$，相应的二次型满足 $\mathfrak{q}_{(F,\xi)}(f(t)\cdot\alpha)=f(t)\cdot f(-t)\cdot\mathfrak{q}_{(F,\xi)}(\alpha)=\mathfrak{q}_0(f(t))\cdot\mathfrak{q}_{(F,\xi)}(\alpha)$。□

花冠 命题 5.4。对 $(\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{C})}(\mathtt{Id}_{\mathscr{C}}F)\,\mathfrak{q}_{(F,\xi)})$ 是一个 $(\mathbb{C}[[t]]^\times\xrightarrow{\mathfrak{q}_0}\mathbb{C}[[t]]^\times)$-托ors .

Th赋值 $(F,\xi)\ \mapsto$(Hom$_{\underline{\mathrm{Aut}(\mathscr{C})}(\underline{\mathrm{Id}}_{\mathscr{C}}F)}\ \mathfrak{q}_{(F,\xi)}i$) 扩展为一个态射

$$\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathfrak{DO}^{\omega,\mathfrak{t}}_{X/\mathscr{P}}}(\mathscr{C},T)\to(\mathbb{C}[[t]]^\times\xrightarrow{\mathfrak{q}_0}\mathbb{C}[[t]]^\times)[1]. \tag{5.3.3}$$

典范态射 $\mathbb{C}[[t]]^\times[1]\to$ Aut$^{\mathfrak{DO}^\omega_{X/\mathscr{P}}}$(C) 提升为态射

$$(\mathbb{C}[[t]]^\times\xrightarrow{\mathfrak{q}_0}\mathbb{C}[[t]]^\times)[1]\to\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathfrak{DO}^{\omega,\mathfrak{t}}_{X/\mathscr{P}}}(\mathscr{C},T)\colon(S,\mathfrak{q})\mapsto(S\otimes(\cdot),\mathfrak{q}). \tag{5.3.4}$$

命题 5.5.

(1) 态射 (5.3.3) 和态射 (5.3.4) 互为拟逆幺半范畴等价。(2) 2-叠 $\mathfrak{DO}^\omega_{X/\mathscr{P}}$ 是一个 $(\mathbb{C}[[t]]^\times\xrightarrow{\mathfrak{q}_0}\mathbb{C}[[t]]^\times)[1]$-gerbe。

证明。显然，态射 (5.3.3) 和 (5.3.4) 互为拟逆幺半范畴等价。鉴于等价 Aut(C T)) $\cong(\mathbb{C}[[t]]^\times\xrightarrow{\mathfrak{q}_0}\mathbb{C}[[t]]^\times)[1]$，只需证明 $\mathfrak{DO}^{\omega,\mathfrak{t}}_{X/\mathscr{P}}$ 局部非空且局部连通。

由于局部上每个 DQ-代数丛都等价于例 5.2 中 $\mathbb{A}^+_{MW}$ 形式之一，因此 $\mathfrak{DO}^{\omega,\mathfrak{t}}_{X/\mathscr{P}}$ 局部非空且局部连通。□

5.4. 自对偶结构的经典极限。我们用 gr$^\times$C 表示与预叠 i(C $/t$C) 相关联的叠。

回顾一下，根据 [Bressler, Gorokhovsky, Nest & Tsygan, 2017], 经典极限函子

$$\mathrm{gr}^\times\colon\mathfrak{DO}^\omega_{X/\mathscr{P}}\to\mathscr{O}^\times_{X/\mathscr{P}}[2]\colon\mathscr{C}\mapsto\mathrm{gr}^\times\mathscr{C},$$

有一个规范提升

$$\widetilde{\mathrm{gr}^\times}\colon\mathfrak{DO}^\omega_{X/\mathscr{P}}\to(\mathscr{O}^\times_{X/\mathscr{P}}\xrightarrow{d\log}\Omega^1_{X/\mathscr{P}}\xrightarrow{d}\Omega^{2,cl}_{X/\mathscr{P}})[2]$$

由于映射 $\mathbb{C}^\times\to$(O $^\times_{X/\mathscr{P}}\to\Omega^1_{X/\mathscr{P}}\to\Omega^{2\,cl}_{X/}$, $\mathscr{P}$) 是拟同构，我们将视 $\widetilde{\ }$ 态射 gr$^\times$ 为取值于 $\mathbb{C}^\times[2]$。

假设 T 是辛 DQ-代数群胚 C $\in\mathfrak{DO}^\omega_{X/\mathscr{P}}$上的一个自对偶结构。 T 的拟经典极限是一个等价

$$\widetilde{\mathrm{gr}^\times}(T)\colon\widetilde{\mathrm{gr}^\times}\mathscr{C}\to\widetilde{\mathrm{gr}^\times}(\mathscr{C}^\dagger)=(\widetilde{\mathrm{gr}^\times}\mathscr{C})^{\mathrm{op}}=(\widetilde{\mathrm{gr}^\times}\mathscr{C})^{\otimes-1}$$

$\widetilde{\ }$等价 $\widetilde{\ }$gr$^\times$ C $_{\mathrm{gr}^\times(T)}\longrightarrow$ ($\widetilde{\ }$gr$^\times$ C)$^{\otimes-1}$ 确定了一个 μ_2-gerbe 结构于 $\widetilde{\ }$gr$^\times$C 上，其中 $\mu_2:=\ker(\mathbb{C}^\times\xrightarrow{\lambda\mapsto\lambda^2}\mathbb{C}^\times)$ 是 1 的平方根群。将 $\widetilde{\ }$此结构记为 gr$^\times$(C T)，我们得到交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{DO}^{\omega,\mathfrak{t}}_{X/\mathscr{P}} & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{gr}^\times}} & \mu_2[2]\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathfrak{DO}^{\omega}_{X/\mathscr{P}} & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{gr}^\times}} & \mathbb{C}^\times[2]\end{array}$$

6. Compatibility of DES with self-duality structures

6.1. 对偶与导子。假设 A 是一个结合 $\mathbb{C}$-代数。我们将由交换子括号给出的 A 上的李代数结构记为 A^{Lie} 。

- 由于代数 A 和 A^{op} 具有相同的底层向量空间，因此 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A^{op})$。在此识别下，子空间 $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(A)$ 和 $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(A^{op})$ 重合。因此，$\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(A^{op})$ 作为李代数同构。

- 恒等映射是李代数的同构 $(A^{Lie})^{op} = (A^{op})^{Lie}$.
在这些识别下，李代数映射ad^{op}: $(A^{op})^{Lie} \to \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(A^{op})$由 $-\mathrm{ad}: A^{Lie} \to \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(A)$ 给出。

回忆一下，$\mathbb{C}$-代数自同构 a: $\mathbb{C}[[t]] \to \mathbb{C}[[t]]$ 由 $t \mapsto -t$给出。用 a 共轭诱导出李代数自同构 $\mathfrak{c}(a)$: $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[[t]]) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[[t]])$。由于 $\mathfrak{c}(a)(t\partial_t) = t\partial_t$，自同构 $\mathfrak{c}(a)$ 在 $\mathfrak{l} = \mathbb{C} \cdot t\partial_t$上限制为恒等映射。

设 A 为一个结合 $\mathbb{C}[[t]]$-代数。 $\mathbb{C}[[t]]$-代数$(aA)^{op}$ 与 $a(A^{op})$重合，我们将它们的公共值记为 $A^{\dagger}$。

- 由于代数 A 和 $A^{\dagger}$ 共享底层向量空间，因此有 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A^{\dagger})$。在此识别下，子空间 $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(A)$ 和 $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(A^{\dagger})$ 重合。因此，$\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(A^{\dagger})$ 作为李代数相同。

- $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(A^{\dagger})$ 中的子空间 $\mathrm{Der}^{\mathbb{C}[[t]]}(A)$ 和 $\mathrm{Der}^{\mathbb{C}[[t]]}(A^{\dagger})$ 重合。因此，$\mathrm{Der}^{\mathbb{C}[[t]]}(A) = \mathrm{Der}^{\mathbb{C}[[t]]}(A^{\dagger})$ 作为李代数相同。

假设 $\mathbb{A}$ 是一个辛 DQ-代数。

- $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{A})$ 的子层 $\mathfrak{L}(\mathbb{A})$ 和 $\mathfrak{L}(\mathbb{A}^{\dagger})$ 重合。因此，$\mathfrak{L}(\mathbb{A}) = \mathfrak{L}(\mathbb{A}^{\dagger})$ 作为李代数相同。
- $\frac{1}{t}\mathbb{A}^{\dagger} = \frac{1}{t}\mathbb{A}^{op}$ 作为李代数。
- 该图

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]] & \longrightarrow & \frac{1}{t}\mathbb{A} & \xrightarrow{ad} & \mathrm{Der}_{\mathbb{C}[[t]]}(\mathbb{A}) & \longrightarrow & \mathfrak{L}(\mathbb{A}) \\
{\scriptstyle -\mathrm{Id}}\downarrow & & {\scriptstyle -\mathrm{Id}}\downarrow & & \| & & \| \\
\frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]] & \longrightarrow & \frac{1}{t}\mathbb{A}^{\dagger} & \xrightarrow{ad} & \mathrm{Der}_{\mathbb{C}[[t]]}(\mathbb{A}^{\dagger}) & \longrightarrow & \mathfrak{L}(\mathbb{A}^{\dagger})
\end{array}$$

是交换的。

~6.2.对偶与DES。假设 $\mathbb{A}$ 是一个辛DQ-代数。对于 $\mathfrak{L} \in$~DES($\mathbb{A}$)，层 $\mathfrak{L}^\dagger$ 由推出图定义

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{t}\mathbb{A} & \longrightarrow & \widetilde{\mathfrak{L}} \\ {\scriptstyle -\mathrm{Id}}\downarrow & & \downarrow \\ \frac{1}{t}\mathbb{A}^\dagger & \longrightarrow & \widetilde{\mathfrak{L}}^\dagger \end{array} \tag{6.2.1}$$

~ ~赋值 $\mathfrak{L} \mapsto \mathfrak{L}^\dagger$ 可扩展为一个函子

$$(\cdot)^\dagger \colon \mathrm{DES}(\mathbb{A}) \to \mathrm{DES}(\mathbb{A}^\dagger).$$

此外，对于辛 DQ-代数的态射 ϕ: $\mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_0$，图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{DES}(\mathbb{A}_1) & \xrightarrow{(\cdot)^\dagger} & \mathrm{DES}(\mathbb{A}_1^\dagger) \\ {\scriptstyle \phi_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_*^\dagger} \\ \mathrm{DES}(\mathbb{A}_0) & \xrightarrow{(\cdot)^\dagger} & \mathrm{DES}(\mathbb{A}_0^\dagger) \end{array}$$

是交换的。

~设 C 是一个辛 DQ-代数丛。对于 $L \in$ C， $\mathfrak{L} \in$ DES(自同态$_{\mathscr{C}}(L)$)，令 ~ ~$(L, \mathfrak{L})^\dagger := (L^\dagger, \mathfrak{L}^\dagger)$。

对于 $\nabla \in$ DES(C)，赋值 $L^\dagger \mapsto \nabla(L)^\dagger$ 在 C 上定义了一个 DES †，记作 $\nabla^\dagger$。赋值 $\nabla \mapsto \nabla^\dagger$ 可扩展为一个栈态射

$$(\cdot)^\dagger \colon \underline{\mathrm{DES}}(\mathscr{C}) \to \underline{\mathrm{DES}}(\mathscr{C}^\dagger).$$

定义 6.1. 设 C 为辛 DQ-代数丛， T 是 C 上的自对偶结构，且 $\nabla \in$ DES(C).

T与 ∇ 之间的相容性是这对 2-态射：一个带 DES 的 ~DQ-代数丛 1-态射 (C ∇) $\to$ (C $^\dagger, \nabla^\dagger$) （见 3.5 ）。

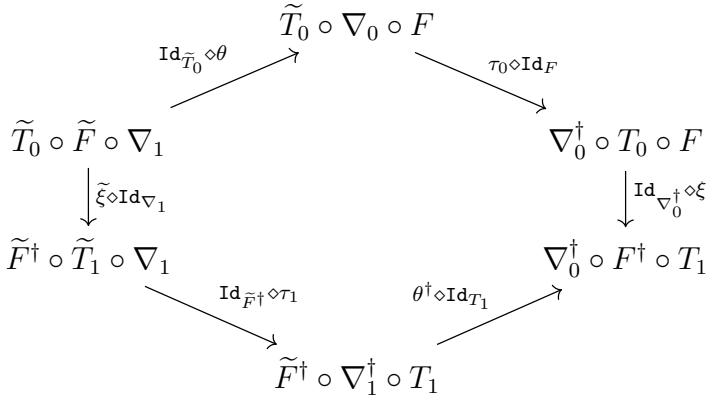
6.3. 具有相容自对偶结构和 DES 的辛 DQ-代数丛。配备相容自对偶结构和膨胀等变结构的辛 DQ-代数丛按如下方式构成一个 2-范畴。

对象：对象是四元组 (C ∇, T, τ)，其中 C 是一个辛 DQ-代数丛，∇ 是 C 上的 DES，T 是 C 上的自对偶结构，且 τ 是 T 与 ∇之间的相容性。

1-态射：设 (C $_i, \nabla_i, T_i, \tau_i$)， $i = 0, 1$ 是上述对象。1-态射 (C $_1, \nabla_1, T_1, \tau_1$) $\to$ (C$_0, \nabla_0, T_0, \tau_0$) 是三元组 (F, θ, ξ)，其中 (F, θ) 是带 DES 的 DQ-代数丛之间的 1-态射 (C$_1, \nabla_1$) $\to$ (C$_0, \nabla_0$)，而 (F, ξ) 是带自对偶结构的 DQ-代数丛之间的 1-态射 (C $_1, T_1$) $\to$ (C$_0, T_0$)

（见 5.2）满足交换条件

(6.3.1)



复合：设 $(\mathsf{C}\,2, \nabla_2, T_2, \tau_2)$ $\xrightarrow{(G,\rho,\eta)}$ $(\mathsf{C}\,1, \nabla_1, T_1, \tau_1)$ $\xrightarrow{(F,\theta,\xi)}$ $(\mathsf{C}\,0, \nabla_0, T_0, \tau_0)$ 是 1-态射。复合 $(F,\theta,\xi)\circ(G,\rho,\eta)$ 由 $(F\circ G,$ (3.5.1), (5.2.1)) 给出。恒等：$(\mathsf{C} \quad \nabla, T, \tau)$ 的恒等自同构由三元组 $(\mathtt{Id}_{\mathscr{C}}, \mathtt{Id}_\nabla, \mathtt{Id}_T)$ 给出。2-态射：设 (F_i, θ_i, ξ_i)，$i = 0, 1$ 是 1-态射 $(\mathsf{C}\,1, \nabla_1, T_1, \tau_1) \to (\mathsf{C}\,0, \nabla_0, T_0, \tau_0)$。2-态射 $f : (F_1, \theta_1, \xi_1) \to (F_0, \theta_0, \xi_0)$ 是一个 2-态射 $f: F_1 \to F_0$，满足 $f : (F_1, \theta_1) \to (F_0, \theta_0)$ 是带有 DES 的 DQ- 代数丛的 1- 态射 $(\mathsf{C}\,1, \nabla_1) \to (\mathsf{C}\,0, \nabla_0)$ 之间的 2- 态射，并且 $f : (F_1, \xi_1) \to (F_0, \xi_0)$ 是具有自对偶结构的 DQ-代数丛的 1-态射 $(\mathsf{C}\,1, T_1) \to (\mathsf{C}\,0, T_0)$ 之间的 2-态射。复合：2-态射的水平复合和垂直复合定义同所有范畴所成 2-范畴中的定义。

我们用 $\mathfrak{DQ}^{\omega,\mathsf{t}}_{X/\mathscr{P}}$ 表示局部定义对象为 $(\mathsf{C} \quad \nabla, T, \tau)$、其中 $\mathsf{C}_i \in \mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}$，且具有上述 1-态射和 2-态射的 2-叠。

例 6.2. 设 $\mathfrak{L}$ 是 $\mathbb{A}_{MW}$ 上的一个 DES，它与 (2.5.1) 的一个分裂相关联。设 ∇ 表示如例 3.6 所述的 $\mathbb{A}^+_{MW}$ 上的相关 DES。识别 $(\mathbb{A}^+_{MW})^\dagger = \mathbb{A}^+_{MW}$ 诱导出识别 $(\mathbb{A}^+_{MW})^\dagger = \mathbb{A}^+_{MW}$, $T_{can} = \mathtt{Id}$, $T_{can} = \mathtt{Id}$ 和 $\nabla^\dagger = \nabla$。于是，2-态射 $\mathtt{Id}: \nabla \to \nabla$ 是 T_{can} 与∇之间的相容性。

事实上，任意两个四元组 $Q_i := (\mathbb{A}^+_{MW}, T_i, \nabla_i, \tau_i)$，$i = 0, 1$ 都是同构的。不失一般性，我们可以假设 $T_0 = T_1 = T_{can}$ 和 $\nabla_0 = \nabla_1$ 与上述分裂 DES $\widetilde{\mathfrak{L}} = \frac{1}{t}\mathbb{A}_{MW} \oplus \mathfrak{l}$ 相关联。若 $(\mathtt{Id}, \theta, \mathtt{Id}): Q_1 \to Q_0$ 是一个 1- 态射，则

条件 n (6.3.1) 归结为 DES 的态射图表的交换性

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathfrak{L}} & \xrightarrow{\theta} & \widetilde{\mathfrak{L}} \\ {\scriptstyle\tau_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau_0} \\ \widetilde{\mathfrak{L}}^\dagger & \xrightarrow{\theta^\dagger} & \widetilde{\mathfrak{L}}^\dagger \end{array} \tag{6.3.2}$$

关于诱导分裂给出的识别 $\widetilde{\mathfrak{L}} = \frac{1}{t}\mathbb{A}_{MW} \oplus \mathfrak{l}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{L}}^\dagger = \frac{1}{t}\mathbb{A}_{MW} \oplus \mathfrak{l}$，(6.2.1) 中的同构 $\widetilde{\mathfrak{L}} \xrightarrow{\cong} \widetilde{\mathfrak{L}}^\dagger$ 由 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 给出。因此，若 $\theta\colon \widetilde{\mathfrak{L}} \to \widetilde{\mathfrak{L}}$ 由 $\begin{bmatrix} 1 & \phi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 表示，则 $\theta^\dagger\colon \widetilde{\mathfrak{L}}^\dagger \to \widetilde{\mathfrak{L}}^\dagger$ 由 $\begin{bmatrix} 1 & -\phi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 表示。

如果 τ_i 由 $\begin{bmatrix} 1 & \psi_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 表示，则条件 (6.3.2) 等价于 $\psi_0 + \phi = \psi_1 = \phi$，也就是说 $\phi = \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0)$。

6.4. 假设 $(\mathsf{C} \quad \nabla, T, \tau) \in \overbrace{\mathfrak{DQ}^{\omega}_{,X/\mathrm{P}}}^{+}$。

由于对于 $\nu \in \underline{\text{自同}}\text{态}_{\mathrm{Hom}(\mathscr{C},\mathscr{C}^\dagger)}(T)$,

$$\mathtt{Id}_{p_{\mathscr{C}^\dagger}} \diamond \tau = \mathtt{Id}_{p_{\mathscr{C}^\dagger}} \diamond (\tau \circ (\widetilde{\nu} \diamond \mathtt{Id}_\nabla))$$

可知该映射

$$\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{Hom}(\mathscr{C},\mathscr{C}^\dagger)}(T) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Hom}}(i\mathscr{C},\widetilde{\mathscr{C}^\dagger})}(\widetilde{T} \circ \nabla, \nabla^\dagger \circ T)\colon \nu \mapsto \tau - \tau \circ (\widetilde{\nu} \diamond \mathtt{Id}_\nabla) \tag{6.4.1}$$

可通过典范映射 $\frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]] \to \mathbf{Hom}_{\underline{\mathrm{Hom}}(i\mathscr{C},\widetilde{\ }^\dagger\mathscr{C})}(\underline{\widetilde{T} \circ \nabla, \nabla^\dagger \circ T})$进行分解。此外，该图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[[t]]^\times & \xrightarrow{t\partial_t \log} & \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]] \\ \downarrow\simeq & & \downarrow \\ \underline{\mathrm{End}}_{\underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{C},\mathscr{C}^\dagger)}(T) & \xrightarrow{(6.4.1)} & \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Hom}}(i\mathscr{C},\widetilde{\mathscr{C}^\dagger})}(\widetilde{T} \circ \nabla, \nabla^\dagger \circ T) \end{array}$$

是交换的。

假设 (F, θ, ξ) 是 $(\mathsf{C} \quad \nabla, T, \tau)$ 的一个自同构。那么，

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{C})}(\mathtt{Id}_\mathscr{C}, F) & \xrightarrow{c(F,\theta)} & \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]] \\ \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{q}_{(F,\xi)}} & & \downarrow{\scriptstyle \tau\circ\mathrm{avg}} \\ \underline{\mathrm{End}}_{\underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{C},\mathscr{C}^\dagger)}(T) & \xrightarrow{(6.4.1)} & \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Hom}}(i\mathscr{C},\widetilde{\mathscr{C}^\dagger})}(\widetilde{T} \circ \nabla, \nabla^\dagger \circ T) \end{array} \tag{6.4.2}$$

其中 avg(f) $= f + a(f)$，是相对于群层态射交换图的扭子态射交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[[t]]^\times & \xrightarrow{t\partial_t \log} & \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]] \\ {\scriptstyle \mathfrak{q}_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{avg}} \\ \mathbb{C}[[t]]^\times & \xrightarrow{t\partial_t \log} & \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]] \end{array} \tag{6.4.3}$$

(6.4.2) 和 (6.4.3) 的交换性意味着，({Hom$_{\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{C})}$(Id$_{\mathscr{C}}$, F), ($\mathfrak{q}_{(F,\xi)}$, $c(F,\theta)$)) 是一个在.....作用下的 torsor

$$\tau_{\leqslant 1}(\mathbb{C}[[t]]^\times \xrightarrow{(\mathfrak{q}_0,\, t\partial_t \log)} \mathbb{C}[[t]]^\times \oplus \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]] \xrightarrow{t\partial_t \log - \mathrm{avg}} \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]]) \\ = (\mathbb{C}[[t]]^\times \xrightarrow{(\mathfrak{q}_0,\, t\partial_t \log)} \ker(t\partial_t \log - \mathrm{avg}))$$

引理 6.3. 复形映射

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{t}\mathbb{C} \\ {\scriptstyle 0}\uparrow \\ \mu_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \ker(t\partial_t \log - \mathrm{avg})) \\ \uparrow{\scriptstyle (\mathfrak{q}_0,\, t\partial_t \log)} \\ \mathbb{C}[[t]]^\times \end{bmatrix}$$

其分量由 $\frac{1}{t}\mathbb{C} \xrightarrow{(1,\, \frac{1}{t}\mathbb{C} \hookrightarrow \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]])} \ker(t\partial_t \log - \mathrm{avg}))$ 给出，且包含映射 $\mu_2 \hookrightarrow \mathbb{C}[[t]]^\times$ 是一个拟同构。

证明。我们把证明留给读者：验证 $ker(\mathfrak{q}_0,\, t\partial_t \log) = \mu_2$。

设 $f \in \mathbb{C}[[t]]^\times$, $g \in \frac{1}{t}\mathbb{C}[[t]]$。那么，$(f,g) \in \ker(t\partial_t \log - \mathrm{avg}))$ 当且仅当$t\partial_t \log f = \mathrm{avg}(g)$。

假设 $(f,g) \in \ker(t\partial_t \log - \mathrm{avg}))$。由于 $\mathrm{Im}(t\partial_t \log) = t\mathbb{C}[[t]]$，我们可以假设 $g = \frac{a}{t} + b \in \frac{1}{t}\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$，从而 $t\partial_t \log(f) = \mathrm{avg}(g) = 2b$ 是常数。该常数必为零，因为 $t\partial_t \log(f) \in t\mathbb{C}[[t]]$。这意味着 f 是常数，即 $f \in \mathbb{C}^\times$，因此 (f,g) 与形如 $(1, \frac{1}{t}\lambda)$ 的一对上同调等价，$\lambda \in \mathbb{C}$。 □

赋值 $(F,\theta,\xi) \mapsto$(Hom$_{\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{C})}$(Id$_{\mathscr{C}}$, F)、($\mathfrak{q}_0$, $t\partial_t \log$)) 可扩展为一个态射

$$\underline{\mathrm{Aut}}_{\widetilde{\mathfrak{D}\Omega^{\omega,\mathfrak{t}}_{X/\mathscr{P}}}}(\mathscr{C}, \nabla, T, \tau) \to (\mathbb{C}[[t]]^\times \xrightarrow{(\mathfrak{q}_0,\, t\partial_t \log)} \ker(t\partial_t \log - \mathrm{avg}))[1] \tag{6.4.4}$$

典范态射 $\mathbb{C}[[t]]^\times \to$ Aut$^{\mathfrak{D}\Omega^{\omega}_{X/\mathscr{P}}}$(C) 提升为态射

$$(\mathbb{C}[[t]]^\times \xrightarrow{(\mathfrak{q}_0,\, t\partial_t \log)} \ker(t\partial_t \log - \mathrm{avg}))[1] \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\widetilde{\mathfrak{D}\Omega^{\omega,\mathfrak{t}}_{X/\mathscr{P}}}}(\mathscr{C}, \nabla, T, \tau) \tag{6.4.5}$$

由.....给出

$$(S,(\mathfrak{q},c))\mapsto(S\otimes(\cdot),c,\mathfrak{q})$$

命题 6.4。

(1) 态射 (6.4.4) 与态射 (6.4.5) 互为拟逆幺半范畴等价。(2) 2-叠 $\widetilde{\mathfrak{DQ}^{\omega}}_{,\ X/\mathscr{P}}^{\mathtt{t}}$ 是一个 $(\mathbb{C}[[t]]^{\times}\xrightarrow{(\mathfrak{q}_0,\ t\partial_t\log)}\ker(t\partial_t\log\ -\mathrm{avg}))[1]$-gerbe。

证明。显然，(6.4.4) 与态射 (6.4.5) 互为拟逆的幺半范畴等价。

例 6.2 表明 $\widetilde{\mathfrak{DQ}^{\omega}}_{,\ X/\mathscr{P}}^{\mathtt{t}}$ 局部非空且局部连通，因此是一个 $\mathrm{Aut}_{\widetilde{\mathfrak{DQ}^{\omega}},X/\mathscr{P}}^{\mathtt{t}}(\mathsf{C}\quad\nabla,T,\tau)\ \cong(\mathbb{C}[[t]]^{\times}\xrightarrow{(\mathfrak{q}_0,t\partial_t\log)}\ker(t\partial_t\log\ -\mathrm{avg}))[1]$-gerbe。

□

7. 对称辛 DQ-代数丛的分类

在下文中，我们将处理一个固定的非退化泊松双向量 $\pi\in\Gamma(X;\bigwedge^2\mathsf{T}^{X/\mathscr{P}})$，并令 $\omega=\pi^{-1}$。

7.1.典范量子化。根据命题4.4和命题6.4，我们知道，拟经典极限的态射（见 5.4）和态射（4.3.1）导出了等价

$$\widetilde{\mathfrak{DQ}}^{\omega,\mathtt{t}}_{X/\mathscr{P}}\xrightarrow{(\widetilde{\mathrm{gr}^{\times}},\ (4.3.1))}\mu_2[2]\times\int\frac{1}{t}\omega \tag{7.1.1}$$

从而使该图

$$\begin{array}{ccc}\widetilde{\mathfrak{DQ}}^{\omega,\mathtt{t}}_{X/\mathscr{P}} & \xrightarrow{(\widetilde{\mathrm{gr}^{\times}},\ (4.3.1))} & \mu_2[2]\times\int\frac{1}{t}\omega\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}} & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{gr}^{\times}}} & \mathbb{C}^{\times}[2]\end{array}$$

交换的。

定理7.1。 X 上的每个 μ_2-gerbe 都具有典范量子化。

$\widetilde{\quad}$ 证明。令 $\widetilde{\mathfrak{DQ}^{\omega},\ X/\mathscr{P}}^{\mathtt{t}}/\frac{1}{t}\mathbb{C}[1]$ 表示沿复形态射的 $\widetilde{\mathfrak{DQ}^{\omega},\ X/\mathscr{P}}^{\mathtt{t}}$ 推出。

$$\begin{bmatrix}\ker(t\partial_t\log-\mathrm{avg}))\\ \uparrow{\scriptstyle(\mathfrak{q}_0,\,t\partial_t\log)}\\ \mathbb{C}[[t]]^{\times}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\ker(t\partial_t\log-\mathrm{avg}))/\frac{1}{t}\mathbb{C}\\ \uparrow{\scriptstyle(\mathfrak{q}_0,\,t\partial_t\log)}\\ \mathbb{C}[[t]]^{\times}\end{bmatrix}$$

由引理 6.3 可知 $\mathfrak{DO}^{\omega,\mathfrak{t}}_{X/\mathscr{P}}/\frac{1}{t}\mathbb{C}[1]$ 是一个 $\mu_2[2]$-托ors。等价 (7.1.1) 诱导出等价 $\widetilde{\mathfrak{DO}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}/\frac{1}{t}\mathbb{C}[1]} \xrightarrow{\mathrm{gr}^{\times}} \mu_2[2]$，从而使图表

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathfrak{DO}^{\omega,\mathfrak{t}}_{X/\mathscr{P}}/\frac{1}{t}\mathbb{C}[1]} & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{gr}^{\times}}} & \mu_2[2] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{DO}^{\omega}_{X/\mathscr{P}} & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{gr}^{\times}}} & \mathbb{C}^{\times}[2] \end{array}$$

交换。因此，存在态射

$$\mathfrak{DO}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}(X) \longleftarrow \widetilde{\mathfrak{DO}^{\omega,\mathfrak{t}}_{X/\mathscr{P}}/\frac{1}{t}\mathbb{C}[1]}(X) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{gr}^{\times}}} \mu_2[2](X)$$

其中 $\mathrm{gr}^{\times}$ 是一个等价。 □

我们用 $\mathsf{C}_{can} \in \mathfrak{DO}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}(X)$ 表示经态射 $\widetilde{\mathfrak{DO}^{\omega,\mathfrak{t}}_{X/\mathscr{P}}/\frac{1}{t}\mathbb{C}[1]}(X) \to \mathfrak{DO}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}(X)$ 映射得到的对象，该对象属于 $\mathfrak{DO}^{\omega,\mathfrak{t}}_{X/\mathscr{P}}/\frac{1}{t}\mathbb{C}[1](X)$，并对应于 $\mu_2[1] \in \mu_2[2](X)$。下文将 C_{can} 称为典范量子化。

7.2. 辛DQ-代数丛的分类。对于 C_0，$\mathsf{C}_1 \in \mathfrak{DO}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}$令 $[\mathsf{C}_1 : \mathsf{C}_0] := \mathrm{Hom}^{\mathfrak{DO}^{\omega}_{X/\mathscr{P}}}(\mathsf{C}_0, \mathsf{C}_1) \in \mathbb{C}[[t]]^{\times}[2]$，类比于 [Deligne, 1995] 的差分类。

令 $\mathfrak{DO}^{\omega}_{X/\mathscr{P},0}$ 表示 $\mathrm{gr}^{\times} : \mathfrak{DO}^{\omega}_{X/\mathscr{P}} \to \mathbb{C}^{\times}[2]$ 在 $\mathbb{C}^{\times}[1]$上的纤维。$\mathfrak{DO}^{\omega}_{X/\mathscr{P},0}$ 的对象是平凡 gerbe $\mathsf{O}^{\times}_{X/\mathscr{P}}$的量子化，并配备平凡的平坦结构。

定理 7.2。这些态射

$$[\bullet : \mathscr{C}_{can}] : \mathfrak{DO}^{\omega}_{X/\mathscr{P}} \to \mathbb{C}[[t]]^{\times}[2] : \mathscr{C} \mapsto [\mathscr{C} : \mathscr{C}_{can}] \tag{7.2.1}$$

and

$$\mathbb{C}^{\times}[2] \times \mathfrak{DO}^{\omega}_{X/\mathscr{P},0} \to \mathfrak{DO}^{\omega}_{X/\mathscr{P}} : (\mathcal{S}, \mathscr{C}) \mapsto \mathcal{S} \otimes \mathscr{C} \tag{7.2.2}$$

是等价。

证明。(7.2.1)的一个拟逆由 $\mathsf{S} \mapsto \mathsf{S} \otimes \mathsf{C}_{can}$给出。

(7.2.2)的一个拟逆由 $\mathsf{C} \mapsto (\widetilde{\mathrm{gr}^{\times}\mathsf{C}}$给出, $\widetilde{\mathrm{gr}^{\times}}\mathsf{C}^{\otimes -1} \otimes \mathsf{C})$。 □

7.3. Fedosov 类。在同构 $\mathbb{C}[[t]]^{\times} = \mathbb{C}^{\times} \times \exp(t\mathbb{C}[[t]])$ 下，态射 $\widetilde{\text{morphism gr}}^{\times}$ 与复合一致

$$\mathfrak{DO}^{\omega}_{X/\mathscr{P}} \xrightarrow{[\bullet : \mathscr{C}_{can}]} \mathbb{C}[[t]]^{\times}[2] \to \mathbb{C}^{\times}[2]$$

由于 $\mathsf{C}_{can} \in \mathfrak{DO}^{\omega}_{X/\mathscr{P},0}$，态射 $[\bullet : \mathsf{C}_{can}]$限制为等价

$$[\bullet : \mathscr{C}_{can}] : \mathfrak{DO}^{\omega}_{X/\mathscr{P},0} \to \exp(t\mathbb{C}[[t]])[2]$$

令 $\Phi:\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P}\,0}\to\mathbb{C}[[t]][2]$ 表示复合

$$\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P},0}\xrightarrow{[\bullet:\mathscr{C}_{can}]}\exp(t\mathbb{C}[[t]])[2]\xrightarrow{\frac{1}{t}\log}\mathbb{C}[[t]][2]$$

结构层的量子化的 Fedosov 类的构造被扩展到代数丛的情形，见 [Bressler, Gorokhovsky, Nest & Tsygan, 2007]。该构造将 Fedosov 类 $\Theta(\mathsf{C})\in\frac{1}{t}\omega+H^2(X;\mathbb{C}[[t]])$ 赋予 $\mathsf{C}\in\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P},\,0}(X)$。[Nest 与 Tsygan, 2004] 证明了 $\Theta(\mathsf{C}_{can})=\frac{1}{t}\omega$。对于 DQ-代数的情形，[Deligne, 1995] 中的类似论证表明，对于 $\mathsf{C}_0,\mathsf{C}_1\in\mathfrak{DQ}^{\omega}_{X/\mathscr{P},\,0}(X)$，$H^2(X;\mathbb{C}[[t]])$ 中 $\frac{1}{t}\log([\mathsf{C}_1,\mathsf{C}_0])$ 的类与 $\Theta(\mathsf{C}_1)-\Theta(\mathsf{C}_0)$ 一致。

由于 $\Phi(\mathsf{C}_{can})=0$ 且显然 $\frac{1}{t}\log([\mathsf{C}_1,\mathsf{C}_0])=\Phi(\mathsf{C}_1)-\Phi(\mathsf{C}_0)$，因此 $\Theta(\mathsf{C})=\frac{1}{t}\omega+\Phi(\mathsf{C})$。

Appendix A. Calculus in the presence of an integrable distribution

本节简要回顾存在可积复分布时有关微分演算的基本事实。详情及证明请参阅 [Kostant、1970]，[Rawnsley、1977] 以及 [Fischer & Williams, 1979]。

对于一个 C^∞ 流形 X，我们用 O_X（分别用 Ω^i_X）表示 X 上复值 C^∞ 函数（分别为 i 次微分形式）的层。在本节中，我们用 $\mathsf{T}^{\mathbb{R}}_X$ 表示 X 上实值向量场的层。令 $\mathsf{T}_X:=\mathsf{T}^{\mathbb{R}}_X\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$。

A.1. 复分布。X 上的一个（复）分布是 T_X 的一个子丛[2]。

若分布 P 在李括号下封闭，即 $[\mathsf{P},\mathsf{P}]\subseteq\mathsf{P}$，则称 P 为对合的。

对于 X 上的分布 P，我们用 $\mathsf{P}^\perp\subseteq\Omega^1_X$ 表示 P 的湮灭子（相对于典范对偶配对）。

如果在局部范围内存在函数 $f_1,\dots,f_r\in\mathsf{O}_X$，使得 $df_1,\dots,df_r$ 构成 $\mathsf{P}^\perp$ 的局部标架，则称 X 上的秩为 r 的分布 P 可积。

容易看出，可积分布是闭合的。当 P 为实的，即 $\mathsf{P}=\mathsf{P}$（Frobenius）时，以及当 P 为复结构，即 $\mathsf{P}\cap\mathsf{P}=0$ 且 $\mathsf{P}\oplus\mathsf{P}=\mathsf{T}_X$（Newlander-Nirenberg）时，逆命题成立。更一般地，根据 [Rawnsley 1977]，的定理 1，复分布 P 可积的一个充分条件是

(A.1.1) $\qquad\mathscr{P}\cap\overline{\mathscr{P}}$ *is a sub-bundle and both* $\mathscr{P}$ *and* $\mathscr{P}+\overline{\mathscr{P}}$ *are involutive.*

[2]子丛是一个 O_X-子模，并且在 X 上局部为直和因子。

A.2. T 霍奇滤过。设 P 是 X 上的一个对合分布 .

令 $F_\bullet\Omega^\bullet_X$ 表示由 P $^\perp$生成的微分理想的幂所给出的滤过，即 $F_{-i}\Omega^j_X = \bigwedge^i$P $^\perp \wedge \Omega^{j-i}_X \subseteq \Omega^j_X$。令 $\overline{\partial}$表示 $Gr^F_\bullet\Omega^\bullet_X$上的微分。微分形式的楔积在 $(Gr^F_\bullet\Omega^\bullet_X, \overline{\partial})$ 上诱导出交换微分分次代数（DGA）结构。

特别地， Gr^F_0O $_X$ =O $_X$, $Gr^F_0\Omega^1_X$ =Ω^1_X/P $^\perp$以及 $\overline{\partial}$:O $_X \to Gr^F_0\Omega^1_X$等于复合 O $_X \xrightarrow{d}\Omega^1_X \to \Omega^1_X$/P $^\perp$。令O $_{X/\mathscr{P}}$:=ker(O $_X \xrightarrow{\overline{\partial}} Gr^F_0\Omega^1_X$)。等价地，O$_{X/\mathscr{P}}$ =(O $_X$) $^{\mathscr{P}} \subset$O $_X$，即沿 P 局部常值函数的子层。注意， $\overline{\partial}$是 O$^{X/\mathscr{P}}$-线性的。

[Rawnsley 的定理 2 1977] 指出，如果 P 满足条件 (A.1.1)，则 O $_X$ 的高阶 $\overline{\partial}$ 上同调消失，即

$$H^i(Gr^F_0\Omega^\bullet_X, \overline{\partial}) = \begin{cases} \mathcal{O}_{X/\mathscr{P}} & if\ i = 0 \\ 0 & otherwise. \end{cases} \tag{A.2.1}$$

在下文中，我们将假设所考虑的复分布P 是可积的，并满足 (A.2.1)。后者由条件 (A.1.1) 蕴含。

A.3. $\overline{\partial}$-算子。设 E是 X 上的向量丛，即有限秩的局部自由 O $_X$-模。E上沿P 的联络按定义是一个映射 $\nabla^{\mathscr{P}}$:E $\to\Omega^1_X$/P $^\perp\otimes_{\mathcal{O}_X}$E，它满足莱布尼茨法则 $\nabla^{\mathscr{P}}(fe) = f\nabla^{\mathscr{P}}$ (e)+$\overline{\partial}f\cdot e$对于 $e \in$E 和$f \in$O $_X$。等价地，沿 P 的联络是一个O $_X$-线性映射 $\nabla^{\mathscr{P}}_{(\bullet)}$: P $\to$自同态$_{\mathbb{C}}$(E)，它满足莱布尼茨法则 $\nabla^{\mathscr{P}}_\xi(fe) = f\nabla^{\mathscr{P}}_\xi(e) + \overline{\partial}f\cdot e$对于 $e \in$E 和 $f \in$ O $_X$。特别地，$\nabla^{\mathscr{P}}_\xi$是O$^{X/\mathscr{P}}$-线性的。沿P 的联络的这两种形式通过 $\nabla^{\mathscr{P}}_\xi(e) = \iota_\xi\nabla^{\mathscr{P}}(e)$ 联系起来。

如果相应的映射 $\nabla^{\mathscr{P}}{}_{(\bullet)}$: P $\to$自同态$_{\mathbb{C}}$(E) 是李代数态射，则称 E 上沿 P 的联络为平坦联络。我们将 E 上沿 P 的平坦联络称为 E 上的 $\overline{\partial}$-算子。

E 上沿 P 的联络唯一地延拓为分次 Ω 模 Ω E 的导子，当且仅当 $\overline{\partial}^2_{\mathscr{E}} = 0$ 时，该导子是一个 $\overline{\partial}$-算子。复形 $(Gr^F_0\Omega^\bullet_X \otimes_{\mathcal{O}_X}$E $\overline{\partial}_{\mathscr{E}})$ 称为（相应的） $\overline{\partial}$-复形。由于$\overline{\partial}_{\mathscr{E}}$ 是 O $_{X/\mathscr{P}}$-线性的，层 $H^i(Gr^F_0\Omega^\bullet_X\otimes_{\mathcal{O}_X}$E $\overline{\partial}_{\mathscr{E}})$ 是 O $_{X/\mathscr{P}}$-模。O $_X$ 的高阶 $\overline{\partial}$-上同调消失这一性质（A.2.1）很容易推广到向量丛。

引理 A.1. 设 E 是一个向量丛，且 $\overline{\partial}_{\mathscr{E}}$是 E 上的一个 $\overline{\partial}$-算子。那么，$H^i(Gr^F_0\Omega$ $^\bullet_X \otimes_{\mathcal{O}_X}$E $\overline{\partial}_{\mathscr{E}}) = 0$对 $i \neq 0$成立，即 $\overline{\partial}$-复形是 ker($\overline{\partial}_{\mathscr{E}}$) 的一个分解。此外，ker($\overline{\partial}$ $_{\mathscr{E}}$) 在 O $_{X/\mathscr{P}}$上是秩为 rk$_{\mathcal{O}_X}$E 的局部自由模，并且映射 O $^X \otimes_{\mathcal{O}_{X/\mathscr{P}}}$ker($\overline{\partial}_{\mathscr{E}}$) $\to$E（包含映射 ker($\overline{\partial}_{\mathscr{E}}$) $\hookrightarrow$E 的 O $_X$-线性扩张）是一个同构。

注 A.2. 假设 F 是有限秩局部自由 O$^{X/\mathscr{P}}$-模。那么，O $^X \otimes_{\mathcal{O}_{X/\mathscr{P}}}$F 是秩为 rk$_{\mathcal{O}_{X/\mathscr{P}}}$F 的局部自由 O $_X$-模，并且具有一种典范的

方式，带有一个 $\overline{\partial}$-算子，即 $\overline{\partial}\otimes\mathrm{Id}$。赋值 F $\mapsto$(O $_X\otimes_{\mathcal{O}_{X/\mathscr{P}}}$F $\overline{\partial}\otimes$Id) 和 (E $\overline{\partial}_{\mathscr{E}}$) $\mapsto$ ker($\overline{\partial}_{\mathscr{E}}$) 是适当定义的范畴之间互逆的等价。

A.4. 微积分。P 的伴随作用保持 P，因此下降为 T_X/P 上的作用。后者的作用定义了沿 P 的联络，即 T_X/P 上一个规范的$\overline{\partial}$-算子，容易看出它与通过后者和 P $^{\perp}$之间的对偶配对所诱导的算子一致。[3] 令 T$^{X/\mathscr{P}}$:= (T_X/P)$^{\mathscr{P}}$（P 的不变截面子层，等价地，是 T_X/P 上 $\overline{\partial}$-算子的核）。T_X 上的李括号（分别地，T_X 对 O $_X$的作用）诱导 T $^{X/\mathscr{P}}$上的李括号（分别地，T$^{X/\mathscr{P}}$对 O$^{X/\mathscr{P}}$的作用）。括号和对 O$^{X/\mathscr{P}}$的作用赋予 T$^{X/\mathscr{P}}$ 一个 O$^{X/\mathscr{P}}$-李 algebroid 结构。

P 通过李导数在 Ω^1_X 上的作用限制为沿P 的平坦联络，即P上的一个规范$\overline{\partial}$-算子 $^{\perp}$，因此，对于所有 i，也在$\bigwedge^i$P $^{\perp}$ 上成立。容易看出，乘法映射 $Gr^F_0\Omega^\bullet\otimes\bigwedge^i$P $^{\perp}\to Gr^F_{-i}\Omega^\bullet[i]$ 是一个同构，它将 $\bigwedge^i$P $^{\perp}$的 $\overline{\partial}$-复形与 $Gr^F_{-i}\Omega^\bullet[i]$对应起来。令$\Omega^i_{X/\mathscr{P}}$:= $H^i(Gr^F_{-i}\Omega^\bullet_X,\overline{\partial})$（从而O $_X$/P:=$\Omega^0_{X/\mathscr{P}}$）。于是，$\Omega^i_{X/\mathscr{P}}\subset\bigwedge^i$P $^{\perp}\subset\Omega^i_X$。微分形式的楔积在$\Omega^\bullet_{X/\mathscr{P}}$:= $\oplus_i\Omega^i_{X/\mathscr{P}}[-i]$ =$H^\bullet(Gr^F\Omega^\bullet_X,\overline{\partial})$上诱导出分次交换代数结构。乘法诱导出一个同构$\bigwedge^i$O $_X$/P$\Omega^1_{X/\mathscr{P}}\to\Omega^i_{X/\mathscr{P}}$。德拉姆微分 d 限制为映射 $d:\Omega^i_{X/\mathscr{P}}\to\Omega^{i+1}_{X/}$ P，并且复形$\Omega^\bullet_{X/\mathscr{P}}$:= ($\Omega^\bullet_{X/\mathscr{P}}$, d)是一个交换微分分次代数。

霍奇滤过 $F_\bullet\Omega^\bullet_{X/\mathscr{P}}$定义为

$$F_i\Omega^\bullet_{X/\mathscr{P}}=\oplus_{j\geq -i}\Omega^j_{X/\mathscr{P}},$$

使得包含映射 $\Omega^\bullet_{X/\mathscr{P}}\hookrightarrow\Omega^\bullet_X$ 关于霍奇滤过是滤过的。由引理 A.1 可知，它实际上是一个滤过拟同构。

对偶配对 T_X/P $\otimes$P $^{\perp}\to$O $_X$限制为非退化配对 T$^{X/\mathscr{P}}\otimes_{\mathcal{O}_{X/\mathscr{P}}}\Omega^1_{X/\mathscr{P}}\to$O $_{X/\mathscr{P}}$。T_X/P 在 O $_{X/\mathscr{P}}$上的作用与配对及德拉姆微分之间满足通常的公式 $\xi(f)=\iota_\xi df$，其中 $\xi\in$T$^{X/\mathscr{P}}$且 $f\in$O $_{X/\mathscr{P}}$。

A.5. 辛几何。O$^{X/\mathscr{P}}$上的泊松括号是一个双导子

$$\{\cdot,\cdot\}\colon\mathcal{O}_{X/\mathscr{P}}\otimes\mathcal{O}_{X/\mathscr{P}}\to\mathcal{O}_{X/\mathscr{P}}$$

它满足雅可比恒等式，即在 O$^{X/\mathscr{P}}$ 上定义了一个 $\mathbb{C}$-李代数结构。泊松括号通过公式$\{f,g\}=\pi(df,dg)$对应于泊松双向量 $\pi\in\Gamma(X;\bigwedge^2$ T$^{X/\mathscr{P}})$。若泊松双向量 π 非退化，则 $\omega=\pi^{-1}$ 是一个闭的非退化 2-形式，通常称为辛形式；此时称泊松括号为辛的。显然，辛泊松括号的存在意味着 rk$^{\mathcal{O}_{X/\mathscr{P}}}T^{X/\mathscr{P}}$为偶数。

[3]在实极化的情形下，这个联络称为 Bott 联络。

设 $\{\cdot,\cdot\}$ 是一个辛泊松括号。令 $\mathrm{rk}^{\mathcal{O}_{X/\mathscr{P}}}\mathrm{T}_{X/\mathscr{P}} = 2n$。达布引理指出，每个点 $x \in X$ 都有一个邻域 $x \in U \subset X$，使得存在函数 $p_i, q_i \in \mathrm{O}_{X/\mathscr{P}}(U)$，$i = 1, \ldots, n$，它们满足典范关系$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$。

Appendix B. Torsors and gerbes

下文我们将讨论具有阿贝尔 lien 的 gerbe。下面简要回顾一些相关概念和构造，以统一记号。关于皮卡ard叠和 gerbe 的详细论述，分别参见 [Deligne、1973], [Breen、1994] 和 [Milne 2003] 。

设 X 是一个拓扑空间。

B.1. 皮卡ard叠。我们回顾 [Deligne 1973] 在第 1.4 节“严格交换的 Picard 叠”中的定义。

一个（严格交换的）Picard 群胚 P 是一个非空群胚，配备了一个函子 $+\colon \mathrm{P} \times \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ 以及函子性同构

- $\sigma_{x,y,z}\colon (x+y)+z \to x+(y+z)$
- $\tau_{x,y}\colon x+y \to y+x$

使 $+$ 具有结合性且严格交换，并且对于每个对象 $x \in \mathrm{P}$，函子 $y \mapsto x+y$ 是一个等价。

X 上的 Picard叠是一个群胚中的叠P，配备函子 $+\colon \mathrm{P} \times \mathrm{P} \to \mathrm{P}$以及如上所述的函子性同构 σ 和 τ，这些对于每个开子集 $U \subseteq X$赋予范畴 $\mathrm{P}(U)$ 一个 Picard 群胚结构。

B.2. 托ors。假设 A 是 X 上的阿贝尔群层。A-托ors 的叠记作 $A[1]$; 它是一个 gerbe，因为所有 A-托ors 都是局部平凡的。

假设 $\phi\colon A \to B$ 是阿贝尔群层的一个态射。赋值$A[1] \ni T \mapsto \phi T := T \times_A B \in B[1]$ 延拓为叠的一个态射 $\phi\colon A[1] \to B[1]$。存在一个托ors层的典范映射 $\phi = \phi_T\colon T \to \phi T$，其与阿贝尔群的映射 ϕ 及相应的作用相容。

设 A 和 B 是阿贝尔群层。赋值 $A[1] \times B[1] \ni (S,T) \mapsto S \times T \in (A \times B)[1]$ 延拓为叠态射 $\times\colon A[1] \times B[1] \to (A \times B)[1]$。

设 A 是一个阿贝尔群层，其群结构为 $+\colon A \times A \to A$。后者是群层态射，因为 A 是阿贝尔的。赋值 $A[1] \times A[1] \ni (S,T) \mapsto S+T := +(S \times T)$ 在 $A[1]$ 上定义了一个 Picard 叠结构。若 $\phi\colon A \to B$ 是阿贝尔群层的态射，则相应的态射 $\phi\colon A[1] \to B[1]$ 是 Picard 叠态射。

因此，$\pi_0 A[1](X)$ 上的 A-托ors 的同构类集合具有规范的阿贝尔群结构。存在一个规范的群同构 $\pi_0 A[1](X) \cong H^1(X; A)$。

B.3. Gerbe。 X 上的 gerbe 是一个群胚叠，它局部非空且局部连通。对于阿贝尔群的层 A ，一个 A-gerbe S 是一个 gerbe，并带有函子性同构 $A(U) \cong \mathrm{Aut}(s)$；其中 $U \subseteq X$ 是一个开子集，使得 S $(U) \neq \varnothing$ 且 $s \in$S (U)。 A-gerbe 的态射必须保持上述识别。

因此， A-gerbe 是 $A[1]$ 的扭曲形式（即局部等价于 $A[1]$）。 A-gerbe 的 2-叠记作 $A[2]$。由于所有 A-gerbe 都局部等价，2-叠$A[2]$ 是一个 2-gerbe。

通过等价 $\mathrm{Eq}_A(A[1], \mathrm{S}) \cong$S，每个 A-gerbe S（等价于某个）都允许 Picard 叠 $A[1]$ 通过自等价施加典范作用，记作 $+\colon A[1]\times$S $\to$S , $(T, L) \mapsto T + L$ ，从而赋予 S 一个在 $A[1]$ 下的 2-扭子结构。我们不区分 A-gerbe 与在 $A[1]$ 下的 2-扭子，并用记号 $A[2]$ 表示二者。

设 $\phi\colon A \to B$ 是阿贝尔群层之间的态射，且 S 是一个 A-gerbe。特别地，对于任意两个（局部定义的）对象 s_1,$s_2 \in$ S，层 Hom$_{\mathcal{S}}(s_1, s_2)$ 是一个 A-托ors。叠 ϕS 定义为与预叠相关联的叠，该预叠的对象与 S 相同，且 Hom$_{\phi\mathcal{S}}(s_1, s_2) :=$ ϕ Hom$_{\mathcal{S}}(s_1, s_2)$。于是， ϕS 是一个 B-gerbe，映射 S $\mapsto$ ϕS 延拓为一个态射 $\overline{\phi}\colon A[2] \to B[2]$。存在一个典范叠态射 $\phi = \phi_{\mathcal{S}}$: S $\to \phi$S，它在自同构群上诱导映射$\phi\colon A \to B$ 。

$A[1]$ 上的 Picard 结构以类似方式导出 $A[2]$ 上的 Picard 结构。因此， $A[1]$-托ors 的等价类集合 $\pi_0 A[2](X)$ 具有规范的阿贝尔群结构。存在一个规范的群同构 $\pi_0 A[2](X) \cong H^2(X; A)$】【。

B.4.皮卡ard叠和复形。令 $A^0 \xrightarrow{d} A^1$ 为 X 上一个由阿贝尔群构成的层的复形，集中在零次和一次。回顾一下，一个 $(A^0 \xrightarrow{d} A^1)$-托ors 是一对 (T, τ)，其中 T 是一个 A^0-托ors，而 τ 是 A^1-托ors $d(T) = T \times_{A^0} A^1$的平凡化（即一个截面）。一个 $(A^0 \xrightarrow{d} A^1)$-托ors 态射$\phi\colon (S, \sigma) \to (T, \tau)$是一个 A^0-托ors 的态射 $\phi\colon S \to T$，使得所诱导的 A^1-托ors 态射 $d(\phi)\colon dS \to dT$ 与相应的平凡化相交换，即 $d(\phi)(\sigma) = \tau$。或者，一个 $(A^0 \xrightarrow{d} A^1)$-托ors 是一对 (T, c)，其中 T 是一个 A^0-托ors，且 $\mathsf{c}\colon T \to A^1$ 是一个满足 $\mathsf{c}(t+a) = \mathsf{c}(t)+da$的层态射。后者由平凡化作为复合 $T \xrightarrow{t\mapsto(t,0)} T \times_{A^0} A^1 \cong A^1$ 得到。反过来， c 规范地延拓为 A^1-托ors 的态射 $d(T) = T \times_{A^0} A^1 \to A^1$。

$(A^0 \xrightarrow{d} A^1)$-托ors范畴上的幺半结构定义如下。设$(S, \sigma)$和$(T, \tau)$是$(A^0 \xrightarrow{d} A^1)$-托ors。和$(S, \sigma) + (T, \tau)$由$(S+T, \sigma+\tau)$表示，其中 $\sigma+\tau$是由 σ 和 τ诱导的 $d(S)+d(T) = d(S+T)$ 的平凡化。

局部定义的($A^0 \xrightarrow{d} A^1$)-托ors在 X 上构成一个皮卡ard叠，我们将其记作($A^0 \xrightarrow{d} A^1$)[1]。根据 P. Deligne（[Deligne, 1973], 命题 1.4.15）的结果，所有皮卡ard叠都以这种方式产生。在 X上的($A^0 \xrightarrow{d} A^1$)-托ors的同构类构成的群（运算由幺半结构诱导），即 $\pi_0(A^0 \xrightarrow{d} A^1)[1](X)$，与 $H^1(X; A^0 \xrightarrow{d} A^1)$规范同构。

复形态射

$$\phi = (\phi^0, \phi^1) \colon (A^0 \xrightarrow{d_A} A^1) \to (B^0 \xrightarrow{d_B} B^1)$$

诱导 Picard 叠态射 ϕ: $(A^0 \xrightarrow{d_A} A^1)[1] \to (B^0 \xrightarrow{d_B} B^1)[1]$ 定义为$\phi(S, \sigma) = (\phi^0 S, \phi\sigma)$，其中 $\phi\sigma$: $\phi^0 S \to B^1$ 是 $d_B \phi^0 S$的唯一平凡化，使得复合 $S \to \phi^0 S \xrightarrow{\phi\sigma} B^1$ 等于 $\phi^1 \circ \sigma$。

B.5. 2-扭子。Picard 叠 P 上的一个（2-）托ors，是一个叠 S，赋有作用 $+$: P $\times$ S $\to$ S，并且局部等价于 P 连同 P 通过平移给出的作用。P-托ors 的 2-叠记作 P $[1]$。Picard 叠 $(A^0 \xrightarrow{d} A^1)[1]$ 上的托ors 还可描述为 $(A^0 \xrightarrow{d} A^1)$-gerbe。

一个 $(A^0 \xrightarrow{d} A^1)$-gerbe 等价于数据(S τ)，其中 S 是一个 A^0-gerbe，且τ是 A^1-gerbe$d$S 的平凡化，即一个等价 τ: dS $\to A^1[1]$。复合S $\xrightarrow{d}$ dS $\xrightarrow{\tau} A^1[1]$ 是将一个 A^1-托ors $\tau(s)$ 函子性地赋给一个（局部定义的）对象 $s \in$ S。

$(A^0 \xrightarrow{d} A^1)$-gerbe (S $\tau_{\mathcal{S}}$) $\to$(T $\tau_{\mathcal{T}}$) 的一个 1-态射是一个对 (F, λ)，其中F: S $\to$ T 是 A^0-gerbe 的一个 1- 态射，而 λ 是一个 2- 态射 $\tau_{\mathcal{S}} \to \tau_{\mathcal{T}} \circ dF$。

1-态射 (S $\tau_{\mathcal{S}}$) $\to$(T $\tau_{\mathcal{T}}$) 之间的 2-态射 η: $(F, \lambda_F) \to (G, \lambda_G)$ 是满足 $\lambda_G = (\mathtt{Id}_{\tau_{\mathcal{T}}} \diamond d\eta) \circ \lambda_F$ 的 2- 态射 η: $F \to G$。

$(A^0 \xrightarrow{d} A^1)$-gerbe 的 2-叠记作 $(A^0 \xrightarrow{d} A^1)[2]$。

每个 $(A^0 \xrightarrow{d} A^1)$-gerbe 都具有$(A^0 \xrightarrow{d} A^1)[1]$ 的典范作用，其通过自等价-同构如下。 $A^0[1]$ 在 S 上的作用扩展为 $(A^0 \xrightarrow{d} A^1)[1]$ 在 (S τ) 上的作用。也就是说，$(T, \lambda) \in (A^0 \xrightarrow{d} A^1)[1]$ 给出自等价 $(T + (\cdot)\ \lambda)$。

在 $(A^0 \xrightarrow{d} A^1)[1]$ 上的Picard 结构，以类似方式在 $(A^0 \xrightarrow{d} A^1)[2]$ 上定义出一个Picard结构。作为结果，集合 $\pi_0(A^0 \xrightarrow{d} A^1)[2](X)$（其元素为 $(A^0 \xrightarrow{d} A^1)$-gerbe 的等价类）被赋予了一个阿贝尔群的规范结构。存在一个规范的群同构 $\pi_0(A^0 \xrightarrow{d} A^1)[2](X) \cong H^2(X; A^0 \xrightarrow{d} A^1)$。

B.6. 扩张与挠子。设 A 和 B 是 X 上环层 k 上的模层。我们用 $\mathrm{Ext}^1_k(A, B)$ 表示扩张范畴

$$E: \quad 0 \to B \to E \to A \to 0$$

$\mathbf{Ext}^1_k(A,B)$ 中的态射是短正合列之间的映射，它们在 A 和 B 上诱导恒等映射。由于任何这样的映射都是同构，范畴 $\mathbf{Ext}^1_k(A,B)$ 是一个群胚。扩张的 Baer 和赋予范畴 $\mathbf{Ext}^1_k(A,B)$ 一个 Picard 群胚结构。分裂扩张$E_\circ = B \oplus A$构成一个零对象。

赋值 $X \supseteq U \mapsto \mathbf{Ext}^1_k(A|_U, B|_U)$， U一个开子集，在 X 上定义了一个 Picard 叠，记作 $\mathbf{Ext}^1_k(A,B)$。对于 B 的任意内射分解 $I^0 \to I^1 \to \cdots$，存在 Picard 叠的一个等价 $(\tau^{\leqslant 1}\mathrm{Hom}_k(A, I^\bullet))[1] \cong \mathbf{Ext}^1_k(A,B)$。特别地，$\pi_0\mathbf{Ext}^1_k(A,B) = \mathrm{Ext}^1_k(A,B)$，且 $\pi_1\mathbf{Ext}^1_k(A,B) = \mathrm{Hom}_k(A,B)$，其中 $\phi \in \mathrm{Hom}_k(A,B)$ 通过 $(b,a) \mapsto (b + \phi(a))$ 作用。

由 $T \mapsto T \times_{\mathrm{Hom}_k(A,B)} E_\circ$ 定义的典范函子 $\mathrm{Hom}_k(A,B)[1] \to \mathbf{Ext}^1_k(A,B)$ 是全忠实的，其本质像是那些在 X 上局部可分裂的扩张所构成的子范畴。反过来，假设扩张 E 在 $\mathbf{X}$ 上局部可分裂。那么，映射 $\mathrm{Hom}_k(A,E) \to \mathrm{Hom}_k(A,A)$ 是一个满射，并且 $E_{/\mathtt{Id}_A} := \mathrm{Hom}_k(A,E) \times_{\mathrm{Hom}_k(A,A)} \mathtt{Id}_A$，其中 $\mathtt{Id}_A\colon *_X \to \mathrm{Hom}_k(A,A)$ 是全局截面 $\mathtt{Id}_A \in \mathrm{Hom}_k(A,A)$，它是相应的 $\mathrm{Hom}_k(A,B)$-托ors。

特别地，利用典范识别 $\mathrm{Hom}_k(k,B) = B$，我们得到典范等价 $B[1] \to \mathbf{Ext}^1_k(k,B)$。一个拟逆将 $T \in B[1]$ 与唯一的扩张相对应。

$$0 \to B \to \widetilde{T} \to k \to 0$$

使得 $T = *_X \times_k T$，其中 $*_X^1 \to k$ 是单位截面。

B.7. 扩张与 2-扭子。我们继续使用 B.6 中引入的记号。一个扩张

$$\widetilde{E}\colon \quad 0 \to C \to \widetilde{E} \to E \to 0 \quad \in \mathscr{E}xt^1_k(E,C)$$

给出扩张 $\widetilde{E}_{/B} := B \times_E \widetilde{E} \in \mathbf{Ext}^1_k(B,C)$ 赋值 $\widetilde{E} \mapsto \widetilde{E}_{/B}$ 延拓为一个 Picard 叠态射 $\mathbf{Ext}^1_k(E,C) \to \mathbf{Ext}^1_k(B,C)$；对于 $K \in \mathbf{Ext}^1_k(B,C)$，我们用 $\mathbf{Ext}^1_k(E,C)_{/K}$ 表示相应的纤维。$\mathbf{Ext}^1_k(E,C)$ 上的 Baer 和运算限制为这些配对。

$$\mathscr{E}xt^1_k(E,C)_{/K} \times \mathscr{E}xt^1_k(E,C)_{/L} \to \mathscr{E}xt^1_k(E,C)_{/K+L}$$

并且，特别地，在 $\mathbf{Ext}^1_k(E,C)_{/0}$ 上具有 Picard 叠结构，其中 0 是分裂扩张；同时，$\mathbf{Ext}^1_k(E,C)_{/K}$ 上具有 $\mathbf{Ext}^1_k(E,C)_{/0}$-托ors 结构。

Picard 叠态射

$$\mathscr{E}xt^1_k(A,C) \to \mathscr{E}xt^1_k(E,C) : F \mapsto E \times_A F$$

建立了 $\mathbf{Ext}^1_k(A,C) \cong \mathbf{Ext}^1_k(E,C)_{/0}$ 之间的典范等价。拟逆由 $E \mapsto \mathrm{coker}(B \to E)$ 给出，其中映射 $B \to E$ 由 $\widetilde{E}_{/B}$ 的分裂推出。下文中，我们将把 $\mathbf{Ext}^1_k(E,C)_{/K}$ 视为 $\mathbf{Ext}^1_k(A,C)$ 下的托ors。

我们将上述考虑应用于一个正合列

$$0 \to C \to E^0 \to E^1 \to A \to 0 \tag{B.7.1}$$

with B = 余核($C \to E^0$) = 核($E^1 \to A$), $E = E^1$ 并且 $K = E^0$ 以获得 ~~E x t~~ $^1_k(A, C)$-托ors ~~E x t~~ $^1_k(E^1, C)_{/E^0}$。后者等价于交换图的范畴

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C & = & C & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E^0 & \longrightarrow & \widetilde{E^1} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E^1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

其正合行与列以及相应的态射在除 E^1外的所有对象上诱导恒等映射$\widetilde{\ }$。

假设

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & E^0 & \longrightarrow & E^1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi^0} & & \downarrow{\scriptstyle \phi^1} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & D & \longrightarrow & F^0 & \longrightarrow & F^1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

是一个具有正合行的交换图。令 $K :=$ coker($D \to F^0$) = ker($F^1 \to A$)。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$令 $\phi_* E^1 := F^0 \bigsqcup_{E^0} E^1$。复合

$$\phi_* \widetilde{E^1} = F^0 \bigsqcup_{E^0} \widetilde{E^1} \to K \bigsqcup_{F^0} F^0 \bigsqcup_{E^0} \widetilde{E^1} \cong K \bigsqcup_{B} B \bigsqcup_{E^0} \widetilde{E^1} \cong K \bigsqcup_{B} E^1 \to F^1$$

导出正合列

$$0 \to D \to \phi_* \widetilde{E^1} \to F^1 \to 0.$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$此外，典范映射 $F^0 \to K \times_{F^1} \phi_* E^1$ 是一个同构，因此 $\phi_* E^1 \in \widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$E x t $^1_k(F^1, D)_{/F^0}$。赋值 $E^1 \mapsto \phi_* E^1$ 延拓为一个态射

$$\phi_* \colon \underline{\mathscr{E}xt^1_k}(E^1, C)_{/E^0} \to \underline{\mathscr{E}xt^1_k}(F^1, D)_{/F^0}.$$

关于相对于由映射 $\phi^0|_C \colon C \to D$ 诱导的 Picard 叠态射 Ext $^1_k(A, C) \to$ E x t $^1_k(A, D)$ 的托ors。

假设 $A = k$。那么，E x t $^1_k(A, C) \cong C[1]$，且 $C[1]$-托ors E x t $^1_k(E^1, C)_{/E^0}$ 在 H^2 ~~(X; C)~~ 中的类等于扩张 (B.7.1) 的类。

B.8. 2-丛。对于一个 Picard 叠 P，P- gerbe 是一个由 2-群胚组成的 2-叠 $\mathfrak{S}$，它局部非空且局部连通，并配有等价的数据η_s: P $|_U \to$ Aut$_{\mathfrak{S}}(s)$，其中 $U \subseteq X$ 是一个开子集，使得 $\mathfrak{S} \neq \varnothing$ 和 $s \in \mathfrak{S}(U)$ 按照 Breen [Breen, 1994] 中规定的意义相容。P- gerbe 的集合自然构成一个 3-范畴，相应的 3-叠记作 P [2]。一个 P-gerbe $\mathfrak{G}$ 自然定义了一个在 P [1], 下的托ors，即 Eq(P [1], $\mathfrak{S}$)。若 P $= (A^0 \xrightarrow{d} A^1)[1],$ ，则 $(A^0 \xrightarrow{d} A^1)[1][2] = (A^0 \xrightarrow{d} A^1)[2][1]$ 的共同值记作 $(A^0 \xrightarrow{d} A^1)[3]$。3-叠 $(A^0 \xrightarrow{d} A^1)[3]$ 具有自然的 Picard 结构，因此 $\pi_0(A^0 \xrightarrow{d} A^1)[3](X)$ 是一个阿贝尔群，并且与$H^3(X, A^0 \xrightarrow{d} A^1)$ 典范同构。

对于复形映射 复形态射

$$\phi = (\phi^0, \phi^1) \colon (A^0 \xrightarrow{d_A} A^1) \to (B^0 \xrightarrow{d_B} B^1)$$

以及一个 $(A^0 \xrightarrow{d_A} A^1)[1]$-gerbe $\mathfrak{S}$，$(B^0 \xrightarrow{d_B} B^1)[1]$-gerbe $\phi\mathfrak{S}$ 定义为与如下预 2-叠相关联的 2-叠：其对象与 $\mathfrak{S}$ 相同，且 Hom$_{\phi\mathfrak{S}}(s,t) = \phi$ Hom$_{\mathfrak{S}}(s,t)$。

B.9. 代数丛。设 k 为带单位元的交换环。回顾一下，k-代数丛是一个由 k-线性范畴构成的叠 C，使得同构子叠 iC（它是一个由群胚构成的叠）是一个 gerbe。

对于一个 k-代数 A，我们用 A^+ 表示这样一个 k-线性范畴：它只有一个对象，记为 $*$，其自同态代数为 A。

设 A 是 X 上的 k-代数层。赋值 $U \mapsto$ A $(U)^+, U \subseteq X$一个开子集，在 X 上定义了一个预叠；我们将其关联的叠记为 A $^+$。注意，A $^+$等价于 A $^{\mathrm{op}}$-模的叠，其中这些模局部同构于 A。显然，范畴 A $^+(X)$ 非空。

反过来，设 C 是一个 k-代数胚，且范畴 C (X) 非空。令$L \in$ C (X)，并令 A $:=$ 自同态 $\mathscr{C}(L)^{\mathrm{op}}$。赋值 $U \mapsto$ (A $(U)^+ \to$ C (U) : $* \mapsto L|_U$) 可扩张为等价 A $^+ \to$ C 。

对于 X 上的 k-代数层 A，A 的一个扭曲形式是一个 k-代数丛，它局部地与 A $^+$ k-线性等价。

对于一个 k-代数 A，我们用 Z(A) 表示 A 的中心。对于一个 k-线性叠 C，我们用 Z(C) 表示 C 的中心，即由 $U \mapsto$End$_k$(Id$_{\mathscr{C}|_U}$) 定义的 k-代数层。注意，对于一个 k-代数层 A， Z(A $^+$) $=$ Z(A)。

对于一个 k-代数丛 C，存在 Z(C)$^\times$-托ors 对 C 的典范作用，记作 $L \mapsto T \otimes L$；对于 $L \in$ C， $T \in$ Z(C)$^\times[1]$，因此存在一个典范幺半群函子 Z(C)$^\times[1] \to$Aut(C)。

References

[Bressler,Gorokhovsky, Nest 与 Tsygan, 2007] P. Bressler, A. Gorokhovsky,R. Nest，和 B. Tsygan, gerbe 的变形量子化，Adv. Math. 214(1)（2007），230–266。

[Bressler、Gorokhovsky、Nest 与 Tsygan, 2017] P. Bressler、A. Gorokhovsky、R. Nest 和 B. Tsygan, 《DQ-代数丛的拟经典极限》, 《Compositio数学》153（2017）, 41–67。[Breen, 1994] L. Breen, 《2-丛和2-叠的分类》, 《Aster´isque》225（1994）, 160页。[Deligne, 1973] P. Deligne, 《全局对偶公式》, 《拓扑斯理论与概形的étale上同调》, 第3卷。《代数几何研讨会 Bois-Marie 1963–1964》（SGA4）。《数学讲义》, 第305卷。Springer-Verlag, 柏林–纽约, 1973, 481–587。[Deligne, 1995] P. Deligne, 《辛流形上的函数代数的变形》, 《精选数学》, 新系列第1卷第4期（1995年）, 667–697。[D'Agnolo 与 Kashiwara, 2011] A.D' Agnolo和 M. Kashiwara, 《复辛流形上的量子化》, 《数学物理通讯》308(1)（2011）, 81–113。[D'Agnolo 与 Polesello, 2005] A. D'Agnolo和P.Polesello, 《复合 involutive子流形的变形量子化》, 《非交换几何与物理》, WorldSci. Publ., Hackensack, 新泽西州, 2005, 127–137。[De Wilde 与Lecomte, 1983] M.DeWilde和P. B.A.Lecomte, 《任意辛流形的泊松李代数的星积及形式变形的存在性》, 《数学物理通讯》7(6)（1983）, 487–496。[De Wilde 与 Lecomte, 1985] M.DeWilde 和P.B.A. Lecomte, 《恰辛流形上星积的存在性》, 《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）35(2)（1985）, 117–143。[Fedosov, 1985] B.V. Fedosov, 《形式量子化》, 《现代数学中的一些问题及其在数学物理问题中的应用》（俄文）, 莫斯科物理技术研究所, 莫斯科, 1985, 129–136, vi。[Fischer 与Williams, 1979] H.R. Fischer 和 F. L. Williams, 《复叶状结构 I。Dolbeault-Kostant复形的上同调》, 《美国数学会汇刊》252（1979年）, 163–195。[Kashiwara, 1996] M.Kashiwara, 《接触流形的量子化》, 《数理科学研究所出版物》32(1)（1996）, 1–7。[Kontsevich, 2001] M. Kontsevich, 《代数簇的变形量子化》, 《数学物理通讯》56(3)（2001）, 271–294。[Kostant, 1970] B.Kostant, 《量子化与酉表示》。载于：TaamC.T.（编）, 《现代分析与应用讲义III》。《数学讲义》, 第170卷。Springer, 柏林、海德堡, 1970年, 87–208。[Kashiwara 与 Schapira, 2012] M. Kashiwara 和 P. Schapira, 《变形量子化模》, 《Asterisque》345（2012）, 法国数学学会。[Milne, 2003] J. S. Milne, 《gerbe与阿贝尔动机》, arXiv:math/0301304 [math.AG]。[Nest 与 Tsygan, 2004] R. Nest、B.L.Tsygan, 《变形量子化代数上的模札记》, 《莫斯科数学杂志》4:4（2004年）, 911–940。[Polesello, 2008] P.Polesello, 《复辛流形上变形量子化代数丛的分类》, 《数理科学研究所出版物》44(3)（2008）, 725–748。[Rawnsley, 1977] J. H.Rawnsley, 《极化的上同调群与对角量子化》, 《美国数学会汇刊》230（1977年）, 235–255。

Departamento de Matemáticas, Universidad de Los Andes电子邮件地址: *paul.bressler@gmail.com*

Departamento de Matemáticas, Universidad de Los Andes电子邮件地址: *juandrojas33@gmail.com*