arXiv:2304.03341v1 [math.OC] 6 Apr 2023

道德风险情境下的信息价值

IshakHajjej*、Caroline Hillairet†、Mohamed Mnif‡

2023年4月10日

摘要

本文研究了在与努力不可观测的代理人建立激励合同过程中，评估委托人所缺乏的信息这一问题。委托人（“她”）向代理人（“他”）持续支付租金，而后者在合同终止前会作出由其努力刻画的最优响应；委托人在决定的终止日期停止合同，并向代理人支付补偿。项目的产出过程是一个由布朗运动驱动的扩散过程，其漂移受到代理人努力的影响。本文第一部分研究委托人与代理人拥有相同信息时的最优随机控制问题。这种情形称为第一最佳情形，通过处理拉格朗日问题加以求解。第二部分中，委托人观测产出过程，但可能无法分别观测漂移和布朗运动。这种情形称为第二最佳情形。我们推导代理人的最优响应，随后在固定概率下、基于由布朗运动生成的滤过上，求解委托人的最优停止与随机控制混合问题；该滤过大于由产出过程生成的滤过（后者对应于委托人可获得的信息）。在一定的正则性条件下，委托人的价值函数通过求解相应的Hamilton-Jacobi-Bellman变分不等式来刻画。在最优值处，我们证明两个滤过相同。最后，我们计算委托人通过观测代理人的努力所获得的信息价值。它被定义为第一最佳情形与第二最佳情形下委托人价值函数之差。

关键词：道德风险、委托人—代理人、随机控制、最优停止、Hamilton-Jacobi-Bellman变分不等式、最优情形、次优情形。

*MSC*分类：60G40、91B40、91B70、93E40。

资助：本研究得到法国国家研究机构（ANR）“未来投资”项目（LabEx Ecodec/ANR-11-LABX-0047）的资助。

*CREST与IUT、LMBA，法国，电子邮件：ishak.hajjej@ensae.fr

†CREST，巴黎ENSAE，法国，电子邮件：Caroline.Hillairet@ensae.fr

‡突尼斯大学埃尔马纳尔分校ENIT、LAMSIN，突尼斯，电子邮件：mohamed.mnif@enit.utm.tn

1 引言

委托代理问题涉及两个人：委托人（她）和代理人（他）。委托人提出一份合同，代理人可以自由选择接受或拒绝，但双方都不能反悔。委托人希望实现两个目标。首先，她希望代理人接受合同。其次，委托人希望从合同中获取最大利润。在博弈论中，这种情形构成了所谓的斯塔克尔伯格博弈，其中委托人是领导者，代理人是跟随者。委托代理问题有许多应用，尤其是在金融领域（例如，El Euch 等人 [EMRT21] 关于市场监管的研究）、投资组合管理领域（参见 Cvitanic 等人 [CPT17]）以及电力市场领域（参见 Alasseur 等人 [AEÉ+20], 以及较新的 Aïd 等人 [APT22]）。经济学文献中的许多情形都可归结为委托代理问题，例如公私合作（PPP）合同。Auriol 和 Picard [AP13] 讨论了在项目期间公共实体与私人运营商对成本参数掌握的信息不同时，PPP 合同是否适用。Hajjej 等人 [HHMP17] 运用部分信息下随机控制的技术，推导出最优的永续合同。Hajjej 等人 [HHM22] 提出了一种类似的建模方式，在随机时域内采用连续支付，并加入了在随机时刻终止合同的可能性，终止决定由公众作出。

文献中根据信息的层级，主要考虑三种类型的合同。

- 第一种通常称为风险分担情形或最优情形，在这种情形下，委托人与代理人能够获取完全相同的信息。Borch [Bor92], Arrow [Arr64] 以及 Wilson [Wil68]等人研究了这一情形。在委托人与代理人均采用指数效用的情况下，Muller [Mül97] 证明，最优合同是产出过程终值的线性函数。Cadenillas 等人[CCZ07] 考虑了代理人能够同时控制产出过程漂移和波动率的情形。随后，Cvitanic 等人 [CWZ04] 运用最大值原理对这一问题进行了研究。

- 第二种通常称为道德风险或次优情形。在这种情况下，委托人无法观察代理人的行动，只能观察产出过程。关于连续时间委托—代理问题的首篇论文是 Holmstrom 和 Milgrom [HM87]的研究。他们考虑了一个布朗运动框架，其中代理人控制产出过程的漂移，并在合同期末（即有限时域）获得一次性付款。Schattler 和 Sung [SS93] 运用动态规划和鞅方法推广了这些结果。Cvitanic 等人 [AP13], [Bel57]在非马尔可夫随机控制框架下，利用二阶倒向随机微分方程考虑了一般情形，其中代理人的努力会同时影响产出过程的漂移和波动率。

- 第三种类型通常称为逆向选择。这种情况对应于委托人并不完全了解代理人特征的情形。这种类型

这类问题由 Sung [Sun05] 研究，随后 Cvitanic 和 Zhang [CZ12] 以及 Carlier 等人 [CET07]也进行了研究。

与最优情形相比，次优情形对应于委托人与代理人之间的一场斯塔克尔伯格博弈：委托人提出一份合同，代理人则给出由其努力所决定的最优响应。随后，委托人将最优努力纳入考量，计算出使其效用最大化的最优合同。一些论文研究了第一最佳和第二最佳两种情形下的最优委托代理合同，其中代理人获得的是终端一次性付款，而非持续租金。Mastrolia 和 Possamai [MP18] 研究了这样一个委托代理问题：代理人控制产出的漂移，且波动率存在不确定性。在第一最佳情形下，他们证明，最优合同属于关于产出及其二次变差的线性合同类。在第二最佳情形下，他们利用反向随机微分方程（BSDE）获得了代理人价值函数的概率表示。该表示刻画了代理人选择的最优行动。Aïd 等人 [APT22]将委托代理问题应用于电力市场。他们证明，在第一最佳情形下，能源价格是消费者能源边际价值与生产者边际成本的凸组合。在第二最佳情形下，能源价格非常数且非线性，并且是时间的递减函数，因此期初的努力高于期末。在委托人和代理人均采用指数效用的设定下，Muller [Mül97] 证明，第一最佳情形下的最优合同与第二最佳情形下一样，均关于产出的最终值呈线性。

在第二最佳情形下，由于无法观察代理人的努力，委托人面临信息缺失。一些作者研究了如何量化额外信息的价值。Amendinger 等人 [ABS03]考察了一位风险厌恶型投资者，该投资者根据可获得的信息流作出决策，以最大化其终值财富的期望效用。该投资者有机会获取一些额外的初始信息。信息价值被定义为投资者愿意为额外信息支付的金额，使其在以下意义上保持无差异：在最优控制下，不支付任何费用且不拥有额外信息，与支付一定费用且拥有额外信息时，其期望效用不变。换言之，信息价值通过最大期望效用意义上的信息优势得到抵消。在我们的情形中，信息与对代理人努力的了解有关。信息价值可以定义为委托人为弥补信息缺失而愿意接受的货币金额。由于委托人是风险中性的，即其效用函数是线性的，因此信息的货币价值被定义为委托人在第一最佳情形下的价值函数与其在第二最佳情形下的价值函数之差。

本文考察了一份合同，其中风险中性的委托人向风险厌恶的代理人提出连续支付，直至由委托人决定停止合同的随机时域。代理人可以选择接受合同并付出努力，或拒绝合同。

如果其保留约束未得到满足，则为合同。本文与连续时间动态契约问题的相关文献有关。本文的第一部分致力于第一最佳情形，在该情形下，委托人和代理人拥有相同的信息：双方共同分担风险。这一情形导致了一个针对单一个体“委托人”的带最优停止的随机控制问题，由委托人同时选择租金和努力。本文的第二部分致力于第二最佳情形。特别地，委托人可能无法观测代理人的努力，而只能观测其对产出过程的影响。在相关文献中，这一问题通常采用弱方法处理：在参考概率测度下，产出过程服从布朗运动，而代理人通过改变其漂移来改变产出过程的分布；这会诱导出一个取决于代理人努力的新的概率测度，并在该测度下研究该问题。对于给定的合同，代理人在该概率测度下优化其准则，从而得到代理人的最优响应（努力）。随后，委托人在由代理人的最优响应所诱导的法律下求解其问题，这是一个标准的最优停止与随机控制混合问题。不同于这种弱形式，本文采用强形式。我们固定一个概率空间，委托人观测产出过程，但可能无法观测漂移或布朗运动。委托人和代理人在不同的信息流下优化各自的准则，代理人的滤子大于委托人的滤子。我们处于部分观测下的随机控制情境中（参见 Bensoussan [Ben04]）。我们在更大的控制集合上求解委托人的最优停止与随机控制混合问题，该控制集合对应于关于总滤过适应的控制，而总滤过包含委托人和代理人的全部信息。在最优值处，我们证明总滤过与由产出过程生成的滤子相一致。

本文有两项贡献。首先，在非退化情形下，即产出过程的波动率为正时，我们采用强方法求解委托代理问题。其次，通过观察代理人的努力，我们计算委托人所获得的信息价值。本文的结构如下：第2节采用强方法对问题进行表述，并分别在第一最佳和次优情形下定义委托人和代理人的问题。第3节专门讨论第一最佳框架下的委托代理问题。第4节通过确定代理人的激励相容契约，并推导与委托人价值函数相关的Hamilton-Jacobi-Bellman变分不等式，求解次优情形下的委托代理问题。第5节专门进行数值研究。

2 F委托人—代理人问题的表述

在全文中，设 $(\Omega\ \mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\ \mathbb{P})$ 为一个滤过概率空间，其中 $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$是由 W 一维布朗运动生成的滤子（满足右连续性和完备性的通常条件）。我们考虑一个时间连续的委托代理问题：风险中性的委托人提出连续支付，支付给风险厌恶代理人

直至由委托人决定的随机终止时域。作为回报，如果代理人接受合同，就会付出努力，影响项目产出过程的漂移。在全文中，我们采用强形式，即在参考概率测度 $\mathbb{P}$ 下求解委托代理问题。合同是一个三元组 $\Gamma = ((R_t)_t,\ \tau,\ \xi)$，其中 R 是非负租金，τ 是合同的随机终止日期（由委托人决定），ξ是终止合同的成本。三元组的可测性将在下文根据所考虑的情形（第一最佳或第二最佳情形）具体说明。给定委托人提供的合同 $\Gamma = ((R_s)_s,\ \tau,\ \xi)$，代理人会就努力程度 $(A_s)_{s\geq 0}$作出最优响应，该努力是一个非负的 $\mathbb{F}$-渐进可测过程。代理人的努力会影响项目的产出过程，该过程是一个 $\mathbb{F}$-渐进可测过程 $(X_s)_{s\geq 0}$，定义为

$$X_t := X_0 + \int_0^t \varphi(A_s)ds + \sigma W_t, \tag{2.1}$$

其中，$X_0 > 0$ 是产出过程的初始值，$\sigma > 0$ 是波动率（或扩散系数），假设其为常数。我们引入以下记号：

- $\mathbb{F}^X := (\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ 是由产出过程 X 生成的滤子。
- $\mathcal{T}$ 是所有 $\mathbb{F}$-停时的集合。
- $\mathcal{T}^X$ 是所有 $\mathbb{F}^X$-停时的集合。

在第一最佳情形下，委托人与代理人拥有相同的信息。合同可表示为四元组 $((R_t)_t,\ \tau,\ \xi,\ A)$，其中租金 R 是一个非负的 $\mathbb{F}$-渐进可测过程，$\tau \in \mathcal{T}$，且 ξ 是一个非负的 $\mathcal{F}_\tau$-可测随机变量。在第二最佳情形下，委托人可以观察产出过程 X，但不能直接观察代理人的努力。我们处于非对称信息的情境中。因此，委托人的信息由滤子 $\mathbb{F}^X$传达。合同于是为三元组 $\Gamma = ((R_t)_t,\ \tau,\ \xi)$，其中 R是一个非负的 $\mathbb{F}^X$-渐进可测过程，$\tau \in \mathcal{T}^X$，且ξ是一个非负的 $\mathcal{F}_\tau^X$-可测随机变量[1] 给定委托人提供的合同 $\Gamma = ((R_s)_s,\ \tau,\ \xi)$，代理人会针对努力过程 A给出最优响应：这是一个斯塔克尔伯格领导模型。只有当代理人在时刻 0 的期望收益超过其保留价值 $x > 0$.时，他才会接受合同。

现在，我们来定义优化问题表述中涉及的函数：

假设 2。1　• φ 是用于描述代理人的努力对产出过程 $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 的边际影响的函数，且 C^2 严格凹、有界、递增，$\varphi(0) = 0$ 并且 $\varphi'(0) > 0$。我们记 $\|\varphi\|_\infty := \sup_{a\geq 0} \varphi(a)$。

• 代理人的效用函数 $U\colon\ [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是 C^2 严格凹且递增，并满足 $U(0) = 0$ 以及 *Inada* 条件 $U'(\infty)\colon = \lim_{x\longrightarrow\infty} U'(x) = 0$，$U'(0)\colon = \lim_{x\longrightarrow 0} U'(x) = \infty$。

[1]这与弱形式不同，在弱形式中，租金 R 是一个 $\mathbb{F}$-渐进可测过程，$\tau \in \mathcal{T}$，且 ξ 是 $\mathcal{F}_\tau$-可测的。

- h 是代理人的努力成本； $h:\ [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是 C^2，严格凸且递增， $h(0)=0$ 并且 $h'(0)>0$。
- 代理人（分别为委托人）的时间偏好参数是一个正常数，记为 λ （分别记为 δ）。由于委托人通常比代理人更不急于求成，我们假设 $\lambda \geq \delta$。

可接受合同：

我们根据将用于求解第一最佳和第二最佳情形下委托人与代理人的优化问题的信息流，定义以下可接受合同集合。

对于第一最佳情形，由于委托人与代理人共享相同的信息，可接受策略集合定义如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \ = \ & \{((R_s)_{s\geq 0},\tau,\xi,(A_s)_{s\geq 0}) \text{ such that } R_s\geq 0 \text{ and } A_s\geq 0 \ ds\otimes d\mathbb{P} \text{ are} \\ & \mathbb{F}\text{-progressively measurable, } \tau\in\mathcal{T},\xi\geq 0 \text{ is } \mathcal{F}_\tau \text{ measurable,} \\ & \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\delta s}|\varphi(A_s)|\vee e^{-\lambda s}|h(A_s)|ds\right]<\infty, \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda s}|U(\mathbb{R}_s)|\vee e^{-\delta s}|R_s|ds\right]<\infty, \\ & \text{and } \mathbb{E}\left[e^{-\lambda\tau}U(\xi)\vee e^{-\delta\tau}|\xi|\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\right]<\infty\}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

对于第二最佳情形，我们固定 $\rho>0$，并为代理人和委托人分别引入以下可接受策略集合：

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\rho^{Ag} \ := \ & \{(A_s)_{s\geq 0}\ \mathbb{F}\text{-渐进可测}\ \ A_s\geq 0\ ds\otimes d\mathbb{P}\ a.e \text{ 使得} \qquad \text{t} \\ & \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{(\rho-2\lambda)s}|h(A_s)|^2ds\right]<\infty \text{ and } \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{(\rho-2\delta)s}|\varphi(A_s)|^2\right]<\infty\}\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\rho^{P} \ := \ & \{\big((R_s)_{s\geq 0},\ \tau,\ \xi\big), \text{ 使得 } R\geq 0 \text{ 是 } \mathbb{F}^X\text{-渐进可测}\ \ \tau\in\mathcal{T} \qquad X \\ & \xi\geq 0 \text{ is } \mathcal{F}_\tau^X \text{ measurable such that } \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{(\rho-2\lambda)s}|U(R_s)|^2\vee e^{(\rho-2\delta)s}|R_s|^2ds\right]<\infty \\ & \text{and } \mathbb{E}\left[(e^{(\rho-2\lambda)\tau}U^2(\xi)\vee e^{(\rho-2\delta)\tau}|\xi|^2)\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\right]<\infty\}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

代理人和委托人的目标函数：

给定一个可接受策略$(\Gamma,(A_s)_{s\geq 0})$，其中 $\Gamma=((R_s)_{s\geq 0},\tau,\xi)$，风险厌恶代理人的目标函数定义为：在概率 $\mathbb{P}$ 下，其租金减去努力成本，再加上合同终止时惩罚效用的总效用期望；所有这些量均使用代理人的时间偏好参数λ进行贴现：

$$J_0^{Ag}(\Gamma,A):=\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\lambda s}(U(R_s)-h(A_s))ds+e^{-\lambda\tau}U(\xi)\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\right]. \tag{2.5}$$

使用代理人的 i　　信息流 $\mathbb{F}$，他从时间 t 开始的目标函数为：

$$J_t^{Ag}(\Gamma,A):=\mathbb{E}\left[\int_t^\tau e^{-\lambda(s-t)}(U(R_s)-h(A_s))ds+e^{-\lambda(\tau-t)}U(\xi)\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\big|\mathcal{F}_t\right]. \tag{2.6}$$

风险中性委托人的目标函数定义为：在概率 $\mathbb{P}$ 下产出过程的期望，减去支付给代理人的租金，再减去终止合同的成本；所有这些量均使用代理人的时间偏好参数 δ进行贴现：

$$\begin{aligned} J_0^P(\Gamma, A) &:= \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\delta s}(dX_s - R_s)ds - e^{-\delta\tau}\xi \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\delta s}(\varphi(A_s) - R_s)ds - e^{-\delta\tau}\xi \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\right]. \end{aligned}$$

利用第一最佳情形下委托人的信息流 $\mathbb{F}$ （分别地，次优情形下的信息流为 $\mathbb{F}^X$ ），从时间 t 开始，其目标函数为：

$$\begin{aligned} J_t^{P,FB}(\Gamma, A) &= \mathbb{E}\left[\int_t^\tau e^{-\delta(s-t)}(\varphi(A_s) - R_s)ds - e^{-\delta(\tau-t)}\xi \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\big|\mathcal{F}_t\right]. \\ J_t^{P,SB}(\Gamma, A) &= \mathbb{E}\left[\int_t^\tau e^{-\delta(s-t)}(\varphi(A_s) - R_s)ds - e^{-\delta(\tau-t)}\xi \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\big|\mathcal{F}_t^X\right]. \end{aligned}$$

第一最佳情形下委托人的价值函数：
由于双方共享相同的信息，委托人求解：

$$V_0^{FB} := \sup_{(\Gamma,A)\in\mathcal{E}} J_0^P(\Gamma, A)$$

满足保留约束 $J_0^{Ag}(\Gamma, A) \geq x$，其中 $\mathcal{E}$由 (2.2) 给出。

次优情形下委托人的价值函数：给定 $\Gamma \in \mathcal{D}^P$，代理人求解

$$\sup_{A\in\mathcal{D}_\rho^{Ag}} J_0^{Ag}(\Gamma, A),$$

其中 $\mathcal{D}_\rho^{Ag}$由 (2.3) 给出。公众预期代理人的最优响应 A^* ，以提出最优合同，并旨在求解：

$$V_0^{SB} := \sup_{\Gamma\in\mathcal{D}^P} J_0^P(\Gamma, A^*),$$

满足保留约束 $J_0^{Ag}(\Gamma, A^*) \geq x$，其中 $\mathcal{D}^P$由（2.4）定义。

备注 2.2 强形式与弱形式之间的区别在于可测性的条件。在弱形式中，代理人和委托人的目标函数是在由代理人的努力所诱导的概率测度下计算的（通常记为 $\mathbb{P}^A$），并且二者均以 $\mathcal{F}_t$ 为条件；而在强形式中，目标函数是在 $\mathbb{P}$ 下计算的，代理人的目标函数是在$\mathcal{F}_t$ 的条件下，而委托人的目标函数是在 $\mathcal{F}_t^X$ 的条件下。

3 第一最佳情形

在本节中，委托人和代理人拥有相同的信息。他们同时观察X 和努力 A。我们处于风险分担的背景下。他们必须就如何在彼此之间分担风险达成一致。我们首先将委托人的问题改写为一种更易处理的随机控制形式。然后，我们给出一些与最优合同相关的性质。我们区分两种情况：要么委托人不终止合同，即无限期情形；要么她可以终止合同。

3.1 无限期合同

对于单个个体“委托人”而言，该问题变成了一个随机控制问题：委托人在保留约束下，同时选择租金和努力。在这种情况下，委托人的优化问题表示如下：

$$v(x) = \sup_{(R,\infty,0,A)\in\mathcal{E}} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\delta s}(\varphi(A_s) - R_s)ds\right] \tag{3.1}$$

受保留约束限制

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s))ds\right] \geq \underline{x} \tag{3.2}$$

我们引入拉格朗日乘子 λ_{Lag} 以解决该问题，并考虑无约束问题：

$$\begin{aligned}&\sup_{(R,\infty,0,A)\in\mathcal{E}} \left\{\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\delta s}(\varphi(A_s) - R_s)ds\right] + \lambda_{Lag}(\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s))ds\right] - \underline{x})\right\} \\ &= \sup_{(R,\infty,0,A)\in\mathcal{E}} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\delta s}(\varphi(A_s) - R_s)ds + \lambda_{Lag}[e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s))ds]\right] - \lambda_{Lag}\underline{x}.\end{aligned}$$

命题 3.1 在假设 *2.1* 下，满足保留约束 *(3.2)* 的 *(3.1)* 的解为[2]*:*

$$R_s^* = (U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}}e^{(\lambda-\delta)s}) \ \textit{and}\ A_s^* = (\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}}e^{(\lambda-\delta)s})\vee 0 \ \textit{for all}\ s\in[0,\infty), \tag{3.3}$$

其中，拉格朗日乘子 λ_{Lag} 满足以下方程：

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s}\left(U\left((U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}}e^{(\lambda-\delta)s})\right) - h\left((\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}}e^{(\lambda-\delta)s})\vee 0\right)\right)ds = \underline{x}. \tag{3.4}$$

作为时间的函数，最优租金 R^* 不递增，最优努力 A^* 不递减。

[2]使用以下记号 $x\vee y := \max(x,\ y)$。

这意味着，由于代理人比委托人更加缺乏耐心，他在合同开始时获得的租金会更高，并且付出的努力会比未来更少。

证明：我们固定 $s \in [0,\infty)$。函数 $x \longrightarrow -e^{-\delta s}x + \lambda_{Lag}e^{-\lambda s}U(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上是凹函数。在 $(0,\ \infty)$ 上进行最大化的一阶条件为：

$$-e^{-\delta s} + \lambda_{Lag}e^{-\lambda s}U^{'}(x^*) = 0.$$

这里 λ_{Lag} 必须为正，否则 $e^{-\delta s} = 0$，而这不成立。由此可得，最优租金为正、确定性，并且由下式给出：

$$R_s^* = (U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}}e^{(\lambda-\delta)s}).$$

对于最优努力，我们考虑 $(0,\ \infty)$ 上的函数 $x \longrightarrow -e^{-\delta s}\varphi(x) - \lambda_{Lag}e^{-\lambda s}h(x)$，该函数是凹函数。最优性的一阶条件为

$$-e^{-\delta s}\varphi'(x^*) - \lambda_{Lag}e^{-\lambda s}h^{'}(x^*) = 0,\ \text{if } x^* > 0$$

否则 $x^* = 0$。由此可得，最优努力非负、确定性，并且由下式给出：

$$A_s^* = (\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}}e^{(\lambda-\delta)s}) \vee 0.$$

由于 $U'(R_s^*)$ 和 $h'(A_s^*)$ 均为正，线性无关约束资格条件成立。根据假设 2.1，且由于 φ 和 U 均为严格凹函数，h 为严格凸函数，因此有

$$\begin{cases} e^{-\delta t}\varphi^{''}(A_s^*) - \lambda_{Lag}e^{-\lambda t}h^{''}(A_s^*) < 0, \\ \lambda_{Lag}e^{-\lambda t}U^{''}(R_s^*) < 0, \end{cases}$$

因此，最优性的充分条件得到满足。最优租金和最优努力是由 (3.3) 给出的确定性控制。

It follows that:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda s}(U(R_s^*) - h(A_s^*))ds\right] \\ = & \int_0^\infty e^{-\lambda s}\left(U\left((U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}}e^{(\lambda-\delta)s})\right) - h\left((\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}}e^{(\lambda-\delta)s}) \vee 0\right)\right)ds. \end{aligned} \tag{3.5}$$

关于 λ_{Lag} 的一阶条件由互补条件给出，即

$$\lambda_{Lag}\Big(\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda s}(U(R_s^*) - h(A_s^*))ds\right] - \underline{x}\Big) = 0.$$

由于 $\lambda_{Lag} > 0$ 并利用(3.5)，我们得到由 λ_{lag} 满足的方程 (3.4)（保留约束已绑定）。$s \to R_s^* = (U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)s})$ 的单调性（非递增）以及 $s \to A_s^* = (\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)s}) \vee 0$（非递减）是$s \to e^{(\lambda-\delta)s}$递增（因为 $\lambda \geq \delta$）、$(U')^{-1}$递减（因为 U是凹的）以及$(\frac{h'}{\varphi'})^{-1}$ 递增（因为 h 是凸的且 φ 是凹的）的直接结果。如果 $\lambda > \delta$，那么 $s \to R_s^*$ 是递减的。•

例 3.2 假设函数 φ 和 h 由 $\varphi(x) = 3(1 - exp(-\alpha x))$ 和$h(x) = exp(\beta x) - 1.$给出。那么 $\varphi'(x) = 3\alpha exp(-\alpha x)$ $h'(x) = \beta exp(\beta x)$，这意味着 $\frac{h'}{\varphi'}(x) = \frac{\beta}{3\alpha} exp((\beta + \alpha)x)$，因此 $(\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha+\beta} log(\frac{3\alpha}{\beta} x)$。对于幂效用函数，即$U(x) = x^p (0 < p < 1)$，因此 $(U')^{-1}(x) = (\frac{x}{pc})^{\frac{1}{p-1}}$，(3.3) 得出以下表达式

$$R_t^* = \frac{1}{(pc\lambda_{Lag})^{\frac{1}{p-1}}} \exp\left(\frac{(\lambda-\delta)t}{p-1}\right) \text{ and } A_t^* = \frac{1}{\alpha+\beta} \log\left(\frac{3\alpha}{\beta\lambda_{Lag}} \exp((\lambda-\delta)t)\right) \vee 0.$$

若 $\lambda_{Lag} \leq 3\frac{\alpha}{\beta}$，则对于所有 t，$A_t^* = \frac{1}{\alpha+\beta}$对数 $\left(\frac{3\alpha}{\beta\lambda_{Lag}}\right.$指数$(($
$\left.\lambda-\delta)t)\right)$。

$$\text{If } \lambda_{Lag} > 3\frac{\alpha}{\beta}, \text{ then } A_t^* = \begin{cases} 0 & \text{for } (\lambda-\delta)t \leq -\log\left(\frac{3\alpha}{\beta\lambda_{Lag}}\right) \\ \frac{1}{\alpha+\beta}\log\left(\frac{3\alpha}{\beta\lambda_{Lag}}\exp((\lambda-\delta)t)\right) & \text{for } (\lambda-\delta)t > -\log\left(\frac{3\alpha}{\beta\lambda_{Lag}}\right). \end{cases}$$

拉格朗日乘子 λ_{Lag} 是方程 （3.5） 的解（根据所考虑的区间不同，该方程有两种不同的表达式）

$$\begin{cases} \frac{c}{(pc\lambda_{Lag})^{\frac{p}{p-1}}(\lambda - \frac{p}{p-1}(\lambda-\delta))} + \frac{1}{\lambda} - \left(\frac{3\alpha}{\beta\lambda_{Lag}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \frac{\alpha+\beta}{\lambda\alpha+\beta\delta} & = \underline{x} \text{ on } [0, 3\frac{\alpha}{\beta}] \\ \frac{c}{(pc\lambda_{Lag})^{\frac{p}{p-1}}(\lambda - \frac{p}{p-1}(\lambda-\delta))} + \left(\frac{1}{\lambda}\left(\frac{3\alpha}{\beta\lambda_{Lag}}\right)^{\frac{\lambda}{\lambda-\delta}} - \frac{\alpha+\beta}{\lambda\alpha+\beta\delta}\left(\frac{3\alpha}{\beta\lambda_{Lag}}\right)^{\frac{\lambda}{\lambda-\delta}}\right)\mathbf{1}_{\lambda\neq\delta} & = \underline{x} \text{ on }]3\frac{\alpha}{\beta}, +\infty[. \end{cases}$$

3.2 一般情况

在第一最佳框架下，以及在一般情况下，委托人面临以下优化问题:

$$\sup_{(R,\tau,\xi,A)\in\mathcal{E}} \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\delta s}(\varphi(A_s) - R_s)ds - e^{-\delta\tau}\xi\right], \tag{3.6}$$

其中，$\mathcal{E}$ 由（2.2）给出，并且需满足保留约束

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s))ds + e^{-\lambda\tau}U(\xi)\right] \geq \underline{x}.$$

第 3 节的主要结果如下命题。它给出了第一最佳情形下的可能情况。

命题 3.3 在假设 *2.1* 下，在最优情形中，我们定义函数

$$t \longrightarrow H_t := \varphi(A_t^*) - R_t^*,$$

其中 A^* 和 R^* 由 *(3.3)* 给出。于是

1. 如果 $\int_0^\infty e^{-\delta s} H_s ds > 0$，委托人终止合同并非最优（$\tau^* = \infty$ 是最优）。*2.* 如果 $\int_0^\infty e^{-\delta s} H_s ds \leq 0$，委托人不会向代理人提供合同（$\tau^* = 0$ 是最优）。

证明： 我们引入拉格朗日问题。关于努力和租金的期望内一阶条件与无限期合同中的相同。我们知道 $\lambda_{Lag} \geq 0$。如果 $\lambda_{Lag} = 0$，那么如无限期情形的证明中一样，我们推得对于所有 $t \geq 0$，有 $R_t^* = 0, A_t^* = 0$ （以及 $H(t) = 0$ 对于所有 t）。于是显然必须有 $\tau = 0$ 否则保留约束永远无法满足 。

对于 $\lambda_{Lag} > 0$，函数 $t \longrightarrow H_t$ 是定义良好的。

由于 $\lambda \geq \delta$， $t \mapsto \frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)t}$ 是非递减的。函数 φ 的严格凹性和函数 h 的严格凸性推出函数 $t \to (\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)t})$是非递减的。$U$的严格凹性和 U'的递减性推出函数 $t \to (U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)t})$ 是非递增的。因此，最优租金随时间非递增，最优努力随时间非递减。根据函数 φ的单调性，函数 $t \to H_t$ 是非递减的。我们有以下几种情况:

第一种情况: 如果 $H_0 > 0$，并且由于 U^{-1} 为非负数，如命题 3.1 所示，委托人永不终止合同（$\tau = \infty$ 是最优的）。

第二种情况: 如果 $H_0 \leq 0$，且存在一个 t_0，使得 $H_{t_0} = 0$，我们计算: $\int_0^{t_0} e^{-\delta s} H_s ds$ 和 $\int_{t_0}^\infty e^{-\delta s} H_s ds$.

1. 如果 $|\int_0^{t_0} e^{-\delta s} H_s ds| \leq \int_{t_0}^\infty e^{-\delta s} H_s ds$，如命题 3.1 所示，委托人永远不终止合同（$\tau = \infty$ 是最优的）是最优选择，因为收益大于损失。

2. 如果 $|\int_0^{t_0} e^{-\delta s} H_s ds| \geq \int_{t_0}^\infty e^{-\delta s} H_s ds$，委托人不向代理人提供合同（$\tau = 0$ 是最优的）是最优选择，因为她知道损失将大于收益。•

图 1 展示了在命题 3.3 中得到的 H 相对于 t 的单调性，对应示例 3.2 中 $\alpha = \beta = 0.1$ 和 $p = \frac{1}{4}$ 的数值情形。

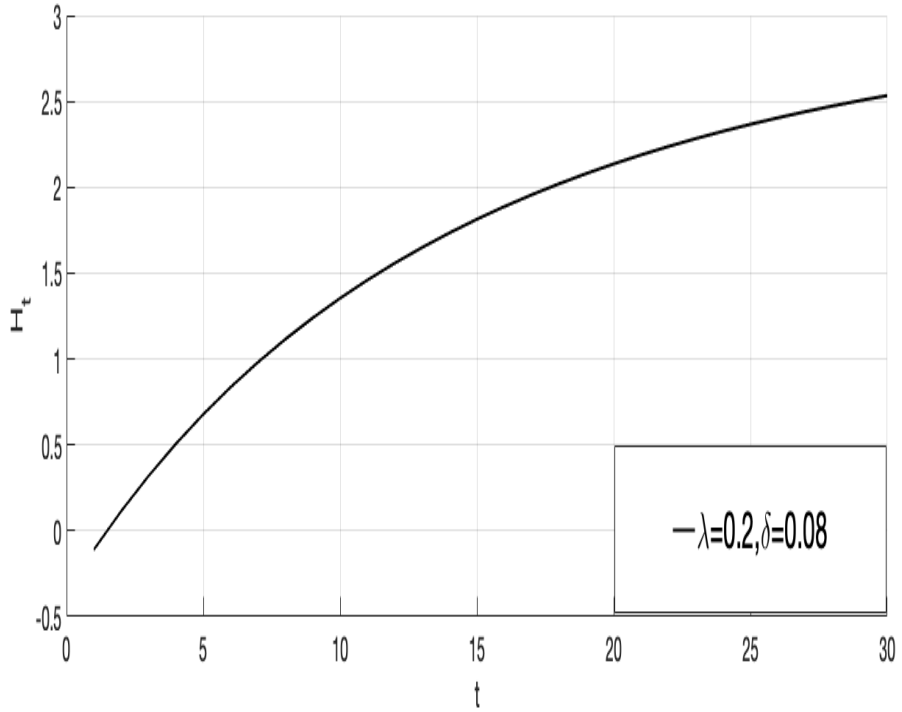


图 1： $t \mapsto H_t(0)$

3.3 控制变量相对于代理人的价值函数的单调性

以下命题说明最优租金和最优努力关于代理人的初始价值函数 x 的单调性。

命题 3.4 在假设 *2.1* 下，在非退化情形中， $\tau^* \neq 0$*(1)* 最优租金随 $x.$ 递增，最优努力随 $x.$ 递减。*(2)* 函数 $H_t = \varphi(A_t^*) - R_t^*$ 随 x 递减。

为了证明这一命题，我们需要以下引理。

引理 3.5 在假设 *2.1* 下，函数

$$G : \lambda_{Lag} \mapsto \int_0^\infty e^{-\lambda s} \left(U\left((U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)s}) \right) - h\left((\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)s}) \right) \vee 0 \right) ds.$$

关于 λ_{Lag} 在 $(0, \infty)$ 上递增。

证明： 由于 $\tau^* \neq 0$、 $\lambda_{Lag} > 0$，且我们有 $\lambda_{Lag} \mapsto \frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{-(\lambda-\delta)s}$ 递减。 U'的递减意味着函数 $\lambda_{Lag} \mapsto (U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{-(\lambda-\delta)s})$ 递增。由于 U 递增，

于是，我们有 $\lambda_{Lag} \mapsto U\left((U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{-(\lambda-\delta)s})\right)$ 递增。利用 φ 的严格凹性和 h的严格凸性，我们有 $(\frac{h'}{\varphi'})' > 0$。由于函数 h 递增，因此 $\lambda_{Lag} \mapsto \underline{h}\left((\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)s}) \vee 0\right)$ 单调不增。我们得出， G 关于 λ_{Lag}.

●递增

证明： 命题 3.4 的证明。
显然， λ_{Lag} 取决于 x ，因为它是方程 $G(\lambda_{Lag}) = x$的解。我们考察 $x > x' > 0$。在这种情况下，若 $\lambda_{lag}(x) \leq \lambda_{lag}(x')$，则由引理 3.5 可得 $G(\lambda_{lag}(x)) \leq G(\lambda_{lag}(x'))$，这与 $x > x'$矛盾。因此必有 $\lambda_{lag}(x) > \lambda_{lag}(x')$，且函数$x \to \lambda_{Lag}(x)$递增。对于固定的 t，我们有$x \to \frac{1}{\lambda_{Lag}}(x)$ $e^{(\lambda-\delta)t}$ 递减；利用 U 和 φ 的凹性以及 h的凸性，可得租金随 x递增，而最优努力随 x递减。由于 A^* 和 R^* 通过λ_{Lag}取决于 x ， x 也会影响 $H_t(x) = \varphi(A_t^*(x)) - R_t^*(x)$。因此，我们推得函数 H_t 随 x递减。●

图 2 说明了命题 3.4 中得到的 H 关于 x 的单调性，该结论基于示例 3.2 中给出的数值例子，其中 $\alpha = \beta = 0.1$ 和 $p = \frac{1}{4}$。

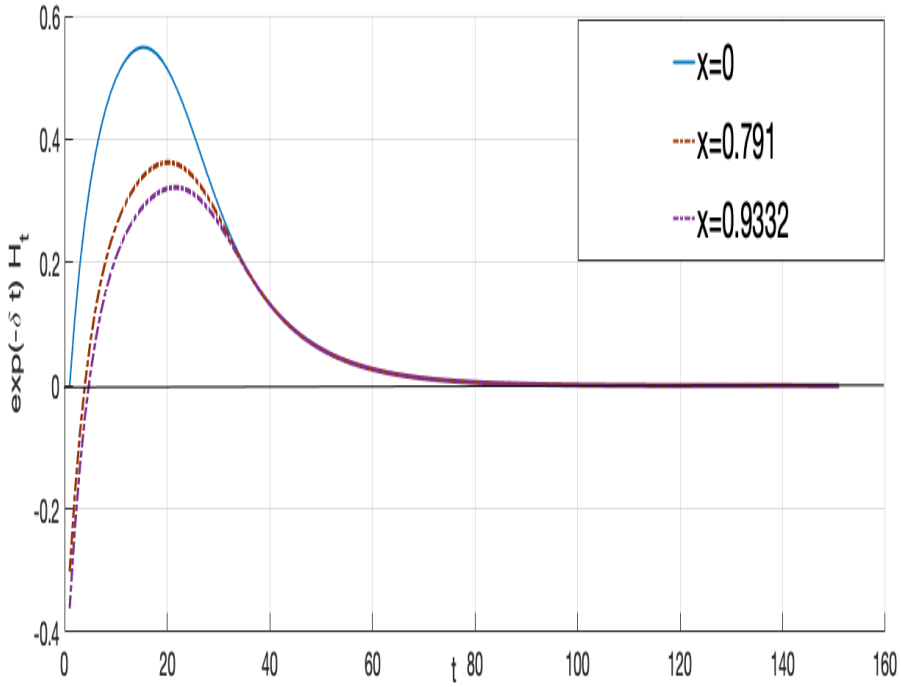


图 2：不同 x 下的 $t \mapsto e^{-\delta t} H_t(x)$

4 第二最佳情形

本节中，我们考虑次优情形。在这种道德风险情形下，委托人无法观察代理人选择的行动，只能控制她提供的租金、终止合同的决定以及随后产生的成本。克服这一困难的诀窍是根据代理人的目标函数$J^{Ag}(\Gamma,\ A)$重新表述优化问题。具体方法是推导代理人目标函数的动态，并刻画激励相容契约。随后，我们通过令委托人选择的控制为 $\mathbb{F}$-渐进可测，扩大其可行控制集合。我们在这个较大的可行控制集合上求解委托人的优化问题；这是一个标准的最优停止与随机控制混合问题。最后，我们证明在最优值处，最优合同是 $\mathbb{F}^X$-渐进可测的，因此我们求解了委托人最初的优化问题。

4.1 代理人的激励相容契约

对于给定的停时 $\tau \in \mathcal{T}$，我们引入以下空间，这些空间有助于刻画激励合同的结构。

$\mathcal{S}^2_\rho(\tau)$: 取值于 $=$ $\{Y$ $\mathbb{R}$、 $\mathbb{F}$-渐进可测的连续过程，使得

$$||Y||_{\mathcal{S}^2_\rho(\tau)} := \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\sup_{0\le s\le\tau} e^{(\rho-2\lambda)s}|Y_s|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\},$$

$\mathcal{H}^2_\rho(\tau)$: $=$ $\{Z$ $\mathbb{R}$值的、 $\mathbb{F}$-渐进可测过程，使得

$$||Z||_{\mathcal{H}^2_\rho(\tau)} := \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[|\int_0^\tau e^{(\rho-2\lambda)s}|Z_s|^2 ds|\right]\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\}.$$

以下引理给出了代理人目标函数的动态方程 .

引理 4.1 假设假设 *2.1*。对于任意可行合同和努力 $(\Gamma, A) \in \mathcal{D}^P_\rho \times \mathcal{D}^{Ag}_\rho$，存在 $Z^A \in \mathcal{H}^2_\rho(\tau)$，使代理人的目标函数 $J^{Ag}_t(\Gamma, A)$的动态演化满足反向随机微分方程 (4.1)，其终端条件为随机变量

$$dJ^{Ag}_t(\Gamma,A) = -\left[-\lambda J^{Ag}_t(\Gamma,A) + U(R_t) + \psi(A_t, Z^A_t)\right]dt + Z^A_t dX_t,\ J^{Ag}_\tau(\Gamma,A) = U(\xi)\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} \tag{4.1}$$

其中

$$\psi(a,z) := -h(a) + z\frac{\varphi(a)}{\sigma}. \tag{4.2}$$

证明： 我们固定 $(\Gamma,\ A) \in \mathcal{D}^P_\rho \times \mathcal{D}^{Ag}_\rho$。我们定义鞅 $(M_t)_{0\le t\le\tau}$ 如下

$$M_t := \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s))ds + e^{-\lambda\tau}U(\xi)\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}|\mathcal{F}_t\right]. \tag{4.3}$$

由于 $(M_t)_{0\le t\le\tau}$ 是平方可积的，根据鞅表示定理，存在一个 $(\hat{Z}_t^A)_{0\le t\le\tau}$ $\mathbb{F}$-适应过程，使得 $\mathbb{E}\left[\int_0^\tau |\hat{Z}_s^A|^2 ds\right] < \infty$ 且 $M_t = M_0 + \int_0^t Z_s^A dW_s$，这意味着对于 $t \in [\![0,\tau[\![$

$$e^{-\lambda t} J_t^{Ag}(\Gamma, A) = J_0^{Ag}(\Gamma, A) + \int_0^t e^{-\lambda s}(U(R_s) - h(A_s))ds + \int_0^t \hat{Z}_s^A dW_s. \tag{4.4}$$

我们对所有 $0 \le t \le \tau$ 设 $Z_t^A = e^{\lambda t}\hat{Z}_t^A$。根据 Hajjej 等人命题 3.1，[HHM22], $(J_t^{Ag}(\Gamma, A)$ $Z_t^A)_{0\le t\le\tau} \in \mathcal{S}_\rho^2(\tau) \times \mathcal{H}_\rho^2(\tau)$。利用柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^t |\hat{Z}_s^A \frac{\varphi(A_s)}{\sigma}| ds &\le \sqrt{\int_0^t e^{\rho s}|\hat{Z}_s^A|^2 ds}\sqrt{\int_0^t e^{-\rho s}|\frac{\varphi(A_s)}{\sigma}|^2 ds} \\ &\le C\sqrt{\int_0^t e^{\rho s}|\hat{Z}_s^A|^2 ds} < \infty,\end{aligned} \tag{4.5}$$

其中，第二个不等式由 φ 的有界性（见假设 2.1）以及 C 是正常数得出。由于积分 $\int_0^t \hat{Z}_s^A \frac{\varphi(A_s)}{\sigma} ds$ 有定义，且根据产出过程（2.1）的定义，我们有 $\int_0^t \hat{Z}_s^A dW_s = \int_0^t \frac{\hat{Z}_s^A}{\sigma} dX_s - \int_0^t \frac{\hat{Z}_s^A \varphi(A_s)}{\sigma} ds$，从而得到反向随机微分方程（4.1）。

备注 4.2 对 X 的积分在这一第二最佳情形中自然出现。对于所有 $\Gamma \in \mathcal{D}_\rho^P$ 和 $A \in \mathcal{D}_\rho^{Ag}$，它都有定义。对委托人而言，这一积分是有意义的，因为她只能观察产出过程，无法区分努力的影响与布朗运动。

相关的反向随机微分方程（4.1）可以写作

$$\begin{cases} dY_t &= -\left(-\lambda Y_t + U(R_t) + \psi(A_t, Z_t^A)\right) dt + Z_t^A dX_t \\ Y_\tau &= U(\xi)\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} \end{cases} \tag{4.6}$$

考虑折现量

$$(\tilde{Y}_t, \tilde{Z}_t^A) = (e^{-\lambda t} Y_t, e^{-\lambda t} Z_t^A), \quad dt \otimes d\mathbb{P}\ a.e,\ t \in [\![0,\tau[\![,$$

使我们能够消去 BSDE (4.6) 漂移项中的 Y 项：$(\tilde{Y}, \tilde{Z}^A)$ 满足 BSDE (4.7)

$$\begin{cases} d\tilde{Y}_t &= -\left(\tilde{U}(R_t) + \tilde{\psi}(A_t, \tilde{Z}_t^A)\right) dt + \tilde{Z}_t^A dX_t, \\ \tilde{Y}_\tau &= \tilde{U}(\xi)\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}, \end{cases} \tag{4.7}$$

其中

$$\begin{cases} \tilde{h}(A_t) &:= e^{-\lambda t} h(A_t), \\ \tilde{U}(R_t) &:= e^{-\lambda t} U(R_t), \\ \tilde{U}(\xi) &:= e^{-\lambda t} U(\xi) \\ \tilde{\psi}(A_t, \tilde{Z}_t^A) &:= -\tilde{h}(A_t) + \tilde{Z}_t^A \frac{\varphi(A_t)}{\sigma}. \end{cases} \tag{4.8}$$

下一个结果是关于 BSDE(4.6) 的比较定理，其中随机积分是相对于半鞅 X 定义的。这与 Hajjej 等人 [HHM22] 证明的比较定理有所不同。

命题 4.3 假设满足假设 *2.1*。
*1.*存在唯一的 $(Y, Z^A) \in \mathcal{S}^2_\rho(\tau) \times \mathcal{H}^2_\rho(\tau)$，其满足反向随机微分方程 *(4.6)*。 *2.* 令 $\Gamma = (R, \tau, \xi) \in \mathcal{D}^P_\rho$以及 $A^i \in \mathcal{D}^{Ag}_\rho$对于 $i = 1, 2$。令$(Y^i, Z^i) \in \mathcal{S}^2_\rho(\tau) \times \mathcal{H}^2_\rho(\tau)$为以下反向随机微分方程的解

$$\begin{cases} dY^i_t &= -\left(-\lambda Y_t + U(R_t) + \psi(A^i_t, Z^i_t)\right) dt + Z^i_t dX_t, \\ Y^i_\tau &= U(\xi)\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}. \end{cases} \tag{4.9}$$

$$\textit{If } \psi(A^1_t, Z^2_t) \leq \psi(A^2_t, Z^2_t) \ dt \otimes d\mathbb{P} \, a.e., \ \textit{for all } t \in [\![0, \tau[\![, \tag{4.10}$$

then

$$Y^1_t \leq Y^2_t \ dt \otimes d\mathbb{P} \, a.e., \ \textit{for all } t \in [\![0, \tau[\![.$$

证明： 1. 存在性显然，因为对所有 $0 \leq t \leq \tau$， $Y_t = J^{Ag}_t(\Gamma, A)$，并且过程 Z^A 可通过应用鞅表示定理自然地得到。由于 $\Gamma = (R, \tau, \xi) \in \mathcal{D}^P_\rho$ 且 $A \in \mathcal{D}^{Ag}_\rho$，因此 $Y \in \mathcal{S}^2_\rho(\tau)$ 且 $Z^A \in \mathcal{H}^2_\rho(\tau)$。对于唯一性，我们固定 $0 \leq t \leq \tau$。假设 BSDE（4.6）存在两个解 $(Y^1, Z^{1,A})$ 和 $(Y^2, Z^{2,A})$，那么

$$\begin{aligned} \tilde{Y}^1_t - \tilde{Y}^2_t &= \int_t^\tau \frac{\varphi(A_s)(\tilde{Z}^{1,A}_s - \tilde{Z}^{2,A}_s)}{\sigma} ds - \int_t^\tau (\tilde{Z}^{1,A}_s - \tilde{Z}^{2,A}_s) dX_s \qquad (4.11) \\ &= \int_t^\tau (Z^{1,A}_s - Z^{2,A}_s) dW_s. \qquad (4.12) \end{aligned}$$

取条件期望，我们得到对所有 $0 \leq t \leq \tau$， $Y^1_t = Y^2_t \ dt \otimes d\mathbb{P}$ 几乎处处成立，因此对所有 $0 \leq t \leq \tau$，$Z^1_t = Z^2_t \ dt \otimes d\mathbb{P}$ 几乎处处成立。
2. 由（4.9）可得

$$\begin{aligned} \tilde{Y}^1_t - \tilde{Y}^2_t &= \int_t^\tau \left(\tilde{\psi}(A^1_s, \tilde{Z}^1_s) - \tilde{\psi}(A^2_s, \tilde{Z}^2_s)\right) ds - \int_t^\tau \left(\tilde{Z}^1_s - \tilde{Z}^2_s\right) dX_s + \tilde{Y}^1_\tau - \tilde{Y}^2_\tau \\ &= \int_t^\tau \left(\tilde{\psi}(A^1_s, \tilde{Z}^1_s) - \tilde{\psi}(A^2_s, \tilde{Z}^2_s) + \tilde{\psi}(A^1_s, \tilde{Z}^2_s) - \tilde{\psi}(A^1_s, \tilde{Z}^2_s)\right) ds - \int_t^\tau \left(\tilde{Z}^1_s - \tilde{Z}^2_s\right) dX_s \\ &\leq \int_t^\tau \left(\tilde{\psi}(A^1_s, \tilde{Z}^1_s) - \tilde{\psi}(A^1_s, \tilde{Z}^2_s)\right) ds - \int_t^\tau \left(\tilde{Z}^1_s - \tilde{Z}^2_s\right) dX_s, \end{aligned}$$

其中 la　　第一个不等式是通过使用不等式（4.10）和（4.8）得到的。我们得到

$$\begin{aligned} \tilde{Y}^1_t - \tilde{Y}^2_t &\leq \int_t^\tau (\tilde{Z}^1_s - \tilde{Z}^2_s) \frac{\varphi(A^1_s)}{\sigma} ds - \int_t^\tau \left(\tilde{Z}^1_s - \tilde{Z}^2_s\right) dX_s \\ &= -\int_t^\tau \left(\tilde{Z}^1_s - \tilde{Z}^2_s\right) dW_s. \end{aligned}$$

在 $\mathbb{P}$ 下取条件期望后，随机积分 $\int_t^\tau(\tilde{Z}_s^1-\tilde{Z}_s^2)dW_s$ 消失。由于 Y^i 是 $\mathbb{F}$-渐进可测过程，我们得到

$$Y_t^1 \le Y_t^2\, dt\otimes d\mathbb{P}\, a.e.,\ \ t\in[\![0,\tau[\![.$$

•

下一个引理　　将最优努力表示为过程 Z 的函数很有用。

引理 *4.4* / *[HHM22]* 中的引理 *3.5*。假设假设 *2.1*。令 z 为一个实数，并定义 $A^*(z):=\arg\max_{a\ge 0}\psi(a,z)$。如果 $z>\sigma^{h'}(0)\varphi'(0)$，则 $A^*(z)=(\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{z}{\sigma})$；如果 $z\le\sigma^{h'}(0)\varphi'(0)$，则 $A^*(z)=0$. 此外，A^* 是从 $\{0\}\cup(\sigma^{h'}_{\varphi'}(0),\infty)$ 到 $[0,\infty)$ 的双射。

以下命题给出了过程（Z_t^A）$_{t\ge0}$ 与最优努力候选项（A_t^*）$_{t\ge0}$之间的一一对应关系。

命题 4。5 / 命题 *3.6*，见 *[HHM22]* 设 $A\in\mathcal{D}_\rho^{Ag}$. 过程 $(Z_t^A)_{t\ge0}$ 与最优努力 $(A_t^*)_{t\ge0}$ 之间存在一个双射。该双射由下式给出

$$A_t^*=A^*(Z_t^A)=(\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{Z_t^A}{\sigma})\mathbf{1}_{\{Z_t^A>0\}},$$

或者等价地

$$Z_t^A=(\sigma\frac{h'}{\varphi'})(A^*(Z_t^A))\mathbf{1}_{\{A^*(Z_t^A)>0\}}.$$

以下命　　题展示了 $\mathcal{D}_\rho^{Ag}$中激励相容合同的结构　　.

命题 4.6 设 $\Gamma=(R,\tau,\xi)\in\mathcal{D}_\rho^P$和 $Z\in\mathcal{H}_\rho^2(\tau)$。若 $A^*(Z)\in\mathcal{D}_\rho^{Ag}$，则对所有满足以下条件的 $A\in\mathcal{D}_\rho^{Ag}$

$$\psi(A_t,Z_t)\le\psi(A^*(Z_t),Z_t),t\in[\![0,\tau[\![,\ dt\otimes d\mathbb{P}a.e.,\tag{4.13}$$

我们有 $J_t^{Ag}(\Gamma,A)\le J_t^{Ag}(\Gamma,A^*(Z)),\ \ t\in[\![0,\tau[\![,\ dt\otimes d\mathbb{P}$几乎处处成立。

证明： 令 $\Gamma=(R,\tau,\xi)\in\mathcal{D}_\rho^P$且 $Z\in\mathcal{H}_\rho^2(\tau)$。由于 $A^*(Z)\in\mathcal{D}_\rho^{Ag}$，因此 $(J_t^{Ag}(\Gamma,A^*(Z)))_{0\le t\le\tau}$求解反向随机微分方程

$$\begin{aligned}dJ_t^{Ag}(\Gamma,A^*(Z)) &= -\Big(-\lambda J_t^{Ag}(\Gamma,A^*(Z_t))+U(R_t)+\psi(A^*(Z_t),Z_t)\Big)dt+Z_tdX_t,\\ J_\tau^{Ag}(\Gamma,A^*(Z)) &= U(\xi)\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}.\end{aligned}$$

由不等式 (4.13) 并利用比较定理（见命题 4.3），我们得出 $J_t^{Ag}(\Gamma,A)\le J_t^{Ag}(\Gamma,A^*(Z))$ $t\in[\![0,\tau[\![,\ dt\otimes d\mathbb{P}$几乎处处 •

4.2 哈密顿-雅可比-贝尔曼变分不等式

将最优努力参数化为过程 Z 的确定性函数，有助于委托人求解其优化问题；该问题可以在部分信息下表述为一个随机控制问题。对于代理人目标函数的动态变化，我们采用前向视角，该函数根据以下前向随机微分方程演化：

$$\begin{aligned} dJ_t^{Ag}(x,R,\tau,A^*(Z)) &= \left(\lambda J_t^{Ag}(x,R,\tau,A^*(Z)) - U(R_t) + h(A^*(Z_t)) - Z_t\frac{\varphi(A^*(Z_t))}{\sigma}\right)dt + Z_t dX_t, \\ J_0^{Ag}(x,R,\tau,A^*(Z)) &= x \geq \underline{x}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

随机微分方程 (4.14) 在 $(\Gamma, A^*(Z)) \in \mathcal{D}_\rho^P \times \mathcal{D}_\rho^{Ag}$ 上定义良好。我们回顾一下，随机微分方程 (4.17) 的初始条件满足委托人最大化问题中所表述的保留约束。然而，我们在整个定义域上，即在 $\mathbb{R}^+$ 上，求解与委托人相关的随机控制问题。事实上，代理人在时刻 t 的目标函数，记为 $J_t^C(x,R,\tau,A^*(Z))$，可能小于 x，尽管 $J_0^C(x,R,\tau,A^*(Z)) \geq x$。过程 $(J_t^{Ag}(x,R,\tau,A^*(Z))_{t\geq 0}$ 被视为状态变量，而合同 Γ 和最优努力 $A^*(Z)$ 则被视为控制过程；对于委托人而言，这些过程必须是 $\mathbb{F}^X$-适应的。根据命题 4.5，对于所有 $t \geq 0$，Z 与 $A^*(Z)$ 以及 $Z_t = (\sigma\frac{h'}{\varphi'})(A^*(Z_t))\mathbf{1}_{\{A^*(Z_t)>0\}}$ 之间存在双射。委托人在时刻 0 的价值函数与部分信息下的随机控制相关，其定义如下：

$$v(x) := \sup_{(R,\tau,A^*(Z))\in\mathcal{G}^{\mathcal{X}}} \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\delta s}(\varphi(A_s^*(Z)) - R_s)ds - e^{-\delta\tau}U^{-1}(J_\tau^{Ag}(x,R,\tau,A^*(Z)))\right], \tag{4.15}$$

其中，$\mathcal{G}^{\mathcal{X}}$ 由下式给出

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{\mathcal{X}} := \{&(R,\tau,A^*(Z))\ R \geq 0\ \mathbb{F}^X\text{-progressively measurable}, \tau \in \mathcal{T}^{\mathcal{X}}, A^*(Z) \geq 0\ \mathbb{F}^X\text{-progressively} \\ &\text{measurable such that } \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{(\rho-2\delta)s}|\varphi(A^*(Z_s))|^2 ds\right] < \infty,\ \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{(\rho-2\delta)s}|R_s|^2 ds\right] < \infty, \\ &\text{and } \mathbb{E}\left[e^{(\rho-2\delta)s}|U^{-1}(J_\tau^{Ag}(x,R,\tau,A^*(Z)))|^2\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\right] < \infty\}. \end{aligned}$$

由于 W 不是 $\mathbb{F}^X$-布朗运动，尚不清楚动态规划原理是否对 v 成立，也无法直接推导出相应的动态规划方程。为克服这一困难，我们在时刻0引入一个辅助的委托人的价值函数，此时控制适应于 $\mathbb{F}$。其定义如下：

$$v^{aux}(x) := \sup_{(R,\tau,A^*(Z))\in\mathcal{G}} \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\delta s}(\varphi(A_s^*(Z)) - R_s)ds - e^{-\delta\tau}U^{-1}(J_\tau^{Ag}(x,R,\tau,A^*(Z)))\right], \tag{4.16}$$

其中，$\mathcal{G}$ 由下式给出

$$\begin{aligned} \mathcal{G} := \{&(R,\ \tau,\ A^*(Z))\ R \geq 0\ \mathbb{F}\text{-渐进可测}\ \tau \in \mathcal{T},\ A^*(Z)\ \geq 0\ \mathbb{F}\text{-渐进可测，使得} \\ &\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{(\rho-2\delta)s}|\varphi(A^*(Z_s))|^2 ds\right] < \infty,\quad \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{(\rho-2\delta)s}|R_s|^2 ds\right] < \infty,\ \text{且}\ \mathbb{E}\left[e^{(\rho-2\delta)s}|U^{-1}(J_\tau^{Ag}(x, \\ &R,\ \tau,\ A^*(Z)))|^2\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\right] < \infty\}. \end{aligned}$$

由于所有控制量都是 $\mathbb{F}$-适应的，采用以下形式的随机微分方程（4.14）会更加方便，其中随机积分由 $\mathbb{F}$-布朗运动驱动：

$$\begin{aligned} dJ_t^{Ag}(x,R,\tau,A^*(Z)) &= \left(\lambda J_t^{Ag}(x,R,\tau,A^*(Z)) - U(R_t) + h(A^*(Z_t))\right)dt \\ &+ (\sigma\frac{h'}{\varphi'})(A^*(Z_t))\mathbf{1}_{\{A^*(Z_t)>0\}}dW_t. \end{aligned} \tag{4.17}$$

与辅助价值函数相关的 HamiltonJacobi Bellman 变分不等式（HJB变分不等式）为：

$$\min\left\{\delta w(x) - \sup_{(r,a)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}[\mathcal{L}^{a,r}w(x) + \varphi(a) - r], w(x) + U^{-1}(x)\right\} = 0,\ x\in(0,\infty), \tag{4.18}$$

其中二阶微分算子 $\mathcal{L}^{a,\ r}$ 定义为

$$\mathcal{L}^{a,r}w(x) := \frac{1}{2}(\sigma\frac{h'(a)}{\varphi'(a)})^2\mathbf{1}_{a>0}w"(x) + [\lambda x - U(r) + h(a)]w'(x).$$

引理4.7 给出了 v(0)的边界条件以及价值函数 v 所满足的增长性质。这些结果将对验证定理有所帮助。证明与Hajjej 等人 [HHM22]中的证明类似，因此省略。

引理 4.7 *(1)* 在 *(4.16)* 中定义的价值函数 v^{aux} 满足

$$v^{aux}(0) = 0. \tag{4.19}$$

(2) 存在一个正常数 K 使得

$$for\ all\quad x\geq 0, |v^{aux}(x)| \leq K + U^{-1}(x). \tag{4.20}$$

以下结果是一个验证定理，它指出，如果（HJB变分不等式）（4.18）存在光滑解，那么该解就与价值函数（4.16）一致。由于我们在定义委托人的价值函数时没有进行概率测度变换，因此，与 [HHM22] 中相比，验证定理所要求的可积性条件更弱。

定理 4。8 /验证定理/

ˆ我们假设存在常数 $b>0$ 和连续函数 $w:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ 满足：*(i) w(0)=0,* $w\in C^2$*(*$[0,\hat{b}$*) 满足增长条件 (4.20),* *(ii)* $w > -U^{-1}$ 在 *(0,* $\hat{b}$*)* 上，且 $w = -U^{-1}$ 在 $[\hat{b},\infty)$ 上ˆ *(iii)* $\delta w(x) - sup\left\{\mathcal{L}^{a,r}w(x) + \varphi(a) - r\right\} = 0$ 对所有 $x\in$ *(0,* b*)* 均成立。*(r,a)*$\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$

(iv) $\delta(-U^{-1}(x)) - \sup_{(r,a)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}\{\mathcal{L}^{a,r}(-U^{-1}(x)) + \varphi(a) - r\} \geq 0$ *for all* $x\in[\hat{b},\infty)$.

我们还假设 h

$$\sup_{(R,\tau,A^*(Z))\in\mathcal{G}}\mathbb{E}\left[|e^{-\delta\tau}U^{-1}(J_\tau^{Ag}(x,R,\tau,A^*(Z)))|\right] < \infty, \tag{4.21}$$

于是我们有：

(1) $w(x) \geq v^{aux}(x)$ 对于任意 $x \geq 0$,

(2) 假设存在两个可测非负函数 (a^*, r^*) 定义在 $\mathbb{R}^+$ 上，使得。

$$\sup_{(r,a)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} \{\mathcal{L}^{a,r}w(x) + \varphi(a) - r\} = \mathcal{L}^{a^*(x),r^*(x)}w(x) + \varphi(a^*(x)) - r^*(x), \ \ x \in (0,\hat{b}), \tag{4.22}$$

以及随机微分方程

$$dJ_t^{Ag} = \left(\lambda J_t^{Ag} - U(r^*(J_t^{Ag})) + h(a^*(J_t^{Ag})) - Z_t\frac{\varphi(a^*(J_t^{Ag}))}{\sigma}\right)dt + Z_t dW_t, \quad J_0^{Ag} \geq \underline{x}$$

存在唯一解 J_t^{Ag} 。我们定义

$$\tau^* := \ \inf\{t \geq 0 \ : \ w(\widehat{J_t^{Ag}}) \leq -U^{-1}(\widehat{J_t^{Ag}})\} \tag{4.23}$$

并且我们假设 $(r^*(\widehat{J^{Ag}}) \ \tau^*, a^*(\widehat{J^{Ag}}))$ 位于 $\mathcal{G}$和 $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{(\rho-2\lambda)\tau^*}\widehat{J_{\tau^*}^{Ag}}^2\mathbf{1}_{\{\tau^*<\infty\}}] < \infty$.中。然后我们有

(a) $w = v^{aux}$，且 τ^* 是问题 *(4.16)* 的最优停时。

(b) The optimal rent is given by $r^*(x) = (U')^{-1}(-\frac{1}{w'(x)})\mathbf{1}_{w'(x)<0}$ *for all* $x \in (0,\hat{b})$.

证明推迟至附录。

4.3 最优值下 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{F}^X$ 滤过的比较

在本小节中，我们研究三个滤子的包含关系： $\mathbb{F}$ 由标准布朗运动生成的滤子 W （全局滤子），$\mathbb{F}^X$ 由产出过程生成的滤子 X （委托人可获得信息的滤子），以及 $\mathbb{F}^{J^{Ag}}$ 由过程 J^{Ag}生成的滤子。我们有自然的包含关系： $\mathbb{F}^{J^{Ag}}$ 和 $\mathbb{F}^X$ 包含于$\mathbb{F}$。下面的命题表明，在某些充分条件下，这三个滤子在最优值处重合，特别是过程 J^{Ag}（x， R， τ， $A^*(Z)$)是 $\mathbb{F}^X$-适应的。

命题4.9 我们假设随机微分方程

$$d\mathbf{J}_t^{Ag} = \lambda\mathbf{J}_t^{Ag}dt - \left(U(r^*(\mathbf{J}_t^{Ag})) - h(a^*(\mathbf{J}_t^{Ag}))\right)dt + \sigma\frac{h'}{\varphi'}(a^*(\mathbf{J}_t^{Ag}))dW_t, \ \mathbf{J}_0^{Ag} = x, \tag{4.24}$$

存在唯一的强解，其中 $\mathbf{J}_t^{Ag} := J_t^{Ag}$（$x$， R， τ， A^*（Z））对所有 $t \geq 0$ 都成立，且函数 $x \longrightarrow a^*(x)$ 为正。于是，在假设 *2.1* 下，最优值处的滤过 $\mathbb{F}^X$、 $\mathbb{F}^{\mathbf{J}^{Ag}}$ 和 $\mathbb{F}$ 重合。

证明： 滤过 $\mathbb{F}^X$ 和 $\mathbb{F}^{\mathbf{J}^{Ag}}$ 包含于 $\mathbb{F}$ 中。由于 $\mathbf{J}^{Ag}$ 是随机微分方程（4.24）的解，因此，$\mathbb{F}^{\mathbf{J}^{Ag}} \subset \mathbb{F}$. 由于 $\sigma > 0$，函数 a^* 为正，并且根据假设 2.1 $\sigma \frac{h'}{\varphi'}$，$(a^*(\mathbf{J}_t^{Ag}))$ 为正。由随机微分方程（4.24），可得

$$dW_t = \frac{1}{\sigma \frac{h'}{\varphi'}(a^*(\mathbf{J}_t^{Ag}))} \left[d\mathbf{J}_t^{Ag} - \left(\lambda \mathbf{J}_t^{Ag} - U(r^*(\mathbf{J}_t^{Ag})) + h(a^*(\mathbf{J}_t^{Ag})) - \sigma \frac{h'}{\varphi'}(a^*(\mathbf{J}_t^{Ag}))) \right) dt \right].$$

因此，我们有 $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}^{\mathbf{J}^{Ag}}$，由 W 和 $\mathbf{J}^{Ag}$ 生成的滤过相一致（$\mathbb{F} \equiv \mathbb{F}^{\mathbf{J}^{Ag}}$）。根据产出过程的定义，我们有

$$dX_t = \varphi(a^*(\mathbf{J}_t^{Ag})dt + \sigma dW_t, \ X_0 \text{ is given.}$$

由于 $\sigma > 0$，我们得到

$$dW_t = \frac{1}{\sigma}[dX_t - \varphi(a^*(\mathbf{J}_t^{Ag}))dt]. \tag{4.25}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned} d\mathbf{J}_t^{Ag} &= \lambda \mathbf{J}_t^{Ag} dt - \left(U(r^*(\mathbf{J}_t^{Ag})) - h(a^*(\mathbf{J}_t^{Ag})) + \sigma \frac{h'}{\varphi'}(a^*(\mathbf{J}_t^{Ag}))) \right) dt \\ &+ \frac{h'}{\varphi'}(a^*(\mathbf{J}_t^{Ag})) \left[-\varphi(a^*(\mathbf{J}_t^{Ag}))dt + dX_t \right], \qquad (4.26) \\ \mathbf{J}_0^{Ag} &= x. \end{aligned}$$

然后，过程 X 表现为驱动（4.26）的唯一噪声源。由（4.24）和（4.25）可知，随机微分方程（4.26）存在唯一解，因此 $\mathbf{J}^{Ag}$ 是 $\mathbb{F}^X$-适应的，从而 $\mathbb{F}^{\mathbf{J}^{Ag}} \subset \mathbb{F}^X$。因此，三个滤过 $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}^X$ 和$\mathbf{J}^{Ag}$ 在最优值处重合。

•

命题4.10 在命题*4.9*的假设下，值函数 v 和 v^{aux} 相同。

证明： 我们在滤子$\mathbb{F}$中求解了由（4.16）定义的委托人的辅助价值函数。由于滤子 $\mathbb{F}^X$ 包含于 $\mathbb{F}$，我们有 $v \leq v^{aux}$。根据命题4.9，我们证明了较大的滤子 $\mathbb{F}$ 与最优值处由产出过程$\mathbb{F}^X$ 生成的滤子一致。因此可得 $v = v^{aux}$，委托人的初始问题（4.15）也就得到了解决。

•

注4.11 在强形式方法下，我们在以下假设下求解了原始的非标准随机控制问题：努力的边际影响的导数 φ、努力成本的导数 h以及产出过程的扩散项均为正。在这种情况下，我们得到了与弱形式方法中相同的结果。强形式方法的一个优势是，可以放宽由于从 $\mathbb{P}$ 到 $\mathbb{P}^A$.的概率测度变换而在强形式方法中对效用函数、努力的边际影响和努力成本所要求的可积性条件。

5 数值研究

对于数值研究，我们为第一最佳和次优情形选择以下函数（见 Example3.2）：

• 努力对产出过程的影响： $\varphi(x) = 3(1 - \exp(-\alpha x)); \alpha = 0.$• 努力成本 $h(x) = \exp(\beta x) - 1; \beta = 0.1$• 代理人的效用 $U(x) = x^{\frac{1}{4}}$• 委托人 $\delta = 0.08$ 和代理人 $\lambda = 0.2$的偏好参数。

5.1 最优情形

在最优情形下，最优租金由 $R_t^* = (U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)t})$ 给出，最优努力由 $A_t^* = (\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)t}) \vee 0$ 给出，其中 λ_{Lag}是方程的解

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s} \left(U\left((U')^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)s}) \right) - h\left((\frac{h'}{\varphi'})^{-1}(\frac{1}{\lambda_{Lag}} e^{(\lambda-\delta)s}) \vee 0 \right) \right) ds = x. \tag{5.1}$$

为了确定委托人向代理人提出合同的区域 $[0, x_{max}]$（类比第二优情形，我们称之为延续区域），我们首先计算 (5.1) 的解 $\lambda_{Lag}(x)$，然后计算 $H_s(x) = \varphi(A_s(x)) - R_s(x)$，最后计算 $\int_0^\infty e^{-\delta s} H_s(x) ds$。由于 $x \to H_s(x)$ 是递减的， x_{max} 是 $\int_0^\infty e^{-\delta s} H_s(x) ds = 0$ 的解：如果代理人的保留价值高于 x_{max}，那么若委托人向代理人提出这样的合同，委托人的价值函数将为负。我们发现延续区域等于 $[0, 5.45]$ （见图 4）。

图 3 表示拉格朗日乘子作为 x 的函数的变化。我们回顾一下，在 $[0, 3\frac{\alpha}{\beta}]$ 上， λ_{Lag} 是解在线a

$$\frac{c}{(pc\lambda_{Lag})^{\frac{p}{p-1}}(\lambda - \frac{p}{p-1}(\lambda - \delta))} + \frac{1}{\lambda} - \left(\frac{3\alpha}{\beta \lambda_{Lag}} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \frac{\alpha+\beta}{\lambda\alpha + \beta\delta} = x$$

并且 $[3\frac{\alpha}{\beta}, \infty[, \lambda_{Lag}$是.....的解决方案

$$\frac{c}{(pc\lambda_{Lag})^{\frac{p}{p-1}}(\lambda - \frac{p}{p-1}(\lambda - \delta))} + \left(\frac{1}{\lambda} \left(\frac{3\alpha}{\beta \lambda_{Lag}} \right)^{\frac{\lambda}{\lambda-\delta}} - \frac{\alpha+\beta}{\lambda\alpha + \beta\delta} \left(\frac{3\alpha}{\beta \lambda_{Lag}} \right)^{\frac{\lambda}{\lambda-\delta}} \right) = x.$$

在这项数值研究中， $\lambda_{Lag} = 3\frac{\alpha}{\beta} = 3$ 对应于 $x = 1.64$。

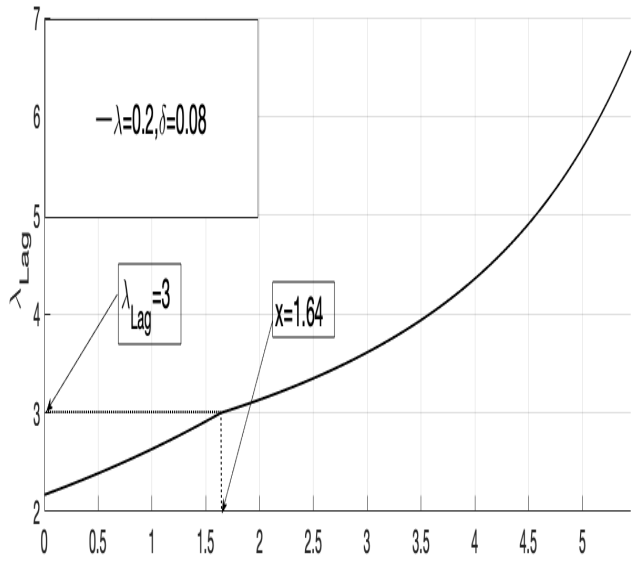


图 3：拉格朗日乘子作为 x.的函数的变化

图4表示委托人的价值函数。曲线在 $x = 1.64$ 处的斜率不连续，对应于使 $\lambda_{Lag} = \frac{3\alpha}{\beta} = 3.$ 的 x 值

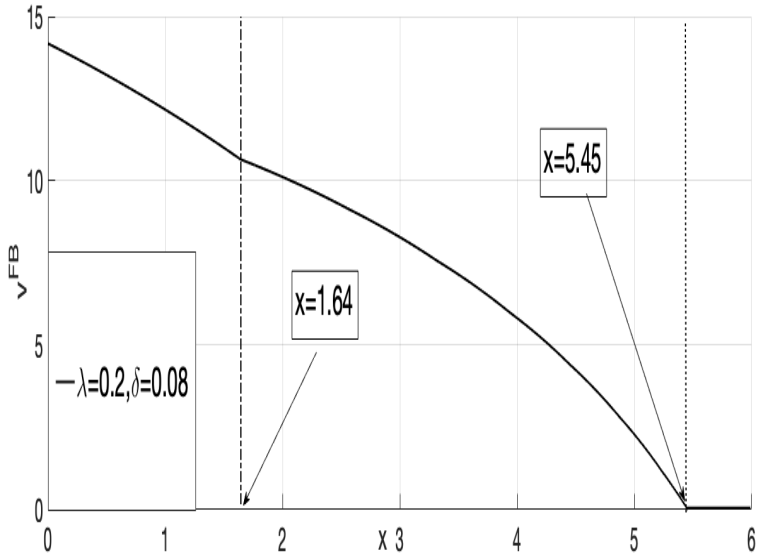
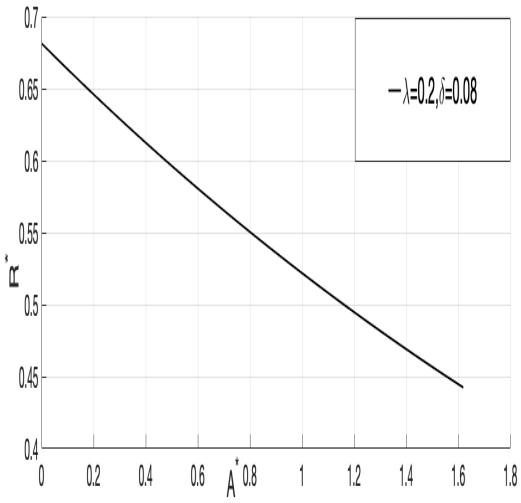


图4： $[0, 6]$中的价值函数（第一最佳）。

图 5 和图 6 表示委托人支付的最优租金，它是代理人所付出努力的递减函数，对应 $t = 0$ 和 $t = 25$ 的两组不同取值。



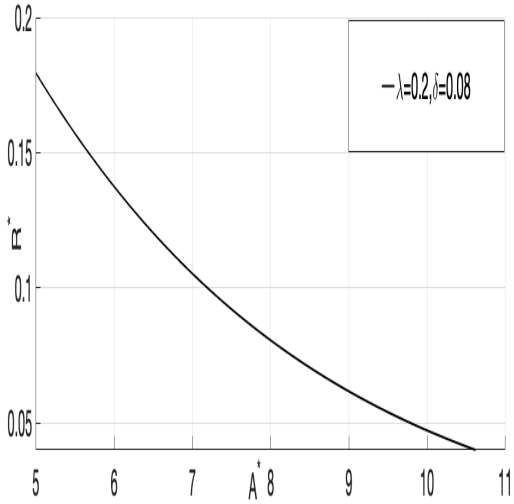


图 5： $t = 0$ 的最优租金随努力变化的函数（第一最佳情形）图 6： $t = 15$ 的最优租金随努力变化的函数（第一最佳情形）

图11（分别为图10）表示最优租金（分别为最优努力）关于 x和 t的函数。最优租金随 t 递减（因为代理人比委托人更加缺乏耐心），并随 x 递增。此外，最优努力随 t 递增，并随 x 递减。

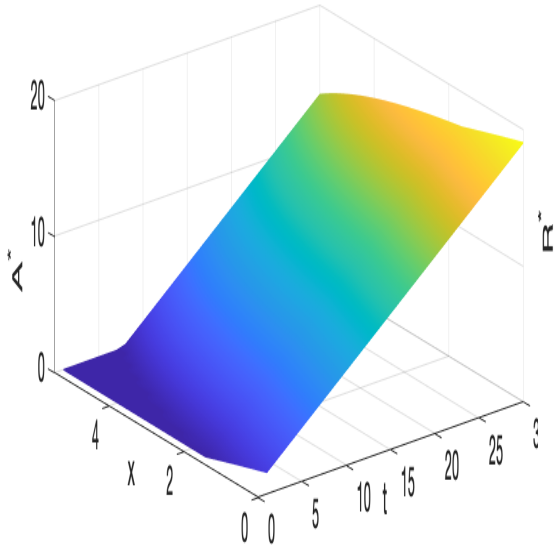


图 7：最优努力。

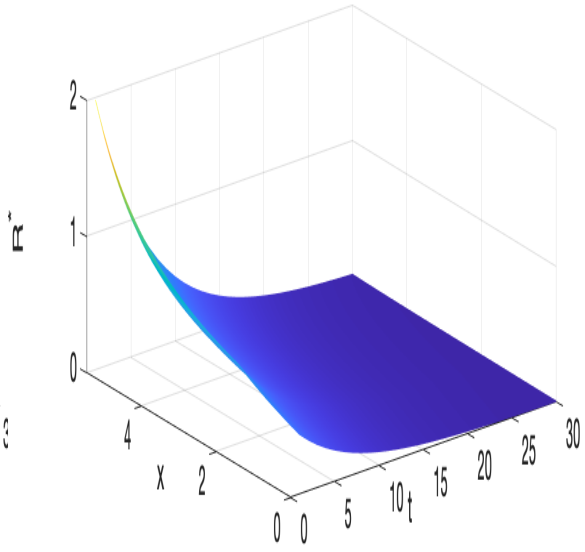


图8：最优租金。

下方的图9、图11和图10展示了较小区间 $x \in [0, 0.95]$ 内的价值函数和最优努力/租金，以便与次优情形中的区间保持相近（参见第5.2节中次优情形的延续区域）。

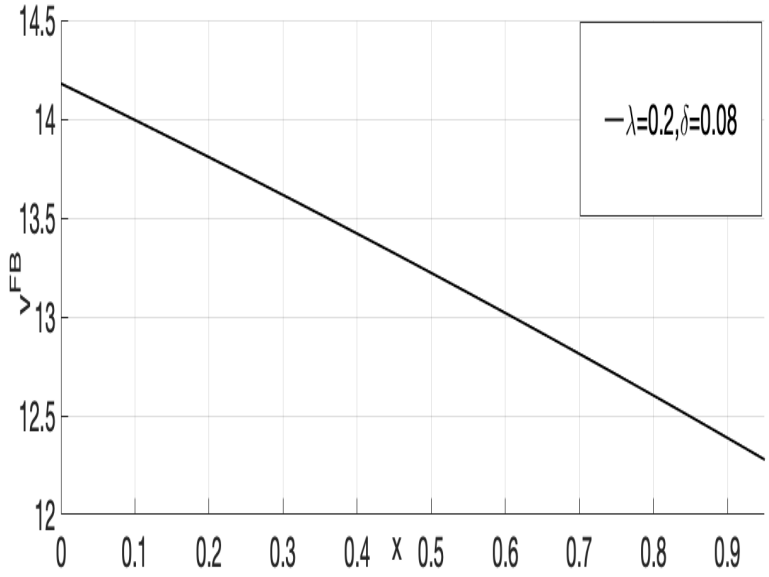


图9：价值函数（第一最佳）： $[0, 0.95]$处的放大图。

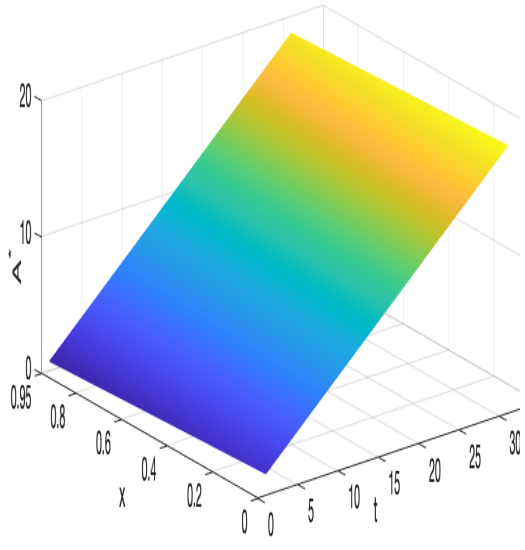


图10：最优努力（第一最佳）： $[0, 0.95]$处的放大图。

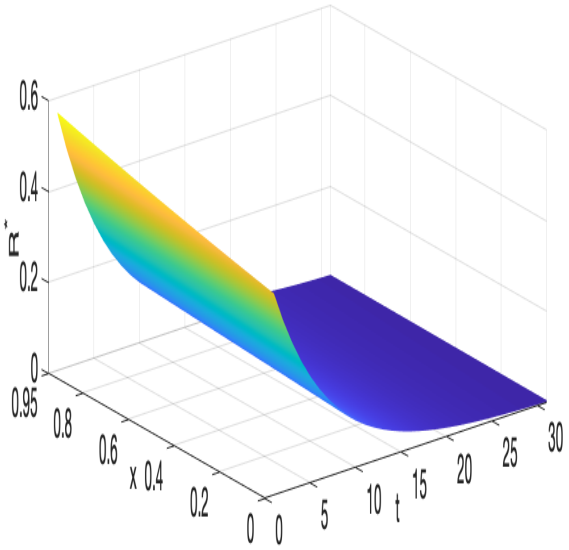


图11：最优租金（第一最佳）： $[0, 0.95]$处的放大图。

5.2 次优情形

我们使用一种称为霍华德算法的策略迭代算法，对 HJB变分不等式 (4.18) 的解进行数值近似。(4.18) 的解的数值近似包括三个步骤（更多细节请参见 Hajjej 等人 [HHM22]）：

1. 化归到有界区域。我们必须用有界区域 $[0, x]$ 替换 $[0, \infty)$。由于 HJB 解在 ∞ 处的行为已知，因此对于足够大的 x ， $v(x) = -U^{-1}(x)$，我们采用这一边界条件。边界 x 的选择是经验性的，并通过改变 x 来研究其稳健性。

2. 我们采用有限的 利用差分近似对变分不等式 (4.18) 进行离散化 .

3. We 使用Howard 算法（参见 Howard [如何60]）求解离散方程 .

本节使用与第一最佳情形相同的函数 φ， h 和 U 。我们首先取波动率 $\sigma = 1.85$ 的如下取值。从图 12 和图 13 可以看出，价值函数是凹的，这与 Sannikov [San08] 的结论一致。延续区域为 (0, 0.32)，在该区域内价值函数严格凹，随后等于 $-U^{-1}(x)$。

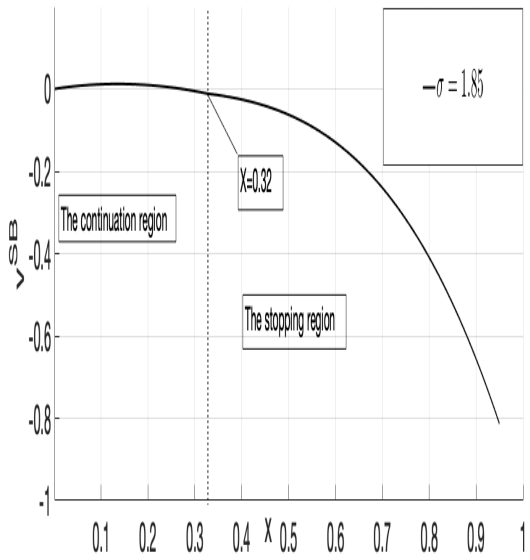


图 12： $[0, \bar{x}]$ 中的价值函数（次优解）

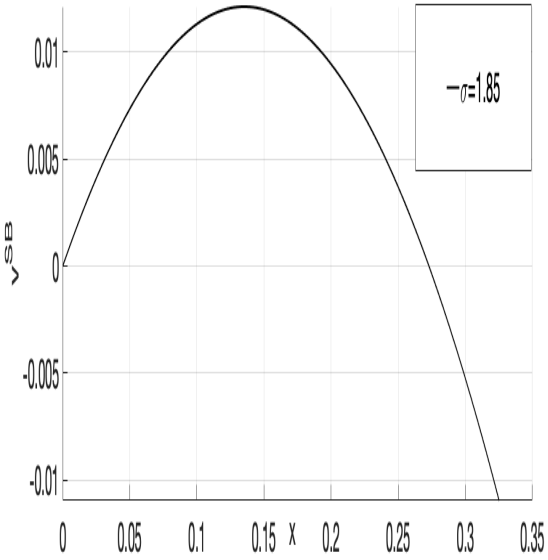


图 13：延续区域上的价值函数（次优）

图14计算了不同 σ 取值下的价值函数。 σ 越高，委托人的价值函数越小。这些数值结果与 [HHM22] 在弱方法下得出的结果一致。

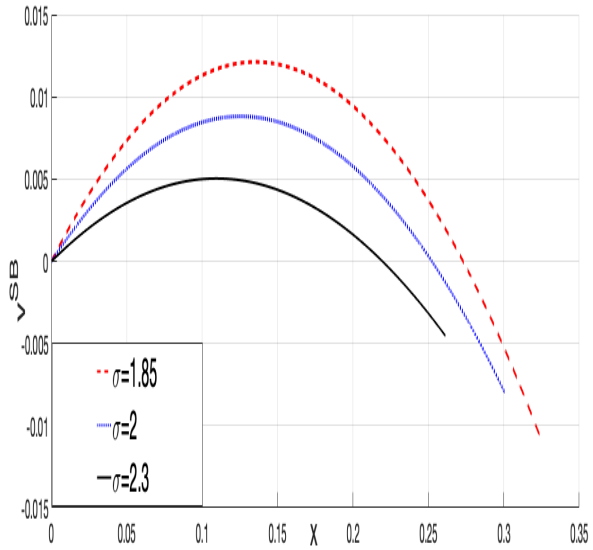
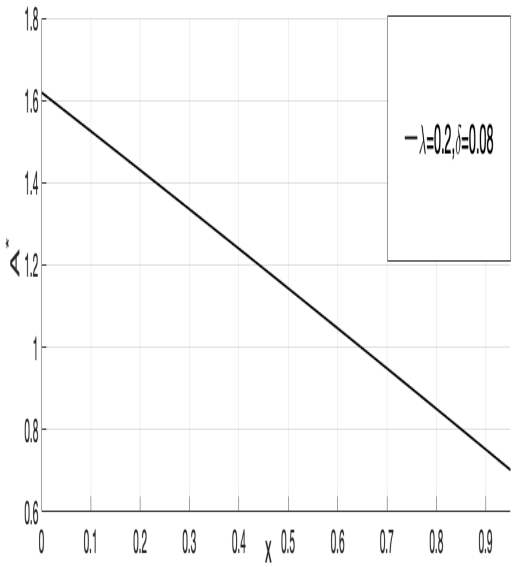


图14：第二最佳情形下不同 σ 取值对应的价值函数

5.3 信息价值

我们先比较第一最佳和第二最佳情形下的最优努力（图 15、16、17）与最优租金（图 18、19、20）。在这两种情形下，代理人的保留价值 x 越高，他提供的努力就越少，获得的租金则越高。粗略地说，代理人越富有，提供努力的积极性就越低，因此委托人应支付更高的租金，以促使他付出更多努力。若聚焦于第一最佳情形，图 15 和图 18 分别展示了时间 $t = 0$ 的最优努力和最优租金：由于代理人比公众更缺乏耐心，与第二最佳情形相比，委托人在合同开始时愿意支付更高的租金，并接受代理人付出较低的努力。如前面的图 10 和图 11 以及图 16 和图 19 所示，随后租金会迅速随时间下降，而努力则会增加。此外，第一最佳情形下的合同是永久性的，而第二最佳情形下的合同可能在某个停时终止。因此，最终而言，第一最佳情形对委托人有利得多，如图 21 所示。



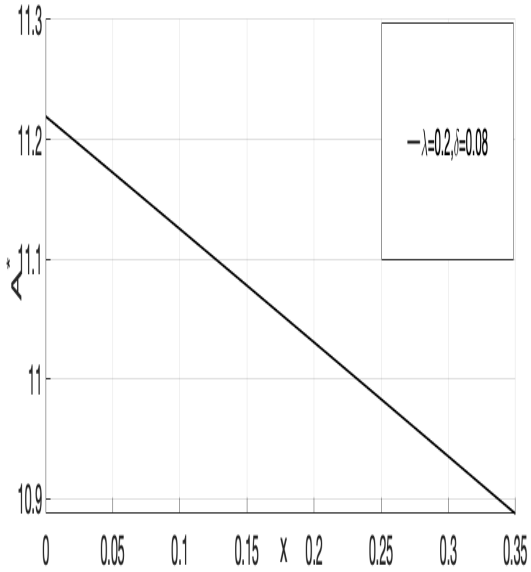


图15： $t = 0$的最优努力（第一最佳）。图16： $t = 15$的最优努力（第一最佳）。

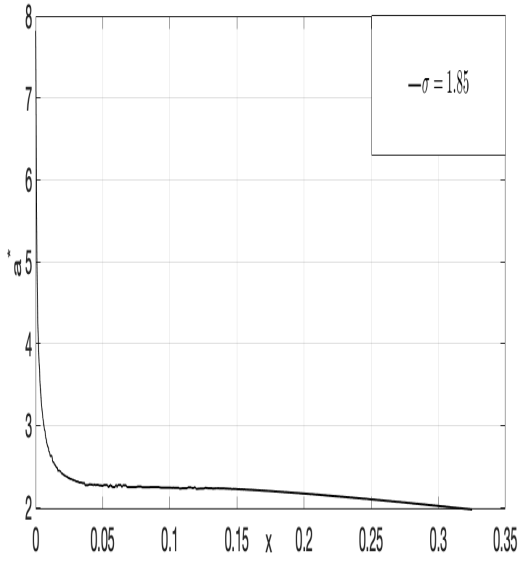


图17：最优努力（第二最佳）

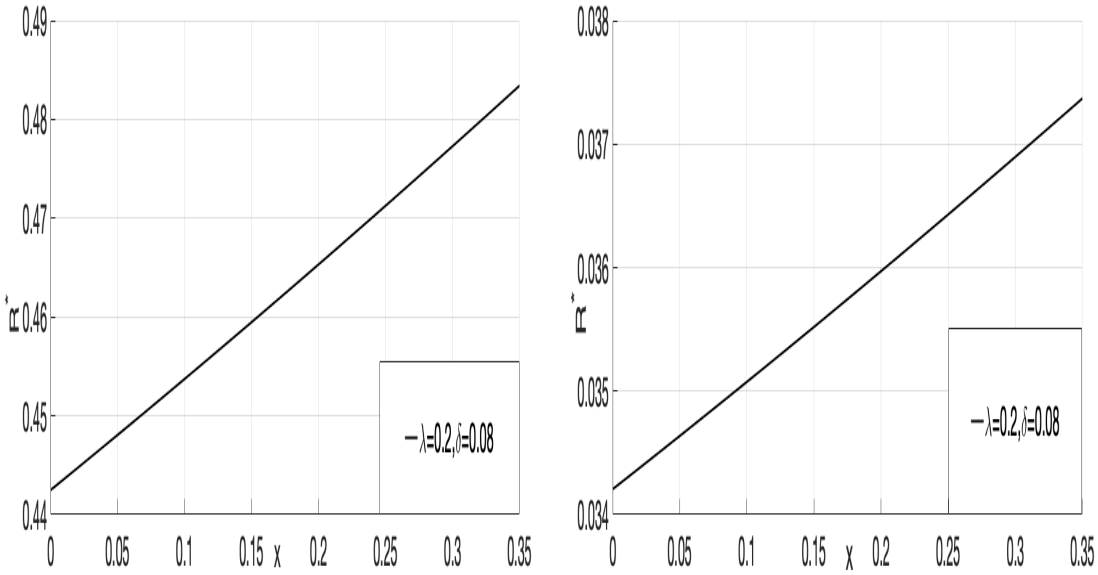


图18：图19中$t = 0$的最优租金（第一最佳）。$t = 15$。

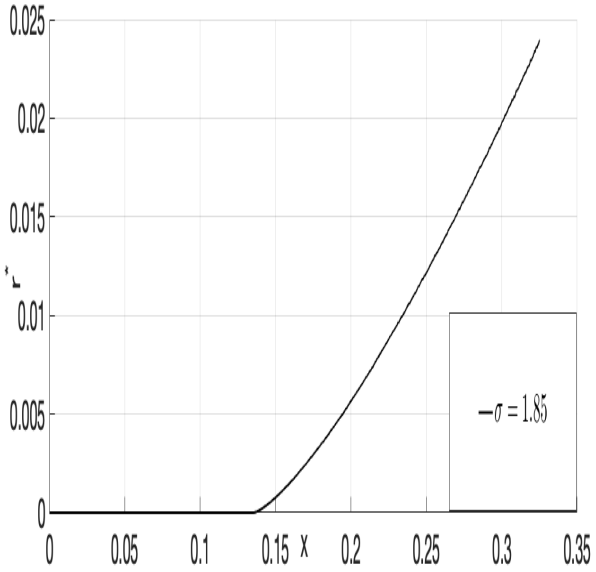


图20：最优租金（第二最佳）

现在我们在图 21 中比较第一最佳情形和第二最佳情形下委托人的价值函数。由于委托人是风险中性的，这两者之差代表“信息价值”，如图 22 所示。第一最佳情形下委托人的价值函数高于第二最佳情形下委托人的价值函数。得益于委托人与代理人之间的风险分担，第一最佳情形下的延续区域（$[0, 5.45]$）远大于第二最佳情形下的延续区域（$[0, 0.32]$）。第一最佳情形下，停止区域中的价值函数等于零（$\tau = 0$ 为最优），但第二最佳情形下，停止区域中的价值函数为负，等于 $-U^{-1}(x)$。下面我们聚焦于区域 $x \in [0, 0.95]$。信息价值是 x 的凸函数。这一点与图 14 一同表明，风险越高，信息价值越大。

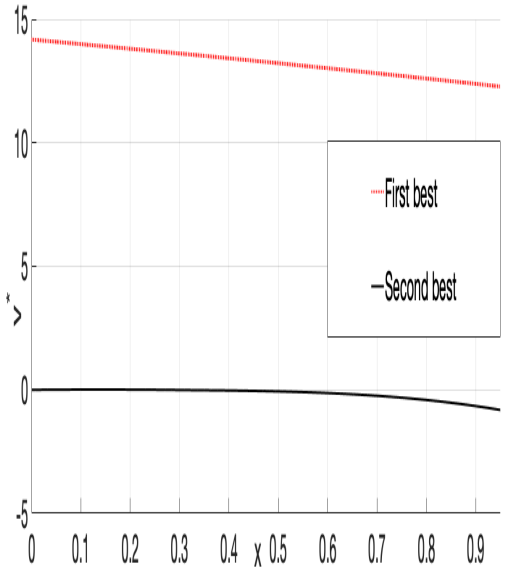


图21：第一最佳和第二最佳下的价值函数。

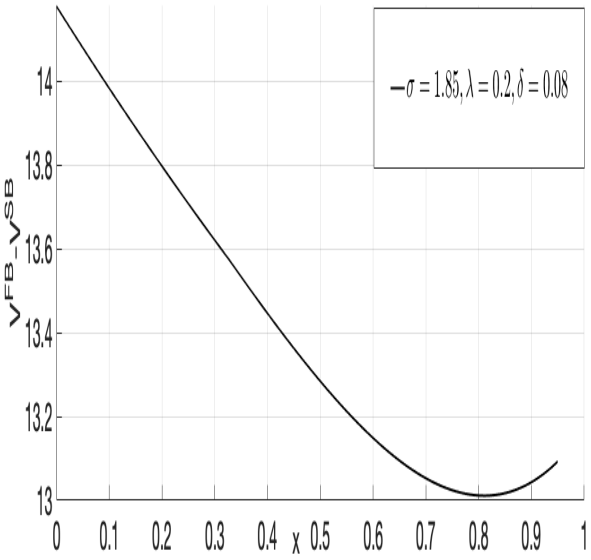


图22：信息对 $\sigma = 1.85$ 的价值。

6 附录

定理4.8的证明

[(a)] 第一步：我们证明 $v^{aux} \geq w$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上。令 $x \geq 0$、$n \in \mathbb{N}$, 以及一个可容许合同 $(R, \tau, A^*(Z)) \in \mathcal{G}$。如果 $x = 0$，那么根据假设 (i)，我们有 $v(0) = w(0) = 0$。我们假设 $0 < x$。我们引入以下 $\mathbb{F}$-停时：

$$\tau_n := \tau \wedge \inf\{t : |w'(J_t^{Ag}(x, R, \tau, A^*(Z)))\sigma \frac{h'(A^*(Z_t))}{\varphi'(A^*(Z_t))}| > n\}.$$

由 (i)-(ii) 可知，w 在 $\mathbb{R}_+$、$w \in C^2([0, \hat{b}))$ 和 $w = -U^{-1} \in C^2([\hat{b}, \infty))$ 上连续，因此 w 在 $\mathbb{R}_+$ 上连续且分段 C^2。应用广义伊藤公式（参见 Krylov [Kry08],

定理2, 第124页) 在时间 0 和 τ_n 到过程 $\left(e^{-\delta t}w(J_t^{Ag}(x,\ R,\ \tau,\ A^*(Z)))\right)_{t\geq 0}$

$$\begin{aligned} w(x) &= e^{-\delta\tau_n}w(J^{Ag}_{\tau_n}(x,R,\tau,A^*(Z))) - \int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}[-\delta w(J^{Ag}_s(x,R,\tau,A^*(Z))) \\ &+ \mathcal{L}^{A^*(Z_s),R_s}w(J^{Ag}_s(x,R,\tau,A^*(Z)))]ds + \int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}w'(J^{Ag}_s(x,R,\tau,A^*(Z)))\sigma\frac{h'(A^*(Z_s))}{\varphi'(A^*(Z_s))}\mathbf{1}_{\{A^*(Z_s)>0\}}dW_s. \end{aligned}$$

取期望可得:

$$\begin{aligned} w(x) &= \mathbb{E}\Bigg[e^{-\delta\tau_n}w(J^{Ag}_{\tau_n}(x,R,\tau,A^*(Z))) - \int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}[-\delta w(J^{Ag}_s(x,R,\tau,A^*(Z))) \\ &+ \mathcal{L}^{A^*(Z_s),R_s}w(J^{Ag}_s(x,R,\tau,A^*(Z)))]ds\Bigg] \\ &\geq \mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau_n}w(J^{Ag}_{\tau_n}(x,R,\tau,A^*(Z))) + \int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds\right], \end{aligned} \tag{6.1}$$

其中，不等式是利用假设 (iii)–(iv) 得到的。
By u利用集合 $\mathcal{D}_\rho^{Ag}$ 的定义以及柯西–施瓦茨不等式，我们有 e

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\big[\int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds\big] \leq \frac{1}{\delta}\mathbb{E}\big[\int_0^{\infty} e^{-\delta s}|\varphi(A^*(Z_s))|^2 + |R_s|^2 ds\big] < \infty.$$

因此，$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\big[\int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds\big] < \infty$，故我们有 $(\int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}\varphi(A^*(Z_s) - R_s)ds)_{n\in\mathbb{N}}$ 一致可积。因此，我们有关于 $\mathbb{L}^1$ 的收敛，并且可以令 $n\to\infty$ 趋于极限，从而得到

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[\int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds] = \mathbb{E}[\int_0^{\tau} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds]. \tag{6.2}$$

由于 w 满足增长条件 (4.20)，我们有

$$\mathbb{E}\left[|e^{-\delta\tau_n}w(J^{Ag}_{\tau_n}(x,R,\tau,A^*(Z)))|\right] \leq \mathbb{E}\left[|e^{-\delta\tau_n}K(1+U^{-1}(J^{Ag}_{\tau_n}(x,R,\tau,A^*(Z))))|\right]$$

利用 (4.21)，$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\left[|e^{-\delta\tau_n}w(J^{Ag}_{\tau_n}(x,\ R,\ \tau,\ A^*(Z)))|\right] < \infty$，并且可以令 $n\to\infty$ 趋于极限，从而得到

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[e^{-\delta\tau_n}w(J^{Ag}_{\tau_n}(x,R,\tau,A^*(Z)))] = E[e^{-\delta\tau}w(J^{Ag}_{\tau}(x,R,\tau,A^*(Z)))]. \tag{6.3}$$

由 (6.1)、(6.2) 和 (6.3)，我们有

$$w(x) \geq \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau} e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds + e^{-\delta\tau}w(J^{Ag}_{\tau}(x,R,\tau,A^*(Z)))\right].$$

根据假设 (ii)， $w(J_\tau^{Ag}(x,\ R,\ \tau,\ A^*(Z))) \geq -U^{-1}(J_\tau^{Ag}(x,\ R,\ \tau,\ A^*(Z)))$，由此我们推得

$$w(x) \geq \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds - e^{-\delta\tau}J_\tau^{Ag}(x,R,\tau,A^*(Z))\right].$$

通过取上确界，我们得到

$$w(x) \geq \sup_{(R,\tau,A^*(Z))\in\mathcal{G}} \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\delta s}(\varphi(A^*(Z_s)) - R_s)ds - e^{-\delta\tau}J_\tau^{Ag}(x,R,\tau,A^*(Z))\right] = v^{aux}(x).$$

ˆ 第二步：我们证明 $v^{aux} \leq w$ 关于 $\mathbb{R}^+$。如果 $x \geq b$，那么根据假设 (ii) 和价值函数的定义 (4.16)，我们有 $v^{aux}(x) \geq w(x)$。

ˆ 从现在起，我们假设 $0 < x < b$。现在我们考虑反馈控制 $(r^*(\widehat{J^{Ag}}),\ \tau^*,\ a^*(\widehat{J^{Ag}}))$，假设其属于 $\mathcal{G}$。令 τ^* 为 (4.23) 中引入的停时。然后 $\tau^* \in \mathcal{T}$.我们引入如下 $\mathbb{F}$-停时：

$$\tau_n \ := \ \tau^* \wedge \inf\{t : |w'(\widehat{J_t^{Ag}})\sigma\frac{h'(a^*(\widehat{J_t^{Ag}})}{\varphi'(a^*(\widehat{J_t^{Ag}})}| > n\}.$$

注意到 $w(J_t^{Ag}) > -U^{-1}(J_t^{Ag})$ 在 $[\![0,\tau_n[\![\subset [\![0,\tau^*[\![$ 上成立。然后由 (4.18) 得，在 $[\![0,\tau_n[\![$, 上

$$\delta w(\widehat{J}_t^{Ag}) - [\mathcal{L}^{a^*(\widehat{J}_t^{Ag}),r^*(\widehat{J}_t^{Ag})}w(\widehat{J}_t^{Ag}) + \varphi(a^*(\widehat{J}_t^{Ag})) - r^*(\widehat{J}_t^{Ag})] = 0.$$

因此

$$\begin{aligned} w(x) &= \mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau_n}w(\widehat{J}_{\tau_n}^{Ag}) - \int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}\big(-\delta w(\widehat{J}_s^{Ag}) + \mathcal{L}^{a^*(\widehat{J}_s^{Ag}),r^*(\widehat{J}_s^{Ag})}w(\widehat{J}_s^{Ag})\big)ds\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau_n}w(\widehat{J}_{\tau_n}^{Ag}) + \int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(a^*(\widehat{J}_s^{Ag})) - r^*(\widehat{J}_s^{Ag}))ds\right]. \end{aligned}$$

与第一步类似，我们证明 $(\int_0^{\tau_n} e^{-\delta s}(\varphi(a^*(\widehat{J}_s^{Ag})) - r^*(\widehat{J}_s^{Ag}))ds)_n$ 和 $\left(w(\widehat{J_{\tau_n}^{Ag}})\right)_n$ 是一致可积的。我们可以令 $n \to \infty, \tau_n \to \tau^*$ 几乎处处收敛，并且由于 $w(\widehat{J}_{\tau^*}^{Ag}) = -\widehat{J}_{\tau^*}^{Ag}$，我们得到

$$\begin{aligned} w(x) &= \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^*} e^{-\delta s}(\varphi(a^*(\widehat{J}_s^{Ag})) - r^*(\widehat{J}_s^{Ag}))ds - e^{-\delta\tau^*}\widehat{J}_{\tau^*}^{Ag}\right] \\ &= J_0^P(r^*(\widehat{J}^{Ag}), \tau^*, a^*(\widehat{J}^{Ag})) \\ &\leq v^{aux}(x). \end{aligned}$$

我们得出， $w = v^{aux}$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上，且 $(r^*(\widehat{J}^{Ag})\ \tau^*, a^*(\widehat{J}^{Ag}))$ 是一个最优反馈控制。ˆ[(b)] 对于 $x \in (0,b)$，我们最大化函数

$$f(x,.) : r \mapsto -w'(x)U(r) - r.$$

当 $w'(x) \geq 0$ 时，函数 $f(x,.)$ 单调不增，且最优值在 $r = 0.$ 处取得。否则，函数 $f(x,.)$ 为凹函数，最优租金由 $r^*(x) = \arg\max_r(f(x,r))$ 给出。因此 $r^*(x) = (U')^{-1}(w'(x))\mathbf{1}_{w'(x)<0}$.

References

[ABS03] Jürgen Amendinger、Dirk Becherer 和 Martin Schweizer。投资组合优化中初始信息的货币价值。金融与随机性，7(1)：29–46，2003。[AEÉ+20] Clémence Alasseur、Ivar Ekeland、Romuald Élie、Nicolás Hernández Santibáñez 和 Dylan Possamaï。电力定价的逆向选择方法。SIAM 控制与优化杂志，58(2)：686–713，2020。[AP13] Emmanuelle Auriol 和 Pierre M Picard。BOT 特许经营合同理论。《经济行为与组织杂志》，89：187–209，2013。[APT22] René Aïd、Dylan Possamaï 和 Nizar Touzi。具有响应激励的电力需求响应合约。运筹学数学，2022。[Arr64] Kenneth J Arrow。证券在风险承担最优配置中的作用。The Review of Economic Studies，31(2)：91–96，1964。[Bel57] RE Bellman。动态规划，普林斯顿大学出版社，1957。[Ben04] Alain Bensoussan。《部分可观测系统的随机控制》。剑桥大学出版社，2004。[Bor92] Karl Borch。再保险市场中的均衡。载于《保险经济学基础》，第230–250页。施普林格，1992。[CCZ07] Abel Cadenillas、Jakša Cvitanić 和 Fernando Zapatero。兼顾努力与项目选择的最优风险分担。Journal of Economic Theory，133(1)：403–440，2007。[CET07] Guillaume Carlier、Ivar Ekeland 和 Nizar Touzi。逆向选择下针对均值—方差代理人的最优衍生品设计。《数学与金融经济学》，1(1)：57–80，2007。[CPT17] Jakša Cvitanić、Dylan Possamaï 和 Nizar Touzi。动态风险管理中的道德风险。《管理科学》，63(10)：3328–3346，2017。[CWZ04] Jakša Cvitanic、Xuhu Wan 和 Jianfeng Zhang。连续时间委托代理问题的最优合同。《应用数学与随机分析杂志》，2004。[CZ12] Jakša Cvitanic 和 Jianfeng Zhang。《连续时间模型中的契约理论》。Springer Science & Business Media，2012。[EMRT21] Omar El Euch、Thibaut Mastrolia、Mathieu Rosenbaum 和 Nizar Touzi。做市监管的最优挂单—吃单费用。《数理金融》，31(1)：109–148，2021。

[HHM22] Ishak Hajjej、CarolineHillairet 和 Mohamed Mnif。道德风险下公私合作伙伴关系的最优停止合同。Frontiers of Mathematical Finance，1(4):539–573，2022。[HHMP17] Ishak Hajjej、Caroline Hillairet、Mohamed Mnif 和Monique Pontier。公私合作伙伴关系中的道德风险最优合同。随机学，89(6- 7):1015–1038，2017。[HM87] Bengt Holmstrom 和 Paul Milgrom。跨期激励提供中的聚合与线性性。Econometrica: Journal of the Econometric Society，55(2):303–328，1987。[How60] RonaldA Howard。动态规划与马尔可夫过程。John Wiley，1960。[Kry08] NikolajVladimirovič Krylov。受控扩散过程，第14卷。SpringerScience &Business Media，2008。[MP18] ThibautMastrolia 和 Dylan Possamaï。歧义下的道德风险。Journal of Optimization TheoryandApplications，179(2):452–500，2018。[Mül97] HolgerM Müller。指数效用连续时间委托—代理问题中的第一最佳分配规则。1997。[San08] Yuliy Sannikov。委托代理问题的连续时间版本。The Review of EconomicStudies，75(3):957–984，2008。[SS93] Heinz Schättler 和Jaeyoung Sung。指数效用连续时间委托—代理问题的一阶方法。Journal of Economic Theory，61(2):331–371，1993。[Sun05] Jaeyoung Sung。逆向选择和道德风险下的最优合同：连续时间方法。TheReviewof Financial Studies，18(3):1021–1073，2005。[Wil68] Robert Wilson。联合体理论。Econometrica: journalof the Econometric Society，第119–132页，1968。