奇异摄动反应扩散系统中的脉冲稳定性控制

F. Veerman[1] 和 I. Schneider[2]，a)1)莱顿大学，数学研究所，尼尔斯·玻尔路 *1* 号，*2333 CA* 莱顿，荷兰2)罗斯托克大学，数学研究所，*Ulmenstr. 69*，*18057* 罗斯托克，德国

(*电子邮箱：isabelle.schneider@fu-berlin.de)

(*电子邮箱：f.w.j.veerman@math.leidenuniv.nl)

(日期：2023年8月7日)

本文旨在研究 Pyragas 控制在一般类双分量奇异摄动反应扩散系统中，对定常局域相干结构稳定性的作用。我们采用非侵入式、类似 Pyragas 的比例反馈控制，使双分量奇异摄动反应扩散系统中的奇异脉冲解稳定。我们证明，在参数空间的一个较大区域内，可以调整控制参数，使原本不稳定的脉冲稳定下来。

arXiv:2304.03342v2 [math.DS] 4 Aug 2023

双分量反应-扩散方程中的奇异摄动脉冲通常在参数空间的大片区域内是不稳定的。为解决这种不稳定性，我们采用Pyragas 控制。该方法最初是为常微分方程的周期解开发的，用于为反应扩散系统中的奇异摄动脉冲构建一种非侵入式反馈控制。我们在一个玩具模型中利用埃文斯函数技术分析受控奇异脉冲的谱稳定性，从而证明了这种控制技术的有效- 性。

I. 引言

反应扩散系统是基于半线性抛物型偏微分方程[1]的数学模型。反应扩散方程最引人入胜的方面之一，是其解中能够涌现出形形色色的图样。这些图样包括多种多样的现象，例如化学振荡器[2]，中的螺旋波、不同的动物毛色图案[3]，、法拉第波[4]，，以及瑞利–贝纳德对流[5]，、地质学[6]，或流体动力学[7]中的各种图样。

这些图样，其中一些可归类为图灵图案[8]，，表现出多种行为，包括行波和类波现象的形成，以及条纹、六边形和耗散孤子等自组织结构[9]。对这些图样的研究对于理解自然现象具有重要意义，并已在各个领域带来了新的洞见[10]。

本文重点分析和控制二分量反应-扩散方程中的一种特定空间局域相干结构：对称奇异脉冲[11–13]。图1展示了该脉冲的示意图。其特征是明显的尺度分离，这一点从两个分量之间脉冲宽度的差异中可以看出。

已有研究表明[12,13]，只有当两个分量之间的非线性相互作用足够强时，这类双组分脉冲才可能稳定。即便如此，在参数空间的大范围内，奇异脉冲仍然不稳定，参见参考文献12，引理5.11、5.12和5.14。因此，奇异脉冲在自然界或实验中鲜少出现。通常只能观察到趋向稳定稳态的过程，而不稳定稳态则大多难以察觉。

因此，我们的目标是引入一个 Pyragas 类控制项，使不稳定脉冲变得可见。Pyragas 控制[14,15] 具有优势，因为它对脉冲是非侵入性的，即控制项会消失，不会改变脉冲本身。然而，它会改变邻近解，从而改变脉冲的稳定性。此外，这种控制方法的另一项益处是与模型无关且实施成本低，因为它不需要昂贵的计算。尽管该方法最初是为常微分方程的周期解设计的，我们将其调整用于控制反应扩散系统中的奇异摄动脉冲。

我们的目标是将控制理论与奇异摄动反应扩散系统中的图样存在性和稳定性理论相结合。具体而言，我们旨在控制脉冲解的稳定性，并开发一种新颖的方法，以调节一大类奇异摄动反应扩散系统中各种图样的稳定性。

本文的组织结构如下：在第二节中，我们讨论模型系统，并介绍作为研究对象的奇异脉冲模式；同时，我们还介绍非侵入式控制项。接下来，在第三节中，我们构造埃文斯函数，以确定奇异脉冲的谱稳定性。主要结果见第四节，我们证明在参数空间的广阔区域内可以实现非侵入式反馈稳定化。本节简要概述稳定性证明，完整而详细的证明见附录（A节）。最后，我们在第五节进行简短讨论。

a)柏林自由大学，数学研究所，阿尼马利街 7 号，14195 柏林，德国

II. 模型、图样和控制

A. 模型

我们考虑以下一般类的双分量奇异摄动反应扩散方程:

$$u_t = u_{xx} - \mu u + F_1(u) + \frac{1}{\varepsilon}F_2(u,v), \tag{1a}$$
$$v_t = \varepsilon^2 v_{xx} - v + G(u,v), \tag{1b}$$

其中$x \in \mathbb{R}$、 $\mu > 0$ 和 $0 < \varepsilon \ll 1$ 均趋于渐近为小量。非线性函数F[1,2] 和G 满足温和的正则性假设[12]；最重要的是，当F_2 和G 趋于$V \to 0$时，它们以超线性的速度趋于 0。

所有后续计算都将在以下玩具模型的背景下进行:

$$u_t = u_{xx} - u + \frac{1}{\varepsilon}f(u)^2 T_o(u)\frac{v^2}{3}, \tag{2a}$$
$$v_t = \varepsilon^2 v_{xx} - v + f(u)v^2, \tag{2b}$$

其中 f 和 T_0 是u的光滑函数。
系统 (2)展现了一般模型类 (1) 的大多数定义性特征，同时又允许进行显式计算。然而，我们强调，本文所采用的方法和技术适用于一般类 (1) 的所有系统。

B. 图样

本文研究的空间局域相干结构是一个双向渐近于平凡背景态的对称奇异脉冲；见图1。式（1）的奇异摄动性质通过渐近微小的扩散项 $\varepsilon^2 v_{xx}$，使式（1）的定常图样解产生空间尺度分离。对于奇异脉冲，这种尺度分离体现在u分量和v分量的脉冲宽度差异上，再见图1；为此，我们引入短尺度空间变量

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}. \tag{3}$$

渐近微小参数 ε 的存在，使我们能够应用几何奇异摄动理论（几何奇异摄动理论），通过构造性证明严格确立定常对称奇异脉冲解[12]的存在性。因此，我们陈述：若满足一个以F[1,2] 和G 表示的代数条件[12]，则式（1）存在定常对称脉冲解（$u_P(x)$,$v_P(\xi)$），其中（$u_P(x)$, $v_P(\xi)$）$\sim\left(e^{-|x|}, e^{-|\xi|}\right)$，当$x \to \pm\infty$时。对于玩具模型（2），该代数条件为

$$\mu u^2 = T_o(u)^2. \tag{4}$$

此外，

$$(u_p(x), v_p(x/\varepsilon)) = \left(u_* e^{-|x|}, \frac{3}{2f(u_*)}\operatorname{sech}^2\frac{x}{2\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{5}$$

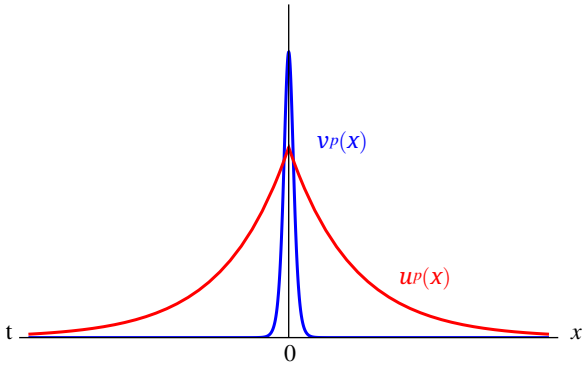

图1：奇异对称脉冲的一种典型剖面，它在双渐近意义上趋于平凡背景态。大尺度分量u （红色）与小尺度分量v （蓝色）之间的空间尺度分离清晰可见。

其中，$u_* > 0$ 是方程（4）的一个非退化解，我们假设对于该解，$f(u_*) \neq 0$。有关脉冲构造和存在性证明的更多细节，请参见参考文献12。

C. 控制

本文旨在研究 Pyragas 控制[14–16] 对方程 (1) 中定常局域相干结构稳定性的影响。为此，我们在方程 (1) 中引入反馈控制项 K 和L，得到

$$u_t = u_{xx} - \mu u + F_1(u) + \frac{1}{\varepsilon}F_2(u,v) + K[u,v], \tag{6a}$$
$$v_t = \varepsilon^2 v_{xx} - v + G(u,v) + L[u,v], \tag{6b}$$

其中 $K[u_P(x), v_P(\xi)] = 0 = L[u_P(x), v_P(\xi)]$。由于反馈控制项在目标模式上消失（$u_P$,$v_P$），这种控制称为非侵入式控制。对于 PDE 中图样的控制，可以应用范围广泛的控制项，包括时空延迟、比例反馈，或它们的组合[17–20] 本文研究一种特定形式的非侵入式控制，并将其应用于玩具模型 (2)。我们保持u方程不变，并在v方程中加入比例反馈控制，从而得到

$$u_t = u_{xx} - u + \frac{1}{\varepsilon}f(u)^2 T_o(u)\frac{v^2}{3}, \tag{7a}$$
$$v_t = \varepsilon^2 v_{xx} - v + f(u)v^2 + \ell(v - v_p(x)), \tag{7b}$$

其中 ℓ： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在零点处连续可微，且 $\ell(0) = 0$。注意，后一个条件确保 (u_P, v_P) (5) 是 (7) 的一个解。我们选择仅对变量 v 施加控制，因为它表现出高度的空间局域化，脉冲的 v 分量在尖峰区域之外基本为零。从应用角度来看，这具有优势，因为与覆盖更大区域的扩展控制相比，实现局域控制通常更为简单。

请注意，因此，在线性层面上，控制并非单位矩阵的倍数。因此，控制项 ℓ的影响并不像将所有

特征值都向左移动那么直接。我们的目标是推导控制函数 ℓ 的条件，使奇异脉冲（u_P，v_P）(5) 成为方程 (7) 的稳定解。

III. 脉冲稳定性与埃文斯函数

为了具有可观测性，定常脉冲解需要作为偏微分方程组(1)的解而稳定 。奇异脉冲解关于(1) 的（谱）稳定性，可以通过构造埃文斯函数 $\mathscr{E}(\lambda)$ 来确定；这是一种解析函数，其根恰好与在线性化奇异脉冲 (u_P,v_P)[21,22]处对 (1) 进行线性化所得到的线性算子的（离-散）谱相重合。也就是说，我们考虑特征值问题

$$\mathscr{L}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{8}$$

with

$$\mathscr{L} = \begin{pmatrix} \partial_x^2 - 1 + F_1' + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial F_2}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \varepsilon^2\partial_x^2 - 1 + \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

其中，$F_{1,2}$ 和G 的所有（偏）导数均在 $(u,v) = (u_P(x), v_P(\xi))$ 处取值。

$\mathscr{L}$(9)的本质谱为实数、负值，且与虚轴[12]保持一定距离；因此，脉冲稳定性由其离散谱决定，即相应埃文斯函数 $\mathscr{E}(\lambda)$ 的根。在参考文献12中，研究表明，可以利用脉冲的奇异摄动结构，获得 $\mathscr{E}(\lambda)$ 的根在 ε 中的首阶显式刻画；此外，这些根在 ε中正则摄动。

为简洁起见，我们省略更多细节，仅陈述参考文献12中提出的理论应用于玩具模型 (2) 时的主要结论：脉冲 (5) 的谱在 ε 的主阶由函数的根决定

$$\begin{aligned} t_s(\lambda) :=:= \quad & \frac{T_o'(u_*)}{T_o(u_*)} - \frac{1}{u_*}\sqrt{1+\lambda} \\ & + \frac{f'(u_*)}{f(u_*)}\left(2 + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}_p(\xi)\hat{v}_{\text{in}}(\xi;\lambda)\,\mathrm{d}\xi\right), \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\hat{}v_P(\xi) = f(u_*)v_P(\xi)$，且 $\hat{}v_{\text{in}}$是下式的唯一有界解

$$\left[\partial_\xi^2 - 1 - \lambda + 2\hat{v}_p(\xi)\right]\hat{v}_{\text{in}} = -\hat{v}_p(\xi)^2, \tag{11}$$

它不依赖于u_*。

$\mathscr{L}$(9)的典型谱构型如图2所示。当一对特征值穿过虚轴（发生 Hopf分岔）或实特征值穿过原点时，脉冲可能失去稳定性。注意，由于空间域是无界的，脉冲谱由离散（点）谱和本质（连续）谱组成。

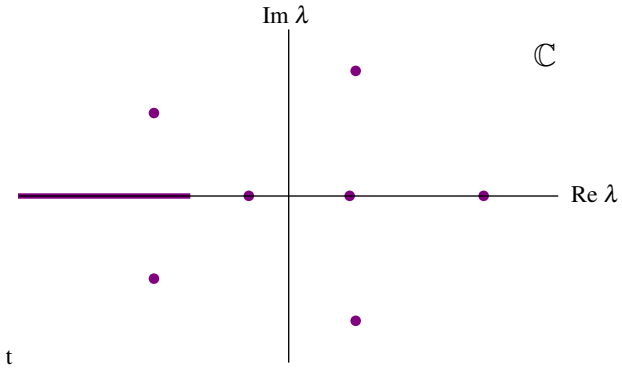

图 2：复平面中脉冲谱（紫色）的典型分布。虚轴左侧的谱是稳定的。本质谱为实数、负值，且与虚轴之间有正距离。

IV. 通过比例反馈控制实现脉冲稳定化

本文要解决的主要研究问题是：给定(1)的一个奇异脉冲解（u_P，v_P），我们能否找到控制项 K、L，使得这个奇异脉冲解成为(6)的一个稳定解?

由于引入控制项可能会对奇异脉冲的稳定性分析产生重大影响，我们尝试在玩具问题 (2) 的背景下，针对上述提出的研究问题给出答案，并在v方程 (7) 中采用比例反馈控制。我们首先在定理 1 中陈述分析的主要结论，并介绍证明的主要思路。定理 1 的完整证明见附录 A。

定理 1. 令 $0 < \varepsilon \ll 1$ 充分小，并假设 u_* 是(4)的一个非退化解。考虑(2)的对称奇异脉冲解(u_P,v_P)，其关于 ε的首阶近似由(5)给出，并引入 $\rho := 2f'(u_*)f(u_*) + T'_o(u_*)T_o(u_*)$。

1. 若 $f'(u_*) = 0$，则无论选择何种比例控制函数$\ell(v - v_P)$，只要按照(7)实现，奇异脉冲(u_P,v_P)始终不稳定。

2. 若 $f'(u_*) < 0$，则可以选择一个比例控制函数 $\ell(v - v_P)$，按照(7)实现，使奇异脉冲(u_P,v_P) 稳定。

3. Let $f'(u_*) > 0$.

(a) 如果 $\rho > \frac{1}{u_*}$，则奇异脉冲(u_P, v_P) 始终—对于任意比例控制函数 $\ell(v - v_P)$，按照(7)中的方法实现时，都是不稳定的。

(b) 如果 $\rho < \frac{1}{u_*}$，那么可以选择一个比例控制函数 $\ell(v - v_P)$，按照(7)中的方法实现，使脉冲解(u_P, v_P) 稳定。

定理 1 的陈述示意图见图 3。直接应用定理 1 来

特定参数值如图4和图5所示。

值得注意的是，仅控制一个变量就足以控制脉冲的两个分量。

控制函数 ℓ 稳定脉冲所需满足的具体条件，可在引理4的证明（附录 A）中找到。特别是，当且仅当 $\ell'(0) < 1$ (A4) 时，本质谱稳定。

此外，请注意，脉冲的可控性强烈依赖于量 $\rho = 2(f'/f) + (T_0'/T_0)$，该量对应于 $f^2(u)T_0(u)$ 的对数导数。该量表示 (2)(a) 在 $u = u_*$ 处依赖于 u 的非线性。

备注 2。尽管本文旨在展示如何对在没有控制时不稳定的脉冲进行稳定化，但值得注意的是，我们的控制方案也可能使原本稳定的脉冲变得不稳定。例如，选择 $\ell'(0) < 1$ 会通过边带不稳定性使脉冲变得不稳定，因为本质谱被推过了虚轴（A4）。我们在本文中不探讨此类不稳定化情形；通过非侵入式控制使脉冲变得不稳定是否可取，取决于模型背景和应用场景。

定理 1 的证明始于以下观察：作为方程 (7) 的解，(u_P, v_P) 的线性稳定性可以写成

$$\left[\mathscr{L} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \ell'(0) \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{12}$$

其中 $\mathscr{L}$ 由式(9)给出。这意味着，正如参考文献12中所述，构造埃文斯函数的过程可以应用于(12)。脉冲的奇异摄动结构再次导致如下结果：特征值问题(12)的解在 ε 的主阶上由函数的根决定。

$$\hat{t}_s(\lambda) := \frac{T_o'(u_*)}{T_o(u_*)} - \frac{1}{u_*}\sqrt{1+\lambda} + \frac{f'(u_*)}{f(u_*)}\left(2 + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}_p(\xi)\hat{v}_{\text{in}}(\xi; \lambda - \ell'(0))\,\mathrm{d}\xi\right) \tag{13}$$

证明的其余部分是对亚纯复函数 $\hat{}t_s$ 的详细分析。主要困难在于理解式 (13)中积分项对 λ 的依赖性，这与 $\hat{}v_{\text{in}}(\lambda - \ell'(0))$ 对 λ 的依赖性密切相关，其中 $\hat{}v_{\text{in}}$ 是式 (11) 的唯一有界解。
接下来，我们引入 $\hat{}\lambda = \lambda - \ell'(0)$，并利用 Weyl–Titchmarsh–Kodaira 谱理论[23,24] 来表示该积分。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}_p(\xi)\hat{v}_{\text{in}}(\xi; \hat{\lambda})\,\mathrm{d}\xi = \langle \hat{v}_{\text{in}}, \hat{v}_p \rangle_2$$

根据在算子 $\mathscr{L}_f := \partial_\xi^2 - 1 - \hat{}\lambda + 2\hat{}v_P(\xi)$ 的特征函数上的投影，参见 (11)。这使我们能够获得关于 $\langle \hat{}v_{\text{in}}, \hat{}v_p \rangle_2$ 的估计，由此可得定理的结论。

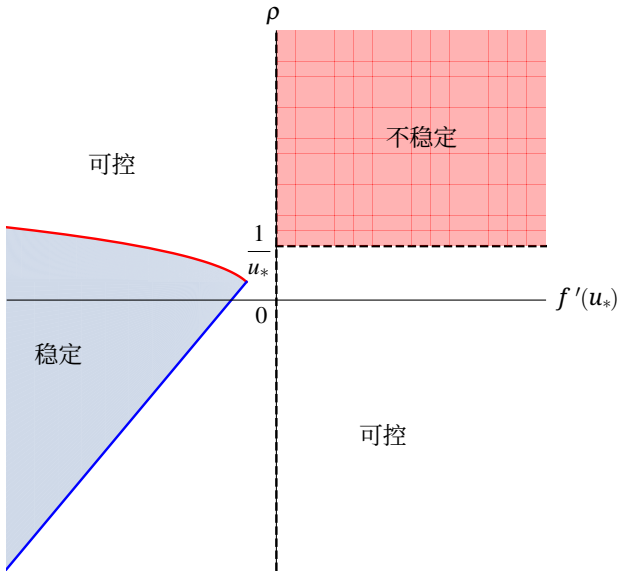

图 3：脉冲的稳定性（u_P,v_P），根据定理 1，其中 $\rho = 2\frac{f'(u_*)}{f(u_*)} + \frac{T_o'(u_*)}{T_o(u_*)}$。在蓝色区域（通过数值方法确定）内，脉冲在没有控制时是稳定的；其稳定性会因 Hopf 分岔（红色曲线）而丧失，或因实特征值穿过零点（蓝色曲线）而丧失。在红色区域以及虚线上，脉冲是不稳定的，且无法通过控制使其稳定，见定理 1 的 1) 和 3a)。在参数空间的其余部分，脉冲虽不稳定，但可通过对 v 分量实施比例控制使其稳定，如式 (7) 所示

V. 结论与展望

总之，我们证明了在双分量反应扩散方程中，可以在参数平面的较大范围内稳定奇异摄动脉冲。具体而言，对于玩具模型 (2)，我们在 $(\rho,\ f'(u_*))$ 平面中确定了三个区域：一个无需控制即可保持稳定的区域；一个无论如何控制都不足以使其稳定的区域；以及——也是本文重点关注的——一个较大的区域，在该区域内可通过我们提出的控制项控制脉冲稳定性。

未来研究可能有若干值得探索的方向。首先，探索使用“真正的”Pyragas 控制或许是值得的，其中控制并非成比例的，而是包含一个时滞项，因此不依赖于对脉冲结构已有的明确了解。这给严格的稳定性分析带来了额外问题，因为非线性稳定性方面可能会出现困难。对于本文研究的控制方案，无需区分谱稳定性和非线性稳定性。在非受控特征值问题（8）中，谱稳定性意味着非线性稳定性；这是Henry[1] 的经典结果，因为算子 $\mathscr{L}$(9)是扇形的。与“受控”特征值问题（12）相关的线性算子也具有相同的（扇形）性质。因此，可以直接由谱稳定性推断非线性稳定性。对于其他控制策略，例如时滞反馈，扇形性质是

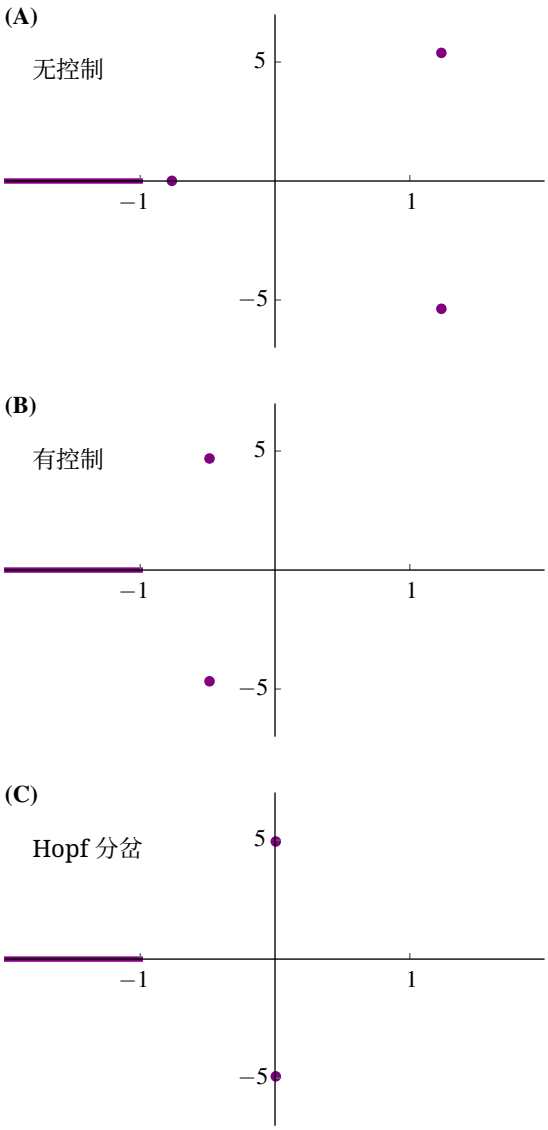

图 4：(A) 玩具模型 (2) 中，参数取值为 $\rho := 2$ f′(u*) f (u*) ＋ T′o(u*) To(u*) = ²u* and f ′(u*) = −3 f (u*) u* 时，(u*p*, v*p*)(5) 的谱。对于这些参数，脉冲是不稳定的。(B) 如 (7) 所示应用比例反馈控制，$\ell'(0) = -3$ is 足以（甚至绰绰有余地）使脉冲稳定；这是定理 1 的陈述 2 的直接推论。(C) 如 (7) 所示应用比例反馈控制，取 $\ell'(0) = -2.1882 + \mathcal{O}(\varepsilon)$，脉冲通过 Hopf 分岔而稳定。本图所示的谱分布是通过数值计算埃文斯函数 (13) 的根得到的。

通常不会保留。在这种情况下，推导非线性稳定性时需要更加谨慎；例如，参见文献 25，其中给出了 Henry 结果的推广。

其次，研究控制对大尺度分量 u 的影响，并将其与当前对小尺度分量v 的关注进行比较，将为这一双分量系统提供有价值的见解。此外，探索非对角控制的潜力也将很有意义。

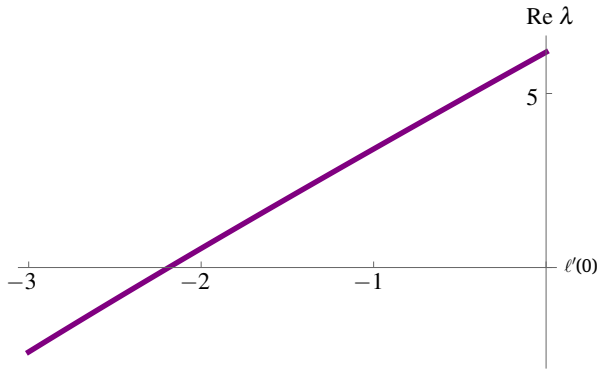

图 5：图 4 所示复数特征值对的实部作为控制强度 $\ell'(0)$的函数，采用式 (7) 中的比例反馈控制。足够强的控制将通过 Hopf 分岔稳定脉冲。

第三，我们当前的分析主要集中于相对简单的空间局域相干结构。研究将我们的控制方案扩展到更复杂图样的潜在可能性会很有意义，例如多回路构型[13]和/或周期脉冲图案[26]，，并确定在这些更为复杂的情形下能否实现稳定化的条- 件。

致谢

F.V.获得了洪堡奖学金的资助。I.S. 获得了德国研究基金会、SFB910、A4 项目“时空模式：控制、时滞与设计”的资助。我们谨向SFB 910 的所有成员，尤其是 Sabine Klapp、Eckehard Schöll和 Bernold Fiedler，致以感谢，感谢他们所作出的宝贵贡献和持续支持。此外，我们还要感谢Nigel Higson，感谢他就韦尔定理开展的富有洞察力的讨论。

数据可用性声明

数据共享不适用于本文，因为本研究未创建或分析任何新数据。

附录 A：定理 1 的证明

a. 脉冲稳定性和埃文斯函数

对于脉冲（u_p，v_p）的稳定性分析，我们采用参考文献 12的方法。决定

（u_p，v_p）线性稳定性的特征值问题如下

$$\lambda u = u_{xx} - u + \frac{1}{3\varepsilon} v_p^2 \left[f(u_p)^2 T_o'(u_p) + 2f(u_p) f'(u_p) T_o(u_p) \right] u + \frac{2}{3\varepsilon} f(u_p)^2 v_p T_o(u_p) v, \tag{A1a}$$

$$\lambda v = \varepsilon^2 v_{xx} - v + 2f(u_p) v_p v + f'(u_p) v_p^2 u + \ell'(0) v. \tag{A1b}$$

在短尺度空间坐标 $\xi = x/\varepsilon$下，系统 (A1) 可改写为

$$\varepsilon^2(\lambda+1)u = u_{\xi\xi} + \frac{\varepsilon}{3} v_p^2 \left[f(u_p)^2 T_o'(u_p) + 2f(u_p) f'(u_p) T_o(u_p) \right] u + \frac{2\varepsilon}{3} f(u_p)^2 v_p T_o(u_p) v, \tag{A2a}$$

$$\lambda v = v_{\xi\xi} - v + 2f(u_p) v_p v + f'(u_p) v_p^2 u + \ell'(0) v. \tag{A2b}$$

我们可以将 (A2) 写成关于 $\phi = (u, u_\xi, v, v_\xi)$ 的一阶系统，

$$\phi_\xi = \mathscr{A}(\xi; \lambda, \varepsilon)\, \phi. \tag{A3}$$

这一表述使我们能够运用参考文献 21 中提出的理论。首先，我们注意到矩阵 $\mathscr{A}$ 是渐近常数，因为当 $\xi \to \pm\infty$ 时，$(u_p(\xi), v_p(\xi)) \to (0,0)$。相应的渐近矩阵 $\mathscr{A}_\infty(\lambda, \varepsilon) := \lim_{\xi\to\pm\infty} \mathscr{A}(\xi; \lambda, \varepsilon)$ 的特征值为 $\left\{ \pm\varepsilon\sqrt{1+\lambda}, \pm\sqrt{1+\lambda-\ell'(0)} \right\}$。因此，当且仅当 $\lambda > -1 + \min(\ell'(0), 0)$ 时，$\mathscr{A}_\infty$ 是双曲的。由于 $\partial_\xi - \mathscr{A}$ 是算子 $\partial_\xi - \mathscr{A}_\infty$ 的相对紧扰动，$\partial_\xi - \mathscr{A}$ 的本质谱由下式给出

$$\sigma_{\mathrm{ess}} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \le -1 + \max(\ell'(0), 0) \right\}. \tag{A4}$$

我们观察到，当且仅当$\ell'(0) < 1$时，本质谱是稳定的。因此，从现在起，我们假设

$$\ell'(0) < 1, \tag{A5}$$

作为 $\partial_\xi - \mathscr{A}$ 的谱稳定的必要条件。谱的其余部分是离散的；请注意，这个点谱中的元素可以（且通常会）具有非零虚部。

现在可以对所有 $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{ess}}$ 定义埃文斯函数 $\mathscr{E}(\lambda; \varepsilon)$，如下所示。令 $N(\lambda, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^4$ 为初始条件的集合，使得相应的 (A3) 解在 $\xi \to \infty$ 时指数衰减；类似地，令 $R(\lambda, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^4$ 为初始条件的集合，使得相应的 (A3) 解在 $\xi \to -\infty$ 时指数衰减。由于 $\mathscr{A}_\infty$ 在 $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{ess}}$ 时是双曲的，系统 (A3) 具有指数二分性，且子集 N 和 R 是 $\mathbb{R}^4$ 的维数为 2 的子空间。选取 N 的一组有序基 $\{\phi_{1,N}, \phi_{2,N}\}$ 以及 R的一组有序基 $\{\phi_{1,R}, \phi_{2,R}\}$，我们将埃文斯函数定义为

$$\mathscr{E}(\lambda; \varepsilon) = \det(\phi_{1,N}, \phi_{2,N}, \phi_{1,R}, \phi_{2,R}). \tag{A6}$$

埃文斯函数在其定义域上是解析的。最重要的是，$\mathscr{E}(\lambda)$为零当且仅当 λ是 (A3)的特征值；此外，该特征值的代数重数等于 λ 作为 $\mathscr{E}$ 的零点的阶数（参考文献 21，定理 4.1）。

b. 埃文斯函数的显式表达式

我们可以使用参考文献12中建立的理论来确定埃文斯函数 $\mathscr{E}$ 的显式表达式。特别是，我们注意到，参考文献12第4节中的方法及所得表达式可以直接应用于平移后的特征-值 $\hat{\lambda} = \lambda - \ell'(0)$。需要注意的是，尽管特征值系- 统 (A2)与带有参数 $\mu = 1 + \ell'(0)$ 的等效系统（参考文献12，(3.2)）在表面上类似，但脉冲解本身还通过存在- 性条件（参考文献12，(2.16)）取决于 μ。因此，我们不能先验地应用参考文献12第5节中的不稳定性结果。此外，由于受控脉冲的稳定性由 λ 的实部决定，平移后的特征值的稳定性条件

$$\hat{\lambda} := \lambda - \ell'(0) \tag{A7}$$

给出如下

$$\mathrm{Re}\ \hat{\lambda} < -\ell'(0). \tag{A8}$$

$\hat{}$ 关于 λ，本质谱给出如下

$$\hat{\sigma}_{\mathrm{ess}} = \left\{ \hat{\lambda} \in \mathbb{R} : \hat{\lambda} \le -1 + \max(0, -\ell'(0)) \right\}. \tag{A9}$$

$\hat{}$ 根据参考文献12中的分析可知，对于所有 $\lambda \notin \hat{}\sigma_{\mathrm{ess}}$，埃文斯函数 $\mathscr{E}$可写为

$$\mathscr{E}(\hat{\lambda}, \varepsilon) = 4\varepsilon\, t_f(\hat{\lambda}, \varepsilon)\, t_s(\hat{\lambda}, \varepsilon) \sqrt{1+\hat{\lambda}} \sqrt{1+\ell'(0)+\hat{\lambda}}, \tag{A10}$$

$\hat{}$ 关于所谓的传输函数 $t_f(\lambda, \varepsilon)$ 和 $\hat{}t_s(\lambda, \varepsilon)$。这些传输函数不一定是解析的，而仅仅是在 $\mathbb{C} \setminus \hat{}\sigma_{\mathrm{ess}}$ 上亚纯。正如参考文献12中所述，可以更详细地确定这些传输函数的结构。为便于今后参考，下面总结参考文献12中分析的最重要方面。

考虑 Sturm-Liouville 算子

$$\mathscr{L}_f = \partial_\xi^2 - 1 + 2f(u_*)v_p = \partial_\xi^2 - 1 + 3\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\xi}{2}\right), \tag{A11}$$

cf. (5). Its spectrum is given by

$$\hat{\sigma}_f = \left\{ \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 \right\} \cup (-\infty, -1), \tag{A12}$$

见参考文献 11 中的 $\hat{}\lambda_0 = \frac{5}{4}$、$\hat{}\lambda_1 = 0$ 和 $\hat{}\ \lambda_2 = -\frac{3}{4}$。‘快’传输函数 $t_f(\lambda, \varepsilon)$ 的零点在 ε 中的主阶近似由 $\mathscr{L}_f$ 的离散谱给出；此外，这些零点都是单零点。而且，‘慢’传输函数 $\hat{}\,\hat{}\,t_s(\lambda, \varepsilon)$ 恰好在 $t_f(\lambda, \varepsilon)$ 的零点处有一阶极点，$\hat{}$ 与关联于 $\lambda_1 = 0$ 的零点除外——也就是说，t_s 在每个与偶特征函数相关联的离散特征值处都有极点。因此，关于 $\mathscr{E}\hat{}$ (A10) 的零点（即 $\partial_\xi - \mathscr{A}$ 在 λ 中的点谱）的相关信息，都完整地编码在t_s 中。请注意，尽管零点—极点的概念】【。

消去在可控性和传递函数分析中起着核心作用，但这一现象出现在埃文斯函数的分解中，与本文采用的 Pyragas 控制方法完全无关；它仅与系统 (A2) 的慢快结构及其底层脉冲解 (u_p, v_p) 有关。

根据参考文献12的定理4.4，‘慢’传递函数t_s 在 ε 的主阶近似为：

$$t_s(\hat{\lambda}) = C(\hat{\lambda})\Big\{-2\sqrt{1+\hat{\lambda}+\ell'(0)} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{3}f(u)^2 v_p(\xi)^2 T_o(u)\right] + \frac{2}{3}v_{\mathrm{in}}(\xi;\hat{\lambda})v_p(\xi)f(u)^2T_o(u)\,\mathrm{d}\xi\Big\}, \tag{A13}$$

根据式 (4)，在$u = u_p(0) = u_* = T_o(u_*)$处取值。这里，$C(\lambda)$可以显式计算，但其绝对值存在一个正的统一下界；而$v_{\mathrm{in}}(\lambda)$是非齐次 Sturm–Liouville 问题的唯一有界解

$$\left(\mathscr{L}_f - \hat{\lambda}\right)v_{\mathrm{in}} = -f'(u_*)v_p(\xi)^2. \tag{A14}$$

利用脉冲解的显式主阶表达式 (5)（u_p, v_p），我们可以进一步分离出u_*的依赖项，并将t_s 改写为

$$t_s(\hat{\lambda}) = C(\hat{\lambda})\left\{-2\sqrt{1+\hat{\lambda}+\ell'(0)} + 2u_*\left[\frac{T_o'(u_*)}{T_o(u_*)} + 2\frac{f'(u_*)}{f(u_*)} + \frac{1}{3}\frac{f'(u_*)}{f(u_*)}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{v}_p(\xi)\hat{v}_{\mathrm{in}}(\xi;\hat{\lambda})\,\mathrm{d}\xi\right]\right\}, \tag{A15}$$

其中，$\hat{v}_p(\xi) = f(u_*)v_p(\xi)$，而$\hat{v}_{\mathrm{in}}$是下列问题的唯一有界解

$$\left(\mathscr{L}_f - \hat{\lambda}\right)\hat{v}_{\mathrm{in}} = -\hat{v}_p(\xi)^2, \tag{A16}$$

它不依赖于u_*。因此，t_s 的零点就是方程的（复数）解

$$-\frac{T_o'(u_*)}{T_o(u_*)} + \frac{1}{u_*}\sqrt{1+\hat{\lambda}+\ell'(0)} = \frac{f'(u_*)}{f(u_*)}\left(2 + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{v}_p(\xi)\hat{v}_{\mathrm{in}}(\xi;\hat{\lambda})\,\mathrm{d}\xi\right). \tag{A17}$$

注意，若$f'(u_*) = 0$，则v_{in} (A14)是平凡解；因此，埃文斯函数 (A10) 中不会发生零点与极点的消去，故 $\lambda_0 > 0$ 是 $\mathscr{E}$ 的零点，使脉冲不稳定且不可控。因此，假设处于非退化情形$f'(u_*) \neq 0$，我们将 (A17) 改写为

$$\alpha + \beta\sqrt{1+\hat{\lambda}+\ell'(0)} = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{v}_p(\xi)\hat{v}_{\mathrm{in}}(\xi;\hat{\lambda})\,\mathrm{d}\xi, \tag{A18}$$

其中 $\alpha = -6 - 3\mathrm{T}'\underline{\mathrm{o}(\mathrm{u}_*)}\mathrm{T}\underline{\mathrm{o}(\mathrm{u}_*)}\,\mathrm{f}(\mathrm{u}_*)\mathrm{f}'(\mathrm{u}_*)$以及 $\beta = 3\,\mathrm{f}(\mathrm{u}_*)\,\mathrm{f}'(\mathrm{u}_*)\,1\mathrm{u}_*$；注意，$\beta$原则上可以取除零以外的任意值，而 α 可以取任意值

在 $\mathbb{R}$ 中，取决于模型函数 f和T_o 的性质。现在可以将稳定性控制问题表述如下：

给定 α、$\beta \in \mathbb{R}$、 $\beta \neq 0$ 固定，能否选择控制参数 $\ell'(0) < 1$，使得位于本质谱 $\hat{\sigma}_{\mathrm{ess}}$ （A9）之外的（复）$\hat{\lambda}$-解满足（A18），全部位于直线 $Re\,\hat{\lambda} = -\ell'(0)$ 的左侧？

c. 存在本质谱时的谱分解

尽管原则上可以通过参数变易法／格林函数方法求解（A16），但用特殊函数积分表示的结果并不能轻易揭示（A18）右端项的函数行为。因此，我们使用韦伊–蒂奇马什–小代数谱理论来表示该积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{v}_p(\xi)\hat{v}_{\mathrm{in}}(\xi;\hat{\lambda})\,\mathrm{d}\xi = \left\langle \hat{v}_{\mathrm{in}}, \hat{v}_p\right\rangle_2$$

即表示为算子 $\mathscr{L}_f$（A11）的特征函数上的投影。我们遵循参考文献 23，第 2.18 节和第 4.19 节的处理方法。关于韦伊–蒂奇马什–小代数谱理论的现代且易于理解的概述，可参见参考文献 24。

首先，我们定义 $\theta(\xi;\lambda)$ 和 $\phi(\xi;\lambda)$，使得 $\{\theta, \phi\}$张成 $\mathscr{L}_f - \lambda$ 的核，并且 $\theta(0) = 1$， $\partial_\xi\theta(0) = 0$， $\phi(0) = 0$ 和 $\partial_\xi\phi(0) = -1$。由于$\mathscr{L}_f$在反射 $\xi \to -\xi$下是对称的， θ 是偶函数，而 ϕ作为 ξ的函数是奇函数。θ和 ϕ 都可以表示为缔合勒让德函数$P^{\lambda}_{-2\sqrt{1+\hat{\lambda}}-3}(\zeta)$和$Q^{\lambda}_{-2\sqrt{1+\hat{\lambda}}-3}(\zeta)$ 的线性组合，其中 $\zeta = \tanh\frac{\xi}{2}$，从而得到

$$\theta(\xi;\hat{\lambda}) = \frac{\Gamma\left(4+2\sqrt{1+\hat{\lambda}}\right)}{16\hat{\lambda}\sqrt{1+\hat{\lambda}}}\left[P_3^{-2\sqrt{1+\hat{\lambda}}}\left(\tanh\tfrac{\xi}{2}\right) + P_3^{-2\sqrt{1+\hat{\lambda}}}\left(-\tanh\tfrac{\xi}{2}\right)\right],$$

$$\phi(\xi;\hat{\lambda}) = \frac{\Gamma\left(4+2\sqrt{1+\hat{\lambda}}\right)}{16\left(\hat{\lambda}-\frac{5}{4}\right)\left(\hat{\lambda}+\frac{3}{4}\right)}\left[P_3^{-2\sqrt{1+\hat{\lambda}}}\left(\tanh\tfrac{\xi}{2}\right) - P_3^{-2\sqrt{1+\hat{\lambda}}}\left(-\tanh\tfrac{\xi}{2}\right)\right].$$

接下来，对于 $\lambda \in (-\infty, -1)$，我们确定 $m_2(\lambda)$，使得线性组合 $\theta(\xi;\hat{\lambda}) + m_2(\hat{\lambda})\phi(\xi;\hat{\lambda}) \in L^2(0,\infty)$；我们得到

$$m_2(\hat{\lambda}) = -\frac{\left(\hat{\lambda}-\frac{5}{4}\right)\left(\hat{\lambda}+\frac{3}{4}\right)}{\hat{\lambda}\sqrt{1+\hat{\lambda}}} = i\frac{\left(\hat{\lambda}-\frac{5}{4}\right)\left(\hat{\lambda}+\frac{3}{4}\right)}{\hat{\lambda}\sqrt{-1-\hat{\lambda}}}. \tag{A19}$$

根据参考文献 23，第 4.19节，对于 $f \in L^2(\mathbb{R})$，我们得出结论：

$f(\xi) = f(-\xi)$，我们有展开式

$$f(\xi) = \sum_{i=0}^{2} \langle \psi_i, f\rangle_2 \, \psi_i(\xi) + \int_{-\infty}^{-1} \frac{\hat{\lambda}\sqrt{-1-\hat{\lambda}}}{2\left(\hat{\lambda}-\frac{5}{4}\right)\left(\hat{\lambda}+\frac{3}{4}\right)} \left\langle \theta(\cdot,\hat{\lambda}), f\right\rangle_2 \theta(\xi,\hat{\lambda})\,\mathrm{d}\hat{\lambda} \tag{A20}$$

其中，与特征值 λ_i 相关的^（L^2-归一化）特征函数 $\psi_i(\xi)$ 由下式给出。

$$\begin{aligned}
\psi_0(\xi) &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2}}\operatorname{sech}^3\frac{\xi}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2}}\left(1-\zeta^2\right)^{3/2},\\
\psi_1(\xi) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2}}\operatorname{sech}^2\frac{\xi}{2}\tanh\frac{\xi}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2}}\zeta\left(1-\zeta^2\right),\\
\psi_2(\xi) &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\left(-3+2\cosh\xi\right)\operatorname{sech}^3\frac{\xi}{2}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\left(-1+5\zeta^2\right)\sqrt{1-\zeta^2}.
\end{aligned}$$

注意，$\langle f\ \ \psi_1\rangle_2 = 0$因为 $f(\xi)$ 被假设为偶函数，而$\psi_1(\xi) = -\sqrt{\frac{5}{6}}\partial_\xi \hat{v}_P$为奇函数。我们将展开式 (A20) 应用于 $\hat{v}_P(\xi)$，随后考虑内积

$$\left\langle \hat{v}_{\mathrm{in}}(\cdot,\hat{\lambda}), \hat{v}_p\right\rangle_2 = \sum_{i=0}^{2} \langle \psi_i, \hat{v}_p\rangle_2 \left\langle \hat{v}_{\mathrm{in}}(\cdot,\hat{\lambda}), \psi_i\right\rangle_2 + \int_{-\infty}^{-1} \frac{\hat{\mu}\sqrt{-1-\hat{\mu}}}{2\left(\hat{\mu}-\frac{5}{4}\right)\left(\hat{\mu}+\frac{3}{4}\right)} \langle \theta(\cdot,\hat{\mu}), \hat{v}_p\rangle_2 \left\langle \hat{v}_{\mathrm{in}}(\cdot,\hat{\lambda}), \theta(\cdot,\hat{\mu})\right\rangle_2 \mathrm{d}\hat{\mu}, \tag{A21}$$

参见文献 24，定理 1.8。现在，因为

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{v}_p^2, \psi_i\right\rangle_2 = \ & \left\langle -\left[\mathscr{L}_f - \hat{\lambda}\right]\hat{v}_{\mathrm{in}}, \psi_i\right\rangle_2 = \left\langle \hat{v}_{\mathrm{in}}, -\left[\mathscr{L}_f - \hat{\lambda}^*\right]\psi_i\right\rangle\\
&= \left\langle \hat{v}_{\mathrm{in}}, -(\hat{\lambda}_i - \hat{\lambda}^*)\psi_i\right\rangle = \left(\hat{\lambda}-\hat{\lambda}_i\right)\langle \hat{v}_{\mathrm{in}}, \psi_i\rangle
\end{aligned}$$

并且等价地

$$\left\langle \hat{v}_p^2, \theta(\cdot,\hat{\mu})\right\rangle = \left(\hat{\lambda}-\hat{\mu}\right)\left\langle \hat{v}_{\mathrm{in}}(\cdot,\hat{\lambda}), \theta(\cdot,\hat{\mu})\right\rangle,$$

我们发现

$$\left\langle \hat{v}_{\mathrm{in}}(\cdot,\hat{\lambda}), \hat{v}_p\right\rangle_2 = \sum_{i=0}^{2} \frac{\langle \psi_i, \hat{v}_p\rangle_2 \left\langle \hat{v}_p^2, \psi_i\right\rangle_2}{\hat{\lambda}-\hat{\lambda}_i} + \int_{-\infty}^{-1} \frac{\hat{\mu}\sqrt{-1-\hat{\mu}}}{2\left(\hat{\mu}-\frac{5}{4}\right)\left(\hat{\mu}+\frac{3}{4}\right)} \frac{\langle \theta(\cdot,\hat{\mu}), \hat{v}_p\rangle_2 \left\langle \hat{v}_p^2, \theta(\cdot,\hat{\mu})\right\rangle_2}{\hat{\lambda}-\hat{\mu}} \mathrm{d}\hat{\mu}. \tag{A22}$$

所有内积都可以显式计算：

$$\left\langle \psi_0, \hat{v}_p\right\rangle_2 = \frac{9\pi}{32}\sqrt{\frac{15}{2}}, \tag{A23}$$

$$\left\langle \psi_2, \hat{v}_p\right\rangle_2 = \frac{3\pi}{32}\sqrt{\frac{3}{2}}, \tag{A24}$$

$$\left\langle \hat{v}_p^2, \psi_0\right\rangle_2 = \frac{45\pi}{128}\sqrt{\frac{15}{2}}, \tag{A25}$$

$$\left\langle \hat{v}_p^2, \psi_2\right\rangle_2 = -\frac{9\pi}{128}\sqrt{\frac{3}{2}}, \tag{A26}$$

$$\left\langle \theta(\cdot,\hat{\mu}), \hat{v}_p\right\rangle_2 = -\frac{3\pi}{4}\sqrt{-1-\hat{\mu}}\,\operatorname{csch}\pi\sqrt{-1-\hat{\mu}}, \tag{A27}$$

$$\left\langle \hat{v}_p^2, \theta(\cdot,\hat{\mu})\right\rangle_2 = -\frac{3\pi}{4}\hat{\mu}\sqrt{-1-\hat{\mu}}\,\operatorname{csch}\pi\sqrt{-1-\hat{\mu}}, \tag{A28}$$

可用于写出

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{v}_{\mathrm{in}}(\cdot,\hat{\lambda}), \hat{v}_p\right\rangle_2 =& \frac{6075\pi^2}{8192}\frac{1}{\hat{\lambda}-\frac{5}{4}} - \frac{81\pi^2}{8192}\frac{1}{\hat{\lambda}+\frac{3}{4}} \qquad \text{(A29)}\\
&+ \int_{-\infty}^{-1} \frac{9\pi^2}{32}\frac{\hat{\mu}^2(-1-\hat{\mu})^{3/2}}{\left(\hat{\mu}-\frac{5}{4}\right)\left(\hat{\mu}+\frac{3}{4}\right)}\frac{\operatorname{csch}^2\pi\sqrt{-1-\hat{\mu}}}{\hat{\lambda}-\hat{\mu}}\mathrm{d}\hat{\mu}\\
=& \frac{6075\pi^2}{8192}\frac{1}{\hat{\lambda}-\frac{5}{4}} - \frac{81\pi^2}{8192}\frac{1}{\hat{\lambda}+\frac{3}{4}} \qquad \text{(A30)}\\
&+ \int_{1}^{\infty} \frac{9\pi^2}{16}\frac{\kappa^4(1+\kappa^2)^2}{\left(\kappa^2+\frac{9}{4}\right)\left(\kappa^2+\frac{1}{4}\right)}\frac{\operatorname{csch}^2\pi\kappa}{\hat{\lambda}+\kappa^2+1}\mathrm{d}\kappa.
\end{aligned}$$

我们可以利用这些信息来研究（A18）的解。为此，我们提出以下引理，其中总结了内积的相关性质

$\left\langle \hat{v}_{\mathrm{in}}(\cdot,\hat{\lambda}), \hat{v}_p\right\rangle_2$ (A29).

引理 3. 令 $R(\hat{\lambda}) = \left\langle \hat{v}_{in}(\cdot,\hat{\lambda}), \hat{v}_p\right\rangle_2$ 如(A29)所示。则以下陈述成立：

(I) $sgn\ Im\ R(\hat{\lambda}) = -sgn\ Im\ \hat{\lambda}$;

^ ^ *(II)* 存在 $c > 0$ 使得，如果 $Re\ \lambda > c$，那么 $Re\ R(\lambda) > 0$;

^^ ^ *(III)* 对于实数 $\lambda > \lambda_0$，$R(\lambda)$ 为正且严格单调递减；

^ *(IV)* 存在 $d_{1,2} > 0$ 使得，若 $-d_1 < Re\ \lambda < d_2$, 则^ $Re\ R(\lambda) < 0$.

证明。我们定义

$$R_{\mathrm{d}}(\hat{\lambda}) = \frac{81\pi^2}{8192}\left(\frac{75}{\hat{\lambda}-\frac{5}{4}} - \frac{1}{\hat{\lambda}+\frac{3}{4}}\right),$$

$$R_{\mathrm{c}}(\hat{\lambda}) = \int_{1}^{\infty} \frac{9\pi^2}{16}\frac{\kappa^4(1+\kappa^2)^2}{\left(\kappa^2+\frac{9}{4}\right)\left(\kappa^2+\frac{1}{4}\right)}\frac{\operatorname{csch}^2\pi\kappa}{\hat{\lambda}+\kappa^2+1}\mathrm{d}\kappa,$$

因此 $R(\lambda) = R_d(\lambda) + R_c(\lambda)$。

(I) 记 $\lambda = a + ib$，则对 $k,m \in \mathbb{R}$，有 $\operatorname{Im} k\lambda + m = b\,k\,(a+m)^2 + b^2$。由此立即可得 $\operatorname{sgn} \operatorname{Im} R_c(\lambda) = -\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \lambda$。对于 R_d，我们估计 $\frac{75}{(a-\frac{5}{4})^2+b^2} > \frac{75-1}{b^2+\max\left((a-\frac{5}{4})^2,(a+\frac{3}{4})^2\right)} > 0$，由此可得 $\operatorname{sgn} \operatorname{Im} R_d(\lambda) = -\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \lambda$。

(II) 使用与 (I) 中相同的记号，对 $k,m \in \mathbb{R}$，有 $\operatorname{Re} -k\lambda + m = -k(a+m)/((a+m)^2+b^2)$。由此立即可得 $\operatorname{Re} R_c(\lambda) > 0$，对所有 $a > 0$ 均成立。对于 R_d，我们发现 $\frac{75(a-\frac{5}{4})}{(a-\frac{5}{4})^2+b^2} - a + \frac{3}{4}\frac{(a+\frac{3}{4})^2+b^2}{} > 0$，对 $a > \frac{75\cdot\frac{5}{4}+1\cdot\frac{3}{4}}{75-1} > 0$ 和任意 $b \in \mathbb{R}$ 均成立。

(III) 若 $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$，则 $-k\lambda_2 + m \le -k\lambda_1 + m$ 对于 $km > 0$ 成立；因此可得，$R_c(\lambda)$ 对实数 $\lambda > 0$ 严格单调递减。此外，由 (II) 的证明可知，$R_c(\lambda)$ 对实数 $\lambda > 0$ 为正。对于 $R_d(\lambda)$，我们计算 $\frac{dR}{d\hat{\lambda}} = \frac{81\pi^2}{8192}\left(-\frac{75}{\hat{\lambda}-\frac{5}{4}}(\,)_2 + {}_1(\hat{\lambda}+\frac{3}{4})_2\right) < 0$，其中 $\lambda > \lambda_0 = \frac{5}{4}$。此外，当 $\lambda \downarrow \lambda_0 = \frac{5}{4}$ 时，$\lim_{\hat{\lambda}\to\infty} R_d(\lambda) = 0$，且 $R_d(\lambda) \to +\infty$；由此可知，R_d 对实数 $\lambda > \lambda_0$ 为正且严格单调递减。

(IV) 对于 R_d，我们发现 $\frac{75(a-\frac{5}{4})}{(a-\frac{5}{4})^2+b^2} - a + \frac{3}{4}\frac{(a+\frac{3}{4})^2+b^2}{} < 0$ 对于 $-\frac{3}{4} < a < \frac{5}{4}$ 以及任意 $b \in \mathbb{R}$。对于 R_c，当 $a \ge 0$ 时，我们使用估计 $\kappa^2 + \frac{9}{4} > \kappa^2 + 1, \kappa^2 + \frac{1}{4} > \kappa^2$ 和 $\operatorname{Re}\frac{1}{\lambda+\kappa^2+1} = \frac{a+\kappa^2+1}{(a+\kappa^2+1)^2+b^2} \le \frac{1}{\kappa^2+1}$，得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} R_c(\hat{\lambda}) &\le \int_1^\infty \frac{9\pi^2}{16}\kappa^2 \operatorname{csch}^2 \pi\kappa\, d\kappa \\ &= \frac{9\pi}{16}\left[3 + \coth\pi - \frac{2}{\pi}\log\left(-1+e^{2\pi}\right) + \frac{1}{\pi^2}\operatorname{Li}_2\left(e^{-2\pi}\right)\right] \\ &\approx 9.05\cdot 10^{-3}.\end{aligned}$$

由 $\operatorname{Re} R = 、\operatorname{Re} R_d +$ 和 $\operatorname{Re} R_c$ 在 (a,b) 上的连续性可得该结论，其中 $-\frac{3}{4} < a < \frac{5}{4}$。 □

d. 比例反馈控制的结果

利用前几节得到的结果，我们可以针对方程 (A18) 的解表述如下引理：

引理4. 考虑关于 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的方程 (A18)，其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 和 $\ell'(0) < 1$，这里 v_{in} 是 (A16) 的唯一有界解，且 $v_P(\xi) = \frac{3}{2}\operatorname{sech}^2\frac{\xi}{2}$，参见 (5)。则以下结论成立：

1. 若 $\beta > 0$，则 (A18) 的所有解 λ 均位于实轴上。*2.* 若 $\beta > 0$ 且 $\alpha \le 0$，则对于任意 $\ell'(0) \in \mathbb{R}$，总存在一个实数正解 $\lambda > \lambda_0$，满足 (A18)。

3. 如果 $-\alpha \ge \beta > 0$，那么对于任意 $\ell'(0) \in \mathbb{R}$，存在一个实的正解 $\lambda > -\ell'(0)$ 满足 (A18)。

4. 如果 $0 \le -\alpha < \beta$，那么存在一个值 $\ell'(0) < -\lambda_0$，使得所有解 λ 满足 （A18）的 $Re\ \lambda < -\ell$ （0）。

5. 如果 $\beta > 0$ 和 $\alpha > 0$，那么存在一个值 $\ell'(0) < -(1+\lambda_0)$，使得 （A18）没有解。

6. 如果 $\beta < 0$，那么存在 $\Lambda < 0$，使得当 $\ell'(0) < \Lambda$时，（A18）的所有解 λ 都位于竖直线 $\left\{Re\,\lambda = c\right\}$的左侧，其中 $c > 0$ 与 α、β和$\ell'(0)$无关。

证明。我们定义

$$L(\hat{\lambda}) := \alpha + \beta\sqrt{1+\hat{\lambda}+\ell'(0)},$$

因此（A18）可以写成$L(\lambda) = R(\lambda)$。

1. 如果 $\beta > 0$，那么 (A18) 的所有解都位于实轴上。对于主值复平方根 $\sqrt{z}$，其对所有远离负实轴的 z 都有定义，有 $\operatorname{Re}\sqrt{z} > 0$ 且 $\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\sqrt{z} = \operatorname{sgn}\operatorname{Im} z$。由此可知，如果 $\beta > 0$，则 $\operatorname{Im} L(\lambda)$ 只有在二者均为零时才可能等于 $\operatorname{Im} R(\lambda)$，根据引理 3 (I)。

2. 如果 $\beta > 0$ 和 $\alpha \le 0$，那么对于任意 $\ell'(0) \in \mathbb{R}$，总是存在一个实的正解 $\lambda > \lambda_0$。根据陈述 1，我们取 $\lambda \in \mathbb{R}$。根据引理 3 (II)，当 λ 充分大时，R_d 和 R_c 均为正；此外，当 $\lambda \to \infty$时，$R(\lambda) \to 0$。因此，对于充分大的 λ，有 $L(\lambda) > R(\lambda)$，因为 $\beta > 0$。此外，由于观察到当 $\lambda \downarrow \lambda_0 = \frac{5}{4}$时，$R(\lambda) \to +\infty$，结合 $L(\lambda)$对于 $\lambda \ge -1 - \ell'(0)$ 具有连续性且当 $\lambda \downarrow -1 - \ell'(0)$时 $L(\lambda) \to \alpha \le 0$这一事实，根据 $R(\lambda)$对于 $\lambda > \lambda_0 = \frac{5}{4}$的连续性可知，方程 (A18) 存在一个实的正解，该解位于点 $\lambda = \lambda_0$的右侧，并且位于点 $\lambda = -1 - \ell'(0)$的右侧。

3. 若 $-\alpha \ge \beta > 0$，则对于任意 $\ell'(0) \in \mathbb{R}$，存在一个实的正解 $\lambda > -\ell'(0)$ 到 (A18)。由于对于实数 $\lambda > \lambda_0$，根据引理3（III），$R(\lambda)$ 为正，图像 $R(\lambda)$ 与$L(\lambda)$的交-点位于水平轴之上。由于 $\beta > 0$和 $\alpha < 0$，$L(\lambda)$ 的图像在其定义域上严格单调递增，并且在与$R(\lambda)$ 的图像相交之前先与水-平轴相交，随着 λ 增大。将两个图像相交时的 λ-值记为 λ_*。根据图像的单调性，可得 λ_* 是（A18）的最大解。此外，as$L(\lambda)$ 当且仅当 $\hat{\lambda} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 1 - \ell'(0)$ 时，我们得出 $\lambda_* > \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 1 - \ell'(0) > -\ell'(0)$，因为 $-\alpha \ge \beta$。

4. 如果 $0 \le -\alpha < \beta$，则存在一个值 $\ell'(0) < -\lambda_0$使所有解 λ 满足 (A18) $\operatorname{Re}\lambda < -\ell(0)$。我们计算$L(-1-\ell'(0)) = \alpha \le 0$和$L(-\ell'(0)) = \alpha + \beta > 0$。因此，(A18)的最大解 λ_* 包含在区间 $(-1-\ell'(0)\ -\ell'(0))$ 中，当且仅当$R(-\ell'(0)) < \alpha + \beta$由于 $L(\lambda)$ 和 $R(\lambda)$ 的单调性和连续性。从

由引理3（III）可知，$R(-\ell'(0)) < \alpha+\beta$ 对于充分大的 $|\ell'(0)|$。

5. 如果 $\beta>0$ 且 $\alpha>0$，那么存在一个值 $\ell'(0) <-(1+\hat{}\lambda_0)$ 使得(A18)没有解。 根据引理3（III），存在$\hat{}k > \hat{}\lambda_0$ 使得 $R(\hat{}\lambda) < \alpha$ 对所有 $\hat{}\lambda > \hat{}k$成立。选择 $\ell'(0) = -1-\hat{}k$，使得 $L(\hat{}k) = L(-1-\ell'(0)) = \alpha$，我们看到 (A18)不可能有任何实数解，这意味着根据陈述1，(A18) 没有任何（复数）解。

$\hat{}$ 6. 如果 $\beta<0$，那么存在 $\Lambda<0$，使得当 $\ell'(0) < \hat{}\Lambda$ 时，（A18）的所有解都位于竖直线 $\left\{\mathrm{Re}\,\hat{}\lambda = c\right\}$ 的左侧，其中 $c>0$ 与 α，β 以及 $\ell'(0)$ 无关。

假设 $\alpha \le 0$，并考虑 $\hat{}\lambda \in \mathbb{R}$。我们可以选择 $\ell'(0) <\hat{}\,\hat{}-(1+\lambda_0)$，确保 $L(\lambda)$ 的定义域完全位于 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\ \lambda=\lambda_0$ 的右侧。在此定义域上，我们有 $L(\lambda) < 0$，$\hat{}$而 $R(\lambda) > 0$，由此我们得出，(A18) 不存在实数解。在同样假设 $\alpha \le 0$下，相同的推理可以扩展到 (A18) 的复数解：因为对于所有远离负实$\hat{}$ $\hat{}$轴的 z，$\mathrm{Re}\sqrt{z} > 0$，所以对于其定义域上的所有 λ，我们有 $\mathrm{Re}\,L(\lambda) < 0$；另一方面，根据引理 3 (II)，存在一个 $c>0$，使得对于直线 $\left\{\mathrm{Re}\hat{}\,\lambda = c\right\}$ 右侧的所有 λ，$\mathrm{Re}\,R(\lambda) > 0$。

$\hat{}$ 现在假设 $\alpha>0$。对于 $\lambda \in \mathbb{R}$，可以采用与情形 $\alpha \le 0$ 相同的推理，选择 $\ell'(0) < \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 1-\hat{}\lambda_0$。$\hat{}$ 对于复数 λ 的推理也与情形 $\alpha \le 0$ 类似，此时取 $\ell'(0) < \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 1 - c$，同样使用引理 3 (II)。

□

e. 完成定理 ***1*** 的证明

引理4中的结果现在可用于证明定理 1，现为方便起见重述如下：

定理。令 $0<\varepsilon\ll 1$ 足够小，并假设u_* 是(4)的一个非退化解。考虑对称的奇异脉冲解(u_p,v_p)，其关于 ε 的首阶形式由(2) 给出，并引入 $v:=2f'(u_*)f(u_*) + T'_o(u_*)T_o(u_*)$。

1. 如果 $f'(u_*)=0$，则奇异脉冲 (u_p, v_p) 对于如 (7) 中所实现的任意比例控制函数$\ell(v-v_p)$ 始终是不稳定的。

2. 如果 $f'(u_*)<0$，则可以选择一个如 (7) 中所实现的比例控制函数 $\ell(v-v_p)$，使奇异脉冲 (u_p,v_p) 稳定。

3. 设 $f'(u_*)>0$。

*(a)*如果 $\rho \succ {}^1u_*$，那么奇异脉冲(u_p,v_p) 对于按 (7) 实现的比例控制函数 $\ell(v-v_p)$ 的任何选择，始终不稳定。

(b) 若 $\rho <{}^1u_*$，则可以选择一个比例控制函数 $\ell(v-v_p)$，如 (7) 中所实现的那样，使脉冲解 (u_p, v_p) 稳定。

证明。脉冲解（u_p,v_p）当且仅当平移后的特征值 $\hat{}\lambda=\lambda-\ell'(0)$ (A7) 满足条件 $\mathrm{Re}\,\hat{}\lambda < -\ell'(0)$ (A8) 时，在谱意义下稳定。特征值 $\hat{}\lambda$ 对应于埃文斯函数 $\mathscr{E}(\lambda,\varepsilon)$ (A10) 的零点。这些零点在 ε 的主导阶上由 (A17) 的解给出。

断言 1 源于以下观察：当 $f'(u_*)=0$ 时，满足 (A14) 的唯一解v_{in} 是平凡解。因此，慢传输函数t_s (A15)在 $\lambda=\lambda_0$ 处没有极点；所以，埃文斯函数 (A10) 中不会发生消去——如参考文献12中所详述。由此可知，位于 λ_0 附近的快速传输函数 t^f 的正实零点也是完整埃文斯函数 $\mathscr{E}$ 的零点，这意味着脉冲解 (u_p,v_p) 不稳定。

如果 $f'(u_*)\neq 0$，则 (A17) 具有 (A18) 的形式，其中 $\alpha=-6-3T'o(u_*)\,To(u_*)\,f(u_*)\,f'(u_*)$ 以及 $\beta=3f(u_*)\,f'(u_*)\,1u_*$。当 $\beta<0$时，由引理4 (6)可知，存在一个$c>0$，使得（A18）的所有解都位于直线 $\left\{\mathrm{Re}\,\hat{}\,\lambda=c\right\}$的左侧。由于$c>0$ 尤其与$\ell'(0)$无关，且该结论对所有 $\ell'(0)<\hat{}\Lambda<0$都成立，因此我们可以选取 $\ell'(0)<-c$，这意味着（A18）的所有解都满足稳定性判据 $\mathrm{Re}\,\hat{}\,\lambda<-\ell'(0)$。由于 $\beta<0$ 当且仅当$f'(u_*)<0$，因此断言 2得证。

当 $\alpha>0$ 且 $\beta>0$时，由引理4 (5)可知，当 $\ell'(0)$为负且 $|\ell'(0)|$ 足够大时，（A18）没有任何解。由于 $f'(u_*)\neq 0$，靠近 λ_0和 λ_2的$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ t $f(\lambda,\varepsilon)$的零点会被 $t_s(\lambda,\varepsilon)$的极点抵消；剩余的零点$\hat{}\ \lambda_1=0$ 在 $\ell'(0)<0$时是稳定的。因此，埃文斯函数 $\mathscr{E}(\lambda,\varepsilon)$ (A10)的所有零点都满足 $\mathrm{Re}\,\hat{}\,\lambda<-\ell'(0)$，这意味着$(u_p, v_p)$在谱意义下稳定。条件 $\alpha>0$ 等价于 $T'o(u_*)\,To(u_*)\,f(u_*)\,f'(u_*)>-2$，~~而$\beta>0$~~等价于 $f(u_*)\,f'(u_*)\,1u_*>0$。根据假设，~~$u_*>0$~~ 和 $f(u_*)>0$) 均成立，因此后一个条件等价于 $f'(u_*)>0$。由此可将 $\alpha>0$-条件改写为 $T'o(u_*)\,To(u_*)<-2\,f'(u_*)\,f(u_*)$，从而证明断言 3的第二部分适用于 $2\,f'(u_*)\,f(u_*) + T'o(u_*)\,To(u_*)<0$。

当 $0\le-\alpha<\beta$ 时，由引理4 (4) 可知，(A18) 的所有解均满足稳定性判据 $\mathrm{Re}\,\hat{}\,\lambda<-\ell'(0)$。与前面一样，条件 $\beta>0$ 等价于 $f'(u_*)$，而条件 $\beta>-\alpha\ge 0$ 可改写为 $0\le 2\,f'(u_*)\,f(u_*) + T'o(u_*)\,To(u_*)<{}^1u_*$，由此完成断言 3 b) 的证明。

当 $-\alpha>\beta>0$ 时，由引理4 (3) 可知，无论 $\ell'(0)$ 取何值，(A18) 始终存在一个不满足稳定性判据 $\mathrm{Re}\,\hat{}\,\lambda<-\ell'(0)$ 的解。这意味着，在条件 $-\alpha>\beta>0$ 下，对于任意选择的控制函数 ℓ，脉冲 (u_p,v_p) 都是不稳定的。条件 $\beta>0$ 等价于 $f'(u_*)>0$，而 the

条件 $-\alpha > \beta$可改写为$f'(u_*)\,f(u_*) \;+\; T'_o(u_*)\,T_o(u_*) \geq \frac{1}{u_*}$，这证明了**断言 3 a)**。 □

参考文献

[1]D. Henry，《半线性抛物方程的几何理论》（Springer-Verlag，柏林，1981）。[2]A. T. Winfree，“别洛乌索夫–扎博廷斯基振荡器的前史”，《化学教育杂志》**61**，661（1984）。[3]J. D. Murray，“豹子身上的斑点是如何形成的”，《科学美国人》**258**，80–87（1988）。[4]P. Chen 和 J. Vinals，“法拉第波中的振幅方程与图案选择”，《物理评论 E》 **60**，559 （1999）。[5]E. Bodenschatz 、 W. Pesch 和 G. Ahlers，“瑞利–贝纳德对流的最新进展”，《流体力学年度评论》**32**，709–778（2000）。[6]J. A. Sherratt 和 G. J. Lord，“半干旱环境中植被条带模型的非线性动力学与图案分岔”，《理论种群生物学》**71**，1–11（2007）。[7]J. D. Crawford 和 E. Knobloch，“流体动力学中的对称性与对称性破缺分岔”，《流体力学年度评论》**23**，341–387（1991）。[8]A. M. Turing，“形态发生的化学基础”，《伦敦皇家学会哲学汇刊 B辑：生物科学》**237**，37–72（1952）。[9]R. Hoyle，《图案形成：方法导论》（剑桥大学出版社，2006）。[10]M. Golubitsky 和 I. Stewart，《对称性视角：从相空间与物理空间中的平衡到混沌》，《数学进展》第200卷（Birkhäuser，巴塞尔，2003）。[11]F. Veerman 和 A. Doelman，“具有慢非线性的 Gierer–Meinhardt 方程中的脉冲”，《SIAM 应用动力系统杂志》**12**，28–60（2013）。[12] A. Doelman 和 F. Veerman，“二分量奇异摄动反应扩散方程中脉冲的显式理论”，《动力系统与微分方程杂志》**27**，555–595（2015）。[13]A. Doelman、R. Gardner 和 T. Kaper，“反应扩散方程中的大振幅稳定脉冲解”，《印第安纳大学数学杂志》**50**，443–507（2001）。[14]K. Pyragas，“通过自控制反馈连续控制混沌”，《物理快报 A》**170**，421–428（1992）。[15]K. Pyragas，“混沌的延迟反馈控制”，《伦敦皇家学会哲学汇刊 A辑：数学、物理与工程科学》**364**，2309–2334（2006）。[16]J. E. Socolar、D. W. Sukow 和 D. J. Gauthier，“快速动力系统中不稳定周期轨道的稳定化”，《物理评论 E》**50**，3245（1994）。[17]W. Lu、D. Yu 和 R. G. Harrison，“光学时空混沌中的图案控制”，《物理评论快报》**76**，3316（1996）。[18]K. Montgomery 和 M. Silber，“复 Ginzburg–Landau 方程行波解的反馈控制”，《非线性》**17**，2225（2004）。[19]I. Schneider，“偏微分方程控制三元组方法导论”，载于《动力学图案》，《Springer 数学与统计学会议录》第205卷，P. Gurevich、J. Hell、B. Sandstede 和 A. Scheel 编（2017），第269–285页。[20]I. Schneider、B. de Wolff 和 J.-Y. Dai，“Ginzburg–Landau 螺旋波的图案选择性反馈稳定化”，《理性力学与分析档案》（2022）。[21]B. Sandstede，“行波稳定性”，载于《动力系统手册》第2卷，B. Fiedler 编（2002），第983–1055页。[22]T. Kapitula 和 K. Promislow，《非线性波的谱稳定性与动力学稳定性》，《应用数学科学》第185卷（Springer，2013）。[23]E. Titchmarsh，《与二阶微分方程相关的特征函数展开》，第2版，第1卷（牛津大学出版社，1962）。[24]N. Higson 和 Q. Tan，“论 Weyl 谱定理”，《数学论述》**38**，180–201（2020）。[25]R. Schnaubelt，“抛物型非自治演化方程的渐近行为”，载于《演化方程的泛函分析方法》，《数学讲义》第1855卷，M. Iannelli、R. Nagel 和 S. Piazzera 编（Springer，2004），第5章，第401–472页。[26]B. de Rijk、A. Doelman 和 J. Rademacher，“空间周期脉冲图案的谱与稳定性：通过 Riccati 变换进行埃文斯函数分解”，《SIAM 数学分析杂志》**68**，61–121（2016）。[27]I. Schneider，《偏微分方程的时空反馈控制》，博士论文，柏林自由大学（2016）。[28]A. Doelman、J. Rademacher、B. de Rijk 和 F. Veerman，“同宿极限附近周期脉冲图案的失稳机制”，《SIAM 应用动力系统杂志》**17**，1833–1890（2018）。[29]F. Veerman，“奇异摄动反应扩散系统中的呼吸脉冲”，《非线性》**28**，2211–2246（2015）。[30]J. Wu，《偏泛函微分方程理论及应用》，《应用数学科学》第119卷（Springer，1996）。