arXiv:2304.03345v1 [math.GR] 6 Apr 2023

关于有限域上的正则多面体的札记

Caleb Ji

2023年4月10日

摘要

Grothendieck 在《*Es-quisse d'un Programme*》第4节提出了有限域上正则多面体的理论。他从正则多面体的自同构群中提取出某些关键参数，这些参数可以推广到任意亏格，并专门化到各种环上。在本文中，我们对他所勾勒的理论给出一种解释，从而说明他的一些观察。我们能够计算一些明确的例子，并回答 Grothendieck 提出的、与儿童画相关的一个问题。最后，我们强调 Grothendieck 的一些观察，这些观察仍无法通过我们目前的方法得到解释。

1 引言

1.1 历史背景

为了解五次方程，Klein 在其著作 $\mathbb{CP}^1$《二十面体讲义》中，将柏拉图立体视为 [1]的有限分歧覆盖，以此研究其代数几何。如今，这种关于正则多面体的观点被视为儿童画理论的一部分；相关内容见 Grothendieck 的方案《方案概述》[1]的第 2 节和第 3 节。Grothendieck 引入的新元素是绝对伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$对儿童画的作用，这引发了他对类阿贝尔几何的思考。此后，人们在儿童画计算和类阿贝尔几何方面都开展了大量研究。然而，本文关注的是 Grothendieck 关于有限域上的正则多面体的新观点，这正是 [1]第 4 节的主题。这一主题可以看作研究与 $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$的伽罗瓦覆盖相对应的儿童画。伽罗瓦条件限制了所考察儿童画的组合性质，并由此自然地将正则多面体推广到任意基环上。

尽管本部分概述了这一理论并提出了一些具体问题，Grothendieck的这一提议似乎并未引起任何关注。一个可能的原因是，他所陈述的一些结果似乎难以正确理解和再现。本笔记旨在对他的理论给出一种合理的诠释，并利用这一诠释计算一些例- 子。尽管这种诠释无法解释 Grothendieck 在本节中的所有观察结果，我们希望它能为其他可能有兴趣进一步探究这些思想的人起到宣传作用。

在本节的其余部分，我们将快速概述儿童画。第2 节旨在详细解释 Grothendieck 对通用正则多面体的定义，以及他如何定义任意基环上的正则多面体。在第3 节中，我们将介绍关于有限域上的正则多面体的一些具体计算，这些计算的动机源于Grothendieck提出的一个问题：哪些有限正则映射可以由有限域上的正则多面体得到。

致谢。 我们感谢 Will Sawin 提供了一些有趣的意见。

1.2 儿童画综述

这里我们简要介绍儿童画，只聚焦于研究伽罗瓦情形所需的内容。更全面的介绍可参见例如 [2]。

一个童画由一个曲面 X 及其上绘制的图组成，该图将曲面划分为开胞腔。旗标定义为由一个顶点、包含该顶点的一条边的中点，以及包含该边的一个面的中心构成的集合。按照 [1], , 将制图群 $\underline{C_2}$ 定义为

$$\underline{C_2} \coloneqq \langle \sigma_v, \sigma_e, \sigma_f | \sigma_v^2 = \sigma_e^2 = \sigma_f^2 = (\sigma_v \sigma_f)^2 = 1 \rangle.$$

注意， $\underline{C_2}$ 通过允许 σ_v、 σ_e、σ_f 分别对顶点、边和面进行反射，从而作用于 X 的旗标集合。

考虑一个定向版本会很有用，在这个版本中，我们只考虑定向旗标，即按逆时针顺序排列为面 – 顶点 – 边的旗标。现在定义定向制图群为

$$\underline{C_2}^+ \coloneqq \langle \rho_v, \rho_e, \rho_f | \rho_f \rho_e \rho_v = \rho_e^2 = 1 \rangle.$$

注意， $\underline{C_2}^+$ 是由 $\rho_v = \sigma_f \sigma_e$、 $\rho_e = \sigma_v \sigma_f$、 $\rho_0 = \sigma_e \sigma_v$ 生成的 $\underline{C_2}$ 的指数为 2 的子群。于是， $\underline{C_2}^+$ 作用于一个 dessin 的定向旗标集合，并使元素 ρ_v、 ρ_e、ρ_f 分别对应旗标绕顶点、边和面的逆时针旋转。

每个儿童画都由定向制图群作用于其某个旗标所决定。因此，一个儿童画对应于 $\underline{C_2}^+$ 的一个商群。由于 $\underline{C_2}^+$ 同构于 $\mathbb{P}^1$ 去掉 3 个点后的基本群，并附加关系 $\rho_1^2 = 1$，我们看到，该儿童画实际上对应于 $\mathbb{P}^1$ 的一个有限覆盖，该覆盖仅在0、1、 ∞ 处分歧，并且在 1上方的分歧阶为1 或2。注意，通过与态射 $f\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ 复合（该态射由 $f(z) = 4z(1-z)$ 定义），我们可以将后一个条件施加到任何满足前一个条件的曲线上。因此，根据贝利定理，当且仅当一条代数曲线可以按这种方式表示时，它才能定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上。

1.3 伽罗瓦情形

现在我们聚焦于这样的情形：该儿童图给出 $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ 的伽罗瓦覆盖，这意味着图的自同构群在旗标集合上简单传递地作用。这些儿童图对应于 $\underline{C_2}^+$ 的有限商。不过，正如 Grothendieck 所指出的，实际上考虑 $\underline{C_2}^+$ 的所有商群非常重要。此后，我们将以这种广义含义使用“正多面体”一词。

让我们从一些例子开始。对于每一对正整数 (p, q)，我们可以考虑与商群相关联的 dessin

$$G_{p,q} = \underline{C_2}^+ / \rho_0^p = \rho_2^q = 1.$$

相应的戴斯因图可通过从一个旗标开始，并按照 $G_{p、\,q}$ 中的所有元素对其进行变换来绘制。只要 p、 $q \geq 3$，新施加的条件就意味着我们得到一个正则镶嵌，其中每个顶点有 p 个面，每个面有 q 条边。注意，$G_{p、\,q}$ 当且仅当 $p \cdot (q-2)_q^{\pi} < 2\pi$ 时是有限的。这些情形恰好对应于表 1 所示的经典正则多面体。

(p,q)	多面体
(3, 3)	四面体
(3, 4)	cube
(4, 3)	八面体
(3, 5)	正十二面体
(3, 5)	正二十面体

表 1：经典正则多面体

若 $\underbrace{p \cdot (q-2)}_{q}{}^{\pi} = 2\pi$，则我们得到欧几里得平面的正则镶嵌。这里有三种选择：$(p, q) = (3, 6)$（六边形）、$(4, 4)$（正方形）和 $(6, 3)$（三角形）。

Apart 由这两个有限的情形列表，我们得到双曲平面的正则镶嵌 e.

群 $G_{p、q}$ 并未穷尽 F_2的所有可能商群，无论我们是否将范围限制在有限群之内。然而，正如 Grothendieck 在 [1], 第 4 节中指出的，可以用一种自然的方式将无限正则多面体实现为有限正则多面体的覆盖。具体而言，通过两个所有正则多面体都满足的参数来定义「普适正则 2-多面体」，再将这些参数模 p 约化，便可得到定义在 $\mathbb{F}_p$上的有限正则多面体。这种方法也允许我们在任意基环上定义正则多面体。Grothendieck 提出的一个问题是，所有有限正则多面体，或者等价地，定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$上的代数曲线，是否都能通过有限域上的正则多面体得到。

2 通用正多面体与特化

定义 通用 2-多面体时，Grothendieck 在 [1] 第 4 节中作了如下说明。

“对于这样的多面体，我们可以在环境仿射空间或射影空间中找到一组标准基（或旗标），使制图群 $\underline{C}_n$ 的运算——该群由基本反射 $\sigma_i (0 \le i \le n)$ 生成——能够用关于参数 n、α_1、……、α_n 的通用公式在这组基下表示；这些参数可以从几何上解释为该多面体‘基本角’的余弦的两倍。”

现在我们来确定 $n = 2$ 的公式。给定任意正则多面体，设 θ 为每个面的角，γ 为两个面之间的二面角。选取一组基 v_0、v_1、v_2，分别由一个旗标的顶点、边的中点和面的中心确定。令 σ_v、σ_e、σ_f 分别表示对顶点、边和面的反射。根据初等几何，我们得到：

$$\begin{aligned}
\sigma_0(v_0) &= 2v_1 - v_0, \\
\sigma_1(v_1) &= (1-\cos\theta)v_0 - v_1 + (1+\cos\theta)v_2, \\
\sigma_2(v_2) &= (1-\cos\gamma)v_1 - v_2.
\end{aligned}$$

备注。 我们注意到，这些公式涉及的是多面体各角的余弦，而非 Grothendieck 所说的角的两倍的余弦。我们一直无法解释这一差异。

于是我们得到

$$\rho_v = \sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1-\cos\theta & (1-\cos\gamma)(1-\cos\theta) \\ 0 & -1 & -1+\cos\gamma \\ 0 & 1+\cos\theta & -1+(1-\cos\gamma)(1+\cos\theta) \end{bmatrix},$$

$$\rho_e = \sigma_2 \circ \sigma_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1-\cos\gamma \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\rho_f = \sigma_1 \circ \sigma_0 = \begin{bmatrix} -1 & -1+\cos\theta & 0 \\ 2 & 1-2\cos\theta & 0 \\ 0 & 1+\cos\theta & 1 \end{bmatrix}.$$

为了诠释任意基环上的正则多面体，Grothendieck 将这些以$\cos\theta$ 和$\cos\gamma$ 表示的通用公式提炼出来，视其为对正则多面体给出严谨定义的关键。他继续说道：

“在这个问题中，讨论范围并不局限于有限正则多面体，甚至也不局限于面为有限阶的正则多面体，也就是说，参数 α_i 是适当的「半圆分域」方程的根，体现了这样一个事实：当基域为 $\mathbb{R}$时，「基本角」与 2π可公度。”

因此，对于任意环 R，都可以通过上述公式定义 R 上的正则多面体，其中以 R 中的元素代替 $\cos\theta$ 和 $\cos\gamma$。我们看到，当 $R=\mathbb{R}$时，上文讨论的各个群 $G_{p,\ q}$ 都可通过对 $\cos\theta$ 和 $\cos\gamma$作特定选择而得到。

这种方法还使我们能够定义正则多面体的特化。第 4 节对此作了如下说明： [1]

“如果我们从一个定义在诸如 $\mathbb{Q}$这样的域上的无限正则多面体出发，并将其「特化」到素域 $\mathbb{F}_p$ 上（除有限个素数外，对所有 p 而言，这都是一个定义良好的运算），情形就截然不同了。显然，有限域上的每个正则多面体都是有限的——因此，随着 p 变化，我们得到无穷多个有限正则多面体，其组合类型，或者等价地说，其自同构群，随 p「算术地」变化。当 $n=2$ 时，这种情形尤其引人入胜，因为我们可以利用上一段明确建立的组合 2-映射与定义在数域上的代数曲线之间的关系。在这种情况下，定义在任意无限域上的无限正则多面体（因而也定义在该域的一个由两个生成元生成的子-$\mathbb{Z}$-代数上）会产生无穷多个定义在数域上的代数曲线；这些曲线是标准射影直线的伽罗瓦覆盖，且仅在 0、1 和 ∞ 处分歧。”

确实，通过将定义 ρ_v、ρ_e、ρ_f 的矩阵视为属于 $GL(3,R)$，我们得到 F_2 的各种商群；如果 R 是有限的，这些商群必然是有限的。

3 有限域上的正则多面体

Grothendieck在 [1]第 4节提出了以下问题：“究竟哪些是有限域上的正则2-多面体所对应的有限正则2-地图，或者等价地说，哪些是 2-制图群的有限商？我们能得到它们全部吗？如果能，如何得到？”

在本节中，我们将进行一些计算，以探讨这个问题，同时给出一些特化的例子。由于同一条代数曲线可能有多种方式实现为有限正则 2-映射，因此也很值得提出同一个问题，不过此时我们只关心相关曲线的同构类。

由于正则多面体由 $\underline{C_2}^+$ 的有限商给出，我们可以通过具有表示 $\langle \rho_v, \rho_f | \rho_v^p = \rho_f^q = \rho_v\rho_f\rho_v\rho_f = 1 \rangle$ 的群的有限商来识别它们，其中 ρ_v 和 ρ_f 的阶分别为 p 和 q。利用黎曼–赫尔维茨公式，可以根据 p、q 以及群的阶，计算相关代数曲线 X 的亏格。具体来说，假设该映射有 V 个顶点、E 条边和 F 个面。若群的阶为 $|G|$，则可得到一个从 X 到 $\mathbb{P}^1$ 的 $|G| = 2E$ 次映射，其在 0、1 和 ∞ 处分歧。这些点上方的总分歧阶为 $3|G| - V - E - F$。另一方面，我们有 $E = \frac{pV}{2} = \frac{qF}{2}$。因此

$$2g_X - 2 = -2|G| + 3|G| - V - E - F = E\left(1 - \frac{2}{p} - \frac{2}{q}\right).$$

现在我们将给出一些关于 $g = 0$ 的例子，1。

3.1 亏格 0

如果 $g = 0$，那么所有有限正则多面体的分类就很容易了。事实上，这已经在表1中完成。为了涵盖 p或 q 小于 3 的情况，我们还需考虑以下几种情况：$(p,\ q,\ E) = (2,\ n,\ n)$、$(n,\ 2,\ n)$，其中 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$。

现在我们将列出五种经典正则多面体的通用公式，并考察它们约化到有限域的情况。根据余弦的取值，这种运算定义良好：对于四面体和八面体，除 $p = 2$、3 外均成立；对于立方体，始终成立；对于正十二面体，除 $p = 2$、3、5 外均成立；对于正二十面体，除 $p = 2$、5 外均成立。

设 $x = \cos\ \theta, y = \cos\ \gamma$，回顾一下，旋转的公式为

$$\rho_v = \begin{bmatrix} 1 & 1-x & (1-x)(1-y) \\ 0 & -1 & -1+y \\ 0 & 1+x & -1+(1+x)(1-y) \end{bmatrix}, \rho_e = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1-y \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \rho_f = \begin{bmatrix} -1 & -1+x & 0 \\ 2 & 1-2x & 0 \\ 0 & 1+x & 1 \end{bmatrix}.$$

正则多面体的 $\cos\theta$ 和 $\cos\gamma$ 的值见下表。

多面体	$\cos\ \theta$	$\cos\ \gamma$
四面体	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
cube	0	0
八面体	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
正十二面体	$\frac{1-\sqrt{5}}{4}$	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$
正二十面体	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$

表 2：经典正则多面体的角度

命题 3.1. 经典正则多面体在约化到 $\mathbb{F}_p$ 时仍保留其自同构群（若此约化有定义）；但在 $\mathbb{F}_2$ 中，立方体的自同构群为 S_3。

证明. 四面体的自同构群是 A_4。它的正规子群包括平凡子群、阶为 4 的子群以及它自身。因此，若它在某个素数 p 处的特化发生变化，自同构群只能变为平凡群或阶为 3 的群。对于每个 p，显然 ρ_v 和 ρ_f 不会约化为恒等元，且彼此不同，故结论成立。

S_4 的正规子群包括平凡子群、一个 4 阶子群 A_4以及它本身。可以验证，对于 $\mathbb{F}_2$中的立方体，元素 ρ_v 的阶仍为 3，但ρ_f 的阶为 2。这就迫使自同构群成为 S_4 对其 4 阶正规子群取商所得的商群；该商群与 S_3同构。在其他特征下，ρ_f 的阶仍为 4，而 ρ_v 的阶为 3，因此我们得到 S_4。这一结论对于特征大于 3 时的八面体也成立。

正十二面体和正二十面体的自同构群是 A_5，它是单群。容易验证， ρ_e 和ρ_f 模 p约化后都不会成为恒等元，因此它们的自同构群仍为 A_5。

□

注记。 这证实了 Grothendieck 在 [1] 中的说法：特化到有限域上的正二十面体仍是正二十面体。不过，他似乎声称这一结论在所有情况下都成立。

3.2 亏格 1

每个亏格 1 的有限正则多面体都必须满足 (p, q) $=(3, 6)$、$(4, 4)$ 或 $(6, 3)$，其中与前文一样， p 和 q 分别是元素 ρ_v 和 ρ_f 的阶。考虑到$G_{3,6}$ 与 $G_{6,3}$之间的同构，我们可以看到，它们都能实现为$G_{4,4} = \underline{C_2}^+/\rho_v^4 = \rho_f^4 = 1$,$G_{6,3} = \underline{C_2}^+/\rho_v^6 = \rho_f^3 = 1$ 模 p的有限商。我们先举一个明确的例子，说明如何将这些无限多面体特化到有限基环上。

命题 3.2。 对于 $n \geq 2$，将 $G_{4,\ 4}$模 n约化，得到如下映射：当 n 为偶数时由 $n/2 \times n/2$方格网定义，当 n 为奇数时由 $n \times n$ 方格网定义；这两种情况下都对应于由 $y^2 = x^3 + x$定义的椭圆曲线，其格为 $\langle 1, i\rangle$ 且 j-不变量为 1728。

证明。 在 $G_{4,4}$的情形下，我们有 $\cos\ \theta = 0$、$\cos\ \gamma = -1$，因此所关注的矩阵为

$$\rho_v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \rho_f = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

在 $\mathrm{GL}(3, \mathbb{Z})$ 中，这两个矩阵生成 $G_{4,\ 4}$，它由一个无限方格网表示，我们可以将其视为坐标平面。模 n 约化等价于考察它们在 $\mathrm{GL}(3, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 中的像。因此，可以通过分析旗标的哪些变换由在 $\mathrm{GL}(3, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 中等价于恒等元的矩阵表示，并对它们生成的子群取商，来计算相应的映射。

从坐标为 $V = (1, 0)$ $E = (1/2, 0)$ $F = (1/2, 1/2)$ 的旗标出发，我们看到矩阵 $I_3 + R$ 和 $I_3 + U$，其中

$$R = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

分别将它映射到右侧正方形和上方正方形中对应的旗标。另一方面，旋转由以下矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

还可以看出，对于同一正方形中的另外三个旗标，将旗标移至上方和右侧正方形所对应的矩阵，与 R 和 U 具有相同形式。由此可知，只有那些将原始旗标移至水平和垂直方向上相隔 $n/2$ 个正方形倍数的同一旗标的变换才等价于恒等变换（当 n 为偶数时）；当 n 为奇数时，则需相隔 n 个正方形的倍数。

与该dessin相关联的椭圆曲线众所周知是具有 j-不变量1728 且格由 $\langle 1, i\rangle$ 给出的那条；例如参见 [3]。对于 1×1正方形，显式的 Belyi函数由 $f(z) = \wp_i^2(z)^c$ 给出，其中 c是一个常数，用于确保该函数在各边的中点处取值为 1，而 $\wp_i$ 是格 $\langle 1, i\rangle$上的Weierstrass $\wp$-函数。对于 $k \times k$ 正方形，我们只需将此函数替换为 $f(z) = \wp_i^2(kz)^c$。

□

注记。在这个例子中，如果我们限制 n 等于一个素数 p，显然无法得到每一个可能的映射，因为每个映射的次数将具有 p^2 的形式。然而，阶的考量并不能排除这样一种可能性：我们可以使用有限域上的任意正则多面体来得到它们。事实上，由于 $GL(3,\mathbb{F}_q)$ 的阶可被任意 n 整除，只要适当地选择 q，因此通过这种方式得到的正则多面体可能具有的阶并没有明显限制。

例如，关于一个可通过 G_4 的商群得到的映射，4 其形式并非如此简单，可参见 [4],图 3.7。

可以采用类似的方法，将 $G_{6,\ 3}$ 模 n 化简，从而得到三角网格，而非方格网。在这种情况下，可以适当缩放亚纯函数 $f(z)=\frac{c}{\wp_{e^{i\pi/3}}(z)^3}$，以在不变量为 $j0$ 且格由 $\langle 1、\ e^{i\pi/3}\rangle$ 给出的椭圆曲线上，显式构造一个 Belyi 函数。

3.3 补充说明

按照我们所采用的诠释，可以尝试完成对亏格 1 情形下哪些正则映射和代数曲线能够在有限域上得到的分类。对于更高亏格，也可以提出同样的问题，但这似乎更加困难。不过，另一条研究方向是全面理解 Grothendieck 在 [1] 第 4 节中的观察。事实上，在这篇札记中，我们指出了一些实例，说明我们的诠释并未涵盖 Grothendieck 所阐述的全部内容。特别是，我们再次强调，我们定义反射和旋转的通用公式是在 $\mathbb{Z}[\cos\theta、\cos\gamma]$ 上定义的，而非如 Grothendieck 所说使用余弦的两倍。对于八面体，我们有 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，因此按照我们的约定，不清楚如何在 $\mathbb{F}_2$ 上考察八面体。这一点似乎意义重大，因为 Grothendieck 将 $\mathbb{F}_2$ 上的八面体描述为一种有趣现象的一部分，并如下加以说明。

“因此，我逐一考察毕达哥拉斯多面体时，发现每次都会重复出现同一个小小的奇迹，我称之为所讨论多面体的组合范式。粗略地说，可以这样描述：当我们考察多面体在其最奇异的特征（或其中之一）下的特化时（即正二十面体对应特征 2 和 5，八面体对应特征 2），我们可以从有限域上的几何正则多面体（正二十面体对应 $\mathbb{F}_4$ 和 $\mathbb{F}_5$，八面体对应 $\mathbb{F}_2$）中读出对该多面体组合结构的一种格外优雅（且出人意料）的描述。”

一种可能的做法是使用不同于由旗标给出的典范基的基的选择。这样或许可以将八面体化为 $\mathbb{F}_2$，不过这种方法似乎只适用于所讨论的特定多面体。另一种做法是考虑射影空间中的多面体；Grothendieck 确实在 [1] 中提到，这比在仿射空间中考虑多面体更好。总而言之，尽管本文所述的方法解释了 Grothendieck 关于正则多面体的一些想法，但要充分实现这些想法，很可能还需要作出一些变通。

参考文献

[1] A. Grothendieck, 《*Esquisse d'unProgramme*》, 载于《几何伽罗瓦作用》, 剑桥大学出版社, 1997年。

[2] L. Schneps，黎曼球面上的儿童画，载于*Grothendieck* 儿童画理论，剑桥大学出版社，1994 年。

[3] C. Frechette，学士学位论文，https://www.brown.edu/academics/math/sites/math/files/frechette

[4] J. Sijsling，硕士学位论文，https://jrsijsling.eu/notes/desfinal.pdf。