arXiv:2304.03349v1 [math.NT] 6 Apr 2023

二重对数之差的关系式

让-克里斯托夫 潘[1,2,*]

[1]CEA、DAM、DIF，F-91297 阿尔帕容，法国[2]巴黎-萨克雷大学、CEA、极端条件下物质实验室，91680 布吕耶尔-勒沙泰尔，法国

2023年4月10日

摘要

在本文中，我们提出了两个具有特定参数的二重对数之差的双重级数表示。该求和表示结合了我们最近为所谓的格罗滕迪克-克里温常数发现的一个公式，以及利马得到的一个关于参数分别为$\sqrt{2}-1$和$1-\sqrt{2}$的两个二重对数之差的恒等式。此外，我们还基于Brychkov发表的一个公式，给出了利马所研究的这一差值的积分表示。

1 引言

二重对数（或称 Spence 函数 [1]） [2,3] 定义为

$$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}. \tag{1}$$

它可以用积分表示式表示

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t} dt. \tag{2}$$

二重对数在数学和理论物理学中有许多应用 [4,5]。对二重对数的高效计算是一个重要的研究领域 [6], ，特殊值 [7] 和恒等式 [8,9]的研究也是如此。存在一些至少涉及两个二重对数的关系式。最常用的可能是以下这些：

$$\mathrm{Li}_2(z) + \mathrm{Li}_2(-z) = \frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(z^2), \tag{3}$$

$$\mathrm{Li}_2(1-z) + \mathrm{Li}_2\left(1-\frac{1}{z}\right) = -\frac{(\ln z)^2}{2}, \tag{4}$$

*jean-christophe.pain@cea.fr

$$\mathrm{Li}_2(z)+\mathrm{Li}_2(1-z)=\frac{\pi^2}{6}-\ln(z)\ln(1-z), \tag{5}$$

$$\mathrm{Li}_2(-z)-\mathrm{Li}_2(1-z)+\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(1-z^2)=-\frac{\pi^2}{12}-\ln(z)\ln(z+1), \tag{6}$$

and

$$\mathrm{Li}_2(z)+\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}[\ln(-z)]^2. \tag{7}$$

拉马努金给出了恒等式 [10, 11]:

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{6}\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{\pi^2}{18}-\frac{1}{6}(\ln 3)^2, \tag{8}$$

$$\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right)=-\frac{\pi^2}{18}+\ln 2\ln 3-\frac{1}{2}(\ln 2)^2-\frac{1}{3}(\ln 3)^2, \tag{9}$$

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{18}\pi^2+2\ln 2\ln 3-2(\ln 2)^2-\frac{2}{3}(\ln 3)^2, \tag{10}$$

$$\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right)=-\frac{\pi^2}{18}+\frac{1}{6}(\ln 3)^2, \tag{11}$$

$$\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{8}\right)+\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right)=-\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{9}{8}\right)\right]^2, \tag{12}$$

而 Bailey等人 [6] 证明了

$$\pi^2=36\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)-36\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right)-12\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{8}\right)+6\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{64}\right). \tag{13}$$

在 Gradshteyn 和 Ryzhik 的著作中（参见参考文献 [12], 中的公式 6.254，第 642 页），可以找到

$$\int_0^\infty \mathrm{ci}(x)\sin^2 x\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\left[\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)-\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{2}\right)\right], \tag{14}$$

其中

$$\mathrm{ci}(x)=-\int_x^\infty \frac{\cos\xi}{\xi}d\xi. \tag{15}$$

最近，Lima 得到了以下有趣的关系 [13]:

$$\mathrm{Li}_2(\sqrt{2}-1)-\mathrm{Li}_2(1-\sqrt{2})=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{4}\ln^2\left(\sqrt{2}+1\right), \tag{16}$$

Stewart 在 2022 [14] 中为其提出了另一种推导方法。在第 2 节中，我们强调 Lima 公式与格罗滕迪克-克里温界之间的联系，并为差值 $\mathrm{Li}_2(\sqrt{2}-1)-\mathrm{Li}_2(1-\sqrt{2})$ 提出一种双重嵌套求和展开。在第 3 节中，我们提及 Lima 所考察的后一特定差值的一种积分表示，该表示基于 Brychkov 手册 [15] 中给出的一般表达式。我们还指出和式 $\mathrm{Li}_2(ab)+\mathrm{Li}_2(-ab)$ 的一种积分形式。

2 双重嵌套求和表示两个二重对数之差

我们最近发现了以下恒等式 [16]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k-3}\right)\right]^2=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{4}\ln^2\left(\sqrt{2}+1\right) \tag{17}$$

其中，如公式 (16) 所示，包含常数

$$\ln^2\left(\sqrt{2}+1\right)=\frac{\pi^2}{4K_G^2}, \tag{18}$$

其中， K_G 有时被称为格罗滕迪克-克里维常数（参见附录）。结合公式 (16) 和 (17)，可得到这两个特定二重对数之差的以下无穷和表示。

$$\boxed{\mathrm{Li}_2(\sqrt{2}-1)-\mathrm{Li}_2(1-\sqrt{2})=\frac{\pi(\pi-1)}{8}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k-3}\right)\right]^2.} \tag{19}$$

3 积分表示

Brychkov（参见 [15], 公式 2，第 4.1.6 节，第 155 页）给出了以下结果。

$$\int_0^{\infty}\sqrt{a^2-x^2}\,\arcsin(bx)dx=\frac{a}{4b}\left\{\frac{(1-a^2b^2)}{2ab}\ln\left(\frac{1+ab}{1-ab}\right)+ab\left[\mathrm{Li}_2(ab)-\mathrm{Li}_2(-ab)\right]-1\right\} \tag{20}$$

其中 $|\arg(1-a^2b^2)|<\pi$。特别地，利用公式 (3)，公式 (20) 可写成如下形式:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\sqrt{a^2-x^2}\arcsin(bx)dx &= \frac{1}{8b^2}\left\{2(1-a^2b^2)\,\mathrm{arctanh}(ab)-2ab\right.\\ &\quad\left.-a^2b^2\left[\mathrm{Li}_2(a^2b^2)-4\,\mathrm{Li}_2(ab)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{21}$$

在 $a=1$ 和 $b=\sqrt{2}-1$ 的特殊情况下，可得

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{Li}_2(\sqrt{2}-1)-\mathrm{Li}_2(1-\sqrt{2}) &= 4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\arcsin\left[(\sqrt{2}-1)x\right]dx\\ &\quad+(1+\sqrt{2})\left[1+\ln(2-\sqrt{2})-\frac{\ln 2}{2}\right].\end{aligned}} \tag{22}$$

值得一提的是，Valdebenito 得到了以下表达式 [17]:

$$\pi^2=4\left[\ln(1+\sqrt{2})\right]^2-16\int_{\ln(1+\sqrt{2})/2}^{\infty}\ln(\tanh x)dx, \tag{23}$$

and

$$\pi^2 = -4\left[\ln(1+\sqrt{2})\right]^2 - 16\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})/2} \ln(\tanh x)dx, \tag{24}$$

由此可得

$$\boxed{\mathrm{Li}_2(\sqrt{2}-1) - \mathrm{Li}_2(1-\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})/2} \ln(\tanh x)dx - \frac{3}{2}\int_{\ln(1+\sqrt{2})/2}^{\infty} \ln(\tanh x)dx,} \tag{25}$$

或者等价地

$$\mathrm{Li}_2(\sqrt{2}-1) - \mathrm{Li}_2(1-\sqrt{2}) = -\frac{3}{2}\int_0^{\infty} \ln(\tanh x)dx + \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})/2} \ln(\tanh x)dx. \tag{26}$$

我们想指出，Brychkov（参见 [15], 第 4.1.6 节中的公式 1，第 155 页）也给出了以下结果（另见参见 [18]）：

$$\int_0^a \frac{\arcsin[(\sqrt{2}-1)x]}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Li}_2(ab) + \mathrm{Li}_2(-ab)\right], \tag{27}$$

其中 $|\arg(1-a^2b^2)| < \pi$。利用式（3），可以写成

$$\int_0^a \frac{\arcsin(bx)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{1}{4}\left[4\,\mathrm{Li}_2(ab) - \mathrm{Li}_2(a^2b^2)\right]. \tag{28}$$

在 $a = 1$ and $b = \sqrt{2}-1$ 的情况下，可得

$$\int_0^1 \frac{\arcsin[(\sqrt{2}-1)x]}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{4}\left[4\,\mathrm{Li}_2(\sqrt{2}-1) - \mathrm{Li}_2(3-2\sqrt{2})\right]. \tag{29}$$

事实上，有

$$\frac{1}{2}\left[\mathrm{Li}_s(z) - \mathrm{Li}_s(-z)\right] = \chi_s(z), \tag{30}$$

其中 $\chi_s(z)$ 是所谓的勒让德 chi 函数，等于

$$\chi_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)^s}, \tag{31}$$

对于 $|z| \le 1$ 和 $\Re(s) > 1$。 $\chi_s(z)$类似于多对数函数 $\mathrm{Li}_s(z)$ 的狄利克雷级数。Lewin [2, 19] 和 Berndt [10]对这类函数的理论作了很好的综述。Cvijović 发表了勒让德奇函数的积分表示 [20], ，因此很可能通过 $\chi_2(z)$ 得到 $\mathrm{Li}_2(z)$ $-\mathrm{Li}_2(-z)$ 的表达式。

4 结论

在这篇简短的论文中，我们指出了一个耐人寻味的相似之处：Lima 得到的一个关系式涉及自变量分别为 $\sqrt{2}-1$ 和 $1-\sqrt{2}$ 的两个二重对数之差，而另一种表示则是涉及所谓格罗滕迪克-克里温常数的双重级数表示。将后两个恒等式结合起来，可得到一个关于自变量取特殊值 $\sqrt{2}-1$ 和 $1-\sqrt{2}$ 的两个二重对数之差的附加关系。我们还利用 Brychkov 发表的一个公式，给出了 Lima 所研究的差的积分表示。

References

[1] G. N. Watson, 《斯宾斯的对数超越函数札记》, 《牛津数学季刊》8, 39–42（1937年）。[2] L. Lewin, 《二重对数及相关函数》（Macdonald, 伦敦, 1958年）。[3] E. W. Weisstein, 《二重对数》, 载于 MathWorld——Wolfram 网络资源, https://mathworld.wolfram.com/Dilogarithm.html[4] D. Zagier, 《二重对数函数》, 载于《数论、物理学与几何学前沿》第二卷, Pierre Cartier、Pierre Moussa、Bernard Julia 和 Pierre Vanhove（编）, 第 3–65 页（2007年）。[5] V. V. Fock 和 A. B. Goncharov, 《簇系综、量子化与二重对数》, 《高等师范学院科学年刊》第四辑第 42 卷, 865–930（2009年）。[6] D. H. Bailey、P. B. Borwein 和 S. Plouffe, 《关于若干多对数常数的快速计算》, 《数学计算》66, 903–913（1997年）。[7] J. M. Borwein、D. M. Bradley、D. J. Broadhurst 和 P. Lisonek, 《多维多对数的特殊值》, 《美国数学会汇刊》353, 907–941（2001年）。[8] A. N. Kirillov, 《二重对数恒等式》, 《理论物理进展增刊》118, 61–142（1994年）。[9] J. M. Campbell, 《一些非平凡的二项二重对数恒等式》, 《爱尔兰数学学会通报》88, 31–37（2021年）。[10] B. C. Berndt, 《拉马努金笔记》第四部分（纽约: 施普林格出版社, 1994年）, 第 323–326 页。[11] B. Gordon 和 R. J. McIntosh, 《代数二重对数恒等式》, 《拉马努金杂志》1, 431–448（1997年）。[12] I. S. Gradshteyn 和 I. M. Ryzhik, 《积分、级数与乘积表》第七版（学术出版社, 2007年）。[13] F. M. S. Lima, 《新的定积分与一个二项二重对数恒等式》, 《数学探究》23, 1–9（2012年）。[14] S. M. Stewart, 《Lima 二项二重对数恒等式的若干简单证明》, 《爱尔兰数学学会通报》89, 43–49（2022年）。[15] Y. A. Brychkov, 《特殊函数手册: 导数、积分、级数及其他公式》（CRC出版社、泰勒与弗朗西斯集团, 伦敦, 英国, 2008年）。[16] J.-C. Pain, 《利用傅里叶级数和格罗滕迪克-克里温常数得到的 π 双重级数》, arXiv: 2206.05610, https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.05610

[17] E.Valdebenito, 第*2*号信：两个有趣的积分，
https://vixra.org/pdf/1912.0302v1.pdf。

[18] Salahuddin和Intazar Husain，《两个有趣的定积分》，EPRA国际多学科研究期刊**6**，107-110（2020）。

[19] L. Lewin，《多对数及相关函数》（North-Holland，阿姆斯特丹，1981）。

[20] D. Cvijović，*Legendre χ* 函数的积分表示，《数学分析与应用杂志》**332**，1056-1062（2007年）。

[21] J.-L. Krivi ne, 关于格罗滕迪克常数, 法国科学院院报 **28**, 445-446 (1977) [用法语 h].

[22] J.-L. Krivine，格罗滕迪克常数和球面上的正型函数，《数学进展》**31**，16-30（1979） [法语]。

附录：关于格罗滕迪克-克里维常数

设 A 是一个 $n \times n$ 实方阵，并且满足 $n \geq 2$：

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j \right| \leq 1 \tag{32}$$

对于满足 $|s_i|, |t_j| \leq 1$ 的所有实数 $s_1, s_2, ..., s_n$ 和 $t_1, t_2, ..., t_n$。然后格罗滕迪克证明，存在一个常数 $K_R(n)$，使得

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i . y_j \right| \leq K_R(n) \tag{33}$$

对于希尔伯特空间中范数为 $|x_i| \leq 1$ 和 $|y_j| \leq 1$ 的所有向量 $x_1, x_2, ..., x_m$ 和 $y_1, y_2, ..., y_n$。格罗滕迪克常数是 $K_R(n)$ 的最小可能值。正如引言中所述，克里温提出极限

$$\lim_{n \to \infty} K_R(n) \tag{34}$$

等于 [21, 22]:

$$K_G = \frac{\pi}{2 \ln(1 + \sqrt{2})}. \tag{35}$$