arXiv:2304.03354v1 [math.LO] 6 Apr 2023

团队语义中的维度

Lauri Hella Kerkko Luosto 坦佩雷大学，坦佩雷大学，芬兰坦佩雷，芬兰

Jouko V¨a¨an¨anen*赫尔辛基大学，芬兰赫尔辛基

2023年4月10日

摘要

我们为集合族引入三种复杂度度量。我们称之为维度的这三种度量，均根据覆盖给定集合族所需的凸子族的极小数量来定义：对于上维数，要求这些子族包含唯一的极大集合；对于对偶上维数，要求包含唯一的极小集合；对于柱维数，则要求同时包含唯一的极大集合和唯一的极小集合。除了考察特定集合族的维度外，我们还研究了将集合族映射为新的集合族的算子作用下维度的行为。我们确定了这类算子保持维度增长类的自然充分条件。

我们运用维度理论，为团队语义逻辑证明新的层级结果。首先，我们证明，标准逻辑算子能够保持此类逻辑中公式语义所产生的族的增长类。其次，我们证明，$k+1$元依赖、包含、独立性、匿名性和排斥原子的上维数，严格高于任何 k元原子所属的增长类，因此， $k+1$元原子无法用任何元数更小的原子来定义。

1 引言

集合族在离散数学和集合论中已得到充分研究（例如参见 Bollob´as[1986]）。Sperner 族和向下封闭族是用于分析复杂族的基本构件示例

*本研究获芬兰科学院资助（资助编号：322795），并获欧盟“地平线2020”研究与创新计划下的欧洲研究理事会（ERC）资助（资助编号：101020762）。

。关于如何将一个族表示为若干更基本的族之并的探讨，引出了维度的若干概念。鉴于基集是有限的，我们利用维度为基集的子集族给出比单纯规模更好的定量估计。我们证明，集合族上的某些典范运算能够保持维度不变。这使我们能够筛选出维度有界的集合族集合。

通过将注意力限制在有限集的笛卡尔幂的子集族上，我们可以获得更细致的区分。这类族出现在所谓的团队语义中。在一阶逻辑 FO 的普通塔斯基语义以及通过新的逻辑运算扩展的一阶逻辑 FO 中，任何公式和任何适当类型的模型都可以与模型中满足该公式的赋值集合相关联。将这样的集合视为模型论域的笛卡尔幂的子集是自然的。在团队语义中，满足关系是相对于赋值的集合（“团队”）定义的。因此，任何公式都与这类笛卡尔幂的子集族相关联。我们运用关于逻辑运算的维度和保持性结果，为基于团队语义的逻辑证明新的不可定义性和层级结果。这类逻辑的例子包括依赖逻辑、独立逻辑和包含逻辑。

我们这篇论文的研究背景如下。Ciardelli 在其硕士论文[1] 中定义了一个维度概念，适用于向下封闭族，即极大集的集合的基数，或者等价地说，覆盖该族所需的最少幂集数目。他证明了基本命题逻辑运算（包括直觉主义蕴涵）的保持性质，并将其称为 Groenendijk 不等式。Hella 等人 [2014] 在模态逻辑中引入了类似的维度概念，其中包括模态依赖逻辑的逻辑运算保持维度的结果。Hella和Stumpf 使用一种维度形式，证明了模态包含逻辑中包含原子的简洁性结果（Hella和Stumpf [2015]）。L¨uck 和 Vilander[2019] 将维度概念从向下封闭族推广到任意族。他们证明了维度在命题运算下的保持性，并计算了命题逻辑背景下依赖原子和排斥原子的维度。L¨uck [2020]也是本文研究背景中的一个重要环节。

离散数学中还有其他几种维度概念。或许最著名的是拟阵秩；在向量空间的情形下，它与通常的维度概念重合，而在代数闭域的情形下，它与超越次数重合。然而，我们的族不一定满足拟阵的交换公理，因此这一概念不适用于我们的语境。另一个广为人知的维度是 Vapnik–Chervonenkis 维度，或 VC维数。在第 6 节中，我们论证了VC维数并不像我们的维度那样在逻辑运算下保持不变。因此，在本文中它并不适合我们的目的。还有一种维度是命题逻辑中析取范式的长度。我们将在第 7 节中证明，这等价于我们所研究的某一种维度（柱维数）。

这个 conc 本文引入的概念属于离散数学范畴，并且与 o

[1]Ciardelli [2009]

逻辑没有直接联系。因此，本文的部分内容无需具备逻辑方面的知识或兴趣也能阅读。不过，我们的应用源自逻辑，更确切地说，源自团队语义。我们相信，我们的研究成果为集合族的离散数学作出了有趣的新贡献。同时，我们认为，这些成果为团队语义中的可定义性问题带来了新思路，尤其得出了一个新的强层级结果（定理 5.9）。

论文大纲

第2 节介绍我们的维度理论的基本概念。我们为任意族定义了三种维度概念，并给出了这些概念的一些基本初等性质。我们定义了将在结果中使用的集合族上的基本算子。最后，我们介绍了与我们的结果相关的逻辑中的一些概念。特别是，我们介绍了所谓的团队语义，它产生了大量有趣的有限集笛卡尔积的子集族 M^k，从而引出了这样一个问题：这些族的维度是多少。

第3节介绍了一些用于显式计算维度的技术工具。这类计算是我们研究结果的核心。

在第4节中，我们引入增长类的概念。这些增长类用于度量当 M 的有限大小增加时，笛卡尔积 M^k 的可定义子集集合族的维度增长率。我们证明了关于算子下维度保持的一些重要结果。这些保持结果将使估计给定可定义集合族的增长类变得更加容易。

在第 5 节中，我们汇总各项结果并指出其应用。我们的主要应用是定理 5.9，它为若干基于团队语义的逻辑给出了强有力的层级结果。我们还注意到，团队语义文献中出现的几种逻辑运算并不属于保持维度不变的运算。这样，我们便可以运用维度的定量方法，对逻辑运算作出定性的区分。

在第 6 节中，我们探讨一个显而易见的问题：为什么不采用 VC维数？答案是，VC维数在我们主要关注的逻辑运算下并不保持不变，例如合取、析取、存在量词和全称量词。

在第 7 节中，我们将一种维度概念与一个不变量联系起来，该不变量与布尔多项式析取范式有关。这使我们能够对随机集合族的维数作出一些结论。

最后，在第 8 节中，我们将证明，在无限域上不可能得到我们所追求的那类结果。我们想要的层级结果在无限域上根本不成立。

2 基本概念

2.1 集合族

在下文中，我们的应用将大量依托一个常被称为集合系统组合学的子领域中的组合学结果。我们先介绍一些常用概念。

我们使用标准的集合论记号，包括以下简写

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \text{ and } \bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A,$$

只有在 $\mathcal{A} \neq \emptyset$ 时，后一种写法才没有歧义。此外，我们记作

$$[A, B] = \{C \mid A \subseteq C \subseteq B\},$$

对任意集合 A 和 B。注意，若 $A \not\subseteq B$，则 $[A, B] = \emptyset$。

定义 2.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个集合族。若存在 A_0 和 A_1，使得 $A_0 \subseteq A_1$ 且 $\mathcal{A} = [A_0, A_1]$，则族 $\mathcal{A}$ 是一个区间或柱。若对于所有 S、$T \in \mathcal{A}$，都有 $[S, T] \subseteq \mathcal{A}$，则族 $\mathcal{A}$ 是凸的。若 $A \in \mathcal{A}$ 且 $S \subseteq A$ 蕴含 $S \in \mathcal{A}$，则 $\mathcal{A}$ 是向下封闭的。若对于所有不同的 S、$T \in \mathcal{A}$，都有 $S \not\subseteq T$，则族 $\mathcal{A}$ 是一个 Sperner族。最后，若 $\mathcal{A}$ 对非空链的并集封闭，即若 $\mathcal{C}$ 是一个非空链（或一个按包含关系线性排序的非空族），则 $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{C}$，那么 $\mathcal{A}$ 满足佐恩条件。另一个更严格的概念也很有用：若对于每个子族 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$，都有 $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$，则 $\mathcal{A}$ 对并集封闭。

注意，如果一个集合族是向下封闭的或是Sperner族，那么它也是凸的。向上封闭族的概念在集合论中也很有用，但在这里并不适用，因为我们的方法的应用很大程度上倾向于向下封闭族。

只有在讨论这些概念对无限族的适用性时，才会用到佐恩条件。不过，我们着重讨论的是有限集的有限族，对于这类族，我们所表述的佐恩条件显然成立。我们通过仅对非空链提出要求，弱化了标准条件。唯一值得注意的影响是，不再要求空集必须包含在满足佐恩条件的族中，从而使所有有限族都能满足该条件。

对于 $\mathcal{A}$ 一个集合族，我们将 $\mathcal{A}$ 中所有极大的（关于包含）集合组成的族记为 Max($\mathcal{A}$)。类似地，Min($\mathcal{A}$) 是 $\mathcal{A}$中所有极小集合组成的集合。注意，Max($\mathcal{A}$) 和 Min($\mathcal{A}$) 始终是 Sperner 族。

定义 2.2. 若集合族 $\mathcal{A}$ 受 $\bigcup\mathcal{A}$支配，则称其为受支配的，当且仅当 $\bigcup\mathcal{A} \in \mathcal{A}$。若 $\mathcal{A}$ 受 $\bigcap\mathcal{A}$支撑，则称其为有支撑的，当且仅当 $\mathcal{A}$非空且 $\bigcap\mathcal{A} \in \mathcal{A}$。自然地，若 $\mathcal{A}$既受支配又是凸的，则称其为支配凸。同理，若 $\mathcal{A}$ 既有支撑又是凸的，则称其为支撑凸。

换言之，集合族 $\mathcal{A}$ 受集合 D 支配，当且仅当 D 是 $\mathcal{A}$ 中关于包含关系的最大元素。同理， $\mathcal{A}$ 受集合 S 支撑，当且仅当S 是 $\mathcal{A}$ 中关于包含关系的最小元素。下面的引理将阐述这些基本概念之间一些显而易见的联系。

引理 2.3. 设 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$，其中 X 是一个集合。记 $\neg\mathcal{A} = \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{A}\}$。

(a) 族 $\mathcal{A}$ 是一个区间，当且仅当它受支配、有支撑且是凸的。

(b) $\mathcal{A}$ 是凸的，当且仅当 $\neg\mathcal{A}$ 是凸的。

(c) $\mathcal{A}$ 受支配，当且仅当 $\neg\mathcal{A}$ 有支撑。 □

接下来，我们将介绍本文中贯穿始终的核心维度概念。上维数最初由 Hella 等人针对向下封闭的族定义[2014] ，随后由 L¨uck 和 Vilander 将其推广至任意族 [2019]。本文给出的定义是对后者的等价改写。我们还引入了两个新的维度概念。对偶上维数的基本思想是：正如前一个引理所示，将包含关系的顺序反转后，许多上维数背后的基本思想仍然适用。第三个概念——柱维数——可以看作上述两个维度概念的结合。

定义 2.4. 设 $\mathcal{A}$ 为一个集合族。若存在被支配的凸族 $\mathcal{D}_G$、 $G \in \mathcal{G}$，使得对于每个 $G \in \mathcal{G}$都有 $\bigcup_{G\in\mathcal{G}} \mathcal{D}_G = \mathcal{A}$ 和$\bigcup \mathcal{D}_G = G$，则称子族 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ 支配$\mathcal{A}$ 。若存在支撑凸族 $\mathcal{S}_K$、 $K \in \mathcal{K}$，使得对于每个 $K \in \mathcal{K}$都有$\bigcup_{K\in\mathcal{K}} \mathcal{S}_K = \mathcal{A}$ja $\bigcap \mathcal{S}_K = K$，则称子族 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$ 支撑 $\mathcal{A}$ 。

该族的上维数为 $\mathcal{A}$

$$\mathrm{D}(\mathcal{A}) = \min\{|\mathcal{G}| \mid \mathcal{G} \text{ dominates the family } \mathcal{A}\},$$

对偶上维数为

$$\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{A}) = \min\{|\mathcal{G}| \mid \mathcal{G} \text{ supports the family } \mathcal{A}\}$$

柱维数为

$$\mathrm{CD}(\mathcal{A}) = \min\{|I| \mid (\mathcal{A}_i)_{i\in I} \text{ is an indexed family of intervals with } \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}\}.$$

命题 2.5. 设 $\mathcal{A}$ 为一个集合族。则

$$\mathrm{D}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{CD}(\mathcal{A}) \ \textit{and} \ \mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{CD}(\mathcal{A}).$$

此外，如果 $\mathcal{A}$ 是凸的，那么

$$\mathrm{CD}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{D}(\mathcal{A})\,\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{A})$$

证明。设 $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ 是覆盖 $\mathcal{A}$ 的最小区间族，即$\bigcup_{i\in I}\mathcal{A}_i=\mathcal{A}$。对每个 $i\in I$，写作 $\mathcal{A}_i=[B_i,C_i]$，并考虑族 $\mathcal{B}=\{B_i\mid i\in I\}$ 和 $\mathcal{C}=\{C_i\mid i\in I\}$。于是， $\mathcal{A}_i$ 是一个由 B_i 支撑且受 C_i支配的凸集，其中 $i\in I$。因此， $\mathcal{B}$ 支撑 $\mathcal{A}$，且 $\mathcal{C}$ 受支配于 $\mathcal{A}$，这意味着

$$\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{A})\leq|\mathcal{B}|\leq|I|=\mathrm{CD}(\mathcal{A})\text{ and }\mathrm{D}(\mathcal{A})\leq|\mathcal{C}|\leq|I|=\mathrm{CD}(\mathcal{A}).$$

对于命题的第二部分，现在假设 $\mathcal{A}$ 是凸的。令 $\mathcal{G}$ 为支配 $\mathcal{A}$ 的最小规模族，令 $\mathcal{K}$ 为支持$\mathcal{A}$的最小规模族。于是 $\mathrm{D}(\mathcal{A})=|\mathcal{G}|$ 且 $\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{A})=|\mathcal{K}|$。令 I 为满足$K\subseteq G$的所有对 $(G,K)\in\mathcal{G}\times\mathcal{K}$ 组成的集合。由 $\mathcal{A}$ 的凸性可知，对于每个 $(G,K)\in I$，都有 $[K,G]\subseteq\mathcal{A}$。另一方面，若 $A\in\mathcal{A}$，则必有 $G\in\mathcal{G}$ 使得 $A\subseteq G$，因为 $\mathcal{G}$ 支配 $\mathcal{A}$；同理，也有$K\in\mathcal{K}$ 使得 $K\subseteq A$。这意味着，对于某个区间 $[K,G]$，有 $(G,K)\in I$，且 $A\in[K,G]$。因此，

$$\mathcal{A}=\bigcup_{(G,K)\in I}[K,G],$$

这意味着

$$\mathrm{CD}(\mathcal{A})\leq|I|\leq|\mathcal{G}\times\mathcal{K}|=\mathrm{D}(\mathcal{A})\cdot\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{A}).$$

□

显然，若 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ 且 $n=|X|\in\mathbb{N}$，则 $\mathrm{CD}(\mathcal{A})\leq 2^n$。很容易得到这一结果的一个小幅改进；后续的例子表明，这是可能达到的最佳上界。

命题 2.6. 设 X 是一个非空有限集，且满足 $n=|X|$，并设 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$。Then

$$\mathrm{CD}(\mathcal{A})\leq 2^{n-1}.$$

因此，$\mathrm{D}(\mathcal{A})\leq 2^{n-1}$，且 $\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{A})\leq 2^{n-1}$。

证明。固定 $b\in X$，并考虑将 $\mathcal{P}(X)$ 两两配对所得的划分 $\{A,A\cup\{b\}\}$，其中 $A\subseteq X\setminus\{b\}$。对于每一对这样的配对， $\mathcal{A}\cap\{A,A\cup\{b\}\}$ 要么为空，要么是区间 $[A,A]=\{A\}$、 $[A\cup\{b\},A\cup\{b\}]=\{A\cup\{b\}\}$或 $[A,A\cup\{b\}]=\{A,A\cup\{b\}\}$之一。因此，存在一个至多包含 2^{n-1} 个区间的族，其并集为 $\mathcal{A}$。其余结论由命题 2.5 得出。 □

例 2.7。设 X 是一个由 n 个元素组成的非空有限集。考虑该族

$$\mathcal{E}=\{A\subseteq X\mid|A|\ is\ even\}.$$

令 $\mathcal{G}$ 为支配 $\mathcal{E}$的 $\mathcal{E}$ 的子族。令 $A\in\mathcal{E}$，并假设 A 受 $G\in\mathcal{G}$支配，这意味着 A 属于某个支配凸族 $\mathcal{D}_G$，其中 $\mathcal{D}_G\subseteq\mathcal{E}$ 且 $\bigcup\mathcal{D}_G=G$。根据凸性， $[A,G]\subseteq\mathcal{D}_G\subseteq\mathcal{E}$。注意， A、 $G\in\mathcal{A}$ 的大小均为偶数。然而，除非 $A=G$，区间 $[A,G]$ 会包含大小为奇数的集合。由于这对任意 $A\in\mathcal{E}$都成立，我们得出 $\mathcal{G}=\mathcal{E}$。因此，$\mathrm{D}(\mathcal{E})=|\mathcal{E}|=2^{n-1}$。根据对称性，我们也得到 $\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{E})=2^{n-1}$。结合前两个命题可知，$\mathrm{CD}(\mathcal{E})=2^{n-1}$。

2.2 算子

除了研究固定集合族的维度外，我们也关注维度在各种算子作用下的行为。固定基集 X 上的集合族算子，是一个函数 $\Delta\colon \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^n \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$，其中 n为某个正整数。在团队语义的一些应用中，考虑更一般形式的算子也很有用： $\Delta\colon \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^n \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$，其中基集 X 和 Y不同。下面的例子列出了一些自然的集合论算子，我们将在后续章节中进一步研究。

例 2.8. 令 X 为一个基集。

(a) 并集与交集。基集 X 上的并运算符 $\Delta^X_\cup\colon \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^2 \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ 定义为 $\Delta^X_\cup(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathcal{A}\cup\mathcal{B}$。类似地， X 上的交算子 $\Delta^X_\cap\colon \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^2 \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ 定义为 $\Delta^X_\cap(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathcal{A}\cap\mathcal{B}$。(b) 补运算。 X 上的补运算是一个一元算子 $\Delta^X_c\colon \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$，定义为 $\Delta^X_c(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(X)\setminus\mathcal{A}$。(c) 张量析取与张量合取。张量析取[2] $\Delta^X_\vee$ 和张量合取 $\Delta^X_\wedge$ 的思想是在各族内部取并集和交集： $\Delta^X_\vee(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \{A\cup B \mid A\in\mathcal{A}, B\in\mathcal{B}\}$ 以及 $\Delta^X_\wedge(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \{A\cap B \mid A\in\mathcal{A}, B\in\mathcal{B}\}$。(d) 张量否定。将补运算推入给定的族内部，即可得到张量否定： $\Delta^X_\sim(\mathcal{A}) = \{X\setminus A \mid A\in\mathcal{A}\}$。(e) 投影。设 $f\colon X\to Y$ 是一个满射。将 f 按通常方式提升为函数 $\Delta_f\colon \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$，即可得到与 f 对应的（抽象）投影算子： $\Delta_f(\mathcal{A}) = \{f[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$，其中 $f[A]$表示 A 在 f下的像 $\{f(a) \mid a\in A\}$。(f) 逆投影。给定一个满射 $f\colon X\to Y$，我们还可以如下定义一个有用的算子 $\Delta_{f^{-1}}\colon \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y)) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$： $\Delta_{f^{-1}}(\mathcal{B}) = \{A\in\mathcal{P}(X) \mid f[A]\in\mathcal{B}\}$。(g) 存在量化与全称量化。考虑用于 $X = X_0\times\cdots\times X_{m-1}$且针对 $Y = X_0\times\cdots X_{i-1}\times X_{i+1}\times\cdots\times X_{m-1}$定义的具体投影函数$f\colon X\to Y$： $f(a_0,\ldots,a_{m-1}) = (a_0,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{m-1})$（即， f 是向坐标 $j\neq i$的投影）。注意， $B\in\Delta_f(\mathcal{A})$ 当且仅当存在 $A\in\mathcal{A}$，使得对于每个元组 $\vec{a}\in B$，都存在某个元素 $a\in X_i$，使得将 $\vec{a}$扩展并以 a 作为第 i 个分量后所得的元组属于 A。因此， Δ_f 对应于存在量化这一逻辑运算，相应地我们将其记作 $\Delta^X_{\exists i}$。类似地，我们定义算子 $\Delta^X_{\forall i}\colon \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y)\}$，它对应于全称量化：给定集合 $B\in\mathcal{P}(Y)$，令 $B[X_i/i] = \{(a_0,\ldots,a_{m-1}) \in X \mid (a_0,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{m-1}) \in B, a_i\in X_i\}$。那么我们令 $\Delta^X_{\forall i}(\mathcal{A}) = \{B\in\mathcal{P}(Y) \mid B[X_i/i]\in\mathcal{A}\}$。

[2]我们将这个算子称为算子张量析取，因为它为析取给出了团队语义。

注意，并集与交算子 $\Delta_{\cup}^{X}$ 和 $\Delta_{\cap}^{X}$ 不依赖于基集 X。因此，下文将这些算子分别简称为 $\cup$ 和 $\cap$。张量析取与张量合取也同样如此，因此我们将使用记号 $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} := \Delta_{\vee}^{X}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 和 $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} := \Delta_{\wedge}^{X}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$。另一方面，补运算$\Delta_{c}^{X}$和张量否定 $\Delta_{\neg}^{X}$ 都依赖于 X，因此我们不为它们引入任何简写记号。

进一步注意，投影 $\Delta_{\exists i}^{X}$不依赖于 $X = X_0 \times \cdots \times X_{m-1}$，因为任何元组 $\vec{a}$的长度及其第 i 个分量都是唯一确定的：$(a_0, \ldots, a_{m-1}) = (b_0, \ldots, b_{m'-1})$ 当且仅当 $m = m'$ 且对所有 $i < m$都有 $a_i = b_i$。然而，全称投影算子 $\Delta_{\forall i}^{X}$ 显然依赖于基集 X。因此，为保持记号统一，我们继续使用记号 $\Delta_{\exists i}^{X}$。

2.3 张量算子

我们在例2.8 中已经看到，析取和合取联结词产生了张量析取和张量合取算子。当然，这一思想可以推广到任意联结词。我们在此引入相关的张量算子概念，并证明它们保持区间，但不一定保持支配凸族或支撑凸族。

定义 2.9。固定一个基集 X，并令 $\circledast$ 为集合 $\{0,1\}$ 上的二元运算，即，$\circledast$ 是一个映射 $\{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$。那么相应的集合论运算是
$*\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$,

$$A * B = \{x \in X \mid \chi_A(x) \circledast \chi_B(x) = 1\}$$

其中，χ_C 是与集合 C相关的特征函数。与 $\circledast$ 对应的张量算子是 $\Delta_{\circledast}^{X}\colon \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$,

$$\Delta_{\circledast}^{X}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \{A * B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}.$$

注。（a）自然地，我们通常将二元运算 $\circledast$ 与相应的联结词等同起来，尤其是在记号层面。我们也会重载这一记号，后文将简单地写作

$$\mathcal{A} \circledast \mathcal{B} = \Delta_{\circledast}^{X}(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

Note 不过，这个记号与集合 X 无关，当且仅当 $0 \circledast 0 = 0$。

(b) 我们本可以考虑一般的 n元运算于 $\{0,1\}$，这似乎是一个非平凡的推广，但在此我们不这样做。即便如此，保留相应的记号仍然是值得的

$$\neg\mathcal{A} = \Delta_{\neg}^{X}(\mathcal{A}) = \{X \smallsetminus A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

对于与否定相对应的一元运算。

请注意，我们始终有 $\mathcal{A} \circledast \emptyset = \emptyset \circledast \mathcal{B} = \emptyset$。

集合 $\{0,1\}$ 上有 $2^4 = 16$ 个二元运算，其中 4 个（二元运算和投影）相当简单。在 8 个保持零元（即 $0 \circledast 0 = 0$）的二元运算中，有 5 个非平凡的张量运算，下面列出了其中除 $\mathcal{A} \circledast \mathcal{B} = \mathcal{B} - \mathcal{A}$ 情形之外的所有运算；该情形是角色互换后的集合差。

联结词	集合论运算	张量运算
析取 $\vee$	并集 $\cup$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A \cup B \mid A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}\}$
合取 $\wedge$	交集 $\cap$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = \{A \cap B \mid A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}\}$
"p但不包括 q"	集合差 $\smallsetminus$	$\mathcal{A} - \mathcal{B} = \{A \smallsetminus B \mid A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}\}$
异或 $\oplus$	对称差 $\triangle$	$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \{A \triangle B \mid A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}\}$

如果联结词 $\circledast$ 是交换的（分别为结合的），那么相应的张量运算也具有交换性（分别具有结合性）；但正如我们将在下一个例子中看到的，同样的结论并不适用于幂等性。一般来说，众所周知的逻辑等价式并不会转化为关于张量运算的等式。这意味着，与我们经常将问题归约为某些基本联结词的小集合的命题逻辑不同，分别考察张量算子会更好。

例 2.10. 假设基集 X 是无限的，并且 $\mathcal{A} = \{\{x\} \mid x \in X\}$。考虑这些族。

$$\mathcal{A}_n = \underbrace{\mathcal{A} \vee \ldots \vee \mathcal{A}}_{n \text{ times}},$$

对于 $n \in \mathbb{Z}_+$。简单归纳可得 $\mathcal{A}_n = \{B \subseteq X \mid B \neq \emptyset, |B| \leq n\}$，因此这些族都各不相同。特别地，$\mathcal{A} \vee \mathcal{A} = \mathcal{A}_2 \neq \mathcal{A}$，所以张量运算 $\vee$ 不是幂等的，尽管 $\vee$ 在 $\{0,1\}$ 上的二元运算是幂等的。一个类似的例子表明，$\wedge$ （作为张量算子）也不是幂等的。

进一步阐述这个例子可以看出，分配律对于 $\vee$ 和 $\wedge$也不成立。选取如上所述的 $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{X\}$，使得 $\mathcal{A}$；那么

$$\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = \mathcal{A} \wedge \{X\} = \mathcal{A} \neq \mathcal{A} \vee \mathcal{A} = (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}).$$

我们并不旨在对张量运算的行为进行完整分析，但将证明它们保持区间。结合下面的引理，我们将由此获得一种计算张量运算结果的方法。

引理 2.11. 设 $\circledast$ 是 $\{0,1\}$ 上的二元运算，且 $\mathcal{A}_i$、$\mathcal{B}_j \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ 是集合族，其中 $i \in I$ 且 $j \in J$。那么

$$\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i\right) \circledast \left(\bigcup_{j \in J} \mathcal{B}_j\right) = \bigcup_{\substack{i \in I,\\ j \in J}} (\mathcal{A}_i \circledast \mathcal{B}_j).$$

证明。读者可以将此作为一道简单的练习来证明，也可以等到第4节；届时将证明张量算子属于所谓的 Kripke算子，并且并引理4.9 对 Kripke算子普遍成立。

□

为了处理区间和张量算子，我们需要一些辅助概念。我们暂时偏离经典逻辑（Kleene 在 [Kleene, 1952, §64] 中引入了他的逻辑），并引入一个新的真值 $\mathbf{u} \neq 0,1$，表示“未知”。[3]

定义 2.12。设 $\circledast$ 是 $\{0,1\}$ 上的一个二元运算。我们如下定义 $\circledast$ 的 Kleene扩张$\widetilde{\circledast}$。记 $V_0 = \{0\}$、$V_1 = \{1\}$ 和 $V_{\mathbb{u}} = \{0,1\}$，以及 $A \circledast B = \{u \circledast v \mid a \in A、b \in B\}$，表示 A、$B \subseteq \{0,1\}$。那么 $\widetilde{\circledast}$ 由以下规则确定：

$$u \widetilde{\circledast} v = w \text{ if and only if } V_u \circledast V_v = V_w,$$

对于 u、v、$w \in \{0,1,\mathbf{u}\}$。再次沿用这一记号，后文也将用 $\circledast$ 表示 $\widetilde{\ }$ 扩张，而不再用 $\circledast$。

定义2.13。（a）集合族 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 的特征函数是$\xi_{\mathcal{A}}$：$X \to \{0,1,\mathbf{u}\}$，

$$\xi_{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{for } E(x) = \{1\} \\ \mathbb{u}, & \text{for } E(x) = \{0,1\} \\ 0, & \text{for } E(x) = \{0\} \end{cases}$$

其中 $E(x) = \{\chi_A(x) \mid A \in \mathcal{A}\}$.

(b)我们称 χ: $X \to \{0,1\}$ 与函数 ξ：$X \to \{0, \mathbf{u}\ 1\}$ 相容，若对所有$x \in X$，$\xi(x) \neq \mathbf{u}$ 蕴含 $\chi(x) = \xi(x)$。

引理2.14。令 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$。

(a) 对于所有 $A \in \mathcal{A}$，我们有 χ_A 与 $\xi_{\mathcal{A}}$ 相容。

(b)族 $\mathcal{A}$ 是一个区间，前提是对于每个$A \subseteq X$，以下条件成立：$A \in \mathcal{A}$ 当且仅当 χ_A 与 $\xi_{\mathcal{A}}$相容。反之，如果 $\mathcal{A}$ 是一个区间，则该条件成立。

证明。（a）令 $A \in \mathcal{A}$，并对每个 $x \in X$。使用前一定义中的记号，我们注意到 $\chi_A(x) \in E(x)$。因此，要么 $\xi_{\mathcal{A}}(x) = \chi_A(x)$，要么 $\xi_{\mathcal{A}}(x) = \mathbf{u}$，兼容性由此得证。

（b）假设

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid \chi_A \text{ is compatible with } \xi_{\mathcal{A}}\}.$$

设$B = \xi_{\mathcal{A}}^{-1}[\{1\}]$ 和$C = \xi_{\mathcal{A}}^{-1}[\{1,\mathbf{u}\}]$。那么对每个 $A \subseteq X$，χ_A 与$\xi_{\mathcal{A}}$ 的相容性等价于条件 $B \subseteq A \subseteq C$。因此，$\mathcal{A} = [B,C]$。反向结论容易证明。

□

[3]这个符号代表用卢恩文字写成的字母“u”。“未知”在挪威语中是“ukjent”。

引理2.15. 设 $\circledast$ 是 $\{0,1\}$ 上的一个二元运算，并且 $\mathcal{A},\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$。那么对每个$x\in X$，有

$$\xi_{\mathcal{A}\circledast\mathcal{B}}(x)=\xi_{\mathcal{A}}(x)\circledast\xi_{\mathcal{B}}(x).$$

证明。令 $E_{\mathcal{C}}(x)=\{\chi_C(x)\mid C\in\mathcal{C}\}$，其中 $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{P}(X)$ 且 $x\in X$。那么

$$\begin{aligned}E_{\mathcal{A}\circledast\mathcal{B}}(x)&=\{\chi_C(x)\mid C\in\mathcal{A}\circledast\mathcal{B}\}\\&=\{\chi_{A*B}(x)\mid A\in\mathcal{A},\,B\in\mathcal{B}\}\\&=\{\chi_A(x)\circledast\chi_B(x)\mid A\in\mathcal{A},\,B\in\mathcal{B}\}\\&=\{\chi_A(x)\mid A\in\mathcal{A}\}\circledast\{\chi_B(x)\mid B\in\mathcal{B}\}\\&=E_{\mathcal{A}}(x)\circledast E_{\mathcal{B}}(x).\end{aligned}$$

采用用于定义Kleene扩张的记号，我们可以将这个方程写成

$$V_{\xi_{\mathcal{A}\circledast\mathcal{B}}(x)}=V_{\xi_{\mathcal{A}}(x)}\circledast V_{\xi_{\mathcal{B}}(x)},$$

即，$\xi_{\mathcal{A}\circledast\mathcal{B}}(x)=\xi_{\mathcal{A}}(x)\circledast\xi_{\mathcal{B}}(x)$。 □

命题2.16。设 $\circledast$ 是一个张量算子。那么，如果 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}$（$X$）是区间，那么 $\mathcal{A}\circledast\mathcal{B}$也是区间。事实上，若我们记 $\xi=\xi_{\mathcal{A}\circledast\mathcal{B}}$、$C_0=\xi^{-1}[\{1\}]$ 和 $C_1=\xi^{-1}[\{\mathrm{u}\ 1\}]$，那么$\mathcal{A}\circledast\mathcal{B}=[C_0,C_1]$。

证明。根据引理2.14的情形（a），我们有 $\mathcal{A}\circledast\mathcal{B}\subseteq[C_0,C_1]$。令 $C\in[C_0,C_1]$。由于 $C\in[C_0,C_1]$，特征函数 χ_C 与 $\xi_{\mathcal{A}\circledast\mathcal{B}}$相容。根据引理2.15，我们知道 $\xi_{\mathcal{A}\circledast\mathcal{B}}=\xi_{\mathcal{A}}\circledast\xi_{\mathcal{B}}$。这使我们能够选取函数 $\chi^{(0)}$、$\chi^{(1)}$：$X\to\{0,1\}$，使得（对每个 $x\in X$分别选取值 $\chi^{(0)}(x)$和 $\chi^{(1)}(x)$）$\chi_C=\chi^{(0)}\circledast\chi^{(1)}$，$\chi^{(0)}$与 $\xi_{\mathcal{A}}$ 相容，并且 $\chi^{(1)}$ 与 $\xi_{\mathcal{B}}$相容。最后，根据引理2.14的情形（b），我们看到存在 $A\in\mathcal{A}$ 和 $B\in\mathcal{B}$，满足 $\chi_A=\chi^{(0)}$ 和 $\chi_B=\chi^{(1)}$，这意味着 $C=A*B\in\mathcal{A}\circledast\mathcal{B}$。 □

2.4 团队的族

集合族的一般概念自然地出现在众多语境中。在本文中，我们关注逻辑中出现的集合族，并以其在逻辑中的应用为着眼点。这些集合族是定义在形如笛卡尔积 M^m的基集上的集合族。这种特殊形式的基集使得我们能够进行在抽象情形下不会出现的维度计算。特别地，我们可以固定 m and，考察一个族的维度如何依赖于 $|M|$。为避免平凡情形，我们假设 $|M|\geq 2$。

在经典逻辑中，对于给定的公式 $\phi(x_0,\ldots,x_{m-1})$，其自由变量为 $x_0,\ldots,x_{m-1}$，以及给定的结构 M，人们会关联一个由满足结构 M 中公式 ϕ 的 m 元组组成的集合：

$$\|\phi\|^M=\{(a_0,\ldots,a_{m-1})\in M^m\mid M\models\phi(a_0,\ldots,a_{m-1})\}.$$

这样的 m-元组集合称为 M^m 的可定义子集。M^m 的可定义子集构成一个布尔代数，其布尔运算对应于一阶逻辑的逻辑运算。研究这一代数是逻辑学中一种广为人知的方法。

正如经典逻辑产生 m-元组的可定义集合一样，团队语义和依赖逻辑（V¨a¨an¨anen [2007]）会产生 m-元组集合的可定义族。若 M 是一个模型，则 M 中的一个团队是一个赋值 T 集合 s （即函数），这些赋值将一组变量 dom(*s*) $=\{x_0,\ldots,x_{m-1}\}$（称为 s（以及 T）的定义域）映射到 M。我们将 s 视为元组 $(s(x_0)\ldots,s(x_{m-1}))$，并将一个团队视为 M^m 的子集。每个依赖逻辑公式 ϕ ，或其他基于团队语义的逻辑公式，只要其自由变量属于 $\vec{x}=(x_0,\ldots,x_{m-1})$，便会产生如下团队集合

$$\|\phi\|^{M,\vec{x}}=\{T\subseteq M^m \mid M\models_T \phi\}, \tag{1}$$

其中， $M\models_T\phi$是下文定义的满足关系。我们考虑 $\|\phi\|^{M,\ \vec{x}}\ M^m$的子集族这一类族中的一个特别有趣的情形。

如果 $\ell<m$，则存在一个规范投影 $M^m\to M^\ell$。我们可以将 $T\subseteq M^\ell$ 与$T^*=\{s\in M^m$识别为: $s\restriction\ell\in T\}$。这样一来，尽管严格说来当然有 $T\neq T^*$，但通过 T^*，可以同时将 M^ℓ的一个子集视为 M^m的一个子集。

本文的许多结果对于任意族的集合都成立；但是，当应用于形如 $\|\phi\|^{M,\ \vec{x}}$的族时，便可得到关于依赖逻辑和独立逻辑的结果。

为了使(1)更加精确，我们现在回顾 $M\models_T\phi$ 的归纳定义，该定义来自 V¨a¨an¨anen [2007]。如果 $a\in M$，则 $s(a/x)$是唯一的赋值 s' ，满足 $s'(x)=a$且对于定义域 s 中除 x之外的变量 y， $s'(y)=s(y)$。如果 $F\colon\ T\to\mathcal{P}(M)\setminus\{\emptyset\}$，则 $T[F/x]=\{s(a/x)\mid s\in T,\ a\in F(s)\}$。最后， $T[M/x]=\{s(a/x)\mid a\in M,\ s\in T\}$。

定义 2.17。（a） $M\models_T\phi$，其中 ϕ 是原子或否定原子，当且仅当 T 中的每个赋值 s 都满足 ϕ。

（b） $M\models_T\phi\wedge\psi$ 当且仅当 $M\models_T\phi$ 且 $M\models_T\psi$。

（c） $M\models_T\phi\vee\psi$ 当且仅当存在 U 和 V，使得 $T=U\cup V$、 $M\models_U\phi$ 和 $M\models_V\psi$。（张量析取）

（d） $M\models_T\phi\otimes\psi$ 当且仅当存在 U 和 V，使得 $T=U\cap V$、 $M\models_U\phi$ 和 $M\models_V\psi$。（张量合取）

（e） $M\models_T\phi\mathbin{\underline{\vee}}\psi$ 当且仅当 $M\models_T\phi$ 或 $M\models_T\psi$。（直觉主义析取）

（f） $M\models_T\exists x\phi$ 当且仅当存在 $F\colon\ T\to\mathcal{P}(M)\setminus\{\emptyset\}$，使得 $M\models_{T[F/x]}\phi$。

(g) $M\models_T\forall x\phi$ 当且仅当 $M\models_{T[M/x]}\phi$。

这为每个一阶公式 ϕ 定义了 $M\models_T\phi$。请注意，V¨a¨an¨anen [2007] 仅使用定义 2.17 中四个二元联结词的前两个。这里我们保留了这些联结词的常用记号 $\wedge$ 和 $\vee$。V¨a¨an¨anen [2007] 中提到了直觉主义析取，并在 Abramsky 和 V¨a¨an¨anen [2009] 中作了详细阐述。张量合取似乎此前尚未被研究过，而且在这里的作用也很小。

根据定义 2.17(a)，对于每个一阶文字（即原子公式或否定原子公式） ϕ，我们有 $\|\phi\|^{M,\vec{x}} = [\emptyset, T_\phi]$，其中 $T_\phi = \{\vec{a} \in M^m \mid M \models \phi(\vec{a})\}$。若 ϕ 是任意一阶逻辑公式，结论也同样成立。因此，对于一阶 ϕ，族 $\|\phi\|^{M,\vec{x}}$ 受 T_ϕ 支配、向下封闭、凸且有 $\emptyset$ 支撑。

进一步注意，对于复合的 ϕ，族 $\|\phi\|^{M,\vec{x}}$ 可以通过对各组成部分 ψ 的 ϕ 所对应的族应用例 2.8中引入的某个算子来获得。对于合取和（张量）析取，我们有

$$\begin{aligned} \|\phi \wedge \psi\|^{M,\vec{x}} &= \|\phi\|^{M,\vec{x}} \cap \|\psi\|^{M,\vec{x}} \\ \|\phi \vee \psi\|^{M,\vec{x}} &= \|\phi\|^{M,\vec{x}} \vee \|\psi\|^{M,\vec{x}} \end{aligned}$$

F此外，对于张量合取和直觉主义析取，我们有 e

$$\begin{aligned} \|\phi \otimes \psi\|^{M,\vec{x}} &= \|\phi\|^{M,\vec{x}} \wedge \|\psi\|^{M,\vec{x}} \\ \|\phi \underline{\vee} \psi\|^{M,\vec{x}} &= \|\phi\|^{M,\vec{x}} \cup \|\psi\|^{M,\vec{x}} \end{aligned}$$

但是请注意，在存在量词和全称量词的情况下，需要从元组 $\vec{x} = (x_0, \ldots, x_{m-1})$ 中删除被量化的变量：

$$\begin{aligned} \|\exists x_i \phi\|^{M,\vec{x}^-} &= \Delta^{M^m}_{\exists i}(\|\phi\|^{M,\vec{x}}) \\ \|\forall x_i \phi\|^{M,\vec{x}^-} &= \Delta^{M^m}_{\forall i}(\|\phi\|^{M,\vec{x}}), \end{aligned}$$

其中，$\vec{x}^-$ 是从 $\vec{x}$ 中删除分量 x_i后得到的元组。

现在我们回顾一下如何将 $M \models_T \phi$ 从一阶 ϕ 扩展到新的非一阶原子。下文中，团队 T 对 $\vec{x}$的限制，记作 $T \restriction \vec{x}$，是集合 $\{s \restriction \vec{x} : \ s \in T\}$。我们用 len($\vec{x}$) 表示变量序列（或其他序列） $\vec{x}$的长度。

定义 2.18. (a) 依赖原子：$M \models_T =(\vec{x}, y)$ 当且仅当 $s(\vec{x}) = s'(\vec{x})$ 蕴含 $s(y) = s'(y)$，对所有 s, $s' \in T$ 均成立。我们允许 len($\vec{x}$) $= 0$，并称 $=(y)$ 为恒常原子。更一般地，$M \models_T =(\vec{y})$ 当且仅当 $s(\vec{y}) = s'(\vec{y})$，对所有 $s, s' \in T$ 均成立。

(b) 排斥原子：$M \models_T \vec{x} \mid \vec{y}$ 当且仅当对于每个 $s, s' \in T$，我们都有 $s(\vec{x}) \neq s'(\vec{y})$。我们假设 len($\vec{x}$) $=$ len($\vec{y}$) > 0。

(c) 包含原子：$M \models_T \vec{x} \subseteq \vec{y}$ 当且仅当对于每个 $s \in T$ 存在 $s' \in T$ 使得 $s(\vec{x}) = s'(\vec{y})$。我们假设 len($\vec{x}$) $=$ len($\vec{y}$) > 0。

(d) 匿名原子：$M \models_T \vec{x}\ \Upsilon\ y$ 当且仅当对于每个 $s \in T$，都存在 $s' \in T$，使得 $s(\vec{x}) = s'(\vec{x})$ 且 $s(y) \neq s'(y)$。我们假设 $\vec{x}$ 非空。

(e) 独立原子：$M \models_T \vec{x} \perp_{\vec{z}} \vec{y}$ 当且仅当对于任意 s、$s' \in T$，若$s(\vec{z}) = s'(\vec{z})$，则存在 $s'' \in T$ 使得 $s''(\vec{z}) = s(\vec{z})$，$s''(\vec{x}) = s(\vec{x})$且 $s''(\vec{y}) = s'(\vec{y})$。我们假设 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 均非空。原子 $\vec{x} \perp \vec{y}$对应于$\vec{z}$为空的情形，称为纯独立原子；否则，$\vec{x} \perp_{\vec{z}} \vec{y}$ 称为条件独立原子。

(f) 原子的一般概念：假设 C 是一个在同构下封闭的类，其元素为对(A, T)，其中 A 是一个集合， T是 A 中定义域为 $\vec{x}$的一个团队。我们可以将一个新的原子 $\alpha_C(\vec{x})$与 C关联起来，并定义 $M \models_T \alpha_C(\vec{x})$成立，当且仅当$(A, T \upharpoonright \vec{x}) \in C$，其中 A 是模型 M的定义域。

通过对各自的原子应用定义 2.17 中的逻辑运算 (b)、(c)、(f) 和 (g) 的闭包，我们得到依赖逻辑、常值逻辑、排斥逻辑、包含逻辑、匿名逻辑以及（纯或条件）独立逻辑。

注意，我们仅针对单个变量 y 定义了 $=(\vec{x}, y)$。这是因为，对于向量 $\vec{y} = (y_1 \ldots, y_n)$， $=(\vec{x}, \vec{y})$（我们现在将其作为简写）可以定义为

$$=(\vec{x}, y_1) \wedge \ldots \wedge =(\vec{x}, y_n).$$

我们对 $=(\vec{x})$ 采用相同的约定。

如果 ϕ 是依赖原子或排斥原子，那么 $\|\phi\|^{M,\vec{x}}_{,}$ 是向下封闭的，并且有 $\emptyset$ 支撑，但不一定在并集下封闭或受支配的。如果 ϕ 是包含原子或匿名原子，那么 $\|\phi\|^{M,\vec{x}}_{,}$ 在并集下封闭，并且受 $M^{\mathrm{len}(\vec{x})}$ 支配，但不一定是向下封闭的或有支撑的。

例 2.19. 结合依赖原子和逻辑运算的句例如下：当且仅当 $|T \upharpoonright \vec{x}| \leq n^k/2$ 时，大小为 n 的模型中的团队 T 满足公式，其中 $\mathsf{len}(\vec{x}) = k$:

$$\exists \vec{y}(=(\vec{y}, \vec{x}) \wedge \vec{x} \mid \vec{y}).$$

这里 $\mathsf{len}(\vec{y}) = k$。一个将多个不同原子和逻辑运算结合起来的句子示例如下：公式由团队 T 满足，当且仅当 $|T \upharpoonright \vec{x}|$ 为偶数:

$$\begin{aligned} \exists u \exists v \exists \vec{y} \exists \vec{z} (\vec{y}\vec{z} \perp \vec{x} \wedge \vec{y} \subseteq \vec{x} \wedge \vec{z} \subseteq \vec{x} \\ \wedge ((u = v \wedge \vec{x} \subseteq \vec{y}) \vee (u \neq v \wedge \vec{x} \subseteq \vec{z})) \ . \\ \wedge \ \vec{y} \mid \vec{z} \ \wedge =(\vec{z}, \vec{y}) \ \wedge =(\vec{y}, \vec{z})) \end{aligned}$$

我们还将考虑带有 Lindström 量词的一阶逻辑扩展（定义见 Lindström [1966] ）。为简单起见，我们只关注类型为 (r) 的 Lindström 量词，其中 r 是某个正整数（即绑定单个公式的量词）。这样的量词 $Q_{\mathcal{K}}$ 与任意一个由同构封闭的结构类 $\mathcal{K}$ 相关联，其结构形式为 (A, R)， $R \subseteq A^r$。如果 ψ 是一个公式，且 $\vec{y}$ 是一个 r-元组的变量，那么应用量词 $Q_{\mathcal{K}}$ 后，我们得到一个新公式 $Q_{\mathcal{K}}\vec{y}\,\psi$ ，其中 $\vec{y}$ 中变量的所有出现都被绑定。

为了定义 $Q_{\mathcal{K}}$ 的团队语义，我们采用定义存在量词时使用的记号：如果 $F\colon T \to \mathcal{P}(M^r)$，那么 $T[F/\vec{y}] = \{s(\vec{b}/\vec{y}) \mid s \in T, \vec{b} \in F(s)\}$。

定义 2.20。$M \models_T Q_{\mathcal{K}}\vec{y}\,\psi$ 当且仅当存在 $F\colon T \to \mathcal{P}(M^r)$，使得 $M \models_{T[F/\vec{y}]} \psi$ 且 $(M, F(s)) \in \mathcal{K}$ 对所有 $s \in T$ 都成立。

Lindstr¨om 量词的语义也可以用算子来表述，这些算子将形如 $\|\psi\|^{M,\vec{z}}$ 的集合映射为集合 $\|Q_{\mathcal{K}}\vec{y}\,\psi\|^{M,\vec{x}}$，其中 $\vec{z}$ 由元组 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$中的变量组成。为了详细说明这些算子，我们固定一个类型为 (r) 的量词 $Q_{\mathcal{K}}$， $\vec{z}$ 的长度 $m \geq r$，满足 $\vec{y} = (z_{\ell_0}, \ldots, z_{\ell_{r-1}})$ 的元组 $\ell = (l_0, \ldots, \ell_{r-1})$，以及模型的论域 M。注意，没有理由假设 ℓ 的 $\vec{}$ 个分量按升序排列；量词 $Q_{\mathcal{K}}$ 可以应用于 $\vec{z}$ 中任意由不同变量组成的 r 元组。另一方面，不失一般性，我们可以假设 $\vec{x}$ 按升序列出 $\vec{z}$ 中其余变量，即对于每个 $i < m - r$, $x_i = z_j$，其中$j \notin \{\ell_0, \ldots, \ell_{r-1}\}$ 且 $i = |\{k < j \mid k \notin \{\ell_0, \ldots, \ell_{r-1}\}\}|$。因此， $\vec{z}$是通过将后者重新排序并依据 ℓ进行交错排列，从 $\vec{x}$和$\vec{y}$ 得到的。我们用记号 $\vec{z} = \vec{x} \otimes_{\vec{\ell}} \vec{y}$ $\vec{}$表示这种交错排列；类似地，对于来自 M 的元素组成的元组 $\vec{c}, \vec{a}, b$，用 $\vec{c} = \vec{a} \otimes_{\vec{\ell}} b$ 表示。

设 $S \subseteq M^m$ 是定义域为 $\{z_0, \ldots, z_{m-1}\}$ 的团队。对于每个 $\vec{a} \in M^{m-r}$， S 在 $\vec{a}$ 上的 $\vec{\ell}$ 限制是集合 $S[\vec{a}]_{\vec{\ell}} := \{\vec{b} \in M^r \mid \vec{a} \otimes_{\vec{\ell}} \vec{b} \in S\}$。此外， S 的 $(\mathcal{K}, \ell)$-投影是集合 $\pi_{\mathcal{K}, \vec{\ell}}(S) := \{\vec{a} \in M^{m-r} \mid (M, S[\vec{a}]_{\vec{\ell}}) \in \mathcal{K}\}$。这里的想法是，如果对于某个团队 $S \in \|\psi\|^{M,\vec{z}}$ (S)，则通过定义 $F\colon T \to \mathcal{P}(M^r)$，使得对于每个 $\vec{a} \in T$ 都有 $F(\vec{a}) = S[\vec{a}]_{\vec{\ell}}$，我们可以看到，只要 $S = T[F/\vec{y}]$，定义 2.20 的真值条件就对团队 T 成立。显然， $T[F/\vec{y}] \subseteq S$；当且仅当 $\{\vec{a} \in M^{m-r} \mid S[\vec{a}]_{\vec{\ell}} \neq \emptyset\} \subseteq T$ 时，反向包含成立。若该条件成立，我们称 T 是 S 的适当 $(\mathcal{K}, \vec{\ell})$-投影，记作 $T = \pi^p_{\mathcal{K}, \vec{\ell}}(S)$。

上述论证表明，如果 $T = \pi^p_{\mathcal{K}}$、$\vec{\ell}(S)$ 对某个团队 $S \in \|\psi\|^M$、$^{\vec{z}}$ 成立，那么$T \in \|Q_{\mathcal{K}}\vec{y}\,\psi\|^M$、$^{\vec{x}}$。假设 $(M$、$\emptyset) \notin \mathcal{K}$，逆命题也成立。事实上，如果 $M \models_T Q_{\mathcal{K}}\vec{y}\,\psi$，那么存在一个函数 F: $T \to \mathcal{P}(M^r)$，使得 $M \models_{T[F/\vec{y}]} \psi$，并且对于所有 $\vec{a} \in T$，$(M$、$F(\vec{a})) \in \mathcal{K}$。由于对于每个 $\vec{a} \in T$，$(M$、$\emptyset) \notin \mathcal{K}$， $F(\vec{a}) \neq \emptyset$，因此$T = \pi_{\mathcal{K}}$、$\vec{\ell}(T[F/\vec{y}])$。此外，对于任何形如 $T[F/\vec{y}]$ 的团队 S，条件 $\{\vec{a} \in M^{m-r} \mid S[\vec{a}]_{\vec{\ell}} \neq \emptyset\} \subseteq T$ 显然成立。因此，我们看到 $T = \pi^p_{\mathcal{K}}$、$\vec{\ell}(T[F/\vec{y}])$。

不过请注意，如果 $(M, \emptyset) \in \mathcal{K}$，那么论证 $T = \pi_{\mathcal{K}, \vec{\ell}}(T[F/\vec{y}])$ 就会失效：根据定义，我们总有 $\pi_{\mathcal{K}, \vec{\ell}}(T[F/\vec{y}]) \subseteq T$，但如果对于某个 $\vec{a} \in T$， $F(\vec{a}) = \emptyset$，那么 $\vec{a} \notin \pi_{\mathcal{K}, \vec{\ell}}(T[F/\vec{y}])$。在这种情况下，团队 T 属于族 $\|Q_{\mathcal{K}}\vec{y}\,\psi\|^{M,\vec{x}}$ 的正确条件是，存在团队 $S \in \|\psi\|^{M,\vec{z}}$ 和 $T' \subseteq T$，使得 $T' = \pi^p_{\mathcal{K}}$ $,$ $\vec{\ell}(S)$。

现在我们可以定义与 Lindström 量词对应的团队族上的算子了。

定义 2.21。$(\mathcal{K}, \vec{\ell})$-投影算子 $\Delta^{M^m}_{\mathcal{K}\vec{\ell}}$,: $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M^m)) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(M^{m-r}))$ 分两种情况分别定义。

- 如果 $(M, \emptyset) \notin \mathcal{K}$，那么对于每个 $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M^m))$,

$$\Delta^{M^m}_{\mathcal{K},\vec{\ell}}(\mathcal{A}) = \{B \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M^{m-r})) \mid B = \pi^p_{\mathcal{K},\vec{\ell}}(A) \text{ for some } A \in \mathcal{A}\}.$$

- 若 $(M, \emptyset) \in \mathcal{K}$，则对于每个 $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M^m))$,

$$\Delta^{M^m}_{\mathcal{K},\vec{\ell}}(\mathcal{A}) = \{B \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M^{m-r})) \mid \pi^p_{\mathcal{K},\vec{\ell}}(A) \subseteq B \text{ for some } A \in \mathcal{A}\}.$$

根据定义 2.21 之前给出的论证，算子$\Delta^{M^m}_{\mathcal{K}\,\vec{\ell}}$，刻画了量词 $Q_{\mathcal{K}}$ 的语义：

$$\|Q_{\mathcal{K}}\vec{y}\,\psi\|^{M,\vec{x}} \;=\; \Delta^{M^m}_{\mathcal{K},\vec{\ell}}(\|\psi\|^{M,\vec{z}}).$$

还需注意，标准的存在量词和全称量词都是 Lindstr¨om 量词的特殊情形：$\exists = Q_{\mathcal{K}_\exists}$ 对于类 $\mathcal{K}_\exists = \{(A,R) \mid R \subseteq A, R \neq \emptyset\}$，以及 $\forall = Q_{\mathcal{K}_\forall}$对于 $\mathcal{K}_\forall = \{(A,R) \mid R = A\}$。因此，相应的算子也完全相同：对于每个$i < m$, $\Delta^{M^m}_{\exists i} = \Delta^{M^m}_{\mathcal{K}_\exists}$，$\vec{\ell}$ 和 $\Delta^{M^m}_{\forall i} = \Delta^{M^m}_{\mathcal{K}_\forall\,\vec{\ell},}$，其中 $\vec{\ell} = i$（即 ℓ 的长度为 1，且 $\ell_0 = i$）。因此，后文无需单独考虑算子 $\Delta^{M^m}_{\exists i}$ 和 $\Delta^{M^m}_{\forall i}$。

注。请注意，若 $(M,\emptyset) \in \mathcal{K}$ 且 $M \models_\emptyset \psi$，则对于任意团队 T，都有 $M \models_T Q_{\mathcal{K}}\vec{y}\,\psi$。事实上，若 $F\colon T \to \mathcal{P}(M^r)$ 是满足对所有 $s \in T$ 均有 $F(s) = \emptyset$ 的函数，则 $T[F/\vec{y}] = \emptyset$，由此定义 2.20 中的真值条件成立。定义 2.18 中所列原子扩充一阶逻辑后得到的每个公式 ψ 都具有空团队性质：$M \models_\emptyset \psi$ 对所有模型 M 均成立（见 V¨a¨an¨anen [2007]）。容易看出，即使向逻辑中加入任意 Lindstr¨om 量词，这一性质仍然成立。事实上，除了含有非空原子的逻辑（见定义 5.12）之外，本文讨论的所有逻辑都具有空团队性质。因此我们看到，在我们的框架中，若 $(M,\emptyset) \in \mathcal{K}$，则量词 $Q_{\mathcal{K}}$ 在 M 上变得平凡，因为对于每个团队 T和每个公式 ψ，$M \models_T Q_{\mathcal{K}}\vec{y}\,\psi$ 都成立。

3 维数计算

在本节中，我们计算一些重要的具体集合族的上维、对偶维和柱维数的精确值，或者在某些情况下仅给出上界和下界。这将在后文用于估计各种围绕定义 2.18 中的原子构建的逻辑中的可定义的团队族的维度。

3.1 凸影和凸包

在本小节中，我们将发展一些有助于具体计算维度的辅助工具。特别地，我们引入凸影的概念以及对偶凸影这一对偶概念，这些概念有助于计算给定族的上维数和对偶上维数。要点在于，当我们需要检验某个子族是否支配给定族时，凸影是我们需要与支配族中的集合建立关联的典型受支配的凸族。

定义 3.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个集合族，且 $A \in \mathcal{A}$。A 在族 $\mathcal{A}$ 中的凸影是以下族

$$\partial_A(\mathcal{A}) = \{B \subseteq A \mid [B,A] \subseteq \mathcal{A}\}.$$

类似地， A 在 $\mathcal{A}$ 中的对偶凸影为

$$\partial^A(\mathcal{A}) = \{B \in \mathcal{A} \mid A \subseteq B, [A, B] \subseteq \mathcal{A}\}.$$

若集合 $A \in \mathcal{A}$ 的凸影在集合族中是极大的，则称其在 $\mathcal{A}$ 中是临界的

$$\{\partial_B(\mathcal{A}) \mid B \in \mathcal{A}\}.$$

我们使用如下记号

$$\mathrm{Crit}(\mathcal{A}) = \{A \in \mathcal{A} \mid A \text{ critical in } \mathcal{A}\}.$$

类似地，我们定义对偶临界性的概念。我们用 Crit^{d}($\mathcal{A}$):lla 表示 $\mathcal{A}$ 中对偶临界集合的族。

引理 3.2. 设 $\mathcal{A}$ 是一个集合族，且 $A \in \mathcal{A}$。

(a) $\partial_A(\mathcal{A})$ 是满足 $\bigcup \mathcal{C} = A$ 的最大受支配凸族 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$。类似地， $\partial^A(\mathcal{A})$ 是满足 $\bigcap \mathcal{C} = A$ 的最大支撑凸族 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$。

(b) 集合族 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ 支配 $\mathcal{A}$，当且仅当 $\bigcup_{G\in\mathcal{G}} \partial_G(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$。对偶地， $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}$ 支撑 $\mathcal{A}$，当且仅当 $\bigcup_{H\in\mathcal{H}} \partial^H(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$。

(c) 若 $\mathcal{G}$ 支配 $\mathcal{A}$，则 Max($\mathcal{A}$) $\subseteq \mathcal{G}$；若 $\mathcal{H}$ 支持 $\mathcal{A}$，则 Min($\mathcal{A}$) $\subseteq \mathcal{H}$.

(d) 假设族的族 $\{\partial_A(\mathcal{A}) \mid A \in \mathcal{A}\}$ 满足佐恩条件。那么存在一个族 $\mathcal{G}$ 支配 $\mathcal{A}$，使得 $\mathcal{G} \subseteq$ Crit($\mathcal{A}$) 且 $|\mathcal{G}|$ =D($\mathcal{A}$)。对偶结果同样成立。

证明。对偶命题的证明与原命题类似，因此略去。

(a) 显然， $\partial_A(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个被支配的凸子族，且满足 $\bigcup \mathcal{A} = A$。设$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ 是另一个满足 $\bigcup \mathcal{C} = A$ 的被支配的凸子族。对于 $C \in \mathcal{C}$，由 $\mathcal{C}$ 的凸性可得$[C, A] \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$，因此 $\mathcal{C} \subseteq \partial_A(\mathcal{A})$。

(b) 若 $\bigcup_{G\in\mathcal{G}} \partial_G(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$，则被支配的凸族 $\partial_G(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, $G \in \mathcal{G}$ 可证明 $\mathcal{G}$ 支配 $\mathcal{A}$。

反过来，假设 $\mathcal{G}$ 支配 $\mathcal{A}$，且族 $\mathcal{D}_G$、 $G \in \mathcal{G}$见证了这一点（也就是说，对于每个 $G \in \mathcal{G}$, $\bigcup_{G\in\mathcal{G}} \mathcal{D}_G = \mathcal{A}$ 且 $\bigcup \mathcal{D}_G = G$）。那么根据前面的断言，对于每个 $G \in \mathcal{G}$，都有 $\mathcal{D}_G \subseteq \partial_G(\mathcal{A})$，这意味着 $\bigcup_{G\in\mathcal{G}} \partial_G(\mathcal{A})$。

(c) 假设 $\mathcal{G}$ 支配 $\mathcal{A}$，且 M 在族 $\mathcal{A}$中是极大的。那么根据情形 a，对于某个 $G \in \mathcal{G}$，有 $M \in \partial_G($ $\mathcal{A})$。然而， $M \in \partial_G(\mathcal{A})$意味着 $M \subseteq G$，因此由 M的极大性可知， $M = G \in \mathcal{G}$。因此，Max($\mathcal{A}$) $\subseteq \mathcal{G}$。

（d）选取一个支配 $\mathcal{A}$ 的子族 $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{A}$，使得 $|\mathcal{G}_0| =$ D($\mathcal{A}$)。令 S $= \{\partial_A(\mathcal{A}) \,|A \in \mathcal{A}\}$。根据假设，S 满足佐恩条件，因此对每个 $G \in \mathcal{G}_0$，都存在一个具有极大凸影的 $D_G \in \mathcal{A}$，使得 $\partial_G(\mathcal{A}) \subseteq \partial_G(\mathcal{A})$。换言之，存在一个临界的 $D_G \in \mathcal{A}$，使得 $\partial_G(\mathcal{A}) \subseteq \partial_G(\mathcal{A})$。令 $\mathcal{G} = \{D_G \mid G \in \mathcal{G}\}$。由于 $\mathcal{G}_0$ 支配 $\mathcal{A}$，我们有 $\bigcup_{G\in\mathcal{G}_0} \partial_G(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$，这显然意味着

$$\bigcup_{D\in\mathcal{G}} \partial_D(\mathcal{A}) = \bigcup_{G\in\mathcal{G}_0} \partial_{D_G}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}.$$

因此， $\mathcal{G}$ 也支配 $\mathcal{A}$，且 $|\mathcal{G}| \leq |\mathcal{G}_0| = \mathrm{D}(\mathcal{A})$，所以 $|\mathcal{G}| = \mathrm{D}(G)$。 □

凸影和对偶凸影是满足适当性质的极大 *subfamilies* 。产生超族而非子族的类似运算称为凸包。我们将在后续章节中使用后面这些概念。

定义 3.3. 设 $\mathcal{A}$ 是一个非空集合族。 $\mathcal{A}$ 的凸包是

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \bigcup_{A,A' \in \mathcal{A}} [A, A'],$$

$\mathcal{A}$ 的受支配（凸）包是

$$\mathcal{H}_*(\mathcal{A}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \left[A, \bigcup \mathcal{A}\right],$$

且有支撑的（凸）包是

$$\mathcal{H}^*(\mathcal{A}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \left[\bigcap \mathcal{A}, A\right].$$

我们还设定 $\mathcal{H}(\emptyset) = \emptyset$。

注意，不存在包含空族的唯一最小受支配的或有支撑的凸族（所有单元素集都满足这一点）。

如果集合族是有限的，我们可以按照惯例省略记号中的花括号，写作 $\mathcal{H}_*(A_0, \ldots, A_{k-1})$ 而非 $\mathcal{H}_*(\{A_0, \ldots, A_{k-1}\})$，或写作 $\mathcal{H}^*(A_0, \ldots, A_{k-1})$ 而非 $\mathcal{H}_*(\{A_0, \ldots, A_{k-1}\})$。注意特殊情形 $\mathcal{H}_*(A, B) = [A, A \cup B] \cup [B, A \cup B]$ 和 $\mathcal{H}^*(A, B) = [A \cap B, A] \cup [A \cap B, B]$。

我们省略以下引理的证明，因为它很直接。

引理 3.4. 设 $\mathcal{A}$ 是一个集合族。那么

(a) $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ 是包含 $\mathcal{A}$ 的最小凸族，

(b) $\mathcal{H}_*(\mathcal{A})$ 是包含 $\mathcal{A}$ 的最小支配凸族且

(c) $\mathcal{H}^*(\mathcal{A})$ 是包含 $\mathcal{A}$ 的最小有支撑凸族。

3.2 特定集合族的维数

在本小节中，我们将计算一些具体集合族的维数。这些集合族与团队语义相关，但在其他语境中也十分常见。

对于非空有限基集 X 和 Y，以下是我们所考虑的族列表：

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \{f \subseteq X \times Y \mid f \text{ is a mapping }\},\\
\mathcal{X} &= \{R \subseteq X \times X \mid \mathrm{dom}(R) \cap \mathrm{rg}(R) = \emptyset\}\\
\mathcal{I}_{\subseteq} &= \{R \subseteq X \times X \mid \mathrm{dom}(R) \subseteq \mathrm{rg}(R)\},\\
\mathcal{Y} &= \{R \subseteq X \times Y \mid R \text{ is anonymous}\},\\
\mathcal{I}_{\perp} &= \{A \times B \mid A \subseteq X,\, B \subseteq Y\},
\end{aligned}$$

其中，我们称关系 $R \subseteq X \times Y$ 为匿名的，如果对于所有 $x \in$ 定义域(R)，都存在互不相同的y、$y' \in Y$，使得 (x, y)、$(x, y') \in R$。

我们借助影子和临界集计算这些族的维数。族 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{X}$ 是最简单的情况，因为它们是向下封闭的。对于其他族，我们分别用独立的引理来处理。

引理 3.5. 假设 $|X|, |Y| \geq 2$。令 $A \subseteq X$ 和 $B \subseteq Y$。那么：

(a)如果 $|A|, |B| \geq 2$，我们有 $\partial_{A\times B}(\mathcal{I}_\perp) = \partial^{A\times B}(\mathcal{I}_\perp) = \{A \times B\}$。

(b)如果 $|A| \leq 1$ 或 $|B| \leq 1$，那么 $\partial_{A\times B}(\mathcal{I}_\perp) = \mathcal{P}(A \times B)$。

(c) 如果 $|A| = 1$ 和 $|B| \geq 2$，那么

$$\partial^{A\times B}(\mathcal{I}_\perp) = \{A \times D \mid B \subseteq D \subseteq Y\}.$$

Sim同样地，$|A| \geq 2$ 且 $|B| = 1$ 意味着 $\partial^{A\times B}(\mathcal{I}_\perp) = \{C \times B \mid A \subseteq C \subseteq X\}$。

(d) 如果 $|A| = |B| = 1$，那么 $\partial^{A\times B}(\mathcal{I}_\perp)$ 由形如 $A \times D$ 和 $C \times B$（其中 $A \subseteq C \subseteq X$ 和 $B \subseteq D \subseteq Y$）的集合组成。

(e) $\partial^{\emptyset}(\mathcal{I}_\perp)$由所有集合 $C \times D$ 组成，其中 $C \subseteq X$、$D \subseteq Y$ 且 $|C| \leq 1$ 或 $|D| \leq 1$。

（f） $\mathcal{I}_\perp$ 的临界族和对偶临界族是

$$\begin{aligned}\mathrm{Crit}(\mathcal{I}_\perp) =& \{A \times B \subseteq X \times Y \mid |A| \geq 2, |B| \geq 2\} \\ &\cup \{\{a\} \times Y \mid a \in X\} \\ &\cup \{X \times \{b\} \mid b \in Y\}. \\ \mathrm{Crit}^{\mathrm{d}}(\mathcal{I}_\perp) =& \{A \times B \subseteq X \times Y \mid |A| \geq 2, |B| \geq 2\} \cup \{\emptyset\}.\end{aligned}$$

(g) 对于每个 $R \in \mathcal{I}_\perp$，其影子 $\partial_R(\mathcal{I}_\perp)$ 是一个区间。

证明。 (a) 如果 $|A| \geq 2$ 和 $|B| \geq 2$，向 $A \times B$ 中添加或从中删除点 (x, y) 的任何操作，都会得到一个不是 $A' \times B'$ 形式的笛卡尔积的集合，这就证明了结论。

(b) 如果集合 A 或 B 中任一个为空，则该断言显然成立，因此不妨根据对称性设 $A = \{a\}$。于是，$A \times B$ 的每个子集都可以写成 $A \times B'$，其中某个 $B' \subseteq B$ 满足条件，因此 $\partial_{A\times B}(\mathcal{I}_\perp) = \mathcal{P}(A \times B)$。

(c) 假设 $A = \{a\}$ 且 $|B| \geq 2$。令 $R \in \mathcal{I}_\perp$，其中 $R \supseteq A \times B$。写作 $R = C \times D$，其中 $C \subseteq X$，并令 $D \subseteq Y$，满足 $C \supseteq A$ 和 $D \supseteq B$。如果 $C \neq A$，则容易看出 $C \times D \notin \partial^{A\times B}(\mathcal{I}_\perp)$，因为我们可以取 $c \in C \setminus A$ 和 $b \in B$，从而 $A \times B \subseteq (A \times B) \cup \{c, d\} \subseteq C \times D$，但 $(A \times B) \cup \{c, d\} \notin \mathcal{I}_\perp$。相比之下，对于每个满足 $D \supseteq B$ 的 $D \subseteq Y$，我们都有 $[A \times B, A \times D] \subseteq \mathcal{I}_\perp$，因为 A 是一个单元素集。

对于第 (d) 和 (e) 项，其证明与第 (c) 项的证明非常相似。

(f) 首先考虑集合 $A \times B$，其中 $|A| \geq 2$ 和 $|B| \geq 2$。根据 (a)–(e) 项，覆盖 $A \times B$ 的唯一凸影或对偶凸影就是 $A \times B$ 本身的影子或对偶影子。因此，$A \times B$ 既是临界的，也是对偶临界的。

接下来考虑 $A = \{a\}$ ($a \in X$) 是单元素集的情形。根据项 (b)，在集合 $A \times B$ 中，集合 $A \times Y$ 的影子最大，其中也包括 $B = \emptyset$ 的情形。当 B 是单元素集而 A 变化时，对称情形的处理方式相同。对于对偶情形，项 (c)-(e) 表明空集具有最大的对偶影子。

(g) 由项 (a) 和 (b) 可得，因为我们注意到 $\{A \times B\} = [A \times B, A \times B]$ 和 $\mathcal{P}(A \times B) = [\emptyset, A \times B]$。 □

引理 3.6。假设 $m = |X| \geq 2$。令 $R, S \in \mathcal{I}_{\subseteq}$。

(a) 若 $S \subseteq R$，则

$$[S, R] \subseteq \mathcal{I}_{\subseteq} \textit{ if and only if } \operatorname{dom}(R \setminus \mathrm{id}_X) \subseteq \operatorname{rg}(S).$$

(b) 我们有

$$\partial_R(\mathcal{I}_{\subseteq}) = \{T \in \mathcal{I}_{\subseteq} \mid T \subseteq R,\ A \subseteq \operatorname{rg}(T)\}$$

其中 $A = \operatorname{dom}(R \setminus \mathrm{id}_X)$。

(c)对于 $A \subseteq X$，令 $R_A = (A \times X) \cup \mathrm{id}_X$。那么我们有 $R_A \in \mathcal{I}_{\subseteq}$ 并且

$$\partial_{R_A}(\mathcal{I}_{\subseteq}) = \{T \in \mathcal{I}_{\subseteq} \mid \operatorname{dom}(T \setminus \mathrm{id}_X) \subseteq A \subseteq \operatorname{rg}(T)\}.$$

(d) 我们有 $\operatorname{Crit}(\mathcal{I}_{\subseteq}) = \{R_A \mid A \subseteq X\}$。

(e) $\operatorname{Crit}(\mathcal{I}_{\subseteq}) \setminus \{R_{\{a\}} \mid a \in X\}$ 是支配 $\mathcal{I}_{\subseteq}$的最小规模族。

(f) 记 $B = \operatorname{rg}(R)$。然后

$$\partial^R(\mathcal{I}_{\subseteq}) = \{T \in \mathcal{I}_{\subseteq} \mid R \subseteq T,\ \operatorname{dom}(T \setminus \mathrm{id}_X) \subseteq B\} = [R, R_B].$$

(g) $\operatorname{Crit}^{\mathrm{d}}(\mathcal{I}_{\subseteq}) = \{R \in \mathcal{I}_{\subseteq} \mid R^{-1}$ 是一个映射$\}$。

(h)$\operatorname{Crit}^{\mathrm{d}}(\mathcal{I}_{\subseteq}) \setminus \{\{(a, a)\} \mid a \in X\}$ 是支持 $\mathcal{I}$ 的最小族 $\subseteq$.

证明。(a)假设定义域$(R \setminus \mathrm{id}_X) \subseteq \operatorname{rg}(S)$，并考虑 $T \in [S, R]$，即 $S \subseteq T \subseteq R$。令$x \in$定义域$(T)$。取 y使得 $(x, y) \in T$。若 $x = y$，则显然 $x \in \operatorname{rg}(T)$。否则$x \neq y$，因此

$$x \in \operatorname{dom}(T \setminus \mathrm{id}_X) \subseteq \operatorname{dom}(R \setminus \mathrm{id}_X) \subseteq \operatorname{rg}(S) \subseteq \operatorname{rg}(T).$$

因此，在这两种情况下，我们都有 $x \in \operatorname{rg}(T)$，所以 $\operatorname{dom}(T) \subseteq \operatorname{rg}(T)$。因此 $T \in \mathcal{I}_{\subseteq}$，并且 $[S, R] \subseteq \mathcal{I}_{\subseteq}$。

反设，定义域$(R \setminus \mathrm{id}_X) \not\subseteq \operatorname{rg}(S)$。那么我们可以选择 $x \in$定义域$(R \setminus \mathrm{id}_X) \setminus \operatorname{rg}(S)$。取 $y \neq x$ 使得 $(x, y) \in R$，并考虑 $T = S \cup \{(x, y)\}$。

显然，$x \in$ 定义域(T)，但 $x \notin \mathrm{rg}(T) = \mathrm{rg}(S) \cup \{y\}$，因此 $T \notin \mathcal{I}_{\subseteq}$。这证明了$[S, R] \not\subseteq \mathcal{I}_{\subseteq}$。

(b) 这是对前一项的直接应用。

(c) 我们首先注意到 $\mathrm{dom}(R_A) = X = \mathrm{rg}(R_A)$，因为 $\mathrm{id}_X \subseteq R_A$，这意味着 $R_A \in \mathcal{I}_{\subseteq}$。容易看出，$T \subseteq R_A$ 当且仅当 $\mathrm{dom}(T \setminus \mathrm{id}_X) \subseteq A$，因此后一结论由前一项得出。

(d) 为证明 $\mathcal{I}_{\subseteq}$ 中的每个临界集都具有 R_A 的形式，其中 $A \subseteq X$，令 $R \in \mathcal{I}_{\subseteq}$。记 $A = \mathrm{dom}(R \setminus \mathrm{id}_X)$。容易看出 $R \subseteq R_A$，而前几项表明 $\partial_R(\mathcal{I}_{\subseteq}) \subseteq \partial_{R_A}(\mathcal{I}_{\subseteq})$。因此，只需证明集合 R_A、$A \subseteq X$ 的影子不可比较。令 A、$A' \subseteq X$、$A \neq A'$。先假设 $|A| \geq 2$。令 f 为 A 的任意一个无不动点置换。则 $\mathrm{dom}(f \setminus \mathrm{id}_X) = \mathrm{dom}(f) = A = \mathrm{rg}(A)$，因此前一项表明 $f \in \partial_{R_A}(\mathcal{I}_{\subseteq})$，但 $f \notin \partial_{R_{A'}}(\mathcal{I}_{\subseteq})$。若 $A = \emptyset$，同理可得 $\emptyset \in \partial_{R_A}(\mathcal{I}_{\subseteq}) \setminus \partial_{R_{A'}}(\mathcal{I}_{\subseteq})$。现在假设 $A = \{a\}$ 是一个单元素集。则存在 $b \in X$、$b \neq a$，使得 $A' \neq \{a, b\}$。考察 $T = \{(a, b), (a, a)\}$。于是 $\mathrm{dom}(T) = \{a\} \subseteq \{a, b\} = \mathrm{rg}(T)$，故 $T \in \partial_{R_A}(\mathcal{I}_{\subseteq})$，但 $T \notin \partial_{R_{A'}}(\mathcal{I}_{\subseteq})$。

(e) 根据引理 3.2，我们知道 $\mathrm{Crit}(\mathcal{I}_{\subseteq})$ 支配 $\mathcal{I}_{\subseteq}$，并且可以从其子族中找出一个规模最小的支配族。现在，前一项的证明实际上表明，对于任何不是单元素集的 $A \subseteq X$，$\mathrm{Crit}(\mathcal{I}_{\subseteq}) \setminus \{R_A\}$ 不支配 $\mathcal{I}_{\subseteq}$。然而，正如下面所示，$\mathrm{Crit}(\mathcal{I}_{\subseteq}) \setminus \{R_{\{a\}} \mid a \in X\}$ 确实支配：设 $a \in X$，并令 $R \in \mathcal{I}_{\subseteq}$ 为任意满足 $a \in \mathrm{dom}(R \setminus \mathrm{id}_X)$ 的集合。选取满足 $(a, b) \in R$ 的 $b \neq a$。于是 $a \in \mathrm{dom}(R) \subseteq \mathrm{rg}(R)$，但 $b \in \mathrm{rg}(R)$ 也成立，因此 $a, b \in \mathrm{rg}(R)$。项 c 现在表明 $R \in R_A$，其中 $A = \mathrm{rg}(R)$，且 $|A| \geq 2$。

(f)第一个等式是项 a的直接结果。对于第二个等式，只需注意到，R_B 按定义是最大的 $T \subseteq X \times X$ 使得定义域$(T \setminus \mathrm{id}_X) \subseteq B$。

(g) 假设对于 $R, S \in \mathcal{I}_{\subseteq}$，$R \subseteq S$ 和 $\mathrm{rg}(R) = \mathrm{rg}(S) = B$ 成立。根据前一项，我们有 $\partial^S(\mathcal{I}_{\subseteq}) = [S, R_B] \subseteq [R, R_B] \subseteq \partial^R(\mathcal{I}_{\subseteq})$。因此，只有当 $R \in \mathcal{I}_{\subseteq}$ 在所有具有相同值域的关系中是极小的，也就是说，当 R^{-1} 是一个映射时，R才可能有一个极大对偶影子。

我们来验证该条件也是充分的，即如果 $R \in \mathcal{I}_{\subseteq}$ 和 R^{-1} 是一个映射，那么对于 $S \in \mathcal{I}_{\subseteq}$，$R$ 在对偶影子 $\partial^S(\mathcal{I}_{\subseteq})$中有一个极大对偶影子。我们只需考虑 $S \subsetneq R$ 和 S^{-1} 也是一个映射的情形。但此时 $\mathrm{rg}(S) = \mathrm{dom}(S^{-1}) \subsetneq \mathrm{dom}(R^{-1}) = \mathrm{rg}(R) = B$，这意味着 $\mathrm{dom}(R_B \setminus \mathrm{id}_X) = B \not\subseteq \mathrm{rg}(S)$。因此，$R_B \notin \partial^S(\mathcal{I}_{\subseteq})$，从而 $\partial^R(\mathcal{I}_{\subseteq}) \not\subseteq \partial^S(\mathcal{I}_{\subseteq})$。这意味着 R 有一个极大对偶影子。

(h) 记 $\mathcal{C} = \mathrm{Crit}^{\mathrm{d}}(\mathcal{I}_{\subseteq}) \setminus \{\{(a, a)\} \mid a \in X\}$。我们首先证明 $\mathcal{C}$ 支持 $\mathcal{I}_{\subseteq}$。令 $R \in \mathcal{I}_{\subseteq}$。若 $\mathrm{rg}(R)$ 是一个单元素集，例如 $\mathrm{rg}(R) = \{a\}$，则必有 $R = \{(a, a)\}$且 $R \in \partial^{\emptyset}(\mathcal{I}_{\subseteq})$，其中 $\emptyset \in \mathcal{C}$。否则，我们任选一个满足 $(R_0)^{-1}$ 为映射且 $\mathrm{rg}(R_0) = \mathrm{rg}(R)$ 的 $R_0 \subseteq R$，并注意到 $R_0 \in \mathcal{C}$。其余部分的证明与上文类似。 □

引理3.7。假设 $|Y| \geq 2$。

(a) 令 $R \subseteq R' \subseteq X \times Y$。则

$$[R, R'] \subseteq \mathcal{Y} \Leftrightarrow R, R' \in \mathcal{Y} \wedge \mathrm{dom}(R) = \mathrm{dom}(R').$$

(b) $\mathrm{Crit}(\mathcal{Y}) = \{A \times Y \mid A \subseteq X\}$ 是支配 $\mathcal{Y}$ 的最小族。

(c) $\mathrm{Crit}^{\mathrm{d}}(\mathcal{Y}) = \{f \cup g \mid A \subseteq X, f, g\colon\ A \to Y、\ \forall x \in A\colon\ f(x) \neq g(x)\}$ 是支持 $\mathcal{Y}$的最小族。

证明。(a) 根据 $\mathcal{Y}$的定义，这是显然的。

(b) 考虑 $\mathcal{Y}$的元素之间的如下遮蔽关系 $\sqsubseteq$： $R \sqsubseteq S$ 当且仅当 $R \in \partial_S(\mathcal{Y})$。实际上，这已经出现在前一个项中，因此对于 R、$S \in \mathcal{Y}$，有 $R \sqsubseteq S$ 当且仅当 $R \subseteq S$，且 $[R, S] \subseteq \mathcal{Y}$ 当且仅当 $R \subseteq S$，并且 $\mathrm{dom}(R) = \mathrm{dom}(S)$。显然，$\sqsubseteq$ 是 $\mathcal{Y}$上的偏序。因此，若 $R \sqsubseteq S$，则 $\partial_R(\mathcal{Y}) \subseteq \partial_S(\mathcal{Y})$。这意味着，要使 $\mathcal{Y}$ 中的一个元素成为临界元素，它必须相对于 $\sqsubseteq$是极大的。容易看出，这些极大元素具有 $A \times Y$的形式，其中 $A \subseteq X$是某个元素。由于每个 $R \in \mathcal{Y}$ 也包含在集合 $\mathrm{dom}(X) \times Y$ 中，对于该集合，$R \sqsubseteq \mathrm{dom}(X) \times Y$，我们还可以看到 $\{A \times Y \mid A \subseteq X\}$ 支配 $\mathcal{Y}$。$A \times Y$当然是临界的，因为向 $A \times Y$添加任意一个（c、d）$\notin A \times Y$都会破坏匿名性。

(c) 根据 3.2 的项 d，$\mathrm{Crit}^{\mathrm{d}}(\mathcal{Y})$ 支撑族 $\mathcal{Y}$。进一步研究遮蔽关系后，我们观察到，对于 R、$S \in \mathcal{Y}$，$R \sqsubseteq S$ 当且仅当 $S \in \partial^R(\mathcal{Y})$。因此，对偶临界集是指相对于遮蔽关系极小的集合。这些集合恰好是形如 $f \cup g$ 的集合，其中 f、g：$A \to Y$，并且对于所有 $x \in A$，都有 $f(x) \neq g(x)$。显然，所有此类集合都必须包含在某个支撑族中（以支撑自身），因此 $\mathrm{Crit}^{\mathrm{d}}(\mathcal{Y})$ 是支撑 $\mathcal{Y}$ 的最小族。 □

定理 3.8。 设 X 和 Y 是有限基集，且 $\ell = |X| \geq 2$ 和 $n = |Y| \geq 2$。则：

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{D}(\mathcal{F}) = n^\ell, & \mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{F}) = 1, & \mathrm{CD}(\mathcal{F}) = \mathrm{D}(\mathcal{F}), \\
\mathrm{D}(\mathcal{X}) = 2^\ell - 2, & \mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{X}) = 1, & \mathrm{CD}(\mathcal{X}) = \mathrm{D}(\mathcal{X}), \\
\mathrm{D}(\mathcal{I}_\subseteq) = 2^\ell - \ell, & \mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{I}_\subseteq) = 1 + \sum_{k=2}^{\ell} \binom{\ell}{k} k^k, & \mathrm{CD}(\mathcal{I}_\subseteq) = \mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{I}_\subseteq), \\
\mathrm{D}(\mathcal{Y}) = 2^\ell, & \mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{Y}) = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \binom{n}{2}^k, & \mathrm{CD}(\mathcal{Y}) = \mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{Y}). \\
\mathrm{D}(\mathcal{I}_\perp) = (2^\ell - \ell - 1)(2^n - n - 1) + \ell + n, & \mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{I}_\perp) = (2^\ell - \ell - 1)(2^n - n - 1) + 1, & \mathrm{CD}(\mathcal{I}_\perp) = \mathrm{D}(\mathcal{I}_\perp),
\end{array}$$

证明。首先注意到，族 $\mathcal{F}$ 向下封闭，因此显然由 $\{\emptyset\}$ 支撑，这意味着 $\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{F}) = 1$。$\mathcal{F}$ 的向下封闭性和有限性也意味着 $\mathrm{D}(\mathcal{F}) = |\mathrm{Max}(\mathcal{F})|$。显然，$\mathcal{F}$ 中的极大集恰好是全函数 f：$X \to Y$，因此这样的函数有 $|Y|^{|X|} = n^\ell$ 个，并且 $\mathrm{D}(\mathcal{F}) = n^\ell$。最后，$\mathcal{F}$ 的向下封闭性意味着，对于任意这样的极大 f，都有 $\partial_f(\mathcal{F}) = \mathcal{P}(f) = [\emptyset, f]$，即影是区间。因此，$\mathrm{CD}(\mathcal{F}) = \mathrm{D}(\mathcal{F})$。

族 $\mathcal{X}$显然也是向下封闭的，因此在这种情况下，我们也有$\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{X}) = 1$和 $\mathrm{CD}(\mathcal{X}) = \mathrm{D}(\mathcal{X})$。很容易看出，$\mathcal{X}$中的极大集合具有以下形式：$A \times B$，其中 $\{A, B\}$ 是集合 X的一个划分。（相比之下，$\emptyset = \emptyset \times X = X \times \emptyset \in \mathcal{X}$并不是

极大的，因为 $\{(a,b)\} \in \mathcal{X}$对于任意不同的 $a,b \in X$。）可能的 A，即 X 的非空真子集数量确实是 $2^n - 2$。

在所有其他情形中，我们已在前面的引理中确定了规模最小的支配族和支撑族，因此剩下的只是组合计数。根据3.6的d项和e项，

$$\mathrm{D}(\mathcal{I}_{\subseteq}) = |\operatorname{Crit}(\mathcal{I}_{\subseteq}) \setminus \{R_{\{a\}} \mid a \in X\}| = |\mathcal{P}(X)| - |X| = 2^\ell - \ell.$$

根据f项，对偶影子始终是区间，因此 $\mathrm{CD}(\mathcal{I}_{\subseteq}) = \mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{I}_{\subseteq})$。结合g项和h项进行组合计算，可得 $\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{I}_{\subseteq})$ 的公式。

根据引理3.7的b项，$\{A \times Y \mid A \subseteq X\}$ 是支配$\mathcal{Y}$的唯一最小子族，而且显然它与 $\mathcal{P}(X)$ 等势，因此 $\mathrm{D}(\mathcal{Y}) = 2^\ell$。根据c项，支撑 $\mathcal{Y}$的最小族中的集合具有如下形式：$f \cup g$，其中 f, $g\colon A \to Y$，且 $A \subseteq X$；对于每个 $x \in A$，我们都有 $f(x) \neq g(x)$。若已知大小 $k = |A|$，则有 $\binom{\ell}{k}$ 种选择 A的方式；又由于 A和 $x \in A$，选择这一对 $\{f(x)\ g(x)\}$有 $\binom{n}{2}$ 种方式（这就是全部需要考虑的）。因此，对于每个大小为 k的 A，都有 $\binom{n}{2}^k$ 种选择 $f \cup g$的方式。对 A的不同大小求和，即得所示公式。由于对偶影子是区间，$\mathrm{CD}(\mathcal{Y}) = \mathrm{D}(\mathcal{Y})$。

根据 3.5 项 g，影子是区间，因此 $\mathrm{CD}(\mathcal{I}_{\perp}) = \mathrm{D}(\mathcal{I}_{\perp})$。计算临界子族和对偶临界子族的大小（在项 f 中确定）可得到上维数和对偶上维数的相应公式。

□

还有一类有趣的、与团队语义相关的集合族需要研究。设 X、Y 和 Z 为非空有限集。我们将考虑

$$\mathcal{I}_{\perp,\bullet} = \Big\{ \bigcup_{c \in Z} (A_c \times B_c \times \{c\}) \;\Big|\; \forall c \in Z\, (A_c \subseteq X,\, B_c \subseteq Y) \Big\}.$$

这次我们只评估该族的下界和上界，而不求其精确值。不过，这是在一个更一般的框架内完成的，该框架可以应用于其他类似情形。

定义 3.9。若存在双射 $f\colon X \to Y$，使得 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 以及

$$\mathcal{B} = \{f[A] \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

于是很容易证明：

命题 3.10。设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 为相似的集合族。则：

(a) If $\mathcal{A}$ *and* $\mathcal{B}$ *are similar, then* $\mathrm{D}(\mathcal{A}) = \mathrm{D}(\mathcal{B})$, $\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{A}) = \mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{B})$ *and* $\mathrm{CD}(\mathcal{A}) = \mathrm{CD}(\mathcal{B})$.

(b) 若对于某个 C，$\mathcal{C} = \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(C)$，则 $\mathrm{D}(\mathcal{C}) \leq \mathrm{D}(\mathcal{A})$、$\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{C}) \leq \mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{A})$，且 $\mathrm{CD}(\mathcal{C}) \leq \mathrm{CD}(\mathcal{A})$。

定义 3.11. 设 $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ 是一个以族为指标的集合族。那么，它的广义张量析取是如下的族

$$\bigvee_{i\in I}\mathcal{A}_i = \{\bigcup_{i\in I}A_i \mid \forall i\in I\,(A_i\in\mathcal{A})\}.$$

注意，如果各族 $\mathcal{A}_i\subseteq\mathcal{P}(X_i)$ 的基集两两不相交，即如果 $(X_i)_{i\in I}$ 是一个两两不相交的族，那么 $\bigvee\mathcal{A}_i$ 与 $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$ 之间存在一个自然的双射 $A\mapsto(A\cap X_i)_{i\in I}$。另一方面，如果 $\mathcal{A}$ 对并集封闭，那么 $\bigvee\mathcal{A}=\mathcal{A}$.

命题 3.12. 设 $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ 是一个由集合族组成的指标族。那么

$$\mathrm{CD}\Big(\bigvee_{i\in I}\mathcal{A}_i\Big)\le\prod_{i\in I}\mathrm{CD}(A_i).$$

证明。对每个 $i\in I$，取一个指标集 J_i 和区间 $\mathcal{L}_{i,j}$, $j\in J_i$，使得 $|J_i|=\mathrm{CD}(\mathcal{A}_i)$ 且 $\bigcup_{j\in J_i}\mathcal{L}_{i,j}=\mathcal{A}_i$。记 $\mathcal{L}_{i,j}=[B_{i,j},C_{i,j}]$。对每个 $f\in J=\prod_{i\in I}J_i$，考虑区间 $\mathcal{L}_f=[B_f,C_f]$，其中

$$B_f=\bigcup_{i\in I}B_{i,f(i)}\text{ and }C_f=\bigcup_{i\in I}C_{i,f(i)}.$$

那么显然 $|J|=\prod_{i\in I}|J_i|=\prod_{i\in I}\mathrm{CD}(\mathcal{A}_i)$ 和 $\bigvee\mathcal{A}_i=\bigcup_{\in I}\mathcal{L}_f$.□

由此可得所需的估计。

命题 3.13。设 X、Y 和 Z 是有限基集，且满足 $\ell=|X|\ge 2$、$n=|Y|\ge 2$ 和 $s=|Z|\ge 1$。那么

$$\begin{aligned}(2^\ell-\ell-1)(2^n-n-1)+1&\le\min\{\mathrm{D}(\mathcal{I}_{\perp,\bullet}),\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{I}_{\perp,\bullet})\}\\&\le\mathrm{CD}(\mathcal{I}_{\perp,\bullet})\le((2^\ell-\ell-1)(2^n-n-1)+\ell+n)^s.\end{aligned}$$

证明。对于每个 $c\in Z$，令

$$\mathcal{J}_c=\mathcal{I}_{\perp,\bullet}\cap\mathcal{P}(X\times Y\times\{c\})=\{\,A_c\times B_c\times\{c\}\mid A_c\subseteq X,\,B_c\subseteq Y)\,\}.$$

显然，$\mathcal{J}_c$ 与 $\mathcal{I}_\perp$ 相似，因此由定理 3.8 和命题 3.10 的情形 a，可得

$$(2^\ell-\ell-1)(2^n-n-1)+1=\min\{\mathrm{D}(\mathcal{I}_\perp),\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{I}_\perp)\}=\min\{\mathrm{D}(\mathcal{J}_c),\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{J}_c)\}.$$

由于 $\mathcal{J}_c=\mathcal{I}_{\perp,\bullet}\cap\mathcal{P}(X\times Y\times\{c\})$，命题 3.10 和 2.5 进一步推出

$$\min\{\mathrm{D}(\mathcal{J}_c),\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{J}_c)\}\le\min\{\mathrm{D}(\mathcal{I}_{\perp,\bullet}),\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{I}_{\perp,\bullet})\}\le\mathrm{CD}(\mathcal{I}_{\perp,\bullet}).$$

很容易看出 $\bigvee_{c\in Z}\mathcal{J}_c=\mathcal{I}_{\perp,\bullet}$，因此现在，当我们结合定理 3.8 和命题 3.12 的结果时，我们得到不等式

$$\mathrm{CD}(\mathcal{I}_{\perp,\bullet})=\mathrm{CD}(\bigvee_{c\in Z}\mathcal{J}_c)\le\prod_{c\in Z}\mathrm{CD}(\mathcal{J}_c)=((2^\ell-\ell-1)(2^n-n-1)+\ell+n)^s.$$

□

在我们的逻辑应用中，当我们应用定理 3.8 和前一个命题来确定相应原子公式的维数函数时，会遇到一个技术难题：公式的维数函数取决于在赋值团队中得到解释的变量集合。前一个结果恰好对应于只解释原子公式中出现的变量这一情形，但我们可能还需要考虑哑变量。我们需要下一个命题来克服这一困难：哑变量的影响并不关键。在这个预期的应用中，命题中的满射将是将赋值限制到出现变量上的函数。

命题 3.14. 设 $p\colon X \to Y$ 是一个满射。回顾一下，逆投影是运算 $\Delta_{p^{-1}}\colon \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y)) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$，

$$\Delta_{p^{-1}}(\mathcal{Y}) = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid p[A] \in \mathcal{Y}\}.$$

假设 s、$r \in \mathbb{N}$ 是常数，使得对于每个 $y \in Y$，都有 $|p^{-1}\{y\}| \leq s$，并且对于每个 $B \in \mathcal{B}$，都有 $|B| \leq r$。令 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ 和 $\mathcal{A} = \Delta_{p^{-1}}(\mathcal{B})$。那么

$$\mathrm{D}(\mathcal{A}) = \mathrm{D}(\mathcal{B}),\ \mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{A}) \leq s^r\,\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{B})\ \textit{and}\ \mathrm{CD}(\mathcal{A}) \leq s^r\,\mathrm{CD}(\mathcal{B}).$$

证明。选择一个子族 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}$，使得 $\mathcal{G}$ 支配 $\mathcal{B}$，且 $\mathrm{D}(\mathcal{B}) = |\mathcal{G}|$。显然，$\mathcal{G}' = \{p^{-1}[G] \mid G \in \mathcal{G}\}$ 支配 $\mathcal{A}$，因此 $\mathrm{D}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{D}(\mathcal{B})$。如果存在一个支配 $\mathcal{A}$ 的族 $\mathcal{G}'' \subseteq \mathcal{A}$，使得 $|\mathcal{G}''| < \mathrm{D}(\mathcal{B})$，那么 $\mathcal{G}^* = p[[\mathcal{G}'']] = \{p[A] \mid A \in \mathcal{G}''\}$ 将支配 $\mathcal{B}$，这与上维数的定义矛盾。因此，$\mathrm{D}(\mathcal{A}) = \mathrm{D}(\mathcal{B})$。

对偶上维数和柱维数的情形稍微复杂一些。关键在于，即使 L 在 $\mathcal{B}$ 中是极小的，逆像 $p^{-1}[L]$ 通常也不是 $\mathcal{A}$ 中的极小集合。若 $p[A] = B$ 且 $p \restriction A$ 是单射，则称 A 为 B 的选择性逆像。注意，A 是 B 的选择性逆像，当且仅当 A 是满足 $p[A] = B$ 的极小集合。现在选取支持 $\mathcal{B}$ 且 $\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{B}) = |\mathcal{K}|$ 的 $\mathcal{K}$。考虑由所有满足以下条件的集合 $A \in \mathcal{A}$ 构成的族 $\mathcal{K}'$：A 是某个 $B \in \mathcal{K}$ 的选择性逆像。显然，$\mathcal{K}'$ 支持 $\mathcal{A}$。每个 $B \in \mathcal{K}$ 至多有 $s^{|B|} \leq s^r$ 个选择性逆像，因为对于每个 $b \in B$，都有 $|p^{-1}\{b\}| \leq s$。因此，$\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{A}) \leq |\mathcal{K}'| \leq s^r\mathrm{D}(\mathcal{B})$。柱维数的证明与此类似。 □

3.3 可定义族的维数

我们已经为有限基集上的任意子集族定义了三种维度概念。现在，我们将这些概念应用于笛卡尔积 M^m 的可定义子集族。特别是，我们感兴趣的是计算形如 $\|\phi\|^{M,\vec{x}}$ 的族的三种维度。

引理 3.15. 如果 ϕ 是一阶逻辑，那么 $\mathrm{D}(\|\phi\|^{M,\vec{x}}) = \mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\|\phi\|^{M,\vec{x}}) = \mathrm{CD}(\|\phi\|^{M,\vec{x}}) = 1$。

证明。该结论可由以下事实直接推出：正如我们上文所指出的，如果 $\phi(x_0, \ldots, x_{m-1})$ 是一阶的，那么 $\|\phi\|^{M,\ \vec{x}} = [\emptyset, T_\phi]$。因此，维度计算变得非常简单。 □

正如第 2.4 节所述，团队语义允许通过引入若干新的原子来扩展一阶逻辑（见定义 2.18），从而得到依赖逻辑（V¨a¨an¨anen[2007]）、包含逻辑（Galliani [2012]）、排斥逻辑（Galliani [2012]）、独立逻辑（Galliani [2012]）和匿名逻辑（V¨a¨an¨anen [2022]）。为了估计这些逻辑中可定义的族的维数，我们首先注意到定理 3.8 的以下推论：

定理3.16。假设 $|M| = n$。

(a) 设 α 是依赖原子 $=(\vec{x}, y)$，其中 len($\vec{x}$) $= m$，并设 $\vec{z} = \vec{x}y$。则 D($\|\alpha\|^{M,\vec{z}}$) = CD($\|\alpha\|^{M,\vec{z}}$) $= n^{n^m}$ 且 $\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\|\alpha\|^{M,\vec{z}}) = 1$。

(b) 令 α 为排斥原子 $\vec{x} \mid \vec{y}$，其中 len($\vec{x}$) = len($\vec{y}$) $= m$，并令 $\vec{z} = \vec{x}\vec{y}$。则 D($\|\alpha\|^{M,\vec{z}}$) = CD($\|\alpha\|^{M,\vec{z}}$) $= 2^{n^m} - 2$，且 $\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\|\alpha\|^{M,\vec{z}}) = 1$。

(c) 令 α 为包含原子 $\vec{x} \subseteq \vec{y}$，其中 len($\vec{x}$) = len($\vec{y}$) $= m$，且 $\vec{z} = \vec{x}\vec{y}$。那么 D($\|\alpha\|^{M,\vec{z}}$) $= 2^{n^m} - n^m$，且 $\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\|\alpha\|^{M,\vec{z}})$ = CD($\|\alpha\|^{M,\vec{z}}$) $= 1 + \sum_{k=2}^{n^m} \binom{n^m}{k} k^k$。

(d)设 α 是匿名原子 $\vec{x} \curlyvee y$，其中 len($\vec{x}$) $= m$。则D($\|\alpha\|^{M,\vec{z}}$) = CD($\|\alpha\|^{M,\vec{z}}$) $=2^{n^m}$ 且 D^{d}($\|\alpha\|^{M,\vec{z}}$) $= \sum_{k=0}^{n^m} \binom{n^m}{k} \binom{n}{2}^k$。

(e)令 α 为纯独立原子 $\vec{x} \perp \vec{y}$，其中len($\vec{x}$) $= m$ 且 len($\vec{y}$) $= k$，并令 $\vec{z} = \vec{x}\vec{y}$。则 D($\|\alpha\|^{M,\vec{z}}$) =CD($\|\alpha\|^{M,\vec{z}}$) $=(2^{n^m} - n^m - 1)(2^{n^k} - n^k - 1) + n^m + n^k$且 $\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\|\alpha\|^{M,\vec{z}}) = (2^{n^m} - n^m - 1)(2^{n^k} - n^k - 1) + 1$。

(f) 令 α 为条件独立原子 $\vec{x} \perp_{\vec{u}} \vec{y}$，其中 len($\vec{x}$) $= m$、len($\vec{y}$) $= k$、len($\vec{u}$) $= s$，且令 $\vec{z} = \vec{x}\vec{u}\vec{y}$。则 $(2^{n^m} - n^m - 1)(2^{n^k} - n^k - 1) + n^m + n^k \leq$D($\|\alpha\|^{M,\vec{z}}$) $\leq$ CD($\|\alpha\|^{M,\vec{z}}$) $\leq ((2^{n^m} - n^m - 1)(2^{n^k} - n^k - 1) + n^m + n^k)^{n^s}$ 且 $(2^{n^m} - n^m - 1)(2^{n^k} - n^k - 1) + 1 \leq \mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\|\alpha\|^{M,\vec{z}}) \leq ((2^{n^m} - n^m - 1)(2^{n^k} - n^k - 1) + 1)^{n^s}$。

证明。(a) 令 $\mathcal{F} = \{f \subseteq M^m \times M \mid f$是一个映射 $\}$，定理 3.8 给出 D($\mathcal{F}$) =CD($\mathcal{F}$) $= n^{n^m}$ 和 $\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{F}) = 1$。根据定义 2.18，我们有 $\mathcal{F} = \|\alpha\|^{M,\vec{z}}$，结论随即得证。其他各情形 (b)-(f) 的简短论证相同。在 (f) 中，我们使用命题 3.13。 □

我们可以注意到，在固定 m 和 k 的情况下，依赖原子的上维数和柱维数增长速度都快于其他原子相应的维数，只有相对化独立原子例外。改变 m 和 k，我们便能得到关于这些原子维数的许多比较。下面将这些比较与逻辑运算结合时，它们会发挥作用。

现在让我们来定义局部性这一重要概念：

定义 3.17. 任意逻辑的公式 ϕ，若其自由变量为 $\vec{x}$，则称其具有局部性：对于所有模型 M 和团队 T，若满足 $\vec{x} \subseteq$ dom(T)，都有

$$M \models_T \phi \;\Leftrightarrow\; M \models_{T\upharpoonright\vec{x}} \phi.$$

atom	上维数	注释
$x = y$	1	
$=(\vec{y})$	n^m	$\mathsf{len}(\vec{y}) = m$
$\vec{x} \subseteq \vec{y}$	$2^{n^m} - n^m$	$\mathsf{len}(\vec{x}) = \mathsf{len}(\vec{y}) = m$
$\vec{x} \mid \vec{y}$	$2^{n^m} - 2$	$\mathsf{len}(\vec{x}) = \mathsf{len}(\vec{y}) = m$
$\vec{x} \Upsilon y$	2^{n^m}	$\mathsf{len}(\vec{x}) = m$
$\vec{x} \perp \vec{y}$	$\approx 2^{n^m+n^k}$	$\mathsf{len}(\vec{x}) = m, \mathsf{len}(\vec{y}) = k$
$=(\vec{x}, y)$	n^{n^m}	$\mathsf{len}(\vec{x}) = m$
$\vec{x} \perp_{\vec{u}} \vec{y}$	$\approx [2^{n^m+n^k}, 2^{n^{m+s}+n^{k+s}}]$	$\mathsf{len}(\vec{x}) = m,\ \mathsf{len}(\vec{y}) = k,\ \mathsf{len}(\vec{u}) = s$

表1：原子的上维数。

定义 2.18 中的所有原子都是局部的，而定义 2.17 中的逻辑运算以及所有 Lindstr¨om 量词（见定义 2.20）都保持局部性。

定义 4.15 中定义的语义有一种变体，称为严格语义。在严格语义中，我们将张量析取的含义定义为： $M \models_T \phi \vee \psi$ 当且仅当 $T = Y \cup Z$ ，使得 $M \models_Y \phi$、 $M \models_Z \psi$和 $Y \cap Z = \emptyset$。严格语义中存在量词的含义是： $M \models_T \exists x \phi$ 当且仅当存在 F： $T \to M$ 使得$M \models_{T[F/x]} \phi$。对于依赖逻辑，由于向下封闭性，这种语义变化确实没有影响。然而，采用严格语义的包含逻辑并不具有局部性。本文不再详细讨论严格语义。

还需注意，上文计算与某些原子公式相关的团队的维数时，是相对于公式中出现的变量而言的。一般来说，我们需要将原子公式——或者更一般地说，其他公式——视为较大公式的子公式，因此也需要将上下文中的其他变量纳入考虑。通常，以下估计对于我们的目的来说已经足够。

命题 3.18。设 M 是一个结构， ϕ 是一个具有共同词汇表的局部公式， $\vec{y}$ 是 ϕ 中出现的变量序列， $\vec{x}$ 是一个扩展 $\vec{y}$的有限变量序列。假设 M 的大小为 n， r 是一个常数，使得对于变量 $\vec{y}$ 上的每个团队 T， $M \models_T \phi$ 蕴含 $|T| \leq r$，并且 $t = \mathsf{len}(\vec{x}) - \mathsf{len}(\vec{y})$。那么

$$\mathrm{D}(\|\phi\|^{M,\vec{x}}) = \mathrm{D}(\|\phi\|^{M,\vec{y}}),\ \mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\|\phi\|^{M,\vec{x}}) \leq n^{tr}\,\mathrm{D}(\|\phi\|^{M,\vec{y}})\ \textit{and}\ \mathrm{CD}(\|\phi\|^{M,\vec{x}}) \leq n^{tr}\,\mathrm{CD}(\|\phi\|^{M,\vec{y}}).$$

证明。由命题 3.14 可直接得出。令 $k = \mathsf{len}(\vec{y})$。考虑 $T = M^{k+t}$、 $Y = M^k$、 p的情形： $T \to Y$是自然投影， $\mathcal{A} = \|\phi\|^{M,\,\vec{x}}$以及 $\mathcal{B} = \|\phi\|^{M,\,\vec{y}}$。 ϕ 的局部性意味着 $\mathcal{A} = \Delta_{p^{-1}}(\mathcal{B})$，并且对于每个 $y \in Y$、$|p^{-1}\{y\}| = n^t$以及每个 $T \in \mathcal{B}$，都有 $|T| \leq r$。由于 $|Y| = n^k$，结论成立。 □

4 增长类与算子

尽管上述基本维度概念完全适用于任何集合族，但当我们聚焦于有限集的笛卡尔幂的子集族时，我们可以进一步说明，即。

团队的族。在这样的框架中，增长类的概念自然产生，并且是本节的主题。

4.1 增长类

当我们将维数技术应用于有限结构这一类上的可定义性问题时，我们不断面临这样的困境：通常，仅仅考察单个结构以及在该结构中由团队语义产生的集合族是不够的；相反，我们必须考察所有适当的有限结构组成的类。这意味着，我们必须接受基集的大小可能发生变化这一可能性，而这就要求我们以动态的方式处理相关问题。为此，我们考察增长类。

在下文的定义中，我们以逐点方式推广算术记号，例如，对于函数 f、g: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，我们令 $f+g$ 为满足 $(f+g)(n) = f(n) + g(n)$ 的函数 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，其中 $n \in \mathbb{N}$; 而 $f \leq g$ 表示对于每个$n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq g(n)$ 都成立。

定义 4.1. 一组 $\mathbb{O}$ 映射 f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是一个增长类，如果对所有 f、g: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，以下条- 件都成立:

(a) 如果 $g \in \mathbb{O}$ 和 $f \leq g$，那么 $f \in \mathbb{O}$。

(b) 如果 f、$g \in \mathbb{O}$，那么 $f+g \in \mathbb{O}$ 和 $fg \in \mathbb{O}$。

增长类的意义在于，它们在逻辑运算所产生的自然算子下是封闭的。事实证明，如果我们确定了某些原子的增长类，那么由这些原子通过我们所研究的大多数逻辑运算所定义的任何对象，都属于同一增长类。因此，增长类构成了重要的分界线。

我们关注以下几个特定的类：对于 $k \in \mathbb{N}$，类 $\mathbb{E}_k$ 由所有f组成: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得存在一个次数为 k 且系数属于 $\mathbb{N}$ 的多项式 p: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，满足对所有 $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) \leq 2^{p(n)}.$$

此外， $\mathbb{F}_k$ 是函数 f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 的类，其中存在一个次数为 k 且系数属于 $\mathbb{N}$ 的多项式 p: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$，我们都有

$$f(n) \leq n^{p(n)}.$$

注意， $\mathbb{E}_0$ 是有界函数类， $\mathbb{F}_0$ 是多项式增长函数类。下面的结论显然成立:

命题 4.2. 每个 $\mathbb{E}_k$ 和 $\mathbb{F}_k$ （对于 $k \in \mathbb{N}$）都是一个增长类。此外，我们有

$$\mathbb{E}_0 \subsetneq \mathbb{F}_0 \subsetneq \mathbb{E}_1 \subsetneq \mathbb{F}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbb{E}_k \subsetneq \mathbb{F}_k.$$

定义 4.3. 对于每个 $\vec{x}$ 中含有自由变量且允许团队语义解释的公式 ϕ，我们关联以下维数函数：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Dim}_{\phi,\vec{x}}\colon \mathbb{N}\to \mathrm{Card}, \qquad \mathrm{Dim}_{\phi,\vec{x}}(n)=\sup\left\{\mathrm{D}(\|\phi\|^{M,\vec{x}}) \mid M \text{ is a model}, |M|=n\right\},\\
&\mathrm{Dim}^{\mathrm{d}}{}_{\phi,\vec{x}}\colon \mathbb{N}\to \mathrm{Card}, \qquad \mathrm{Dim}^{\mathrm{d}}{}_{\phi,\vec{x}}(n)=\sup\left\{\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\|\phi\|^{M,\vec{x}}) \mid M \text{ is a model}, |M|=n\right\},\\
&\mathrm{CDim}_{\phi,\vec{x}}\colon \mathbb{N}\to \mathrm{Card}, \quad \mathrm{CDim}_{\phi,\vec{x}}(n)=\sup\left\{\mathrm{CD}(\|\phi\|^{M,\vec{x}}) \mid M \text{ is a model}, |M|=n\right\}.
\end{aligned}$$

例4.4. (a) $\mathsf{CDim}_{\phi,\vec{x}}(n)=1$，因此 $\mathsf{CDim}_{\phi,\vec{x}}$ 属于 $\mathbb{E}_0$，对于每个一阶 ϕ。对于 $\mathsf{Dim}_{\phi,\vec{x}}$ 和 $\mathsf{Dim}^{\mathrm{d}}{}_{\phi,\vec{x}}$，根据命题 2.5，同样成立。

(b) $\mathsf{Dim}_{=(\vec{x},y),\vec{x}y}(n)=n^{n^k}$，因此 $\mathsf{Dim}_{=(\vec{x},y),\vec{x}y}$ 属于 $\mathbb{F}_k$，其中 $\mathsf{len}(\vec{x})=k$。$\mathsf{CDim}_{=(\vec{x},y),\vec{x}y}$ 也同样如此。然而，$\mathsf{Dim}^{\mathrm{d}}{}_{=(\vec{x},y),\vec{x}y}(n)=1$，因此 $\mathsf{Dim}^{\mathrm{d}}{}_{=(\vec{x},y),\vec{x}y}$ 属于 $\mathbb{E}_0$。

(c) $\mathsf{Dim}_{\vec{x}|\vec{y},\ \vec{x}\vec{y}}(n)=2^{n^k}-2$，因此 $\mathsf{Dim}_{\vec{x}|\vec{y},\ \vec{x}\vec{y}}$ 属于 $\mathbb{E}_k$，其中 $\mathsf{len}(\vec{x})=\mathsf{len}(\vec{y})=k$。$\mathsf{CDim}_{\vec{x}|\vec{y},\ \vec{x}\vec{y}}$也同样成立。然而，$\mathsf{Dim}^{\mathrm{d}}{}_{\vec{x}|\vec{y},\ \vec{x}\vec{y}}(n)=1$，因此 $\mathsf{Dim}^{\mathrm{d}}{}_{\vec{x}|\vec{y},\ \vec{x}\vec{y}}$ 属于 $\mathbb{E}_0$。

(d) $\mathsf{Dim}_{\vec{x}\subseteq\vec{y},\vec{x}\vec{y}}(n)=2^{n^k}-n^k$，因此 $\mathsf{Dim}_{\vec{x}\subseteq\vec{y},\vec{x}\vec{y}}$ 属于 $\mathbb{E}_k$，其中 $\mathsf{len}(\vec{x})=\mathsf{len}(\vec{y})=k$。

(e) $\mathsf{Dim}_{\vec{x}\Upsilon y,\vec{x}y}(n)=2^{n^k}$，因此 $\mathsf{Dim}_{\vec{x}\Upsilon y,\vec{x}y}\in\mathbb{E}_k$，其中 $\mathsf{len}(\vec{x})=k$。

(f) $\mathsf{Dim}_{\vec{x}\perp_{\vec{z}}\vec{y},\vec{x}\vec{z}\vec{y}}(n)\in[r,r^{n^s}]$，其中 $r=(2^{n^m}-n^m-1)(2^{n^k}-n^k-1)+n^m+n^k$，因此 $\mathsf{Dim}_{\vec{x}\perp_{\vec{z}}\vec{y},\vec{x}\vec{z}\vec{y}}$ 属于 $\mathbb{E}_{m+k+s}$，其中 $\mathsf{len}(\vec{x})=k$，$\mathsf{len}(\vec{y})=m$，且 $\mathsf{len}(\vec{z})=s$。

以上例子的总结见表 2。请注意，表格的最后一行仅表示一个上界。

族	X	Y	Z	原子 α	Dim_α	维$^{\mathrm{d}}{}_\alpha$	CDim_α
$\mathcal{F}$	M^k	M		$=(\vec{x},t)$	$\mathbb{F}_k$	$\mathbb{E}_0$	$\mathbb{F}_k$
$\mathcal{X}$	M^k	M^k		$\vec{x}\mid\vec{y}$	$\mathbb{E}_k$	$\mathbb{E}_0$	$\mathbb{E}_k$
$\mathcal{I}_\subseteq$	M^k	M^k		$\vec{x}\subseteq\vec{y}$	$\mathbb{E}_k$	$\mathbb{F}_k$	$\mathbb{F}_k$
$\mathcal{Y}$	M^k	M		$\vec{x}\ \Upsilon\ y$	$\mathbb{E}_k$	$\mathbb{F}_0$	$\mathbb{E}_k$
$\mathcal{I}_\perp$	M^k	M^l		$\vec{x}\perp\vec{z}$	$\mathbb{E}_{k+l}$	$\mathbb{E}_{k+l}$	$\mathbb{E}_{k+l}$
$\mathcal{I}_{\perp,\bullet}$	M^k	M^l	M^s	$\vec{x}\perp_{\vec{z}}\vec{y}$	$\mathbb{E}_{k+l+s}$	$\mathbb{E}_{k+l+s}$	$\mathbb{E}_{k+l+s}$

表 2：由原子产生的族的增长类。

在上面的例子中，某些原子的维数函数的增长类，是相对于公式中出现的变量确定的。一般而言，维数函数可能不会保持在相同的增长类中。我们需要引入以下概念，以说明这种情形在很大程度上是保持不变的。

定义 4.5。具有自由变量 $\vec{x}$ 的公式 ϕ 的次数为 $k \in \mathbb{N}$，如果存在一个次数为 k 的多项式函数 $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，其系数属于 $\mathbb{N}$，使得以下条件成立：对于任意一个共同词汇表中大小为 $n \in \mathbb{N}$ 的结构 M，如果 $M \models_T \phi$ 对变量 $\vec{x}$ 上的某个团队成立，那么 $|T| \leq p(n)$。

对于具有 k 个自由变量的局部公式，其次数总是不超过 k。

命题 4.6. 设 $l \in \mathbb{N}$, $\mathbb{O}$ 是一个增长类， ϕ 是一个次数为 k的局部公式， $\vec{y}$ 是出现在 ϕ中的变量元组， $\vec{x}$ 是一个扩展了 $\vec{y}$的有限元组。

(a) 若 $\mathrm{Dim}_{\phi,\vec{y}}$ 属于 $\mathbb{O}$，则 $\mathrm{Dim}_{\phi,\vec{x}}$ 也属于 $\mathbb{O}$。

(b) 若 $\mathbb{F}_k \subseteq \mathbb{O}$ 且 $\mathrm{Dim}^{\mathrm{d}}{}_{\phi,\vec{y}}$ 属于 $\mathbb{O}$，则 $\mathrm{Dim}^{\mathrm{d}}{}_{\phi,\vec{x}}$ 也属于 $\mathbb{O}$。

(c) 若 $\mathbb{F}_k \subseteq \mathbb{O}$ 且 $\mathrm{CDim}_{\phi,\vec{y}}$ 属于 $\mathbb{O}$，则 $\mathrm{CDim}_{\phi,\vec{x}}$ 也属于 $\mathbb{O}$。

证明。证明是命题 3.18 的直接应用。固定次数为 k 的多项式函数 p，它证明 ϕ 的次数为 k，并令 $t = \mathrm{len}(\vec{x}) - \mathrm{len}(\vec{y})$。考虑一个大小为 n的适当结构 M。根据该命题（令 $r = p(n)$），我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}(\|\phi\|^{M,\vec{x}}) = \mathrm{D}(\|\phi\|^{M,\vec{y}}) \\
&\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\|\phi\|^{M,\vec{x}}) \leq n^{tp(n)}\, \mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\|\phi\|^{M,\vec{y}}) \text{ and} \\
&\mathrm{CD}(\|\phi\|^{M,\vec{x}}) \leq n^{tp(n)}\, \mathrm{CD}(\|\phi\|^{M,\vec{y}}).
\end{aligned}$$

由于 tp 是次数为 k的多项式函数，函数 $n \mapsto n^{tp(n)}$ 属于 $\mathbb{F}_k$，结果即可得出。

□

值得注意的是，当添加新变量时，公式的对偶维数和柱维数不像上维数那样表现良好（见定理 3.18）。因此，公式的对偶维数或柱维数可能为 $\mathbb{E}_k$，但当考虑新变量时，即使这些变量不出现在公式中，该（对偶或柱）维数也可能跃升至 $\mathbb{F}_k$，因为可能会出现一个新的因子 n^{n^k}。

4.2 Kripke算子

本节的目标是为算子保持增长类寻找自然的判据。我们先定义一类受模态逻辑的 Kripke 语义启发的算子。设 X 和 Y 为非空基集，且 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(Y) \times \mathcal{P}(X)^n$ 是一个 $(n+1)$ 元关系。则我们根据以下条件定义相应的算子 $\Delta_{\mathcal{R}}\colon \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^n \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$。

$$B \in \Delta_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_{n-1}) \Leftrightarrow \exists A_0 \in \mathcal{A}_0 \ldots \exists A_{n-1} \in \mathcal{A}_{n-1} :\ (A, A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \mathcal{R}.$$

注意， $\Delta_{\mathcal{R}}$ 可视为将 Kripke 模型中公式 φ 的真值集映射到 $\Diamond\varphi$ 的真值集的函数的 n元二阶版本。

定义 4.7。设 X 和 Y 为非空集合。函数 $\Delta\colon \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^n \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ 是一个（二阶）Kripke 算子[4]，当且仅当存在关系 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(Y) \times \mathcal{P}(X)^n$ 使得 $\Delta = \Delta_{\mathcal{R}}$。

在下一个例子中，我们将介绍例 2.8 中引入的算子，并检查其中哪些是Kripke算子。

例 4.8.(a)族的交集是任意基集 X 上的Kripke 算子：若 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$和 $C \in \mathcal{P}(X)$，那么 $C \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ 当且仅当存在 $A \in \mathcal{A}$ 和 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $(C, A, B) \in \mathcal{R}_{\cap}$，其中 $\mathcal{R}_{\cap}$ 是简单关系 $\{(D, D, D) \mid D \in \mathcal{P}(X)\}$。

(b) X 上的族并集不是 Kripke 算子。这是因为对于任意关系 $\mathcal{R} \subseteq (\mathcal{P}(X))^3$ 和任意非空族 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$，我们有 $\Delta_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}, \emptyset) = \emptyset \neq \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A} \cup \emptyset$。然而，定义 $\mathcal{R}_{\cup^*} = \{(A, A, \emptyset), (A, \emptyset, A) \mid A \in \mathcal{P}(X)\}$，我们得到一个 Kripke 算子 $\Delta_{\mathcal{R}_{\cup^*}}$；当限制到包含 $\emptyset$ 的族时，它能够刻画并集。

(c) 同样容易看出，补运算 Δ_c^X 不是 Kripke 算子：对于任意关系 $\mathcal{R} \subseteq (\mathcal{P}(X))^2$，$\Delta_{\mathcal{R}}(\emptyset) = \emptyset$ 但 $\Delta_c^X(\emptyset) = \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$。

(d) 在 X 上的张量析取和张量否定是Kripke算子：显然 $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \Delta_{\mathcal{R}_\vee}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 以及 $\Delta_\neg^X(\mathcal{A}) = \Delta_{\mathcal{R}_\neg}(\mathcal{A})$，其中 $\mathcal{R}_\vee = \{(A \cup B, A, B) \mid A, B \in \mathcal{P}(X)\}$ 和 $\mathcal{R}_\neg = \{(X \setminus A, A) \mid A \in \mathcal{P}(X)\}$。更一般地，对于集合 $\{0, 1\}$ 上的任意二元运算 $\circledast$，相应的张量算子是Kripke算子：$\Delta_\circledast^X = \Delta_{\mathcal{R}_\circledast}$，其中 $\mathcal{R}_\circledast = \{(A * B, A, B) \mid A, B \in \mathcal{P}(X)\}$（见定义 2.9）。

(e) 投影和逆投影都是 Kripke 算子。事实上，若 $f\colon X \to Y$ 是满射，则显然 $\Delta_f = \Delta_{\mathcal{R}_f}$，其中 $\mathcal{R}_f = \{(f[A], A) \mid A \in \mathcal{P}(X)\}$。类似地，$\Delta_{f^{-1}} = \Delta_{\mathcal{R}_{f^{-1}}}$，其中 $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \{(A, f[A]) \mid A \in \mathcal{P}(X)\}$。

(f) 最后我们注意到，与 Lind- str ¨om 量词对应的 $(\mathcal{K}, \vec{\ell})$-投影算子 $\Delta_{\mathcal{K}\vec{\ell}}^{M^m}$，是 Kripke 算子：根据定义 2.21，我们有 $\Delta_{\mathcal{K}}^{M^m}{}_{,\vec{\ell}} = \Delta_{\mathcal{R}_{\mathcal{K},\vec{\ell}}}$，其中 $\mathcal{R}_{\mathcal{K},\vec{\ell}} = \{(B, A) \mid B = \pi^p_{\mathcal{K},\vec{\ell}}(A)\}$ 若 $(M, \emptyset) \notin \mathcal{K}$，且 $\mathcal{R}_{\mathcal{K},\vec{\ell}} = \{(B, A) \mid \pi^p_{\mathcal{K},\vec{\ell}}(A) \subseteq B\}$ 若 $(M, \emptyset) \in \mathcal{K}$。

特别地，存在量化算子 $\Delta_{\exists i}^{M^m}$ 和全称量化算子 $\Delta_{\forall i}^{M^m}$ 都是 Kripke算子。

导入项　性质是它们保持集合族的并集：

引理 4.9（并集引理）。设 $\Delta_{\mathcal{R}}\colon \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^n \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ 是一个 Kripke算子，并且对于某些指标集 K_i、$i < n$，$\mathcal{A}_i^k \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$、$k \in K_i$ 是集合族。那么

$$\Delta_{\mathcal{R}}\Big(\bigcup_{k \in K_0} \mathcal{A}_0^k, \ldots, \bigcup_{k \in K_{n-1}} \mathcal{A}_{n-1}^k\Big) = \bigcup_{\vec{k} \in K} \Delta_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}_0^{k_0}, \ldots, \mathcal{A}_{n-1}^{k_{n-1}}),$$

其中我们使用记号 $\vec{k} = (k_0, \ldots, k_{n-1})$ 和 $K = K_0 \times \cdots \times K_{n-1}$。

[4]这一概念由 L ¨uck [2020]定义；他将满足该条件的函数称为“算子”。

证明。使用记号 $\mathcal{A}_i = \bigcup_{k\in K_i} \mathcal{A}_i^k$ 表示 $i < n$，等式左边可写为 $\mathcal{A} := \Delta_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_{n-1})$。结论可由下列等价关系链得出：

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A} &\Leftrightarrow \forall i < n\, \exists A_i \in \mathcal{A}_i : (A, A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \mathcal{R} \\ &\Leftrightarrow \forall i < n\, \exists k_i \in K_i\, \exists A_i \in \mathcal{A}_i^{k_i} : (A, A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \mathcal{R} \\ &\Leftrightarrow \exists \vec{k} \in K : A \in \Delta_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}_0^{k_0}, \ldots, \mathcal{A}_{n-1}^{k_{n-1}}) \\ &\Leftrightarrow A \in \textstyle\bigcup_{\vec{k}\in K} \Delta_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}_0^{k_0}, \ldots, \mathcal{A}_{n-1}^{k_{n-1}}). \end{aligned}$$

□

保持受支配（和/或有支撑）且凸这一性质的 Kripke算子在我们的讨论中起着至关重要的作用。这是因为对于这样的算子$\Delta_{\mathcal{R}}$，像 $\Delta_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_{n-1})$ 的（相应）维度至多为 $\mathcal{A}_i$、$i < n$ 的维度之积，因此 $\Delta_{\mathcal{R}}$ 保持增长类。

定义 4.10. 设 Δ: $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^n \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ 是一个算子。若对于每个 $i < n$，当 $\mathcal{A}_i$ 受支配且凸时，$\Delta(\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_{n-1})$ 受支配（分别为有支撑）且凸，或者 $\Delta(\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_{n-1}) = \emptyset$，则称 Δ 弱保持受支配（分别为有支撑）凸性。此外，若对于每个 $i < n$，当 $\mathcal{A}_i$ 是一个区间时，$\Delta(\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_{n-1})$ 是一个区间，或者 $\Delta(\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_{n-1}) = \emptyset$，则称 Δ 弱保持区间。

例 4.11. (a) 命题 2.16 表明，每个张量算子 $\circledast$ 都弱保区间。（在这种情况下，如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 非空，那么 $\mathcal{A} \circledast \mathcal{B}$也非空，因此我们完全可以直接说 $\circledast$ 保区间，省去限定词“弱”。）

(b) 现在假设集合 $\{0, 1\}$ 上的二元运算 $\circledast$ 不是单调的。回顾一下，$\circledast$的单调性是指：对于所有 a、a'、b、$b' \in \{0, 1\}$，只要 $a \le a'$且 $b \le b'$，就有 $a \circledast b \le a' \circledast b'$；其中 $\le$是真值的自然序，且 $0 < 1$。16 个运算中有 10 个不单调，也就是说，除了常值运算、投影、合取和析取之外，其余运算都不单调。由于 $\circledast$ 不单调，存在 $c \in \{0, 1\}$，使得

$$either \begin{cases} c \circledast 0 = 1 \\ c \circledast 1 = 0 \end{cases} \quad or \begin{cases} 0 \circledast c = 1 \\ 1 \circledast c = 0. \end{cases}$$

根据对称性，不妨假设前一对方程。现在考虑任意 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$，并在 $c = 0$ 时选择 $C = \emptyset$，在 $c = 1$ 时选择 $C = X$。注意，$\{C\} = [C, C] \subseteq \mathcal{P}(X)$ 是一个区间，因此它既是支配凸的，也是支撑凸的。现在

$$\{C\} \circledast \mathcal{A} = \{C * A \mid A \in \mathcal{A}\} = \{X \smallsetminus A \mid A \in \mathcal{A}\} = \neg\mathcal{A}.$$

任取一个非空、支配凸但非支撑凸的 $\mathcal{A}$，可知 $\{C\} \circledast \mathcal{A} = \neg\mathcal{A}$ 非空，但并非受支配的。因此，$\circledast$ 不会弱保支配凸性。同理，互换“受支配的”与“有支撑的”的角色，可得 $\circledast$ 不会弱保支撑凸性。

定理 4.12. 设 $\Delta_{\mathcal{R}}$: $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^n \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ 是一个 Kripke 算子，并设 $\mathcal{A}$ =Δ($\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_{n-1}$)。

(a) 如果 Δ 弱保留支配凸性，那么 D($\mathcal{A}$) ≤ D($\mathcal{A}_0$) · . . . · D({v6)。

(b) 如果 Δ 弱保持支撑凸性，那么 $\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{A}_0) \cdot \ldots \cdot \mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{A}_{n-1})$】【。

(c) 如果 Δ 弱保持区间，那么 CD($\mathcal{A}$) ≤ CD($\mathcal{A}_0$) · . . . · CD($\mathcal{A}_{n-1}$)】【。

证明。 (a) 根据定义 2.4，对于每个 $i < n$ ，存在受支配的凸子族 $\mathcal{A}_i^k \subseteq \mathcal{A}_i$、 $k \in K_i$，使得 $\mathcal{A}_i = \bigcup_{k \in K_i} \mathcal{A}_i^k$ 和 $|K_i| = \mathrm{D}(\mathcal{A}_i)$。对于每个元组 $\vec{k}$: =($k_0, \ldots, k_{n-1}$)，其中 K : = $K_0 \times \cdots \times K_{n-1}$，令 $\mathcal{A}_{\vec{k}}$ 表示族 Δ($\mathcal{A}_0^{k_0}, \ldots, \mathcal{A}_{n-1}^{k_{n-1}}$)。根据我们的假设，每个 $\mathcal{A}_{\vec{k}}$ 要么是受支配的且凸的，要么为空。根据引理 4.9，$\mathcal{A} = \bigcup_{\vec{k} \in K} \mathcal{A}_{\vec{k}}$。因此我们看到，D($\mathcal{A}$) ≤ $|K| = |K_0| \cdot \ldots \cdot |K_{n-1}|$ = D($\mathcal{A}_0$) · . . . · D($\mathcal{A}_{n-1}$)。

断言 (b) 的证明方式相同，只需将支配凸性替换为有支撑的凸性。最后，为证明 (c)，只需注意到，一个非空的族是区间，当且仅当它是受支配的、有支撑的且凸的。□

如例4.8 中所见，存在一些性质良好的算子并不是 Kripke 算子，但另一方面，我们的应用中出现的大多数算子都是Kripke算子。此外，对于Kripke算子，我们可以为支配凸性和支撑凸性的弱保持性给出相对简单的精确刻画。

下面我们将使用以下记号。

$$\mathcal{R}[A] := \{(A_0, \ldots, A_{n-1}) \mid (A, A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \mathcal{R}\}.$$

引理4.13.设 $\Delta_{\mathcal{R}}$: $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^n \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$是用于有限 X 和Y 的 Kripke 算子。则 $\Delta_{\mathcal{R}}$ 弱保持支配凸性，当且仅当满足以下条件：

(∗♮)如果 (A_0, .. , A_{n-1}) ∈ $\mathcal{R}[A]$、(B_0,. . . , B_{n-1}) ∈ $\mathcal{R}[B]$，且 $C \in \mathcal{H}_*(A, B)$，那么存在$C_0$,. . . , C_{n-1} ，使得 (C_0,. . ., C_{n-1}) ∈ $\mathcal{R}[C]$ ，并且对于每个 $i < n$，都有 $C_i \in \mathcal{H}_*(A_i, B_i)$。

证明。假设(∗♮) 成立。设 $\mathcal{A}_i$ 为具有最大集 D_i的被支配的凸集，对于 $i < n$。如果 $\Delta_{\mathcal{R}}$ ($\mathcal{A}_0$, . . ., $\mathcal{A}_{n-1}$) ≠ ∅，则它包含极大集。我们首先证明它具有唯一的极大集。

因此，假设 A和 B是 $\Delta_{\mathcal{R}}$($\mathcal{A}_0$,..., $\mathcal{A}_{n-1}$)中的极大集。于是存在A_i、 $B_i \in \mathcal{A}_i$、 $i < n$, 使得(A_0, . .. , A_{n-1}) ∈ $\mathcal{R}[A]$ 且(B_0, .. ., B_{n-1}) ∈ $\mathcal{R}[B]$。根据(∗♮)，存在 C_i，使得(C_0,.. . , C_{n-1}) ∈ $\mathcal{R}[A \cup B]$ ，并且对于每个$i < n$， $C_i \in \mathcal{H}_*(A_i, B_i) \subseteq \mathcal{A}_i$。因此 $A \cup B \in \Delta_{\mathcal{R}}$ ($\mathcal{A}_0$,.. ., $\mathcal{A}_{n-1}$)。由于 A、 $B \subseteq A \cup B$，这只有在$A = B$时才可能。

为证明 $\Delta_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_{n-1})$ 是凸的，假设 $A \subseteq C \subseteq B$, ($A_0, \ldots, A_{n-1}$) ∈$\mathcal{R}[A]$ 且 ($B_0, \ldots,$ B_{n-1}) ∈ $\mathcal{R}[B]$。那么 $C \in [A, B] = \mathcal{H}_*(A, B)$，由此根据 (∗♮)，存在 C_i，使得对每个 $i < n$, 都有 $C_i \in \mathcal{H}_*(A_i, B_i) \subseteq \mathcal{A}_i$ ，且 ($C_0, \ldots, C_{n-1}$) ∈ $\mathcal{R}[C]$。因此，$C \in \Delta_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_{n-1})$。

接着假设 $\Delta_{\mathcal{R}}$ 弱保持支配凸性。令 $(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \mathcal{R}[A]$，$(B_0, \ldots, B_{n-1}) \in \mathcal{R}[B]$，且 $C \in \mathcal{H}_*(A, B)$。由于族 $\mathcal{A}_i := \mathcal{H}_*(A_i, B_i), i < n$ 是凸且受支配的，因此存在集合 $D \in \Delta_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_{n-1})$，使得 $A \cup B \subseteq D$。现在 $C \in \mathcal{H}_*(A, B, D)$，且由于 $\Delta_{\mathcal{R}}$ 弱保持支配凸性，$\mathcal{H}_*(A, B, D) \subseteq \Delta_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_{n-1})$。因此 $(*^\natural)$ 成立。 □

引理4.14。设 $\Delta_{\mathcal{R}}\colon \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^n \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ 是有限 X 和Y的 Kripke 算子。那么，$\Delta_{\mathcal{R}}$ 弱保持支撑凸性，当且仅当满足以下条件：

$(*^\flat)$如果 $(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \mathcal{R}[A]$，$(B_0, \ldots, B_{n-1}) \in \mathcal{R}[B]$，并且 $C \in \mathcal{H}^*(A, B)$，那么存在$C_0, \ldots, C_{n-1}$ 使得 $(C_0, \ldots, C_{n-1}) \in \mathcal{R}[C]$ 并且 $C_i \in \mathcal{H}^*(A_i, B_i)$ 对每个 $i < n$ 都成立。

证明。该结论的证明方法与前一个结果相同。 □

4.3 局部克里普克算子

许多自然的 Kripke算子 $\Delta_{\mathcal{R}}$ 是局部的，因为关系 $\mathcal{R}[A]$ 完全由其在单元素集 $\{a\} \subseteq A$上的行为决定。

定义4.15.一个 Kripke算子 $\Delta_{\mathcal{R}}\colon \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^n \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$是局部的[5]如果，对于任意$A \in \mathcal{P}(Y)$，$\mathcal{R}[A]$ 由关系 $\mathcal{R}[\{a\}], a \in A$ 确定，如下所示：$(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \mathcal{R}[A] \Leftrightarrow$ 对于每个 $a \in A$，存在 $(A_0^a, \ldots, A_{n-1}^a) \in \mathcal{R}[\{a\}]$ 使得 $A_i = \bigcup_{a \in A} A_i^a$ 对于 $i < n$。

L¨uck证明了（L¨uck [2020]），所有局部克里普克算子 Δ 都保持平坦性：如果 $\mathcal{A}_i$、$i < n$ 是平坦的（即受支配的且向下封闭），那么 $\Delta(\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_{n-1})$ 也同样是平坦的。我们将这一结果推广到支配凸性。

定理4.16。如果 $\Delta_{\mathcal{R}}\colon \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^n \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ 是有限 X和 Y 上的局部 Kripke 算子，那么它弱保持支配凸性。

证明。只需证明 $\mathcal{R}$ 满足引理 4.13 的条件 $(*^\natural)$。为此，假设 $(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \mathcal{R}[A], (B_0, \ldots, B_{n-1}) \in \mathcal{R}[B]$，且 $C \in \mathcal{H}_*(A, B) = [A, A \cup B] \cup [B, A \cup B]$。我们假设 $C \in [A, A \cup B]$；情形 $C \in [B, A \cup B]$ 类似。

由于 $\Delta_{\mathcal{R}}$ 是局部的，对于每个 $a \in A$，都存在集合 A_i^a，使得对于 $i < n$，$A_i = \bigcup_{a \in A} A_i^a$ 成立，并且 $(A_0^a, \ldots, A_{n-1}^a) \in \mathcal{R}[\{a\}]$。同样，对于每个 $b \in B$，都存在集合 B_i^b，使得对于 $i < n$，$B_i = \bigcup_{b \in B} B_i^b$ 成立，并且 $(B_0^b, \ldots, B_{n-1}^b) \in \mathcal{R}[\{b\}]$。

现在，对于每个 $i < n$，我们定义 $C_i^c := A_i^c$ 对所有 $c \in A$，并定义 $C_i^c := B_i^c$ 对所有 $c \in C \setminus A$（注意 $A \subseteq C$ 和 $C \setminus A \subseteq B$）。令 $C_i := \bigcup_{c \in C} C_i^c$ 对于 $i < n$。根据定义 4.15，我们有 $(C_0, \ldots, C_{n-1}) \in \mathcal{R}[C]$。

我们仍需证明，对于 $i < n$，$C_i \in \mathcal{H}_*(A_i, B_i)$。显然，对于每个 $c \in C$，$C_i^c \subseteq A_i \cup B_i$，由此可得，对于 $i < n$，$C_i \subseteq A_i \cup B_i$。此外，$A_i = \bigcup_{a \in A} A_i^a = \bigcup_{c \in A} C_i^c \subseteq C_i$，因此我们可以得出，$C_i \in [A_i, A_i \cup B_i] \subseteq \mathcal{H}_*(A_i, B_i)$。 □

[5]这不应与公式的局部性概念混淆。在 L¨uck [2020] 中，这一概念以“横截”的名称定义。

另一方面，并非所有局部克里普克算子都弱保持支撑凸性。这一点可由下一个例子看出。

例 4.17. (a) 令 $X = \{a, b\}$，并令 $\mathcal{R}$ 为关系 $\{(Y, X) \mid Y \neq \emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(X)^2$。显然，$\Delta_{\mathcal{R}}$ 是局部的，但它不弱保支撑凸性，因为族 $\mathcal{H}^*(X) = \{X\}$ 是凸且有支撑的，而其像 $\Delta_{\mathcal{R}}(\{X\}) = \{\{a\}, \{b\}, X\}$ 没有支撑。

(b) 更一般地，若 $\Delta_{\mathcal{R}}\colon \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^n \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ 是局部的，且 $\mathcal{R}$ 中存在元组 $(\{a\}, A_0, \ldots, A_{n-1})$、$(\{b\}, B_0, \ldots, B_{n-1})$，使得 $a \neq b$ 且 $A_i \cap B_i \neq \emptyset$ 对某个 $i < n$ 成立，则 $\Delta_{\mathcal{R}}$ 不弱保支撑凸性。这是因为根据定义 4.15，$\mathcal{R}[\emptyset] = \{(\emptyset, \ldots, \emptyset)\}$，从而 $\emptyset \notin \Delta_{\mathcal{R}}(\mathcal{H}^*(A_0, B_0) \ldots, \mathcal{H}^*(A_{n-1}, B_{n-1}))$，尽管 $\emptyset \in \mathcal{H}^*(\{a\}, \{b\})$。

为避免上述例子中所展示的问题，我们对（局部）Kripke算子考虑以下附加要求：

定义 4.18. Kripke 算子 $\Delta_{\mathcal{R}}\colon \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^n \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ 是分离的，当且仅当 $A_i \cap B_i = \emptyset$ 对于所有 $i < n$，只要 $(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \mathcal{R}[\{a\}]$，$(B_0, \ldots, B_{n-1}) \in \mathcal{R}[\{b\}]$ 且 $a \neq b$。

定理 4.19. 若 $\Delta_{\mathcal{R}}\colon \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^n \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ 是有限 X 和 Y 上的局部且分离的 Kripke 算子，则它弱保持支撑凸性。

证明。我们证明 $\mathcal{R}$ 满足引理 4.14的条件（$*^b$）。因此，假设 $(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \mathcal{R}[A]$，$(B_0, \ldots, B_{n-1}) \in \mathcal{R}[B]$，并且 $C \in \mathcal{H}^*(A, B) = [A \cap B, A] \cup [A \cap B, B]$。我们考虑 $C \in [A \cap B, A]$ 的情形；另一种情形类似。

根据定义 4.15，对于每个 $i < n$ 和每个 $a \in A$，都有集合 A_i^a，使得 $(A_0^a, \ldots, A_{n-1}^a) \in \mathcal{R}[\{a\}]$ 且 $A_i = \bigcup_{a \in A} A_i^a$。类似地，对于每个 $b \in B$，都有集合 B_i^b，使得 $(B_0^a, \ldots, B_{n-1}^a) \in \mathcal{R}[\{b\}]$ 且 $B_i = \bigcup_{b \in B} B_i^b$。现在我们定义 $C_i = \bigcup_{c \in C} A_i^c$ 对于 $i < n$。于是，根据定义 4.15，我们有 $(C_0, \ldots, C_{n-1}) \in \mathcal{R}[C]$。

根据定义，显然有 $C_i \subseteq A_i$。因此，要完成证明，只需证明对每个 $i < n$，都有 $A_i \cap B_i \subseteq C_i$。为此，假设 $d \in A_i \cap B_i$。那么存在元素 $a \in A$ 和 $b \in B$，使得 $d \in A_i^a$ 且 $d \in B_i^b$。由于 $\Delta_{\mathcal{R}}$ 是分离的，这意味着 $a = b \in A \cap B \subseteq C$，从而 $d \in A_i^a = C_i^a \subseteq C_i$。□

回顾例4.8中定义与合取、（张量）析取和带有 Lindstr¨om量词 $Q_{\mathcal{K}}$的量化相对应的 Kripke关系 $\mathcal{R}_\cap$、$\mathcal{R}_\vee$ 和$\mathcal{R}_{\mathcal{K},\vec{\ell}}$。接下来我们证明，相应的 Kripke 算子是局部的且具有分离性。

命题 4.20。算子 $\Delta_\cap^{M^m}$、$\Delta_\vee^{M^m}$ 和$\Delta_{\mathcal{K}\,\vec{\ell}}^{M^m}$，是局部且分离的。

证明。首先注意到 $\mathcal{R}_\cap[A] = \{(A, A)\}$ 对于任意 $A \in \mathcal{P}(M^m)$。因此我们有$(A_0, A_1) \in \mathcal{R}_\cap[A]$ 当且仅当 $A_0 = A_1 = A = \bigcup_{\vec{a} \in A} \{\vec{a}\}$ 当且仅当对于每个 $\vec{a} \in A$ 存在集合$A_0^{\vec{a}}, A_1^{\vec{a}}$使得$(A_0^{\vec{a}}, A_1^{\vec{a}}) \in \mathcal{R}_\cap[\{\vec{a}\}]$ 并且 $A_i = \bigcup_{\vec{a} \in A} A_i^{\vec{a}}$对于 $i < 2$。因此 $\Delta_\cap^{M^m}$ 是局部的。由于 $\mathcal{R}_\cap[\{\vec{a}\}] = \{(\{\vec{a}\}, \{\vec{a}\})\}$，它显然也是分离的。

那么考虑 M^m 上的张量析取算子。根据 $\mathcal{R}_\vee$ 的定义，我们有 $\mathcal{R}_\vee[\{\vec{a}\}] = \{(\{\vec{a}\}, \{\vec{a}\}), (\{\vec{a}\}, \emptyset), (\emptyset, \{\vec{a}\})\}$，对任意 $\vec{a} \in M^m$ 均成立。利用这一点，可以直接验证 $\Delta_\vee^{M^m}$ 是局部且分离的。

最后，我们证明（$\mathcal{K}, \vec{\ell}$）-投影算子 $\Delta_{\mathcal{K}\,\vec{\ell}}^{M^m}$，是分离且局部的。首先假设（$M, \emptyset$）$\notin \mathcal{K}$。那么根据 $\mathcal{R}_{\mathcal{K},\ \vec{\ell}}$的定义，我们可知对于任意元组 $\vec{a} \in M^{m-r}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{K},\ \vec{\ell}}[\{\vec{a}\}] = \{S \in \mathcal{P}(M^m) \mid \pi^p_{\mathcal{K},\ \vec{\ell}}(S) = \{\vec{a}\}\}$。显然，如果 $\pi^p_{\mathcal{K},\ \vec{\ell}}(S) = \{\vec{a}\}$ 且 $\pi^p_{\mathcal{K},\ \vec{\ell}}(S') = \{\vec{b}\}$ 对于 $\vec{a} \neq \vec{b}$成立，那么 $S \cap S' = \emptyset$，由此可知 $\Delta_{\mathcal{K}\,\vec{\ell}}^{M^m}$ 是分离的。

为展示局部性，注意到$S \in \mathcal{R}_{\mathcal{K},\vec{\ell}}[T]$ 当且仅当 $T = \pi^p_{\mathcal{K},\vec{\ell}}(S) = \{\vec{a} \in M^{m-r} \mid S[\vec{a}]_{\vec{\ell}} \in \mathcal{K}\}$。首先假设这个等式成立。那么 $S = \bigcup_{\vec{a}\in T} S^{\vec{a}}$，其中$S^{\vec{a}} := \{\vec{c} \in S \mid \vec{c} = \vec{a} \otimes_{\vec{\ell}} \vec{b}$ 对于某个 $\vec{b} \in M^r\}$。此外，该等式意味着$S[\vec{a}]_{\vec{\ell}} \in \mathcal{K}$，因此 $S^{\vec{a}} \in \mathcal{R}_{\mathcal{K},\vec{\ell}}[\{\vec{a}\}]$ 对于所有 $\vec{a} \in A$。

假设于是对于某些集合 $S^{\vec{a}} \in \mathcal{R}_{\mathcal{K},\vec{\ell}}[\{\vec{a}\}]$, $\vec{a} \in A$, $S = \bigcup_{\vec{a}\in T} S^{\vec{a}}$ 成立。根据定义，对于每个 $\vec{a} \in A$，有 $\pi^p_{\mathcal{K},\vec{\ell}}(S^{\vec{a}}) = \{\vec{a}\}$，因此 $\pi^p_{\mathcal{K},\vec{\ell}}(S) = \bigcup_{\vec{a}\in T} \pi^p_{\mathcal{K},\vec{\ell}}(S^{\vec{a}}) = T$，从而 $S \in \mathcal{R}_{\mathcal{K},\vec{\ell}}[T]$。

在情形 $(M, \emptyset) \in \mathcal{K}$ 下，我们有 $\mathcal{R}_{\mathcal{K},\vec{\ell}}[T] = \{S \in \mathcal{P}(M^m) \mid \pi^p_{\mathcal{K},\vec{\ell}}(S) \subseteq T\}$。这仅意味着，对于每个 $\vec{a} \in M^{m-r}$，$\emptyset$ 被添加到 $\mathcal{R}_{\mathcal{K},\vec{\ell}}[\{\vec{a}\}]$ 中。显然，这不会影响证明 $\Delta_{\mathcal{K}\,\vec{\ell}}^{M^m}$ 是分离的。通过为 $,\vec{\ell}(S)$ 定义 $S^{\vec{a}} = \emptyset$，局部性的证明也同样成立。

□

我们以证明例 4.8 中并非所有 Kripke算子都是局部且分离的，来结束本节。

例 4.21. (a) 考虑基集 X 上的受限并运算符 $\Delta_{\mathcal{R}_{\cup^*}}$。根据 $\mathcal{R}_{\cup^*}$ 的定义，对于任意 $a \in X$，我们有 $\mathcal{R}_{\cup^*}[\{a\}] = \{(\{a\}, \emptyset), (\emptyset, \{a\})\}$。因此，$\Delta_{\mathcal{R}_{\cup^*}}$ 显然是分离的。然而，它不是局部的：若 $a \neq b$，则 $(\{a\}, \emptyset) \in \mathcal{R}_{\cup^*}[\{a\}]$ 且 $(\emptyset, \{b\}) \in \mathcal{R}_{\cup^*}[\{b\}]$，但 $(\{a\}, \{b\}) = (\{a\} \cup \emptyset, \emptyset \cup \{b\}) \notin \mathcal{R}_{\cup^*}[\{a, b\}]$。

(b) 基集 X 上的张量合取（其中至少有三个元素）不是局部的：若 $a, b, c \in X$ 是互不相同的元素，则 $(\{a, b\}, \{a, c\}) \in \mathcal{R}_\wedge[\{a\}]$ 且 $(\{b, c\}, \{a, b\}) \in \mathcal{R}_\wedge[\{b\}]$，但 $(\{a, b\} \cup \{b, c\}, \{a, c\} \cup \{b, c\}) = (\{a, b, c\}, \{a, b, c\}) \notin \mathcal{R}_\wedge[\{a, b\}]$。它也不是分离的，因为第一分量 $\{a, b\}$ 与 $\{b, c\}$ 的交集（以及第二分量的交集）非空。

通过类似的论证，我们可以看到，张量否定和其他非单调张量算子既非局部，也不具分离性。

然而请注意，正如例 4.11 中所述，所有张量算子都弱保区间。此外，我们稍后将证明，张量合取弱保受支配凸性和有支撑凸性（见命题 4.23）。

4.4 保持维数的逻辑算子

现在我们可以证明，一阶逻辑的基本逻辑算子（否定除外）以及任意的 Lindström 量词都保持增长类。

推论 4.22。设 $\mathbb{O}$ 是一个增长类，设 $\mathfrak{Dim}$ 是维数函数 Dim、$\mathrm{Dim}^{\mathrm{d}}$ 和 CDim 中的一个。此外，设 $\phi = \phi(\vec{x})$ 和 $\psi = \psi(\vec{x})$ 是具有团队语义的某种逻辑 $\mathcal{L}$ 中的公式。

(a) 若 $\mathfrak{Dim}_{\phi,\vec{x}}, \mathfrak{Dim}_{\psi,\vec{x}} \in \mathbb{O}$，则 $\mathfrak{Dim}_{\phi\wedge\psi,\vec{x}} \in \mathbb{O}$。

(b) 若 $\mathfrak{Dim}_{\phi,\vec{x}}, \mathfrak{Dim}_{\psi,\vec{x}} \in \mathbb{O}$，则 $\mathfrak{Dim}_{\phi\vee\psi,\vec{x}} \in \mathbb{O}$。

(c) 若 $\mathfrak{Dim}_{\phi,\vec{x}} \in \mathbb{O}$，则 $\mathfrak{Dim}_{\exists x_i\phi,\vec{x}^-} \in \mathbb{O}$ 以及 $\mathfrak{Dim}_{\forall x_i\phi,\vec{x}^-} \in \mathbb{O}$，其中 $\vec{x}^-$ 是去掉分量 x_i后的 $\vec{x}$ 。

(d) 若 $Q_{\mathcal{K}}$ 是 Lindstr¨om 量词，$\vec{x} = \vec{z} \otimes_{\vec{\ell}} \vec{y}$ 且 $\mathfrak{Dim}_{\phi,\vec{x}} \in \mathbb{O}$，则 $\mathfrak{Dim}_{Q_{\mathcal{K}}\vec{y}\,\phi,\vec{z}} \in \mathbb{O}$。

证明。(a) 设 M 是有限模型，且 $\mathrm{len}(\vec{x}) = m$。由命题 4.20，算子$\Delta_{\cap}^{M^m}$ 是局部且分离的，因此由定理 4.16 和 4.19 可知，它弱保持受支配的凸性和有支撑的凸性。由此，根据定理 4.12，

$$D(\|\phi \wedge \psi\|^{M,\vec{x}}) = D(\|\phi\|^{M,\vec{x}} \cap \|\psi\|^{M,\vec{x}}) \leq D(\|\phi\|^{M,\vec{x}}) \cdot D(\|\psi\|^{M,\vec{x}})$$

对于每个维度 $D \in \{\mathrm{D}、\mathrm{D}^{\mathrm{d}}、\mathrm{CD}\}$。由于这对所有有限模型 M 都成立，因此有 $\mathfrak{Dim}_{\phi\wedge\psi,\vec{x}} \leq \mathfrak{Dim}_{\phi,\vec{x}} \cdot \mathfrak{Dim}_{\psi,\vec{x}}$，从而 $\mathfrak{Dim}_{\phi\wedge\psi,\vec{x}} \in \mathbb{O}$。

(b) 的证明与 (a) 相同。(c) 是 (d) 的一个特例。

(d) 设 M 是一个有限模型。如同 (a) 中一样，由命题 4.20 以及定理 4.16 和 4.19 可知，算子$\Delta_{\mathcal{K}\vec{\ell}}^{M^m}$，弱保留受支配凸性和受支撑凸性，因此利用定理 4.12，我们可得

$$D(\|Q_{\mathcal{K}}\vec{y}\,\phi\|^{M,\vec{z}}) = D(\Delta_{\mathcal{K},\vec{\ell}}^{M^m}(\|\phi\|^{M,\vec{x}})) \leq D(\|\phi\|^{M,\vec{x}})$$

对于每个维度 $D \in \{\mathrm{D}、\mathrm{D}^{\mathrm{d}}、\mathrm{CD}\}$。因此 $\mathfrak{Dim}_{Q_{\mathcal{K}}\vec{y}\,\phi,\vec{z}} \leq \mathfrak{Dim}_{\phi,\vec{x}}$，进而 $\mathfrak{Dim}_{Q_{\mathcal{K}}\vec{y}\,\phi,\vec{z}} \in \mathbb{O}$。 □

只需借助基本定义，就可以扩展保持维度增长类的逻辑算子列表。我们已经在例 4.11 中看到，所有张量算子都（弱）保持区间。此外，尽管张量合取并非局部的（见例 4.21(b)），我们仍可以证明它弱保持支配凸性和支撑凸性。

命题 4.23。算子 $\Delta_{\wedge}$ 弱保持支配凸性和支撑凸性。

证明。假设 $\mathcal{A}_0$ 和 $\mathcal{A}_1$ 是受支配的且凸的。我们首先证明 $\Delta_{\wedge}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$ 是凸的。因此，假设 $A \subseteq C \subseteq B$和 $A, B \in \Delta_{\wedge}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$。那么存在$A_0, B_0 \in \mathcal{A}_0$和 $A_1, B_1 \in \mathcal{A}_1$，使得 $A = A_0 \cap A_1$ 和 $B = B_0 \cap B_1$。令 $C_0 = A_0 \cup C$和 $C_1 = A_1 \cup C$。则 $A_0 \subseteq C_0$和 $C_0 \subseteq A_0 \cup B \subseteq A_0 \cup B_0$，并且由于 $\mathcal{A}_0$是受支配的且凸的，$A_0 \cup B_0 \in \mathcal{A}_0$。因此，根据 $\mathcal{A}_0$的凸性，我们有 $C_0 \in \mathcal{A}_0$。同理

我们看到 $C_1 \in \mathcal{A}_1$。现在注意到 $C \subseteq C_0 \cap C_1 \subseteq (A_0 \cap A_1) \cup C = A \cup C = C$，由此可得 $C \in \Delta_\wedge(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$。

要证明 $\Delta_\wedge(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$是受支配的，只需注意到，如果 $\mathcal{A}_0$ 和 $\mathcal{A}_1$ 分别受 D_0 和 D_1支配，那么显然 $\Delta_\wedge(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$ 受 $D_0 \cap D_1$ 支配。

证明 $\Delta_\wedge$ 弱保持支撑凸性的方法类似。 □

Fi最后，对于并运算符，我们得到以下维度不等式 s:

命题 4.24。设 $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{P}(X)$ 对于基集 X，并设 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$。则 $\mathrm{D}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{D}(\mathcal{A}_0) + \mathrm{D}(\mathcal{A}_1)$，$\mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{A}_0) + \mathrm{D}^{\mathrm{d}}(\mathcal{A}_1)$，且 $\mathrm{CD}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{CD}(\mathcal{A}_0) + \mathrm{CD}(\mathcal{A}_1)$】【。

证明。注意，如果子族 $\mathcal{G}_0$ 支配 $\mathcal{A}_0$，且子族 $\mathcal{G}_1$ 支配 $\mathcal{A}_1$，那么显然 $\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1$ 支配 $\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$。因此，$\mathrm{D}(\mathcal{A}) \leq |\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1| \leq |\mathcal{G}_0| + |\mathcal{G}_1|$。第一个不等式由 $\mathcal{G}_0$ 和 $\mathcal{G}_1$ 具有最小基数的情形得出。其余两个不等式的证明方法相同。 □

现在，我们可以将张量连接词和直觉主义析取的情形添加到推论 4.22 中。

推论 4.25。设 $\mathbb{O}$ 是一个增长类，且设 $\mathfrak{Dim}$ 是维数函数 Dim、$\mathrm{Dim}^{\mathrm{d}}$ 和 CDim 中的一个。此外，设 $\phi = \phi(\vec{x})$ 和 $\psi = \psi(\vec{x})$ 是带有团队语义的某种逻辑 $\mathcal{L}$ 的公式，并设 $\circledast$ 是一个二元张量连接词。

(a)如果 $\mathfrak{Dim}_{\phi,\vec{x}}$,$\mathfrak{Dim}_{\psi,\vec{x}} \in \mathbb{O}$，那么 $\mathfrak{Dim}_{\phi \underline{\vee} \psi,\vec{x}} \in \mathbb{O}$。

(b) 若 $\mathfrak{Dim}_{\phi,\ \vec{x}}$,$\mathfrak{Dim}_{\psi,\ \vec{x}} \in \mathbb{O}$，则 $\mathfrak{Dim}_{\phi \otimes \psi,\ \vec{x}} \in \mathbb{O}$。

(c) 如果 $\mathrm{CDim}_{\phi,\vec{x}}$，$\mathrm{CDim}_{\psi,\vec{x}} \in \mathbb{O}$，那么 $\mathrm{CDim}_{\phi \circledast \psi,\vec{x}} \in \mathbb{O}$。

证明。（a）令 M 为一个有限模型。根据命题 4.24，我们有

$$D(\|\phi \underline{\vee} \psi\|^{M,\vec{x}}) = D(\|\phi\|^{M,\vec{x}} \cup \|\psi\|^{M,\vec{x}}) \leq D(\|\phi\|^{M,\vec{x}}) + D(\|\psi\|^{M,\vec{x}})$$

对于维度 $D \in \{\mathrm{D}、\mathrm{D}^{\mathrm{d}}、\mathrm{CD}\}$ 中的每一个维度。由于这对所有有限模型 M 都成立，因此我们有 $\mathfrak{Dim}_{\phi \underline{\vee} \psi,\vec{x}} \leq \mathfrak{Dim}_{\phi,\vec{x}} + \mathfrak{Dim}_{\psi,\vec{x}}$，从而得到 $\mathfrak{Dim}_{\phi \underline{\vee} \psi,\vec{x}} \in \mathbb{O}$。

(b) 利用命题 4.23 和定理 4.12，我们得到不等式 $\mathfrak{Dim}_{\phi \otimes \psi,\vec{x}} \leq \mathfrak{Dim}_{\phi,\vec{x}} \cdot \mathfrak{Dim}_{\psi,\vec{x}}$。由此可见，$\mathfrak{Dim}_{\phi \otimes \psi,\vec{x}} \in \mathbb{O}$。

(c) 的证明方式与 (b) 相同，只需用命题 2.16（见例 4.11）代替命题 4.23。 □

5 应用

我们的维度理论的主要应用是研究基于定义 2.18 中的原子和定义 2.17中的逻辑运算的逻辑中的可定义性层级。我们还根据某些其他联结词和量词不保持维度这一观察，得到了它们的不可表达性结果。

5.1 层级结果

现在，我们可以应用这些结果，为通过各种基于团队的原子扩展的一阶逻辑获得层级结果。我们首先定义一族逻辑，其定义完全基于维度理论方面的考量。我们使用这些略显人为的逻辑作为标尺，以比较更为传统的逻辑。

定义5.1.(a) 逻辑 $\mathbb{LE}_k^U$ 是由文字和所有上维数函数属于增长类 $\mathbb{E}_k$ 的原子，在联结词 $\wedge$、$\underline{\vee}$、 $\vee$、 $\oslash$以及任意Lindstr¨om 量词下的闭包。同样地， $\mathbb{LF}_k^U$ 为 $\mathbb{F}_k$。

(b)逻辑 $\mathbb{LF}_k^D$ 是在联结词 $\wedge$、 $\underline{\vee}$、 $\vee$、 $\oslash$以及任意 Lindstr¨om量词下，由文字和所有对偶维数函数属于增长类 $\mathbb{F}_k$ 的原子闭包而成的。

(c) 逻辑 $\mathbb{LF}_k^C$ 是文字以及所有柱维数函数属于增长类 $\mathbb{F}_k$ 的原子的闭包，在联结词 $\wedge$、$\underline{\vee}$、 $\vee$、任意张量算子和任意 Lindstr¨om 量词下。

我们没有定义 $\mathbb{LE}_k^D$ 和 $\mathbb{LE}_k^C$ 所表示的内容，原因非常特殊：命题3.18给出的估计对于对偶维度和柱状维度来说并不够好，因此基于它们的逻辑显得不那么自然。参见第4.1小节末尾的注。

上述定义的逻辑具有一些不同寻常的性质。例如，每种逻辑都对所有 Lindstr¨om 量词封闭，这意味着每个在同构下封闭的有限模型性质，都可以用这些逻辑中的任意一种来定义。另一方面，这些逻辑在其公式所能表达的内容方面都受到限制。在经典逻辑中，公式和句子的表达能力大致相同，因为我们总能用常量符号替换自由变量，从而将公式变成句子。在团队语义中，这种做法行不通，因为常量符号无法体现团队语义的复数性质。引入这些逻辑的原因在于，它们能帮助我们估计并刻画公式的维数，从而刻画多种逻辑中公式的表达能力。

定理 5.2. (a) $\mathbb{LE}_k^U$ 中每个公式的上维数都属于增长类 $\mathbb{E}_k$。

(b) $\mathbb{LF}_k^U$ （分别为 $\mathbb{LF}_k^D$ 、 $\mathbb{LF}_k^{CD}$ ）中每个公式的上维数（对偶维数、柱状维数）都属于增长类 $\mathbb{F}_k$。

证明。(a)根据定义5.1， $\mathbb{LE}_k^U$ 的原子属于 $\mathbb{E}_k$。根据基于推论4.22和4.25的归纳论证，来自 $\mathbb{LE}_k^U$ 的每个公式的上维数也属于 $\mathbb{E}_k$。(b)根据定义 5.1， $\mathbb{LF}_k^U$ 的原子属于 $\mathbb{F}_k$。同样，根据基于推论4.22和4.25的归纳论证， $\mathbb{LF}_k^U$ 的每个公式的上维数也属于 $\mathbb{F}_k$。对于 $\mathbb{LF}_k^D$ 和 $\mathbb{LF}_k^{CD}$ 的情形，论证相同。 □

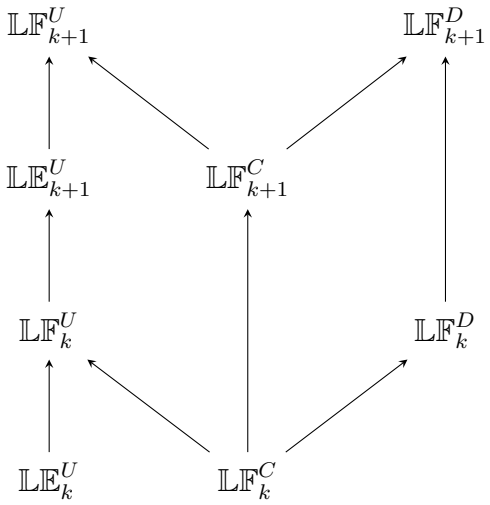

图 1：由增长类构建的逻辑。

请注意，我们没有在上述定义的逻辑运算列表中加入直觉主义蕴涵 $\rightarrow$（见定义 5.10）。原因是我们想控制维度，而直觉主义蕴涵会使维度呈指数级增长（引理 5.11）。非空原子 NE 属于 $\mathbb{LE}^U_0$。对于 $k>0$，逻辑 $\mathbb{LE}^U_k$、$\mathbb{LE}^D_k$ 和 $\mathbb{LE}^C_k$、$\mathbb{LF}^U_k$、$\mathbb{LF}^D_k$ 以及 $\mathbb{LF}^C_k$ 在 $\exists^1$ 下封闭，但绝不会在 $\forall^1$ 下封闭（见第 5.2 节）。

定义 5.1 中逻辑的平凡性质总结于以下引理中（另见图 1）：

引理 5.3。(a) $\mathbb{LF}^U_k \subseteq \mathbb{LF}^U_{k+1}$、$\mathbb{LF}^D_k \subseteq \mathbb{LF}^D_{k+1}$ 和 $\mathbb{LF}^C_k \subseteq \mathbb{LF}^C_{k+1}$。

(b) $\mathbb{LE}^U_k \subseteq \mathbb{LF}^U_k \subseteq \mathbb{LE}^U_{k+1}$。(c) $\mathbb{LF}^C_k \subseteq \mathbb{LF}^U_k$ 和 $\mathbb{LF}^C_k \subseteq \mathbb{LF}^D_k$。

事实证明，层级结果的一个关键因素是原子中允许的变量元组长度。因此，我们来明确原子的元数概念：

定义 5.4。我们称：

- 原子 $=(\vec{x}, y)$ 是 k 元的，当 $\mathsf{len}(\vec{x}) = k$，
- 原子 $\vec{x} \mid \vec{y}$ 和 $\vec{x} \curlyvee y$ 是 k-元的，当 $\mathsf{len}(\vec{x})(= \mathsf{len}(\vec{y})) = k$ 时，
- 原子 $\vec{t}_2 \perp_{\vec{t}_1} \vec{t}_3$ 是 $m + \max(k, l)$元的，或者也可以说是 (k, l, m)元的，如果 $\mathsf{len}(\vec{t}_1) = m$、$\mathsf{len}(\vec{t}_2) = k$，且 $\mathsf{len}(\vec{t}_3) = l$，
- 若 $\mathsf{len}(\vec{t}_2) = k$ 且 $\mathsf{len}(\vec{t}_3) = l$，则该原子 $\vec{t}_2 \perp \vec{t}_3$ 是 $\max(k, l)$-元的，或者说是 (k, l)-元的，

- 一个一般原子 $\alpha_C\vec{x}$ （如定义 2.18 中所述），len($\vec{x}$) $= k$，称为 k-元的，
- 如果某逻辑的原子是 k元的（分别地，是（k,l）元或（k,l,m）元的），则称该逻辑是 k元的（分别地，是（k,l）元或（k,l,m）元的）。

定理 5.5. (a) k元包含逻辑、匿名性逻辑和排斥逻辑都包含于$\mathbb{LE}_k^U$。

(b) k元依赖逻辑包含于 $\mathbb{LF}_k^U$ 。

(c)（k,l,m）元独立逻辑包含于 $\mathbb{LF}^U_{\max(k,l)+m}$。

证明. (a) 根据定理3.16， k元包含逻辑、匿名性逻辑、排斥逻辑和独立逻辑的原子在 $\mathbb{E}_k$ 中具有上维数。

(b) 这里的证明完全类似：根据定理3.16， k元依赖原子在 $\mathbb{F}_k$ 中具有上维数。 □

以下定理是我们对 n-元组集合族进行维数分析的主要应用。

定理 5.6。（a） $k+1$元包含、匿名性和排斥原子在 $\mathbb{LE}_k^U$ 中不可定义。

(b) $\mathbb{LF}_k^U$ 中无法定义 $k+1$ 元依赖原子。

（k， l， m）元独立原子在$\mathbb{LF}_i^U$如果 $i <$ max(k,l) $+ m$。

证明。假设 len($\vec{x}$) $=$ len($\vec{y}$) $= k+1$。由定理3.16， $\|\vec{x} \subseteq \vec{y}\|^{\vec{x}\vec{y}}$ 的上维数为 $2^{n^{k+1}} - n^{k+1}$。因此 Dim$_{\vec{x}\subseteq\vec{y},\vec{z}} \notin \mathbb{E}_k$。其他情形的论证相同。 □

尽管有上述不可定义性结果，原子之间仍存在一些显而易见的以及一些不那么显而易见的相互可定义性结果。基本情况是，依赖原子可以由独立性原子定义，但不能由包含原子定义。包含原子可以由独立性原子定义，但不能由依赖原子定义。在这两种情况下，不可定义性都是逻辑的结构性质所导致的，即依赖逻辑是向下封闭的，而包含逻辑在（团队的）并集下封闭。已知的关系如下：

命题 5.7（Galliani [2012]）。（a） k元依赖原子 $=(\vec{x},y)$ 可以用该 $k+1$元排斥原子通过以下公式定义

$$\forall z(z = y \vee \vec{x}z \mid \vec{x}y)$$

an也可以用 $k+1$元纯独立原子通过以下公式定义 [6]

$$\forall \vec{z}\ \exists w((\vec{z} \neq \vec{x} \vee w = y) \wedge \vec{z}y \perp \vec{z}w).$$

[6]此处以及下文中， $\vec{z} = \vec{x}$ 分别是 $\bigwedge_{i=1}^{k} z_i = x_i$ 的简写，而 $\vec{z} \neq \vec{x}$ 是$\bigvee_{i=1}^{k} \neg z_i = x_i$的简写。

反过来，可以用以下公式从 k 元依赖原子定义出 k 元排斥原子 $\vec{t}_1 \mid \vec{t}_2$ 。

$$\forall \vec{z} \exists u_1 u_2 (=(\vec{z}, u_1) \wedge =(\vec{z}, u_2) \wedge ((u_1 = u_2 \wedge \vec{z} \neq \vec{t}_1) \vee (u_1 \neq u_2 \wedge \vec{z} \neq \vec{t}_2))).$$

(b) k元排斥原子 $\vec{x} \mid \vec{y}$ 可以用 k元包含原子和k元纯独立原子定义，公式如下：

$$\exists \vec{z} (\vec{x} \subseteq \vec{z} \wedge \vec{y} \perp \vec{z} \wedge \vec{y} \neq \vec{z}).$$

(c) k元包含原子 $\vec{t}_1 \subseteq \vec{t}_2$ 可以用（k,2）元纯独立原子定义，公式如下：

$$\forall v_1 v_2 \vec{z} ((\vec{z} \neq \vec{t}_1 \wedge \vec{z} \neq \vec{t}_2) \vee (v_1 \neq v_2 \wedge \vec{z} \neq \vec{t}_2) \vee ((v_1 = v_2 \vee \vec{z} = \vec{t}_2) \wedge \vec{z} \perp v_1 v_2)).$$

它也可以用 k元匿名原子定义，公式如下（R ¨onnholm*[2018]*）

$$\exists x \forall y (x = y) \vee \forall w_1 \forall w_2 \exists \vec{y} \exists z (((w_1 = w_2 \wedge \vec{y} = \vec{t}_1) \vee (\neg w_1 = w_2 \wedge \vec{y} = \vec{t}_2)) \wedge \vec{y} \, \Upsilon \, z)).$$

(d) k元匿名原子 $\vec{x} \, \Upsilon \, y$可以用 $k+1$元包含原子定义，公式如下：

$$\exists u (\neg u = y \wedge \vec{x} u \subseteq \vec{x} y).$$

(e)（k, l, m）元独立性原子$\vec{t}_2 \perp_{\vec{t}_1} \vec{t}_3$可以用 $k+l+m$元依赖原子、 $k+m$元排斥原子和 $k+l+m$元包含原子定义，公式如下：

$$\begin{array}{l} \forall \vec{p} \vec{q} \vec{r} \; \exists u_1 u_2 u_3 u_4 ((\bigwedge_{i=1}^{4} =(\vec{p} \vec{q} \vec{r}, u_i)) \wedge ((u_1 \neq u_2 \wedge (\vec{p} \vec{q} \mid \vec{t}_1 \vec{t}_2)) \vee \\ (u_1 = u_2 \wedge u_3 \neq u_4 \wedge (\vec{p} \vec{r} \mid \vec{t}_1 \vec{t}_3)) \vee \\ (u_1 = u_2 \wedge u_3 = u_4 \wedge (\vec{p} \vec{q} \vec{r} \subseteq \vec{t}_1 \vec{t}_2 \vec{t}_3)))). \end{array}$$

(f)（k, l, m）元独立性原子 $\vec{x} \perp_{\vec{z}} \vec{y}$可以用（$k+m, l+m$）元纯独立原子定义，公式如下（Wilke *[2022]*）

$$\forall \vec{p} \vec{q} \exists \vec{u} \exists \vec{w} ((\vec{z} \neq \vec{p} \vee \vec{z} \neq \vec{q} \vee \vec{u} \vec{w} = \vec{x} \vec{y}) \wedge (\vec{z} \neq \vec{p} \vee \vec{z} \neq \vec{q} \vee \vec{p} \neq \vec{q} \vee \vec{z} = \vec{p}) \wedge \vec{p} \vec{u} \perp \vec{q} \vec{w})).$$

注意，上述 **(a)** 与定理 **3.8** 一致，因为对于 $n > 2$

$$2^{n^k} - 2 < n^{n^k} < 2^{n^{k+1}} - 2.$$

推论**5.8**（层级定理）。依赖逻辑、排斥逻辑、包含逻辑、匿名逻辑和纯独立逻辑分别都具有一个基于非一阶原子的元数的严格可定义性层级。

事实上，该推论以更强的形式成立：

定理 5.9。设 k 是一个正整数。

(a) k元依赖原子无法在这样的一阶逻辑扩展中定义：该扩展包含$< k$元依赖（或任何其他[7] $< k$元）原子、 $\leq k$元独立性、排斥、包含、匿名性、恒常原子以及任意林德斯特 ¨om 量词。(b) k元排斥原子无法在这样的一阶逻辑扩展中定义：该扩展包含 $< k$元排斥、包含、匿名性、依赖、独立性、恒常（或任何其他 $< k$元）原子以及任意林德斯特 ¨om 量词。(c) k元包含原子无法在这样的一阶逻辑扩展中定义：该扩展包含 $< k$元包含、排斥、匿名性、依赖或恒常（或任何其他 $< k$元）原子以及任意林德斯特 ¨om 量词。(d) k元匿名原子无法在这样的一阶逻辑扩展中定义：该扩展包含 $< k$元包含、匿名性、排斥、依赖、恒常（或任何其他 $< k$元）原子以及任意林德斯特 ¨om 量词。(e) k元独立原子（无论是否为纯独立原子）无法在这样的一阶逻辑扩展中定义：该扩展包含 $< k$元独立性、包含、匿名性、排斥、依赖、恒常（或任何其他 $< k$元）原子以及任意林德斯特 ¨om 量词。

比较引理 5.7 中的可定义性结果与定理 5.9 中的不可定义性结果，会引出许多尚未解决的问题。我们将在第 9 节提及其中几个。

定理 5.9 表明，引理 5.7 中的转换必然会增加元数。

此前的层级结果主要针对句子。在Durand 和Kontinen[2012] 中，已经证明，对于元数为 $k+1$ 的词汇， k元依赖原子在句子层面弱于 $k+1$元依赖原子。在Galliani等人 [2013] 的研究中，已经证明，在句子层面，带有 k元独立性原子的独立逻辑严格弱于带有 $k+1$元独立性原子的独立逻辑。在Hannula [2018] 的研究中，已经证明（利用 Grohe [1996] 关于传递闭包和不动点算子的类似结果），当 $k \geq 2$时，对于句子而言，带有 $k-1$元包含原子的包含逻辑严格弱于带有 k元包含原子的包含逻辑。至于此前关于公式的结果，在 [R¨onnholm，2018年，定理5.17、推论5.18] 中，已经证明，定义域为 $\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}$的团队的完备性（即包含每个适当类型的赋值这一性质）可以通过 $k+1$元包含原子来定义，但无法在一阶逻辑扩展中通过R¨onnholm [2018] 所称的 k不变原子以及任意向下封闭原子来定义。

[7]参见定义 2.18。

5.2 其他原子与逻辑运算

原子和逻辑运算 $\wedge$、 $\underline{\vee}$、 $\vee$、 $\forall$ 和 $\exists$ 绝不是唯一可以或曾经被考虑过的对象。本节首先介绍两个新的原子，它们具有特别大的上维度或其他维度。接着，我们将证明，文献中出现的许多其他逻辑运算实际上并不能保持维度。我们利用这一点，得出一些关于这些替代逻辑运算的有趣的不可定义性结果。

直觉主义蕴涵与析取

定义 5.10（直觉主义蕴涵）。直觉主义蕴涵 $\phi \to \psi$ 定义如下： $M \models_T \phi \to \psi$ 当且仅当每个在 M 中满足公式 ϕ的 $Y \subseteq T$ 也满足公式 ψ。

如下引理所示，依赖原子可以用恒常原子和直觉主义蕴涵来定义：

引理 5.11 [2009] $\models = x_1 \ldots x_n\ y \leftrightarrow$[8]$(= x_1 \wedge \ldots \wedge$。（Abramsky 和 Vaananen）。（, , , ） （ ） (x_n) ） $\to = (y)$ ）

这给出了一个例子，说明使用 $\phi \to \psi$ 会导致我们已知是指数级的结果（例 4.4）。这表明，我们不能指望证明 $\phi \to \psi$ 的维度通常比 ϕ 和 ψ的维数更优于指数级。

注意，当上维数受某个常数约束时，直觉主义蕴涵不会增加上维数，因此我们可以将直觉主义蕴涵添加到 $\mathbb{LE}_0$ 中。

直觉主义析取可以用常值原子来定义：

$$\models \phi \underline{\vee} \psi \leftrightarrow \exists x \exists y(=(x) \wedge =(y) \wedge ((x = y \wedge \phi) \vee (\neg x = y \wedge \psi))).$$

但由于它会以加法方式增加上维数，因此无法仅用一阶逻辑定义。事实上，公式 $x = y \underline{\vee} \neg x = y$ 的上维数为 2。

非空原子 NE

定义 5.12（非空原子）。非空原子 NE 定义为：当且仅当 $M \models_T$ NE 时 $T \neq \emptyset$。

原子 NE 表示团队非空。我们考虑过的大多数原子（依赖、包含、独立性等）都满足空团队性质，即空团队满足该原子（参见第 2.4 节末尾的注），而且我们的逻辑运算（合取、析取、存在量词、全称量词）会保留空团队性质。因此，我们可以立即看出，NE 无法用.....定义。

[8]我们使用 $\models \phi \leftrightarrow \psi$ 作为“对于所有模型 M 和所有团队 T， $M \models_T \phi$ 当且仅当$M \models_T \psi$”的简写。

它们。不过，这有时仍然很有用。例如，我们可能希望将析取$\phi \vee \psi$ 增强为$(\phi \wedge \text{NE}) \vee (\psi \wedge \text{NE})$。后者由一个团队满足：该团队分裂成一个满足 ϕ 的团队和一个满足 ψ的团队，且两者都非空。自然语言中的一个例子是这样的陈述：“星期一我打网球或去游泳”，其意图是这两种情况实际上都会发生。

引理 5.13。NE 的上维数为 1。在大小为 n 的论域中，双上维数 $\text{D}^{\text{d}}(||\text{NE}||^{M,\,\vec{x}})$ 和柱维数 $\text{CD}(||\text{NE}||^{M,\,\vec{x}})$ 为 n^k，其中 $k = \text{len}(\vec{x})$。
证明。非空性是一个受最大团队支配的凸性质。因此，NE 的上维数为 1。它由所有单元素团队组成的族支撑。因此，$||\text{NE}||^{M,\,\vec{x}}$ 的双上维数和柱维数（$\text{len}(\vec{x}) = k$）为 n^k。□

推论 5.14。$\text{Dim}_{\text{NE},\,\vec{x}}$ 属于 $\mathbb{E}_0$，而 $\text{Dim}^{\text{d}}{}_{\text{NE},\,\vec{x}}$ 和 $\text{CDim}_{\text{NE},\,\vec{x}}$ 属于 $\mathbb{F}_0$。

原子 NE 是一个上维数为 1、但仍能扩展一阶逻辑表达能力的运算示例。

量词 $\forall^1$、$\exists^1$ 和 δ^1

现在我们回顾三个量词，它们代表了普通量词 $\exists$ 和 $\forall$ 的语义的替代定义。正如我们将看到的，这些替代量词并不像公认的 $\exists$ 和 $\forall$ 那样，以同样强的意义保持维度。

定义 5.15。若 $a \in M$，则令 F_a 为常值函数 $F_a(s) = \{a\}$，对所有 $s \in T$ 成立。$\exists^1$-量词定义如下：$M \models_T \exists^1 x\phi$ 若存在某个 $a \in M$ 使得 $M \models_{T[F_a/x]} \phi$。$\forall^1$-量词定义如下：$M \models_T \forall^1 x\phi$ 若对所有 $a \in M$ 都有 $M \models_{T[F_a/x]} \phi$。公开宣告量词 $\delta^1 x$ 定义如下：$M \models_T \delta^1 x\phi$ 若对所有 $a \in M$ 都有 $M \models_{T_a} \phi$，其中 $T_a = \{s \in T : s(x) = a\}$。

现在我们将看到，量词 $\forall^1$、δ^1 和 $\exists^1$ 不保持上维数，因此按照定义 2.20 的意义，它们不是 Lindstr¨om 量词。
引理 5.16（Galliani [2013]）。
（a）$\models \forall^1 x\phi(x) \leftrightarrow \forall x(=(x) \to \phi(x))$ （b）$\models \delta^1 x\phi(x) \leftrightarrow \forall^1 y(x \neq y \vee \phi(x))$ （c）$\models =(x_1, ..., x_n, y) \leftrightarrow \delta^1 x_1 ... \delta^1 x_n =(y)$ （d）$\models =(x_1, ..., x_n, y) \leftrightarrow \forall^1 z_1 ... \forall^1 z_n (z_1 \neq x_1 \vee \ldots \vee z_n \neq x_k \vee =(y))$。

（a）和（b）中的各项表明，$\forall^1 x\phi$ 和 $\delta^1 x\phi(x)$ 至多以指数级增加 ϕ 的上维数。（c）和（d）中的各项表明，作为算子，$\delta^1 x\phi(x, y)$ 和 $\forall^1 x\phi(x)$ 在最坏情况下会以指数级增加维度。这说明，我们不能指望证明它们通常优于指数级。这也表明，这些算子并非源自 Lindstr¨om 量词。

注意，通过迭代 $\forall^1 x$ 或 $\delta^1 x$，我们可以定义任意元数的依赖原子。这表明，对于固定的 k，$\forall^1 x$ 和 $\delta^1 x$ 增加的维度超过任何 k元原子。

引理 5.17。

(a) $\models \exists^1 x\phi \leftrightarrow \exists x(=(x) \wedge \phi)$.

(b) $\models =(x) \leftrightarrow \exists^1 y(x = y)$.

证明。很简单。 □

因此， $\exists^1$ 使上维数至多线性增长。此外， $\exists^1$ 确实会增加维度，因为 $x = y$ 的维度为 1，而 $=(x)$的维度为 n。因此， $\exists^1$ 不是一阶可定义的；即使向一阶逻辑中加入任意 Lindstr¨om 量词，它也仍然不可定义。

关键在于， $\exists^1$ 在常值逻辑所处的增长类中保持维度不变，但在一阶逻辑所处的较低增长类中则不然。

一致可定义性

一致可定义性由 P. Galliani 提出，是经典逻辑中不存在的一种现象。它似乎尤其具有团队逻辑的特征。粗略地说，如果存在一个可通过代入而起作用的单一定义，那么量词 $Qx\phi(x, y)$就在某个逻辑中一致可定义。在经典逻辑中，所有定义都是一致的。在团队逻辑中，有些量词是可定义的，但其定义并不一致。本节将运用维度理论证明这一事实。

定义 5.18（Galliani [2013]）。广义量词（不一定是 Lind- str¨om 量词） Q 在逻辑 L_1 中被称为在另一个逻辑 L_2 中一致可定义，如果逻辑 L_2 有一个句子 $\Phi(P)$， P 一元，且仅以正面形式出现 P，使得对于逻辑 L_1 的所有公式 $\phi(x, y)$，我们有

$$\models Qx\phi(x, y) \leftrightarrow \Phi(\phi(z, y)/P(z)).$$

同样地，如果有多个公式，例如 $Qxy\phi(x, z)\psi(y, z)$。

例 5.19. 等价性

$$\models \exists^1 x\phi(x, y) \leftrightarrow \exists x(=(x) \wedge \phi(x, y))$$

表明量词 $\exists^1$ 可在依赖逻辑中一致定义，其中 $\Phi(P)$ 是公式 $\exists x(=(x) \wedge P(x))$. 该等价关系

$$\models \phi \veebar \psi \leftrightarrow \exists x \exists y(=(x) \wedge =(y) \wedge ((x = y \wedge \phi) \vee (\neg x = y \wedge \psi)))$$

表明直觉主义析取可在依赖逻辑中统一定义，其中$\Phi(P_0, P_1)$为公式 $\exists x \exists y(=(x) \wedge =(y) \wedge ((x = y \wedge P_0) \vee (\neg x = y \wedge P_1)$。

引理 5.20。假设

$$\models Qx\phi(x,y) \leftrightarrow \Phi(\phi(z,y)/P(z))$$

其中 $\Phi(P)$ 是依赖逻辑中的一个句子。于是

$$\mathrm{Dim}_{Qx\phi(x,y),xy}(n) \leq (n^{n^m} \cdot \mathrm{Dim}_{\phi(x,y)}(n))^k,$$

其中 k 是 $\Phi(P)$ 的长度， m 是满足以下条件的 $\vec{x}$ 长度的最大值：对于某个 y ， $=(\vec{x}, y)$ 出现在 $\Phi(P)$ 中。

证明。我们对 Φ 作归纳。原子 $=(\vec{x}, y)$、原子 $P(z)$ 以及其他原子公式的情形显然成立。联结词和一阶量词的归纳步骤由推论 4.22 得出。

□

推论 5.21（Galliani [2013]）。量词 $\forall^1$ 无法在依赖逻辑中统一定义。

证明。假设 $\Phi(P)$ 是一个长度为 l 的句子，并且在依赖逻辑中统一定义了 $\forall^1$ 。令 m 如引理 5.20 所述。根据引理 5.16，存在一个依赖逻辑公式 $\Psi(P)$，它由 $\Phi(P)$ 经过 k 次重复替换得到，并定义了 $=(x_1, \ldots, x_k, y)$。由引理 5.20，我们得到 $\mathrm{Dim}_{=(x_1,\ldots,x_k,y)\,\vec{x}y}(n)$ 的上界为 $n^{n^m \cdot l^k}$。然而，我们从例 4.4 知道，$\mathrm{Dim}_{=(x_1,\ldots,x_k,y)\,\vec{x}y}(n) = n^{n^k}$。

□

尽管推论 5.21 并非新结果，但其证明表明，上维度的概念为证明一致可定义性失效提供了一种通用方法。

“至多一半”原子

定义 5.22（“至多一半”原子）。假设 $\mathrm{len}(\vec{x}) = k$ ，且模型 M 的大小为 n。我们定义一个新的原子如下： $M \models_T \mathrm{H}(\vec{x})$ 当且仅当 $|\{s(\vec{x}) \mid s \in T\}| \leq n^k/2$。

注意，$\mathrm{H}(\vec{x})$ 在依赖逻辑中显然是可定义的（见例 2.19）。

定理5.23。设$\mathrm{len}(\vec{x}) = k$。$\mathrm{H}(\vec{x})$ 的上维数为 $\sim \sqrt{\frac{2}{\pi}2^{n^k - \frac{k}{2}log_{(n)}}}$。

证明。 [Bollob´as，2001，第 4] 页

□

推论 5.24。假设 $\mathrm{len}(\vec{x}) = k$。原子 $\mathrm{H}(\vec{x})$ 在一阶逻辑扩展中无法通过 $< k$ 元依赖原子（或其他原子）定义。

奇偶原子

定义 5.25（奇偶原子）。假设 $\mathrm{len}(\vec{x}) = k$。 k 元奇偶原子定义为： $M \models_T \mathrm{E}(\vec{x})$ 当且仅当 $|\{s(\vec{x}) \mid \vec{x} \in T\}|$ 是偶数。

注意，$\mathrm{E}(\vec{x})$ 可在独立逻辑中定义（见例 2.19）。

引理 5.26。 k 元 $\mathrm{E}(\vec{x})$ 的上维度、对偶维度和柱维数为 2^{n^k-1}。

证明。这是例 2.7 的一个特例。 □

推论 5.27。 k元 $\mathrm{E}(\vec{x})$ 可由独立性原子定义，但对于 $l < k$，无法由l元独立性原子定义。

（独立）依赖友好逻辑

所谓的依赖友好存在量词，如独立友好逻辑中所用的量词（Mann 等人 [2011]），可以用依赖原子来定义。因此，我们可以估计它对公式维度的影响。我们有

$$\begin{array}{lll} \models & \exists x/\vec{y}\phi & \leftrightarrow \quad \exists x(=(\vec{y},x)\wedge\phi) \\ \models & =(\vec{y},x) & \leftrightarrow \quad \exists z/\vec{y}(z=x) \end{array}$$

推论 5.28。量词 $\exists x/\vec{y}$，$\mathrm{len}(\vec{y}) = k$，无法在一阶逻辑扩展（加入 $< k$元独立性、包含、排斥、依赖和恒常原子）中定义。

一种“依赖友好”析取可以定义如下： $M \models_T \phi \vee_{\vec{x}} \psi$若 $T = Y \cup Z$，使得 $M \models_Y \phi$, $M \models_Z \psi$，并且若 $s, s' \in T$ 满足 $s(\vec{x}) = s'(\vec{x})$，则 $(s \in Y \Leftrightarrow s' \in Y)$ 且 $(s \in Z \Leftrightarrow s' \in Z)$。

引理5.29. $\models \phi \vee_{\vec{x}} \psi \leftrightarrow \exists u \exists v(=(\vec{x},u) \wedge =(\vec{x},v) \wedge (u = v \to \phi) \wedge (u \neq v \to \psi))$.

在引理 5.29 的证明中，实际上只需使用二值依赖原子$=(\vec{x},y) \wedge (=(y) \vee =(y))$。当$\mathrm{len}(\vec{x}) = k$且论域的基数为 m时，其维度为 2^{m^k}。维数分析表明，完整的依赖原子无法由 s 值依赖原子 $=_s(\vec{x},y)$ 定义，该原子定义为

$$=(\vec{x},y) \wedge (=(y) \vee \ldots \vee =(y)) \qquad (s \text{ disjuncts})$$

对于任意 $s > 0$。二值依赖原子 $=_2(\vec{x},y)$ 可以由 $\vee_{\vec{x}}$ 和常值原子定义如下:

$$\exists u \exists v(=(u) \wedge =(v) \wedge (y = u \vee_{\vec{x}} y = v)).$$

这表明，运算 $\phi \vee_{\vec{x}} \psi$ 不保持维度。这种情况与依赖友好存在量词类似。

6 VC-dimension

有限组合学中的一个重要维度是集合族的 Vapnik-Cervonenkis（VC）维数。其定义如下：如果有限集的子集族 $\{h \cap A \mid h \in H\}$ 包含 A 的所有子集，我们就说集合 A 被族 H 打散。

H 的 VC维数是被 H 打散的集合的最大基数。事实证明，这种维度在学习理论中很有用，例如（Vapnik [1995]）。然而，它不像我们的维度概念那样灵活，而且似乎不适用于本文所采用的这类分析。

论域中由偶数个 k元组组成的团队族的 VC维数为 n^k，其中论域有 n 个元素。然而，偶数性可以用独立逻辑表达。由于独立原子的 VC维数为 1，这表明我们的逻辑运算不会保持 VC维数。

7 柱维数与析取范式

集合族的柱维数实际上在布尔函数析取范式（DNF）的研究中已有所涉及：设 $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ 是一个有限集。对于每个 $i \in [1, n]$，我们固定一个命题符号 p_i。现在，X 的子集 A 与 $\{p_1, \ldots, p_n\}$的赋值（真值函数） v_A 一一对应。相应地， X的子集族 $\mathcal{A}$ 与 $\{p_1, \ldots, p_n\}$ 上的布尔函数相对应，进而与 $\{p_1, \ldots, p_n\}$中的命题公式 $\phi_{\mathcal{A}}$相对应。这建立了集合族与布尔函数之间的联系¯（O'Donnell [2014]）。区间 $I = \{Y \subseteq X : A \subseteq Y \subseteq B\}$ 对应于赋值集合 I：在这些赋值中，某些命题符号取固定值，即 $a_i \in A$ ¯必须为 1，而 $a_i \notin B$ 必须为 0 的 p_i p_i。集合 I 可以在命题逻辑中用文字（即命题符号及其否定）的合取来定义。如果 X 的子集族$\mathcal{A}$ 可以表示为 d 个区间的并集，那么定义公式$\phi_{\mathcal{A}}$ 就可以取为 d 个文字合取的析取。在布尔函数理论中，我们的柱维数概念恰好对应于布尔函数 f最短析取范式的长度$m(f)$，也就是 f的析取范式中析取项的最小数量。这种"最小 DNF"中的合取（我们还规定，其中尽可能少地包含变量）就是 f 众所周知的主蕴涵项。Quine [1955] 和 McCluskey 的算法可以确定这些主蕴涵项，从而也能确定数量 $m(f)$。关于$m(f)$的一个经典结果是对几乎所有含有 n 个布尔变量的 f 的如下估计（Glagolev [1964]）：

$$c_1 \frac{2^n}{(\log n) \log\log n} < m(f) < c_2 \frac{(\log\log n) 2^n}{\log n}.$$

因此，这也是对一个含有 n 个元素的集合的几乎所有子集族的柱维数的估计。析取范式维数已得到广泛研究，并且已有更多估计结果，参见 Korˇsunov [1969],Makarov [1964], Weber [1982],Kuznetsov[1983], Aslanyan [1983], Romanov [1983]。例如，Kuznetsov [1983]证明了如下更好的下界

$$\frac{(1 - \epsilon_n) \cdot 2^n}{\log n - \log\log n}, \tag{2}$$

其中 $\lim \epsilon_n = 0$，对于几乎所有定义在 n 个变量上的布尔函数都成立。

在下面应用估计式 (2) 时，我们使用模型大小为 n 的模型中定义在 $k+1$ 个变量上的团队的均匀分布，来测量团队性质的概率。注意，在非刚性模型中，随机团队性质几乎必然无法在任何逻辑中定义。因此，值得关注的情形是在刚性模型中随机团队性质的可定义性。

推论 7.1。在有限刚性模型类中，随机的 $k+1$元团队性质（$k \geq 1$）几乎必然无法在一阶逻辑扩展中定义，该扩展包含 k元依赖、独立性、包含、排斥和匿名原子。

证明。若随机的 $k+1$元团队性质可在 $\mathbb{LF}_k$中定义，则其柱维数渐近为 n^{n^k}。然而，根据（2），柱维数几乎必然渐近至少为 $2^{n^{k+1}}$量级。

□

我们不知道上维数和对偶上维数是否已在布尔函数研究中被明确提出，也不知道它们在其中是否发挥作用。

8 无限模型

我们的维数分析可以推广到无限域，但效果并不相同。无限维数往往都相同，因此我们无法将其应用于可定义性。事实上，层级结果在以下意义上并不成立：三元及更高元数的依赖原子可以用二元依赖原子表示。诀窍是利用二元依赖原子引入一个配对函数：

定理 8.1。在无限域中，所有依赖原子都可以用二元依赖原子来定义。同样，在无限域中，三元独立原子$xyz \perp uvw$ 可以表达所有依赖、独立性、包含、匿名性和排斥原子。

证明。设 $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ 是（无限）论域上的一个配对函数（即 $\langle x,y\rangle = \langle x',y'\rangle$ 当且仅当 $x=x'$ 且 $y=y'$）。我们证明以下典型情形：

$$\begin{aligned} \models\ =(xyz,u) \ \leftrightarrow\ & \forall x_1\forall y_1\exists u_1(\,=(x_1y_1,u_1)\wedge \\ & \forall x_2\forall y_2\exists u_2(\,=(x_2y_2,u_2)\wedge \\ & ((x_1=x_2\wedge y_1=y_2)\leftrightarrow u_1=u_2)\wedge \\ & ((x_1=x\wedge y_1=y\wedge x_2=u_1\wedge y_2=z)\rightarrow\ =(u_2,u)))) \end{aligned} \tag{3}$$

设团队 T 满足 $=(xyz,u)$。令 Y 为将 T 扩展所得的团队，其中为 x_1、x_2、y_1 和 y_2赋予所有可能的取值。我们再通过如下方式为 u_1和u_2 赋值，将 Y扩展为 Z：

$$s(u_1)=\langle s(x_1),s(y_1)\rangle, s(u_2)=\langle s(x_2),s(y_2)\rangle.$$

显然，$Z\models\ =(x_1y_1,u_1)$ 且 $Z\models\ =(x_2y_2,u_2)$。此外，显然，$Z\models(x_1=x_2\wedge y_1=y_2)\Leftrightarrow u_1=u_2$。那么，假设 $\{s,s'\}\subseteq Z$满足 $x_1=x\wedge y_1=y\wedge x_2=u_1\wedge y_2=z$，并且 $s(u_2)=s'(u_2)$。直接计算可得 $s(u)=s'(u)$。

反过来，假设 T 满足（3）的右侧。因此，若通过赋予 x_1、x_2、y_1 和 y_2 所有可能的取值来扩展 T，再通过为 u_1 和 u_2 赋予适当的取值，将其进一步扩展为 Z，那么 Z 满足（3）右侧的量词自由部分。为证明（3）的左侧，假设 s、$s' \in T$ 在 xyz 上取值相同。令 f 为一个函数，使得若 $s \in Z$，则 $s(u_1) = f(s(x_1)\ s(y_1))$。那么，若 $s \in Z$，则 $s(u_2) = f(s(x_2)\ s(y_2))$。显然，$f$ 是一一映射。计算可得 $s(u_2) = s'(u_2)$。由于 Z 满足 $=(u_2, u)$，我们得到 $s(u) = s'(u)$。 □

一元依赖原子或二元独立原子是否具有类似的普适表达能力，目前仍是一个悬而未决的问题。包含原子的元数层级是否会坍缩，也同样尚未解决。

9 结论

我们在离散数学中定义了三种类似维度的概念，并将其应用于团队语义领域，以获得层级性和不可定义性结果。我们的结果表明，在有限模型中，原子的元数对可表达的内容构成了明确的上界。按照我们的方法，一个句子中原子的元数完全决定了该句子的维度；即使加入所有可能的 Lindstr¨om 量词，也无法表达更高维度的团队性质。另一方面，只有在所使用的逻辑运算仅限于某些性质良好的运算时，这一结论才成立。如果允许使用某些强大的逻辑运算（从我们的方法来看），例如直觉主义蕴涵，那么维数分析就会失效。因此，我们的定量分析可以用来说明为何选择某些逻辑运算而不是其他运算。

下面列出一些我们的结果尚未回答的开放性问题：

（1） k元依赖原子是否可以用 k元独立性、排斥、包含、匿名性、常值原子以及某些 Lindstr¨om 量词来定义?

(2) k元匿名原子能否用 k元包含原子来定义？(3) k元独立原子能否用 k元纯独立原子来定义？(4) (k, l, m)元独立原子能否用 $\max(k, l)$ 个 $+\ m$元依赖、匿名、排斥和包含原子来定义？(5) 依赖、排斥、包含、匿名和独立原子以自然的方式从类 $\mathcal{F}$、$\mathcal{X}$、$\mathcal{I}_{\subseteq}$、$\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{I}_{\perp}$ 中产生，并且对于这些原子中的每一种，我们都证明了一个元数层级结果。此外，所有这些类都是一阶可定义的。是否存在其他一阶可定义族 $\mathcal{A} \subseteq \{R \mid R \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n\}$，使得相应的原子满足类似的层级结果，并且扩展了这些原子的一阶逻辑严格包含于依赖/排斥逻辑或包含逻辑之中?

(6)我们的维数函数要么是多项式级的，要么是指数级的。对于一阶可定义的原子，这是否是一种普遍现象，即是否存在一阶可定义原子的二分定理？判断维数函数是否为多项式级的问题是否是可判定的?

参考文献

B´ela Bollob´as。《组合学》。剑桥大学出版社，剑桥，1986年。ISBN 0-521-33059-9；0-521-33703-8。集合系统、超图、向量族与组合概率。

Ivano Ciardelli。《询问语义与中间逻辑》。硕士论文，阿姆斯特丹大学，2009年。

Lauri Hella、Kerkko Luosto、Katsuhiko Sano 和 Jonni Virtema。《模态依赖逻辑的表达能力》。载于《模态逻辑进展》第10卷，第294–312页。Coll. Publ.，伦敦，2014年。

Lauri Hella 和 Johanna Stumpf。《带包含原子的模态逻辑的表达能力》。载于《第六届博弈、自动机、逻辑与形式验证国际研讨会论文集》，《电子理论计算机科学论文集》（EPTCS）第193卷，第129–143页。EPTCS，[出版地未注明]，2015。doi: 10.4204/EPTCS.193.10。URL https://doi.org/10.4204/EPTCS.193.10。

Martin L¨uck 和 Miikka Vilander。依赖原子的简洁性。《逻辑方法与计算机科学》，15(3): 第 17 号论文，28 页，2019 年。doi：10.23638/LMCS-15(3:17) 2019。URL https://doi.org/10.23638/LMCS-15(3:17)2019。

Martin L¨uck。团队逻辑：公理、表达能力与复杂度。博士论文，汉诺威大学，德国汉诺威，2020 年。URLhttps://www.repo.uni-hannover.de/handle/123456789/9430。

Stephen Cole Kleene。《元数学导论》。D. Van Nostrand Co., Inc.，纽约，N. Y.，1952年。Jouko V¨a¨an¨anen。《依赖逻辑》，伦敦数学学会学生文本丛书第70卷。剑桥大学出版社，剑桥，2007年。ISBN 978-0-521-70015-3；0-521-70015-9。doi: 10.1017/CBO9780511611193。URLhttps://doi.org/10.1017/CBO9780511611193。《一种研究独立友好逻辑的新方法》。Samson Abramsky 和 Jouko V¨a¨an¨anen。《从 IF 到 BI：依赖与分离的故事》。Synthese，167(2, 知识、理性与行动)：207–230，2009年。ISSN 0039-7857。doi: 10.1007/s11229-008-9415-6。URL https://doi.org/10.1007/s11229-008-9415-6。

Per Lindstr¨om。《带广义量词的一阶谓词逻辑》。Theoria，32：186–195，1966年。ISSN 0040-5825。doi: 10.1111/j.1755-2567.1966.tb00600.x。URL https://doi.org/10.1111/j.1755-2567.1966.tb00600.x。

Pietro Galliani。团队语义中的包含与排斥依赖——关于某些不完全信息逻辑。Ann. Pure Appl. Logic，163(1)：68–84，2012。ISSN 0168-0072。doi：10.1016/j.apal.2011.08.005。URL https://doi.org/10.1016/j.apal.2011.08.005。

Jouko V¨a¨an¨anen。一个原子的匿名性。Logic Journal of the IGPL，十一月，2022年。

Raine R¨onnholm。《团队语义逻辑的元数片段》(URN:ISBN:978-952-03- 0912-1)，2018年。博士论文，坦佩雷大学。

Richard Wilke. 关于依赖与独立性的推理：团队与多重团队。博士论文，亚琛工业大学，德国，2022年。URLhttps://publications.rwth-aachen.de/record/842872。

ArnaudDurand和JuhaKontinen。依赖逻辑中的层级。ACM计算逻辑汇刊，13(4)：第31条，21页，2012。ISSN 1529-3785。doi：10.1145/2362355.2362359。URL https://doi.org/10.1145/2362355.2362359。

Pietro Galliani、Miika Hannula 和 Juha Kontinen。独立逻辑中的层级。载于 Simona Ronchi Della Rocca（编），2013年计算机科学逻辑会议（CSL 2013），2013年9月2日至5日，意大利都灵，LIPIcs 第23卷，第263–280页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2013年。doi：10.4230/LIPIcs.CSL.2013.263。URL https://doi.org/10.4230/LIPIcs.CSL.2013.263。

Miika Hannula。《宽松语义下包含逻辑中的层级》。ACM Trans. Comput. Log., 19(3):16:1–16:23，2018年。doi: 10.1145/3204521。URLhttps://doi.org/10.1145/3204521。

Martin Grohe. 元数层级。Ann. Pure Appl. Logic, 82(2):103– 163，1996年。ISSN 0168-0072。doi: 10.1016/0168-0072(95)00072-0。URL https://doi.org/10.1016/0168-0072(95)00072-0。Pietro Galliani。依赖逻辑中的认识算子。Studia Logica, 101 (2):367–397，2013年。ISSN 0039-3215。doi: 10.1007/s11225-013-9478-3。URLhttps://doi.org/10.1007/s11225-013-9478-3。B´ela Bollob´as。《随机图》，剑桥高级数学研究丛书第73卷。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2001年。ISBN 0-521-80920-7；0-521-79722-5。doi: 10.1017/CBO9780511814068。URLhttps://doi.org/10.1017/CBO9780511814068。

Allen L. Mann、Gabriel Sandu 和 Merlijn Sevenster。《独立友好逻辑》，伦敦数学会讲义系列第 386 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2011 年。ISBN 978-0-521-14934-1。doi: 10.1017/CBO9780511981418。URL https://doi.org/10.1017/CBO9780511981418。博弈论方法。Vladimir N. Vapnik。《统计学习理论的本质》。施普林格出版社，纽约，1995 年。ISBN 0-387-94559-8。doi: 10.1007/978-1-4757-2440-0。URL https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2440-0。Ryan O'Donnell。《布尔函数分析》。剑桥大学出版社，纽约，2014 年。ISBN 978-1-107-03832-5。doi: 10.1017/CBO9781139814782。URLhttps://doi.org/10.1017/CBO9781139814782。W. V. Quine。《简化真值函数的方法》。《美国数学月刊》，62:627–631，1955 年。ISSN 0002-9890。doi: 10.2307/2307285。URL https://doi.org/10.2307/2307285。V. V. Glagolev。几乎所有代数逻辑函数的缩约范式复杂度的估计。《苏联科学院院报》，158:770–773，1964 年。ISSN 0002-3264。A. D. Korˇsunov。几乎所有布尔函数的最短析取范式复杂度的上界估计。《控制论》（基辅），(6):1–8，1969 年。ISSN 0023-1274。S. V. Makarov。析取范式平均长度的上界。《离散分析》，(3):78–80，1964 年。Karl Weber。随机布尔函数的长度。《电子信息处理与控制论》，18(12):659–668，1982 年。ISSN 0013-5712。S. E. Kuznetsov。几乎所有布尔函数的最短析取范式长度的下界。载于《概率方法与控制论》，第 19 号，第 44–47 页。喀山国立大学，喀山ˇ，1983 年。L. A. Aslanyan。弱定义布尔函数的最短析取范式长度。载于《应用数学》，第 2 号，第 32–40、141–142 页。埃里温大学，埃里温，1983 年。A. M. Romanov。汉明码特征函数的否定的最短析取范式长度的估计。《离散分析方法》，(39):88–97，1983 年。ISSN 0136-1228。