伸展流动　　中等弹性向列液晶自由薄膜的　　y

M.J. Taranchuk, [1] L.J. Cummings, [2] T.A. Driscoll, [1] 和 R.J. Braun[1], [a)]
[1)]美国特拉华大学数学科学系[2)]新泽西理工学院数学科学系

arXiv:2304.03356v1 [physics.flu-dyn] 6 Apr 2023

（日期：2023年3月24日）

受泪膜动力学问题的启发，我们提出了一个描述向列液晶薄片拉伸流的模型。这类物质中的棒状分子使其响应具有弹性贡献。我们对 Cummings 等人提出的弱弹性模型进行重新标度 [《欧洲应用数学杂志》25（2014）：397-423]，以描述中等弹性的情形。由此得到的系统包含两个关于薄片厚度和轴向速度的非线性偏微分方程；该系统在空间上是非线性的四阶系统，但相较于完整系统仍大幅简化。我们分析了由若干不同边界条件产生的解，这些条件受其底层应用问题启发，并特别关注拉伸过程中的动力学及其内在机制。我们采用数值方法求解该系统：空间上使用配置法，并采用有限差分或切比雪夫谱离散，结合隐式时间步进。早期阶段，压力对拉伸流的作用取决于初始薄膜形状，可能是促进也可能是阻碍；这会改变薄片形状，并可能导致移动端处的最小值或最大值消失。我们将这一发现与弱弹性和牛顿流动的情况进行对比；在后两种情况下，薄片会在整个过程中保留初始条件中的所有极值。

[a)]电子邮箱：rjbraun@udel.edu。

I. 引言

眼睛的泪膜是一层覆盖在角膜上的薄型多层保护性液膜。眨眼上行程时，泪膜涂布于眼表，并在每次眨眼后迅速重新形成。[1] 泪膜正常发挥功能对眼睛健康和清晰视力至关重要。[2]泪膜中含量最丰富的成分是水层，它夹在称为糖萼的黏蛋白层与漂浮于其上的薄脂质层之间；糖萼与眼表相连。图 1 展示了泪膜一小部分横截面的示意图。从周围空气向眼睛方向看，首先遇到的是脂质层，其平均厚度约为几十纳米。[3] 接下来是水层，其厚度通常为几微米，[4], 其中含有可溶性黏蛋白和蛋白质等大分子。[5] 糖萼由一片膜结合黏蛋白及相关分子构成的森林组成，为眼表形成一道保护屏障。[6–9] 最后，角膜上皮的外表面就是眼表本身的起始处。[10]

正常泪膜可能一开始就无法形成，也可能在眨眼后某个时刻发生泪膜破裂，导致泪膜无法覆盖眼表。[11,12] 泪膜破裂及其伴随的高渗透压（局部泪液盐分过高）被认为在干眼病的发展过程中发挥着重要作用，而干眼病影响着数百万人。[13–15]

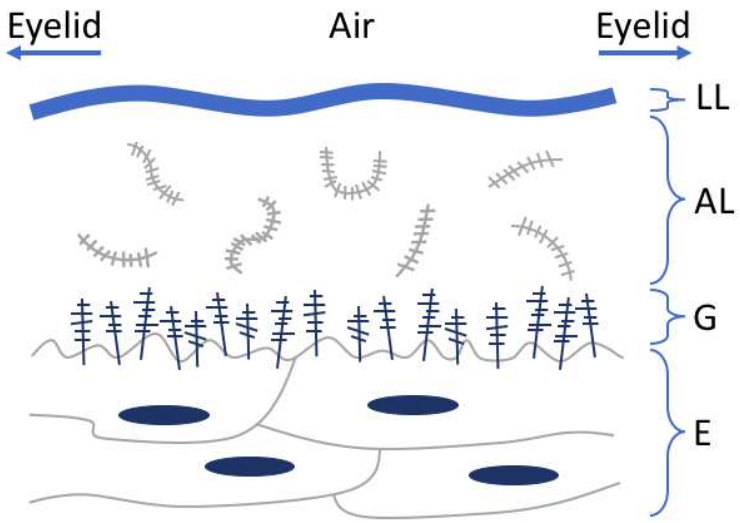

图 1. 眼表泪膜示意图。LL 表示脂质层，AL 表示水层，G 表示糖萼，C 表示角膜上皮的最外层。水层内部的物体代表大型黏蛋白和蛋白质分子。

泪膜脂质层备受关注，因为它在预防泪膜破裂方面发挥着重要作用。对脂质层和水层进行同步成像[16]，显示脂质层动力学与泪膜破裂之间存在很强的相关性。通常认为，脂质层可以阻隔蒸发，从而在两次眨眼之间发挥重要作用，维持泪膜。[17,18] 然而，脂质层组成[19] 和结构[20–22]十分复杂，至今尚未得到充分理解。睑脂是眼睑中睑板腺分泌的一种油性物质，[23] 是脂质层的主要成分；它也常被用作脂质层的模型。应用于体外睑脂膜的X射线散射方法表明，睑脂膜中存在具有层状结构的有序颗粒；[22] 这些颗粒可能具有液晶结构。对睑脂液滴进行热台成像发现了双折射，[19] 这是睑脂内部存在有序结构的另一项证据。在人类眼睑的睑板腺中，[23] 电子显微镜冷冻蚀刻显示，产生睑脂的细胞内脂质呈层状结构。[24] 我们认为，这些证据表明，泪膜脂质层可能是一个含有（可能很多）缺陷的延展液晶层。[25] 目前尚不清楚整个脂质层是否都具有这些特性，还是只有分散的结构化颗粒块漂浮在脂质层中；不过，人们普遍认为脂质层具有非牛顿性质。[19,21,22,26,27] 脂质层中的这些结构区域被认为能够阻隔水层蒸发。[19,22] 此外，冷却液晶有助于分子朝同一方向排列。[28] 脂质层冷却可能会促进体内液晶结构的形成。[20]

眨眼时眼睛重新睁开，泪膜涂布于眼睛表面，脂质层随之发生拉伸流。[1] 泪膜成像显示，脂质层中出现了条纹或波纹（见图 2），而非平滑、均匀地铺展在眼睛表面。[1]本文旨在分别采用弱弹性和中等弹性极限，对液晶薄片的拉伸流进行建模，并为探究能否重现泪膜中观察到的波纹奠定基础。

拉伸流的理论建模在二十世纪得到了相当广泛的发展[29]，至今仍是一个活跃的研究领域，部分原因在于其工业应用，例如光纤拉丝[30]，以及聚合物在各种工业用途中的应用。因此，人们对牛顿流体和非牛顿流体的拉伸流进行了大量研究，尤其是薄片或纤维的情况。我们不打算在此进行全面的

综述，而仅着重介绍几项与我们的问题相关的研究。牛顿流体纤维在拉伸流作用下的演化已得到广泛研究，研究范围从 Schultz 和 Davis 对具有一维流动的轴对称黏性纤维的研究[31]，到 Dewynne 等人对非轴对称纤维建立的更复杂的三维模型[32,33]。Wylie 等人[34] 讨论了惯性和表面张力在黏性纤维拉伸流中的作用，并发现尽管表面张力的影响属于高阶效应，可以忽略，但在某些时刻，惯性会在演化过程中发挥重要作用。Howell[30] 还给出了以牛顿流体为主的薄片和纤维拉伸流的精确解（并对早期拉伸流建模作了很好的综述）。这类流动与玻璃制造、印刷及其他应用相关；进一步的讨论和参考文献见 Dewynne、Howell 和 Wilmott[33]。非牛顿流体也受到关注；例如，Clasen 等人[35]描述了射流或液桥中聚合物流体的串珠现象，Sostarecz 和 Belmonte[36] 则研究了胶束流体在拉伸作用下的串珠现象；Smolka 等人[37] 给出了流体细丝在弱黏弹性和强黏弹性极限下拉伸流的精确解。然而，与我们的应用最相关的是 Cummings 等人[38] 对向列液晶拉伸流的研究。我们现在将聚焦于这一情形，希望它有助于解释眨眼周期中眼睛泪膜的动力学。

作为出发点，我们采用 Cummings 等人,[38] 提出的模型，该模型使用 Ericksen-Leslie 方程描述向列液晶薄片的拉伸流。该论文的主要关注点是液晶薄膜对外加电场的响应（这与许多技术应用相关，例如电子显示器）。然而，在人类眼睛这类生物环境中，不存在电场，因此我们忽略建模中的这一方面，但沿用相同的渐近方法。我们对控制方程进行重新标度，并针对弹性效应中等的情况考虑一个新的极限。我们分析了一系列边界条件，发现它们会显著影响拉伸过程中演化中的片材形状。随后，我们通过在初始条件中引入更多波，研究薄片中的波纹。

本文的组织结构如下。第二节介绍问题表述，以及弱弹性和中等弹性的数学模型。第三节详细介绍用于求解这些模型的数值方法。第四节展示我们的结果。这些结果包括由

不同的边界条件。我们追踪这些不同情景下最小薄片厚度的位置。我们比较并对照弱弹性和中等弹性条件下的解，其中表面张力或移动端速度分别发生变化。然后，我们展示在初始条件中加入多个波时的结果，以及所观察到的动力学现象背后的机制。最后，在第五节中，我们讨论这些结果并概述我们的结论。

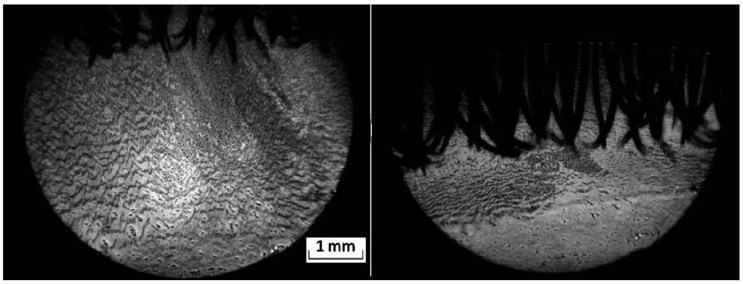

图 2. 眨眼前（左）和眨眼后（右）泪膜脂质层中的波纹。眨眼后，波纹受到压缩；眼睛睁开后，波纹可能无法延伸覆盖整个角膜。[1]

II. 模型

为降低图 1 所示脂质层几何结构的复杂性，我们将泪膜横截面（矢状面）简化为图 3 所示的几何结构。在该结构中，泪膜脂质层的波纹呈现为一种二维构型，类似于串珠现象。在本研究中，我们忽略水层，仅考虑二维的脂质层。因此，首先，我们将其视为呈薄片构型的自由薄膜，并在初始条件下使流体/空气界面上存在多个波。

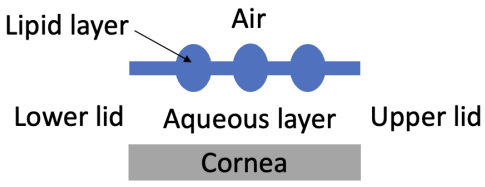

图 3. 泪膜横截面的简化示意图。

假定流体薄片的左端固定，而右端以一个

以规定的恒定速度 v_0，为眨眼后眼睑张开的过程提供一个简单模型。图4展示了示意图。作为进一步的简化，假设脂质片关于其中线对称，并假设中线为直线。我们将薄片的厚度记为 $h(x,t)$，轴向流体速度记为 $u(x,t)$，横向速度记为 $w(x,t)$。假设脂质片中的液晶分子相对于$\hat{n}$具有 θ_B 的优选角度，其中 $\hat{n}$是垂直于薄片表面、指向外侧的单位法向量。薄片内分子的角度由指向矢场 $\mathbf{n} = (\sin\theta, \cos\theta)$描述；关于指向矢场的进一步讨论见附录。

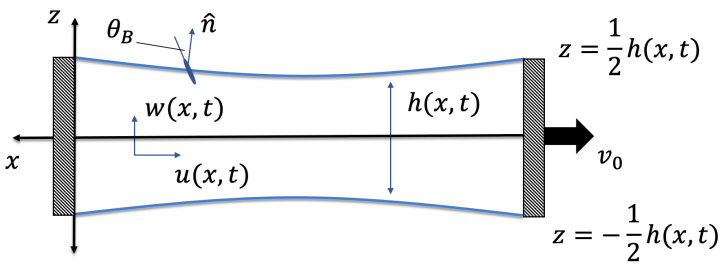

图4. 向列液晶薄片在两块平板之间拉伸的示意图。左端固定，右端以给定速度 v_0 移动。薄片厚度为 $h(x,t)$，轴向流体速度为 $u(x,t)$。横向速度为 $w(x,t)$。表面上的分子相对于指向外侧的法向量 $\hat{n}$，取向角为 θ_B 。

A. 弱弹性

我们的方法遵循 Cummings 等人[38] 的做法，他们采用多尺度摄动方法简化了[39] 描述向列液晶动力学的 Ericksen-Leslie 方程。Ericksen-Leslie 方程（见附录中的方程 (A1)）使用下文给出的尺度进行无量纲化，其中撇号表示有量纲量。坐标（x'、z'）和速度分量（u'、w'）分别对应轴向和横向，h' 表示薄片厚度，t' 表示时间，p' 表示压力，γ' 表示薄膜/空气界面处的表面张力：

$$x' = Lx, \qquad z' = \delta L z, \qquad u' = Uu, \qquad w' = \delta U w, \tag{1}$$

$$h' = \hat{h}h, \qquad t' = \frac{L}{U}t, \qquad p' = \frac{\mu U}{L}p, \qquad \gamma' = \frac{\mu U}{\delta}\gamma. \tag{2}$$

ˆ 表 I. 弱弹性模型标度中使用的参数。中等弹性模型中， γ 和 Nˆ采用不同的标度；见式（10）。注意， N、 δ 和 γ 均为无量纲量。

参数	说明
μ	动力黏度
U	典型轴向速度
L	典型薄片长度
$\hat{h}$	典型初始薄片厚度
γ'	空气/薄片界面的表面张力
K	液晶的弹性常数
$\delta = \frac{\hat{h}}{L} \ll 1$	长宽比
$\gamma = \frac{\delta}{\mu U}\gamma'$	表面张力/黏度比
$\hat{N} = \frac{K}{\mu U \delta L}$	逆埃里克森数

模型中使用的有量纲参数定义于表 I，同时列出了根据所选尺度得到的无量纲参数。

ˆ 因变量关于小参数 $\delta = h/L$ 的渐近展开（见附录 A3 节）给出了薄片厚度 h 和轴向速度 u 的（首阶）封闭方程组：

$$h_t + (hu)_x = 0, \tag{3}$$

$$\frac{F(\theta_B)}{G(\theta_B)}(hu_x)_x + \frac{\gamma}{2}hh_{xxx} = 0. \tag{4}$$

式(3) 表示质量守恒，而式 (4) 是轴向力平衡。轴向梯度项的系数由函数 $F(\theta_B)$ 和 $G(\theta_B)$ 构成，这些函数取决于流体的材料性质以及指向矢角的首阶解，θ_0 （参见附录中的式 (A19) 和式(A20)）。然而，在此处考虑的情况下，$\theta_0 = \theta_B$ 是一个固定角度，而 F 和 G 本身也都是常数。如果采用牛顿流体的性质，则 $F/G = 4$，且式 (4) 简化为

$$4(hu_x)_x + \frac{\gamma}{2}hh_{xxx} = 0. \tag{5}$$

本文余下部分在呈现弱弹性解时，均采用系数值 4。我们注意到，对于此处选取的弱弹性标度，压力

定义为[38]

$$p = -2u_x - \frac{\gamma}{2}h_{xx}. \tag{6}$$

每当展示弱弹性模型的解的压力时，我们都使用方程（6）。表面张力为零 $\gamma = 0$ 时的牛顿极限即为Trouton模型，[40] Howell[30] 曾在牛顿框架下对此进行了广泛研究（另见其中的参考文献）。

薄片中的张力 $T(t)$ 可通过对牛顿情形下的轴向力平衡方程（式（5））作一次积分求得，这给出

$$T(t) = 4hu_x + \frac{\gamma}{2}\left(hh_{xx} - \frac{1}{2}h_x^2\right). \tag{7}$$

薄片上的张力处处空间均匀（与 x 无关）。[30]

由于我们指定移动端的速度，因此施加以下边界条件（BCs），其中 $s(t) = 1 + v_0 t$ 表示移动端的位置，

$$u(0,t) = 0, \quad u(s(t),t) = v_0, \tag{8}$$

$$h_x(0,t) = 0, \quad h_x(s(t),t) = 0. \tag{9}$$

通常，我们取 $v_0 = 1$，但在第 IV E 节中例外，我们在那里研究移动端速度变化的影响。h 上的诺伊曼边界条件规定了薄膜与端板之间的接触角；假定端板对指向矢场没有影响。

对于弱弹性情况，我们求解式（3）和式（5）中的偏微分方程（PDE）系统，并满足式（8）和式（9）中的边界条件（BC），以及下文讨论的 $h(x, 0)$ 和 $u(x, 0)$ 的给定初始条件（IC）。

B. 中等弹性

为考虑中等弹性的情况，我们对逆埃里克森数、压力和表面张力进行如下重新缩放，同时保持其他缩放不变：

$$\hat{N} = \frac{K}{\mu U L}, \quad p' = \frac{\mu U}{\delta L}p, \quad \gamma' = \frac{\mu U}{\delta^2}\gamma. \tag{10}$$

此处撇号表示有量纲的量。对于 $O(1)$ p和 γ，其有量纲值均按比例放大，使其大于弱弹性情形。按照.....中概述的推导过程。

附录 A 3 中，我们发现主导阶压力。

$$p = -\frac{\gamma}{2} h_{xx}, \tag{11}$$

并得到以下系统

$$h_t + (hu)_x = 0, \tag{12}$$

$$(hu_x)_x + \tilde{\gamma}(h^2 h_{xxx})_x = 0, \tag{13}$$

其中，$\tilde{\gamma} = \gamma C_2(\theta_B)/B_2(\theta_b)$ 是缩放表面张力，其尺度因子 B_2 和 C_2 见附录中的公式 (A50) 和 (A51)。为简单起见，我们在数值解中取 $\tilde{\gamma} = \gamma$ 。在这种中等弹性的情况下，薄片中的张力现在表示为

$$T(t) = hu_x + \gamma h^2 h_{xxx}. \tag{14}$$

虽然泪膜脂质层/空气界面的表面张力未知，但我们采用基于向列液晶 5CB 在 35°C 附近一系列温度下的表面张力测量结果所得的数值，[41] 该温度接近眼表温度。[42] 除非另有说明，我们取 $\gamma = 0.025$。

我们注意到，方程（13）的阶数高于弱弹性或牛顿流体情形；这一变化将对薄膜动力学产生重要影响。这个高阶系统需要更多边界条件 h。为确定所需边界条件的数量，我们利用方程（14）从方程（12）中消去 hu_x ，得到

$$h_t + uh_x + T(t) - \gamma h^2 h_{xxx} = 0. \tag{15}$$

该方程中的最高阶导数为三阶，这意味着我们需要在 h 上设置三个边界条件来求解系统；因此，除了方程（8）和（9）中给出的边界条件外，我们还需要一个额外的边界条件。

1. 降阶

为了对模型进行数值求解，最好通过增加一个因变量来降低系统的阶数。我们可以将式 (11) 中的压力 p 加入系统中。

将偏微分方程作为额外的因变量，并代入轴向力平衡方程（13），以降低系统中出现的最高阶导数的阶数。我们得到：

$$h_t + (hu)_x = 0, \tag{16}$$

$$(hu_x)_x - (h^2 p_x)_x = 0, \tag{17}$$

$$p + \frac{\gamma}{2} h_{xx} = 0. \tag{18}$$

利用这一代换，在中等弹性情况下，张力方程（见公式（14））可写为

$$T(t) = hu_x - h^2 p_x. \tag{19}$$

该方程右侧的空间相关项合并后与 x 无关。

2. 边界和初始条件

轴向速度 u 在弱弹性情况下满足公式(8)中的边界条件： $u(0,t) = 0$ 以及 $u(s(t)\ t) = v_0$。对于薄片厚度 h，我们考虑了中等弹性模型的四组边界条件，这些条件总结于表 II 中。在所有情况下，通过在固定端设置 $p_x(0,t) = 0$，来强制满足关于 h 的第三个（附加）边界条件。

接下来讨论表II，情况I 和 II 在 h 上分别规定了诺伊曼条件（齐次和非齐次）。情况III 和 IV分别在右端（移动端）或左端（固定端）规定了罗宾条件。参数 ν 可在0和1之间变化； ν的值越小，该端的边界条件就越接近纯狄利克雷条件。从物理意义上说，罗宾边界条件对薄片的一端的毛细作用进行建模。狄利克雷条件表示固定在板上的流体，而斜率可以自由变化。诺伊曼条件规定了液晶流体与板形成的接触角，但薄膜的厚度可以自由变化。齐次诺伊曼条件表示接触角为 $\pi/2$。

张力方程（19）可用于确定所需的其余边界条件。为了计算方程（19）中的各项，我们使用初始条件$h(x,0) = 0.9 + 0.1\cos(2\pi x)$，并通过求解方程（13）来求得 $u(x,0)$，同时满足 $u(0,0) = 0$ and

$u(1,0) = v_0$ 与 $\gamma = 0.025$ 和 $v_0 = 1$。为求得 $p(x,0)$，使用方程（18）中的定义。随后我们绘制方程（19）（或等价地，方程（14））中的各个项。这些曲线源自有效的初始条件，我们将在下文给出相应的解。我们看到，张力的一个分量 $h^2 p_x$在左端为零，而另一个不为零。这一点很重要，因为它表明 $p_x(0,t) = 0$，并且我们可以将其作为中等弹性模型在 $x = 0$ 处的附加边界条件。在物理意义上，图5表明，在 $x = 0$，所有张力都处于伸展项中，而压力项中没有张力。

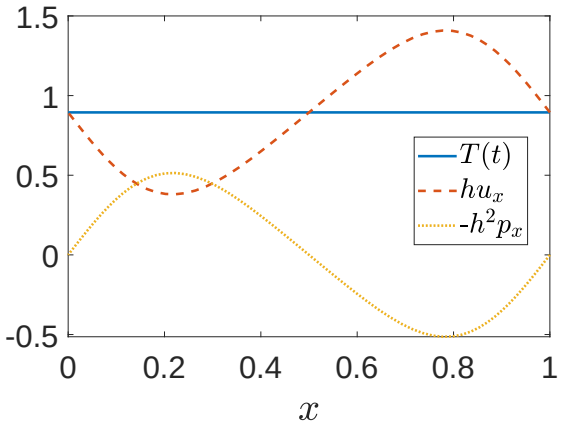

图 5. 绘出了 $T(t)$ 的张力及其来自方程（19）的分量项，取 $t = 0$，其中 $h(x,0) = 0.9 + 0.1\cos(2\pi x)$。在 $x = 0$ 时，所有张力都来自 $hu_x \neq 0$，而没有任何部分来自 $h^2 p_x = 0$。由于 $h(0,t) \neq 0$，这证明在中等弹性的情况下，选择 $p_x(0,t) = 0$ 作为第三个边界条件是合理的。

h 的初始条件选为

$$h(x,0) = a + b\cos(2\pi k_0 x) + c\,x(x-1). \tag{20}$$

波数 k_0 通常为 $k_0 = 1$，但在后续章节中会系统地改变。二次项（$c \neq 0$）仅用于案例 II，在该案例中，我们允许两端的斜率非零。 p的初始条件通过方程（17）精确计算。为了给所用的数值求解器提供一致的初始条件，必须求解 $u(x,0)$。我们将在下文第三节回到这一点。

表 II. 在具有初始条件 $h(x,0) = a + b\cos(2\pi k_0 x) + c\,x(x-1)$ 和 $0 < \nu < 1$ 的移动区域上的边界条件汇总。初始条件中的二次项仅用于情形 II。

Case	固定端, $x = 0$	移动端, $x = 1 + v_0 t$	a	b	c
I	$h_x = 0,\ \ p_x = 0$	$h_x = 0$	0.9	0.1	0
II	$h_x = -c,\ p_x = 0$	$h_x = c$	0.9	0.1	0.1
III	$h_x = 0,\ \ p_x = 0$	$(1-\nu)(h-1) + \nu h_x = 0$	0.9	0.1	0
IV	$(1-\nu)(h-1) - \nu h_x = 0,\ p_x = 0$	$h_x = 0$	0.9	0.1	0

III. 数值解

为了对模型进行数值求解，我们首先通过 $\xi = x/s(t)$，将具有 $s(t) = 1 + v_0 t$ 的移动区域 $0 < x < s(t)$ 映射到固定区域 $0 < \xi < 1$。在固定区域上，未知量变为 $H(\xi, t) = h(x, t)$ 和 $U(\xi, t) = u(x, t)$。然后，我们将该映射应用于弱弹性模型和中等弹性模型。

A. 弱弹性

A将方程（3）、（4）、（8）和（9）映射到固定区域后，可得 s

$$H_t - v0(\xi/s)H_\xi + (1/s)(UH)_\xi = 0, \tag{21}$$

$$(4/s^2)(U_\xi H)_\xi + (\gamma/2s^3)HH_{\xi\xi\xi} = 0, \tag{22}$$

$$H_\xi(0,t) = 0, \quad H_\xi(1,t) = 0, \tag{23}$$

$$U(0,t) = 0, \quad U(1,t) = v_0, \tag{24}$$

$$H(\xi, 0) = a + b\cos(2\pi k_0 x). \tag{25}$$

请注意，对于该模型， h 有两个边界条件， u也有两个边界条件；[38] 我们不对 p施加边界条件。

B. 中等弹性

对于中等弹性情形，由公式（16）、（17）和（18）以及情形 III 的边界条件所定义的问题变为

$$H_t - v_0\frac{\xi}{s}H_\xi + \frac{1}{s}(UH)_\xi = 0, \tag{26}$$

$$(U_\xi H)_\xi - \left(H^2 P_\xi\right)_\xi = 0, \tag{27}$$

$$P + \frac{\gamma}{2s^2}H_{\xi\xi} = 0, \tag{28}$$

$$H_\xi(0,t) = 0,\ P_\xi(0,t) = 0,\ (1-\nu)sH(1,t) + \nu H_\xi(1,t) = 0, \tag{29}$$

$$H(\xi,0) = a + b\cos(2\pi k_0\xi) + c\xi(\xi-1). \tag{30}$$

将此处情形 III 中的 $\nu = 1$ 设定为相应值，即可得到边界条件情形 I；情形 II 和 IV 也可用类似方法转换。

C. 数值方法

我们在此详细描述中等弹性情形的实现；弱弹性情形的处理方式类似。映射到固定区域后，我们采用直线法的一种版本；我们实现了两种方法来验证结果。空间导数通过配点法进行近似，所采用的离散化方法可以是有限差分法或切比雪夫谱方法。使用有限差分法时，我们采用均匀网格。在区域内部使用二阶中心公式，并使用适当的二阶非中心公式来近似薄片左右端点处的导数。这样便得到网格点处的微分代数方程（DAE）系统，我们使用 MATLAB (MathWorks，美国马萨诸塞州纳蒂克)通过`ode15s`向前推进时间求解该系统。通常，网格点数为 $N = 512$。作为检验，我们使用梯形法计算流体体积，并观察到在我们所设定的 10^{-4}容差精度下，该体积得以守恒。

或者，我们在空间上采用切比雪夫谱离散化，这同样会得到一个以相同方式求解的微分-代数系统。[43] 通常，这种方法使用的网格点数为$N = 128$ 。

对于任一种离散化方法，首先指定初始薄片厚度 $h(x,0)$，然后根据其在公式 (18) 中的定义计算 $p(x,0)$。最后，离散形式的

轴向力　　在网格点上使用反斜杠求解平衡方程（17），得到 u　　.

使用两种方法得到的结果一致，直到最终时刻，有限差分法的误差才在两端累积。然而，谱方法无法像有限差分法那样，在如此宽的参数取值范围内（例如表面张力）完成计算。

IV. 结果

我们首先展示平坦薄片这一简单情形下的厚度和速度解。随后，我们给出中等弹性情形下，针对表 II 所列各种边界条件得到的厚度、速度和压力解，并将其与弱弹性情形下的相应结果进行比较（此时不使用条件 $p_x(0,t) = 0$ ）。我们指出，薄片最小厚度的位置如何随所施加的边界条件而变化。接下来，我们改变表面张力和移动端速度，并展示中等弹性和弱弹性两种情形下的影响。我们研究初始条件中正弦波数量增加所产生的动力学，并展示波形如何随时间变化的示例，以及这种变化如何取决于表面张力值、所施加初始波的振幅和周期。最后，我们讨论导致这些动力学的机制。

A. 诺伊曼条件于 h

我们首先展示初始平坦薄片的解。取 $h(x,0) = 1$，其中边界条件案例I 由 $h_x(0,t) = h_x(1,t) = 0$, $u(x,0) = v_0 x$, $u(0,t) = 0$以及 $u(1,t) = v_0 = 1$ 给出。在此情形下，薄片在整个时间内都保持空间均匀，而控制 h和 u 的偏微分方程对于弱弹性和中等弹性是相同的，因为包含表面张力的项消失了。 h 和 u 的解显示在移动区域上的图 6中。厚度均匀减小，速度沿薄片线性增加。注意，$p_x = 0$ 对于所有 x 都显然成立，并且对于中等弹性模型和弱弹性模型， t 也显然成立。在中等弹性的情况下，压力在每个时间层均为零。在弱弹性的情况下，根据方程（6）， $p = -2u_x$ ，因此 p 在 x 中为常数，但随时间减小。

接下来，我们考虑薄片厚度、轴向速度的中等弹性解，

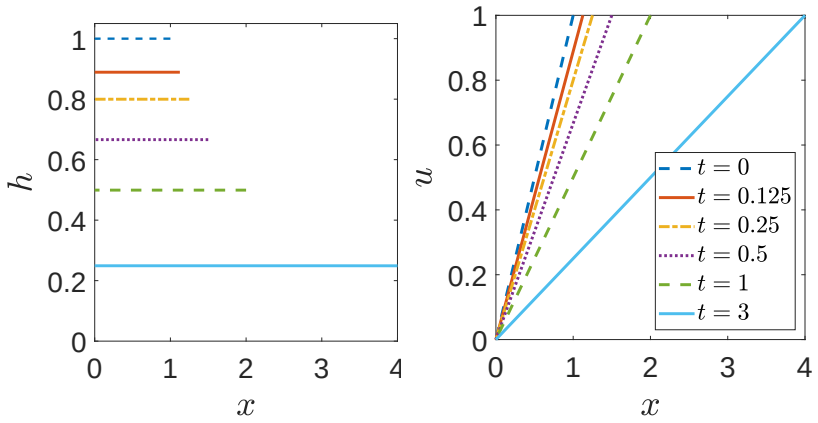

图 6. 对于具有齐次诺伊曼边界条件的初始平坦薄片，薄片厚度剖面为 h，流体速度为 u，且 $v_0 = 1$ （弱弹性和中等弹性情形下，这些变量的演化相同）。

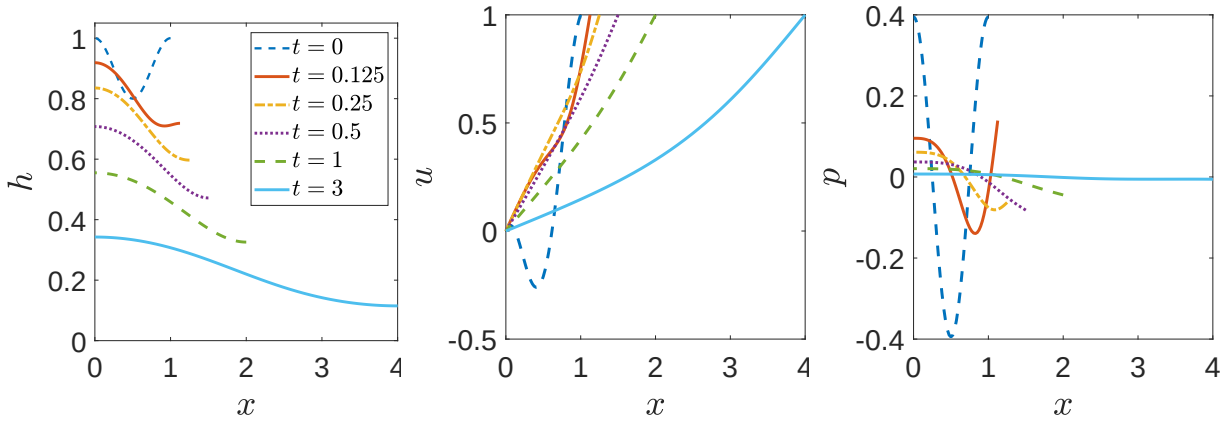

图 7. 对于中等弹性、正弦初始条件和边界条件案例 I，薄片厚度剖面为 h，流体速度为 u，压力为 p，且 $\gamma = 0.1$ 和 v_0=1。

以及当 $\gamma = 0.1$ 时，对于具有 $a = 0.9$、 $b = 0.1$ 和 $c = 0$的正弦初始条件的压力。结果如图 7 所示。最初，薄片的大部分区域内轴向速度为负，这意味着这些区域中的流体正向左移动。这会非常迅速地改变薄片厚度的分布，而拉伸流会导致薄片右端变薄。远离右端的流体被留在后方，到 $t = 0.25$时，右端的厚度中不再存在局部最大值。从该时间起直到 $t = 3$，薄片厚度相较于初始的一个完整周期已损失了约半个波。

流体趋向于聚集在左端，而右端变得更薄，这是中等弹性的特征，在弱弹性的情况下则不会出现。图 8

展示了具有弱弹性的流体薄片的 h、 u 和 p 的类似解。整个计算过程中，薄片始终关于其中点保持对称，并且 h_{min} 发生在薄片的中部。图8 的中间图显示，随着时间推移，应变率 u_x 在薄片中部最大，薄片在那里变薄得最快。整个薄片中的压力始终为负，但随着时间增加，压力及其梯度逐渐减小。

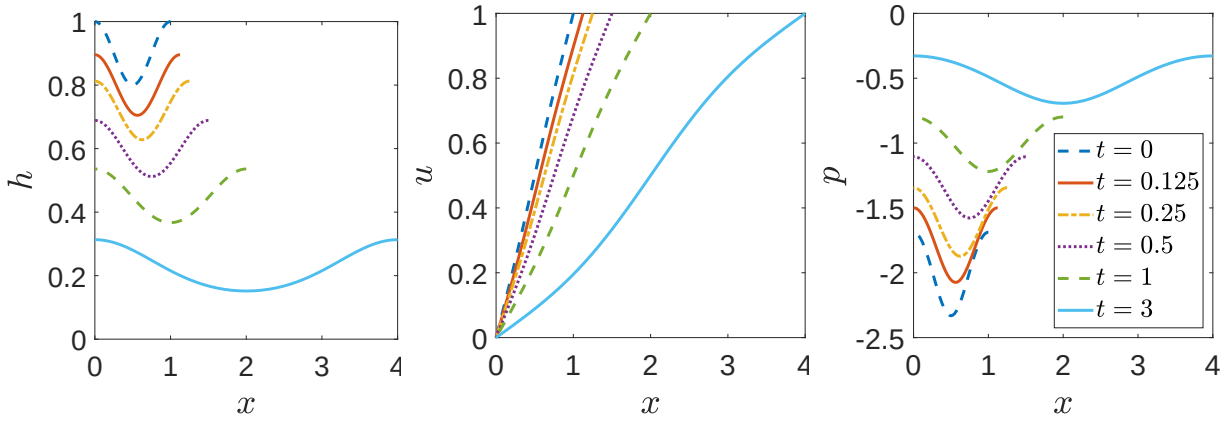

图 8. 弱弹性条件下的薄片厚度剖面 h、流体速度 u 和压力 p，其中$\gamma = 0.1$ 且 v_0=1。

B. 罗宾边界条件（中等弹性）

在中等弹性的薄片移动端施加罗宾边界条件（边界条件情形 III），会在那里形成弯月面，如图 9 所示。薄片主要在中部和左侧（固定端）变薄，而右侧一小段流体以大致与右侧（移动端）相同的速度运动。由于毛细作用，左端的压力保持为正，但在形成弯月面的薄片部分，压力处处为负。

图 10 显示了在左侧固定端施加罗宾条件的结果（边界条件情形IV）。与在右侧施加罗宾条件的图 9 相比，这里的弯月面高度和宽度都更小。如图 9 所示，薄片发生变薄的部分对应着应变率 u_x 的增大。随着时间推移，弯月面逐渐增大，且压力在 $x = 0$ 处变得很大且为负值，而薄膜其余部分的压力则趋近于零。

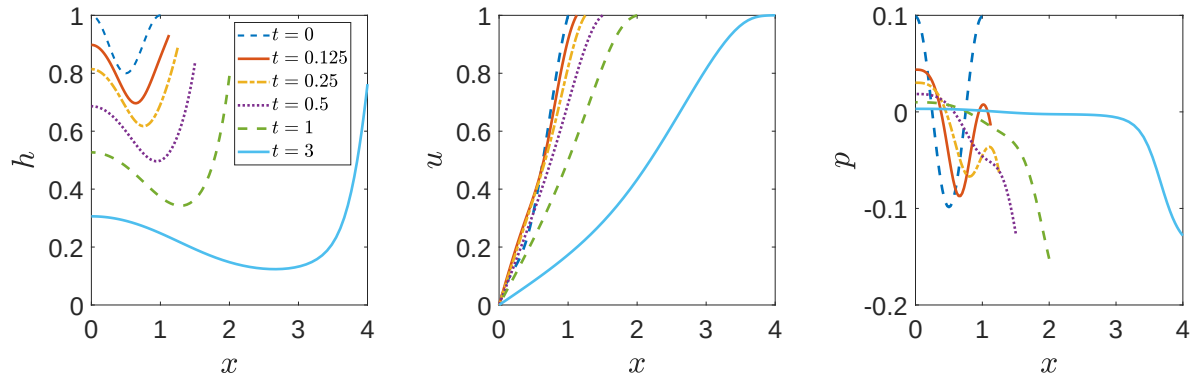

图 9. 中等弹性条件下的薄片厚度剖面 h、流体速度 u 和压力 p，采用边界条件情形 III，即右端为罗宾边界条件； $\nu = 0.1$、 $\gamma = 0.025$ 和 $v_0 = 1$。

表 III 总结了这些差异：两种情况下，最大薄片厚度 h_{max} 均出现在施加罗宾条件的一端。当在左侧施加该条件（情形 IV）时， h_{max} 和观测到的薄片厚度范围（ $\Delta h = h_{max} - h_{min}$）均较小；在最终时刻 $t = 4$， h_{min} 不到在右侧施加罗宾条件时相应数值的一半。

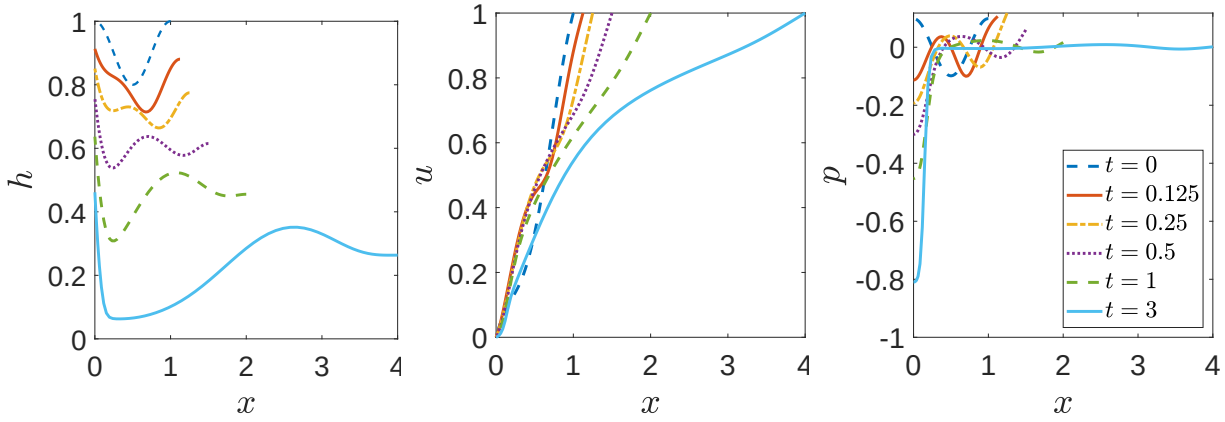

图 10. 薄片厚度剖面， h，流体速度， u，和压力， p，在中等弹性及边界条件情形IV下，左端采用罗宾边界条件； $\nu = 0.1$、 $\gamma = 0.025$和 $v_0 = 1$。

C. 最小厚度的位置

如前所述，在弱弹性情况下，对于所选的边界条件和初始条件，薄片的演化关于中点对称。薄片的最小值

表 III. 在薄片两端分别施加罗宾边界条件的比较（图 9 和图 10 中的中等弹性解）。其中， h_{max} 为最大薄片厚度， h_{min} 为最小薄片厚度， $\Delta h = h_{max} - h_{min}$。

	$t = 0.5$			$t = 4$		
罗宾边界位置	h_{max}	h_{min}	Δh	h_{max}	h_{min}	Δh
右端（边界条件情形 III，图 9）	0.835	0.497	0.338	0.763	0.086	0.676
左端（边界条件情形IV，图 10）	0.758	0.538	0.220	0.431	0.037	0.394

厚度 h_{min} 开始，并在整个演化过程中保持在中点处。然而，对于中等弹性，情况更加复杂。图11总结了不同边界条件下的一系列结果，其中初始条件为 $h(x,0) = a + b\cos(2\pi x)$，且 $a = 0.9$, $b = 0.1$（如上文第IV A和 IV B 节的结果中所使用），并且 $\gamma = 0.025$ 除非另有说明。图11表明，即使初始薄膜形状简单且关于中点初始对称，最小厚度也会从中点迁移，并且可能出现在薄片上的各种位置，这取决于所施加的边界条件。如果我们考虑边界条件案例I（ h上的齐次诺伊曼条件），且 $\gamma = 0.1$，那么最小值会迅速迁移到区域的右端，约为 $t = 0.25$。对于具有 $\gamma = 0.025$ 的边界条件案例 I（图11 中未显示），最小值保持在区域的右半部，靠近 $x = 0.5$。在端部允许存在微小斜率（情形II，且 $c = 0.1$）时，对于相同的 γ，最小值会比边界条件案例I 略微更靠近中心。对于 $\gamma = 0.025$ 以及情形 I 和 II 的边界条件，最小值从薄片中心开始（由初始条件决定），向右移动约 $t = 0.15$，随后又缓慢地开始接近薄片中心。右侧的罗宾边界条件（情形III）导致的最小值位置起初与边界条件案例 I类似：最小值移至约 $\xi = x/s\ (t) = 0.7$，但随后停留在那里。左侧的罗宾边界条件（情形 IV）会使最小值的位置发生最大程度的移动。参见图10，我们看到，在早期时刻，薄片有两个局部极小值，其中全局最小值最接近移动端。随着薄片伸长，该凹陷变平，全局最小值移至固定端附近陡峭弯月面的底部。在剩余时间内，最小值保持在靠近左侧（固定）端的位置。全局最小值位置的这一转换在图 11 中清晰可见。

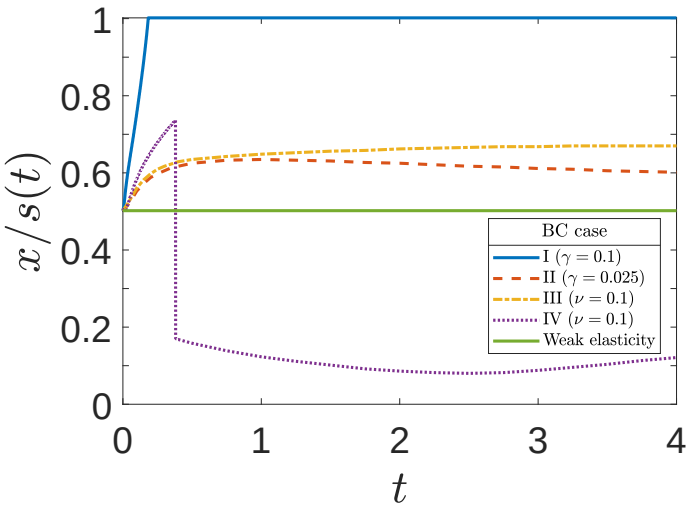

图 11. 固定区域上最小薄片厚度随时间变化的位置。在所有情况下，$h(x, 0) = 0.9 + 0.1\cos(2\pi x)$，并且 $\gamma = 0.025$，除非另有说明。在情况 II 中，$c = 0.1$（见表 II）。对于弱弹性情况，最小值在整个时间内始终位于 $x = 0.5$。

D. 改变表面张力（中等弹性）

我们在图12中总结了表面张力 γ 对中等弹性模型下薄片厚度的影响，其中比较了 γ 值的一个范围，跨度达四个数量级。图12的第一幅图以半对数刻度显示了最小薄片厚度 h_{min} 随时间t 的变化。h_{min} 与 γ 之间的关系并非单调；对于所有时间值，h_{min} 的最大值出现在表面张力最大时（$\gamma = 1$），而最小值出现在 $\gamma = 0.1$。较小的 γ 值会导致中间的最小厚度值。图12的第二幅图以半对数刻度显示了薄片右端的薄膜厚度，即 $h_{end} = h(s(t), t)$，随 t的变化。最小厚度可能出现在右端（见图 7）。

E. 改变移动端的速度

在之前的结果中，我们改变了表面张力 γ，同时将移动端的速度固定为 $v_0 = 1$。现在，在表面张力固定为 $\gamma = 0.025$的情况下，我们改变速度。图 13 和图 14 分别展示了中等弹性和弱弹性情况下，当 v_0 从 0.25 变化到 2.5 时，薄片厚度（以 h_{min} 和 h_{end}表征）受到的影响。这些图显示了

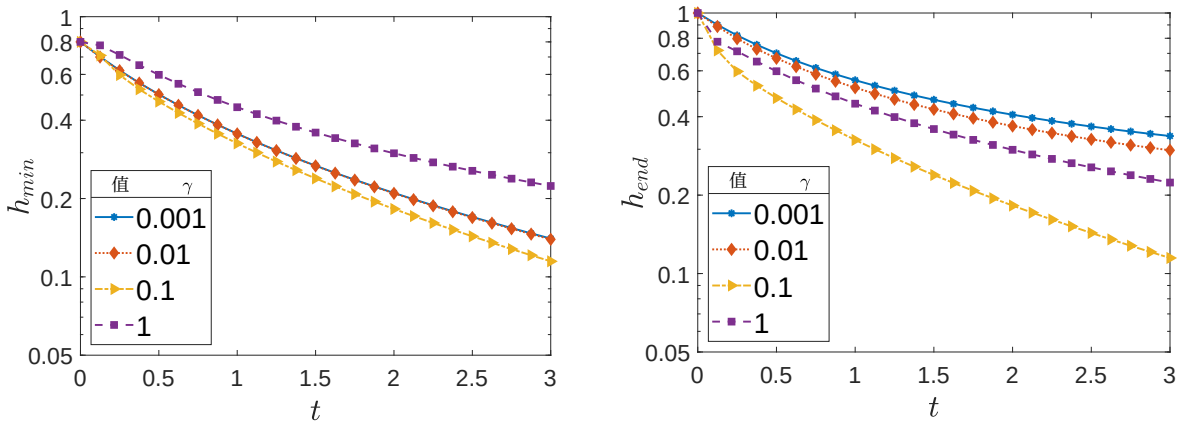

图12. 中等弹性条件下，随着表面张力变化，最小薄片厚度 h_{min} 及薄片右端的厚度 h_{end} 的演化。结果对应于边界条件案例 I，且 $v_0 = 1$。在某些情况下，最小值出现在右端。左图中，$\gamma = 0.001$（蓝色）曲线恰好位于 $\gamma = 0.01$（红色）曲线下方。

h_{min} 和 h_{end} 随时间 t的变化，采用半对数坐标。毫不意外的是，对于所有时间点以及中等弹性模型和弱弹性模型，移动端速度越快，薄片的最小厚度就越小。比较图13和图14中的最小厚度，随时间的变化趋势非常相似，尽管在中等弹性的情况下，h_{min} 略低。我们注意到，随着时间推移，即使改变速度，移动端处薄片的厚度也可能在约 $h_{end} \approx 0.2$ 处合并或交叉。这与图14所示的弱弹性情况形成对比：比较图 13和图 14中的 h_{end} 图，我们看到，对于弱弹性，随着速度增加，薄片移动端的厚度在所有时间点都持续减小。这是中等弹性模型不同于弱弹性模型的另一种方式。

图15展示了与图13对应的薄片厚度、轴向速度和压力的中等弹性解，其中 $v_0 = 2$。在拉伸过程中，薄片初始轮廓在定性上得以保留，但右端略薄于左端。移动端速度越慢，随着时间推移，原有波形消失得越多。

图 16 比较了中等弹性和弱弹性情况下薄片随时间的演化，展示了薄片伸展速度为 v_0、时间为 $t = 0.5$ 和 $t = 4$ 时的三种不同取值。在所有速度下，弱弹性薄片始终关于其中点保持对称，并在不断增大的区域内伸展，同时保留初始条件的波数。这

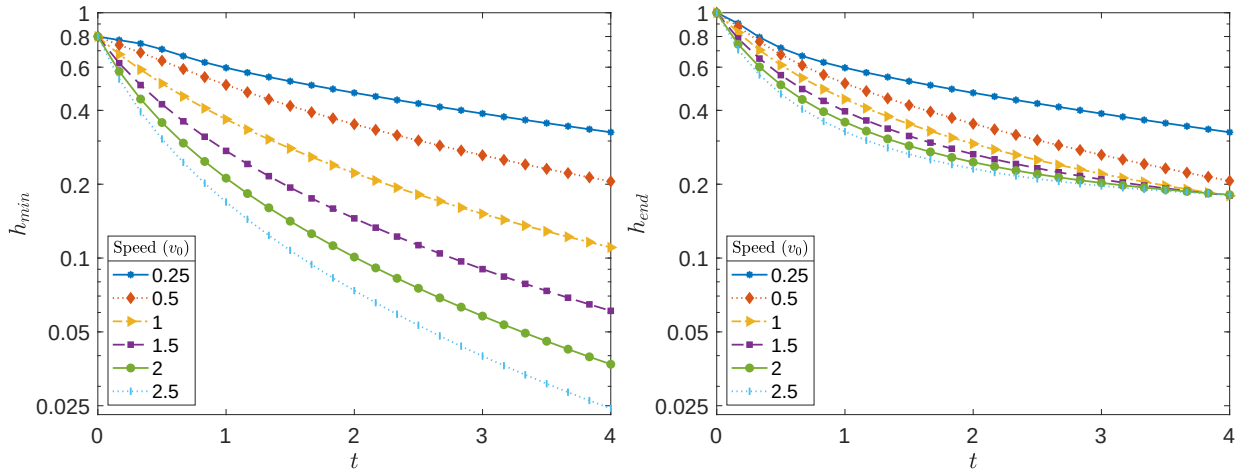

图13. 中等弹性下，随着速度从0.25变化到2.5，薄片最小厚度 h_{min} 和薄片右端的高度 h_{end} 的演化。结果对应于边界条件案例 I，其中$\gamma = 0.025$。在某些情况下，最小值出现在右端。

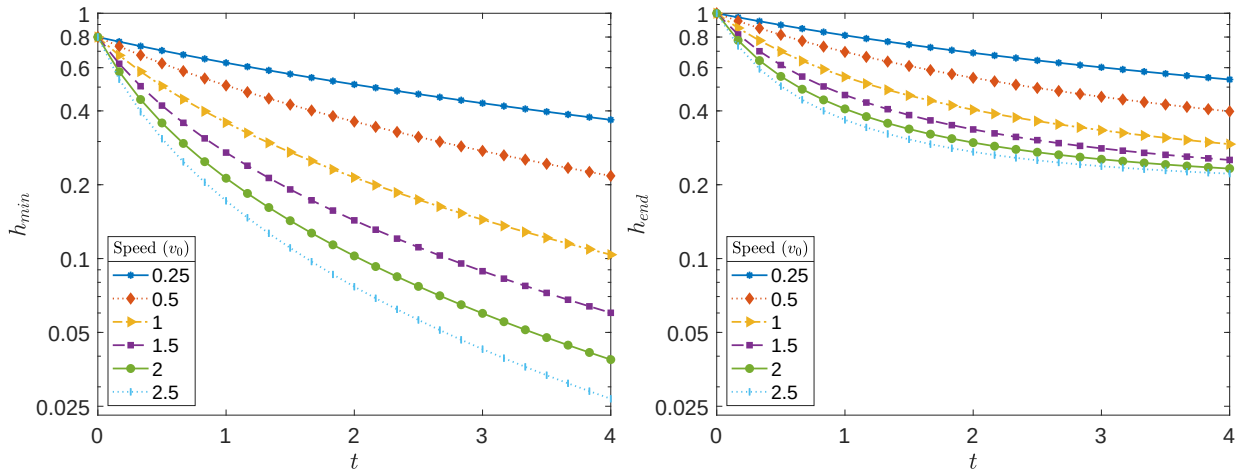

图14. 弱弹性下，随着速度从0.25变化到2.5，薄片最小厚度 h_{min} 和薄片右端的高度 h_{end} 的演化。结果对应于边界条件案例 I，其中$\gamma = 0.025$。在某些情况下，最小值出现在右端。

中等弹性解并非如此。对于最慢的伸展速度 $v_0 = 0.5$，薄片的移动端明显变薄，到 $t = 0.5$ 时初始波大约损失了一半，导致弱弹性与中等弹性预测之间存在很大差异。当 $v_0 = 1$ 时，原始形状保留得更多，但移动端相较于左端仍明显变薄；这一预测与弱弹性情形也有显著差异。两种模型之间的差异在.....最不明显。

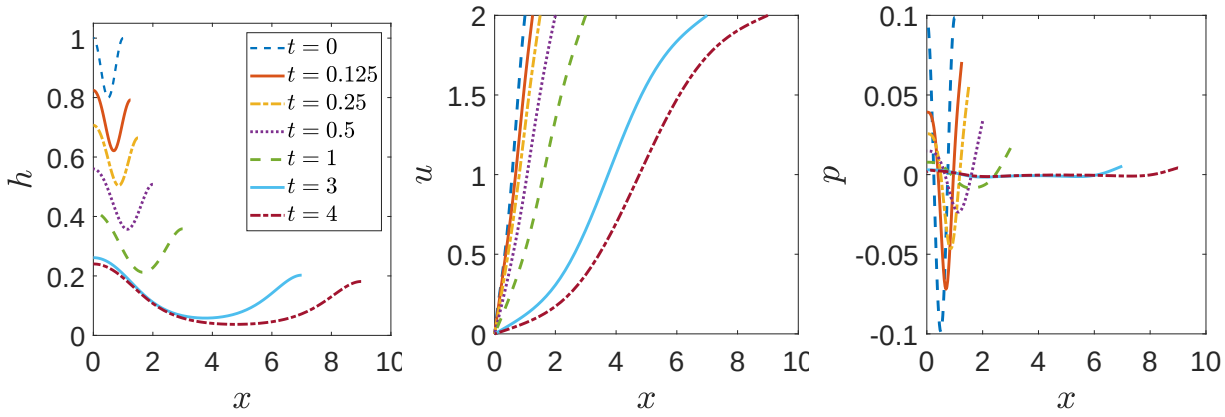

图 15. 中等弹性下薄片厚度 h、流体速度 u 和压力 p 的解。结果对应边界条件案例 I，其中 $\gamma = 0.025$ 和 $v_0 = 2$。

最快的伸展速度 $v_0 = 2$。在所示的两个时间点，中等弹性模型得到的薄片在左半部分仅比右半部分稍厚。两个模型中薄片左端的厚度非常相近，但中等弹性下薄片的移动端更薄。

F. IC 中波数增大

泪膜成像有时会显示脂质层中的条纹或脊状结构。[1]为了研究我们的模型能否在拉伸流中维持多个波，我们尝试增大初始条件公式（20）中的波数 k_0。对于以下所有结果，我们采用中等弹性、边界条件案例 I 和 $v_0 = 1$。

图17展示了在 $t = 0.5$ 和 $t = 3$ 时，三种不同初始波数 k_0下的薄片解剖面。对于每个初始条件，薄片厚度分别以三种不同的表面张力值显示：$\gamma = 0.0025$、0.01 和 0.025。表面张力越低，随着时间推移保留的原始波就越多。我们注意到，到时间 $t = 0.5$时，波数的减少似乎已经完成；此后，随着薄片伸长，形成的形状主要发生拉伸（下文将进一步讨论这一点）。具体而言，在第一个波数为 $k_0 = 2$的示例中，对于最小的 γ值，两个波都得以保留；而对于 $\gamma = 0.01$ 和 $\gamma = 0.025$，到最终时刻，初始形状分别损失了半个波和一个完整的波。在更高波数下也可以观察到类似的差异：对于 $k_0 = 2.5$，最小表面张力模拟（$\gamma = 0.0025$）到目前为止仅损失了半个波

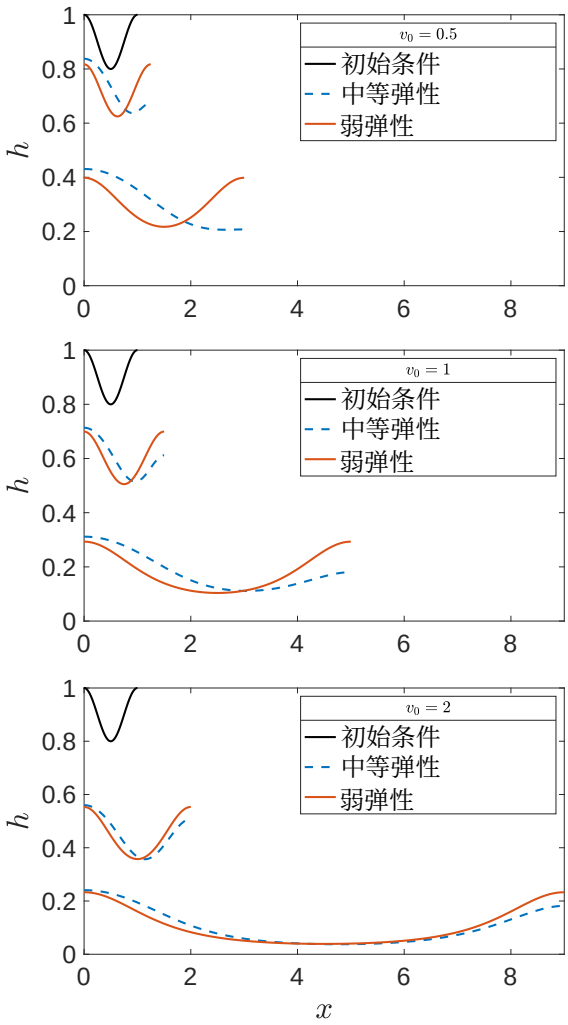

图 16. 随着拉伸速度 v_0 增大，在时间 $t = 0.5$ 和 $t = 4$ 显示的中等弹性模型和弱弹性模型的薄片厚度。黑色实线曲线表示两个模型在 $t = 0$ 时的初始薄片轮廓。结果对应边界条件案例 I，其中 $\gamma = 0.025$。

在最终时刻，$\gamma = 0.01$ 损失一个完整的波，而 $\gamma = 0.025$ 损失1.5个波；对于 $k_0 = 3$，模拟再次仅损失半个波，而 $\gamma = 0.01$ 损失1.5个波，$\gamma = 0.025$ 损失2个完整的波。

我们进一步研究了 $\gamma = 0.0025$ 下的模拟，因为该值会导致薄片中出现持续的波。对于该 γ 值，我们改变初始条件公式（20）中的波振幅 b，并观察薄片拉伸过程中波数随时间的变化（具体而言，即消失的完整波的数量）；结果总结于表 IV 中。该表的第一行对应于图 17 的 $\gamma = 0.0025$ 模拟。我们看到

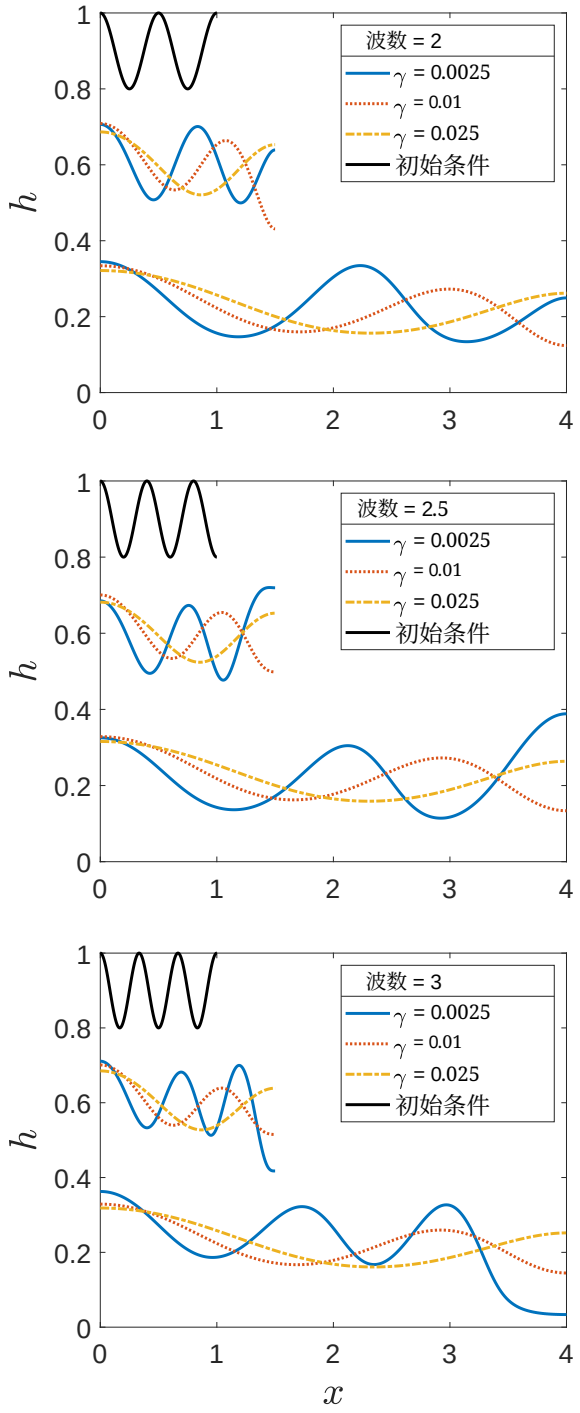

图 17. 当初始条件公式（20）的波数为 $k_0 = 2$、2.5 和 3 时，在 $t = 0$ （每幅图中的上方曲线）、$t = 0.5$ （中间曲线）和 $t = 3$ （下方曲线）处的薄片厚度剖面（$b = 0.1$、$a = 0.9$ 在所有情况下均适用）。表面张力越大，随着时间的推移消失的波越多。请注意，薄片的形状似乎主要由 $t = 0.5$ 决定；随后的演化导致薄片形状伸展，但不会使更多的波消失。

表 IV. 表项显示初始条件公式（20）中损失的波数；当振幅为 b、波数为 k_0 时， $t = 4$ 。此处，公式（20）中的 $a = 1 - b$ 和 $\gamma = 0.0025$。

	波数 k_0						
振幅 b	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
0.2	0	0	0	1/2	1/2	-	-
0.1	0	0	0	1/2	1/2	1	1
0.05	0	0	0	1/2	1/2	1	1
0.025	0	0	0	1/2	1/2	1	1

i的值　　初始波数 k_0 比初始波的振幅 b 影响更大　　.

我们还通过将模拟运行到更大的时间，检验了我们先前的断言，即波数的减少似乎在拉伸的早期阶段就已确定。我们使用了 MATLAB 中的事件检测选项，并让薄片拉伸，直到达到 $h_{min} < 0.01$ （在模型中假定这代表液片破裂）。结果汇总于表V，其中记录了模拟中使用的初始条件、破裂所需的时间、演化过程中从初始条件中损失的波数，以及移动端薄片厚度的最终极值是最大值还是最小值。在每种情况下，薄片都在形状相对于 $t = 0.5$所记录的形状出现任何明显变化之前，达到这一最小厚度阈值。当薄片的移动端为（或演化为）局部最小值时，薄片比移动端为局部最大值时“破裂”得更快（薄片包含整数个完整的波）。例如，具有 $k_0 = 2.5$ 和 $k_0 = 3$ 的两个初始条件在拉伸过程中都损失了半个波。由 $k_0 = 2.5$ 产生的曲线在右端形成局部最大值，其拉伸时间可以超过 $k_0 = 3$ 的两倍，而后者在该处形成局部最小值。图18 显示了四个初始条件下，薄片厚度达到 $h < 0.01$ 阈值时的薄片轮廓。有趣的是，尽管移动端为最小值的薄片轮廓总是看起来最先破裂，但破裂并不总是出现在移动端，也可能发生在内部最小值处。

表 V. 对于各种初始条件，当 $\gamma = 0.0025$ 时，达到 $h < 0.01$（表示液片破裂）所需时间的比较。此处 $a = 0.9$ and $b = 0.1$。

初始条件	达到 $h < 0.01$ 所需时间	损失的波	右侧最终极值
$a + b\cos(3\pi x)$	12.9935	None	最小值
$a + b\cos(4\pi x)$	13.4664	None	最大值
$a + b\cos(5\pi x)$	10.2892	1/2	最大值
$a + b\cos(6\pi x)$	4.2099	1/2	最小值
$a + b/2\cos(5\pi x)$	18.2691	1/2	最大值
$a + b/2\cos(6\pi x)$	9.5259	1/2	最小值

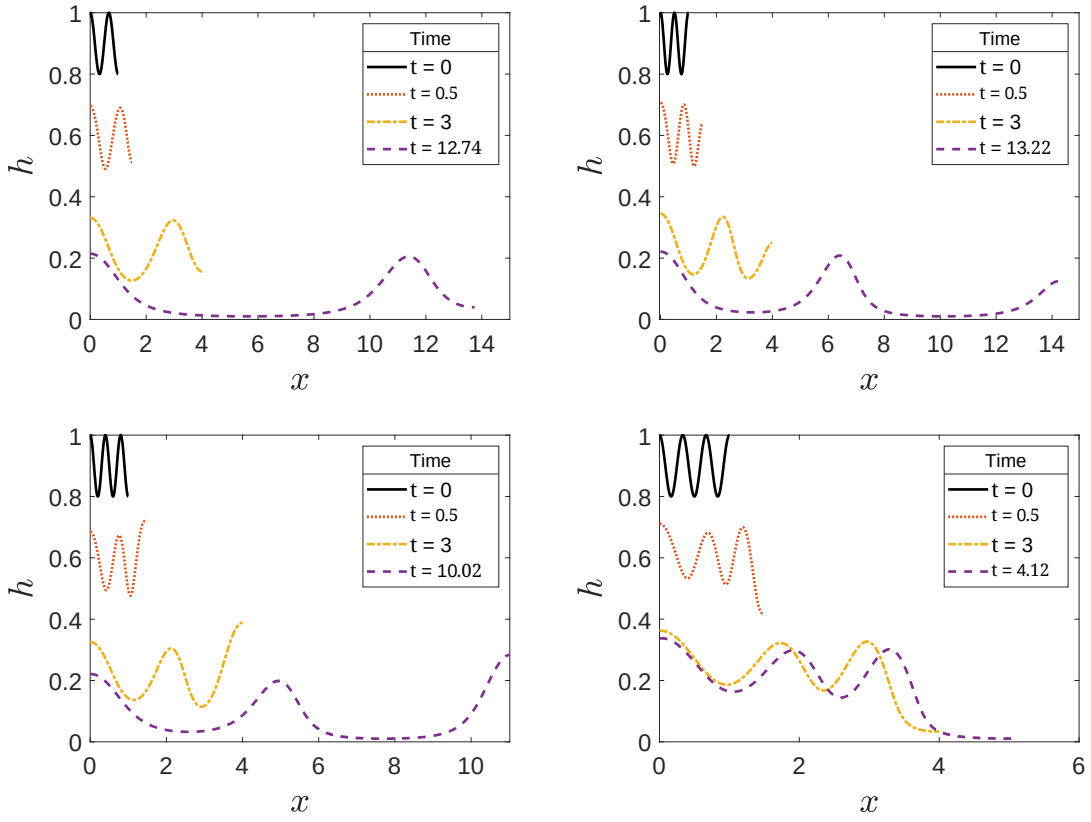

图 18. 当 $t = 0$ （每幅图中的顶端曲线）、 $t = 0.5$ （第二条曲线）和 $t = 3$（第三条曲线）时的薄片厚度 h，以及达到阈值厚度 $h < 0.01$ 所需的时间（底端曲线）。初始条件为公式（20），其中 $a = 0.9$、 $b = 0.1$ 和波数 $k_0 = 1.5$、2、2.5 和 3，且 $v_0 = 1$。

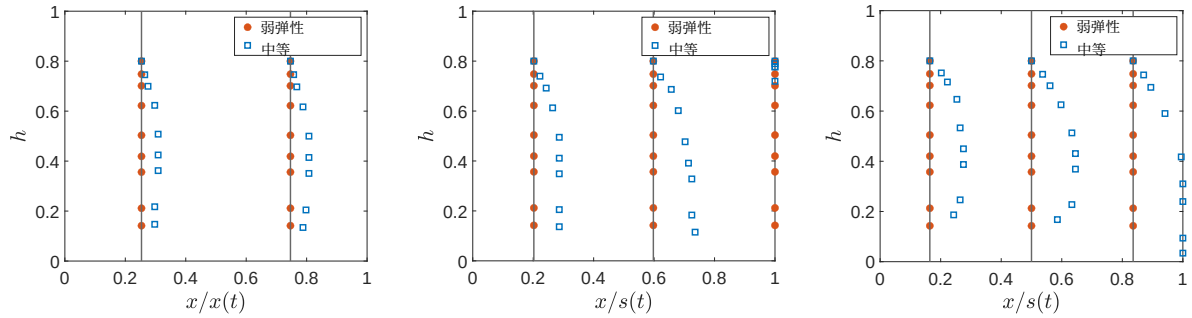

图 19.弱弹性和中等弹性模型在固定区域上、 $\gamma = 0.0025$、 $v_0 = 1$ 时，厚度局部极小值的位置，at$t = 0$、0.0625、0.125、0.25、0.5、0.75、1、2、3。每个图对应公式（20）中的一个不同波数: $k_0 = 2$、2.5、3（其中 $a = 0.9$、 $b = 0.1$）。薄片的厚度随时间变薄，因此较低的点对应较晚的时间。黑色直线强调了在固定区域上，弱弹性情况下厚度极小值的位置是固定的。对于 $k_0 = 3$ 的中等弹性，右侧的局部极小值向移动端移动，并成为全局最小值。

G. 机制

对于弱弹性，初始条件中的振荡会在整个演化过程中保留在薄片中，并随着薄片伸长而被拉伸。薄片会保留初始条件中的任何对称性；以坐标 $\xi = x/s(t)$ 作图时，最小厚度和最大厚度的位置在整个演化过程中保持不变；见图 19。比较偏微分方程的各项（如图 21 所示，其中仅显示区域的右半部分），可以看到，主要是来自 $(hu_x)_x$ 的伸展项彼此平衡；表面张力的作用很小。速度分布近乎线性，斜率仅有微小波动。由于伸展作用强于毛细作用，整个薄片上的压力始终为负，并且随着薄片伸长，其绝对值逐渐减小。

然而，在中等弹性下，解会更加复杂。我们比较初始条件包含两个半波（$k_0 = 2.5$）或三个波（$k_0 = 3$）时的薄片厚度、速度和压力；解如图 22 至图 24 所示。当$k_0 = 2.5$（图 22）时，移动端最初是厚度最小值。局部低压将流体吸向移动端，这个局部最小值到时间$t = 0.5$时变成了全局最大值。最小厚度出现在内部，位于最靠近移动端的波谷

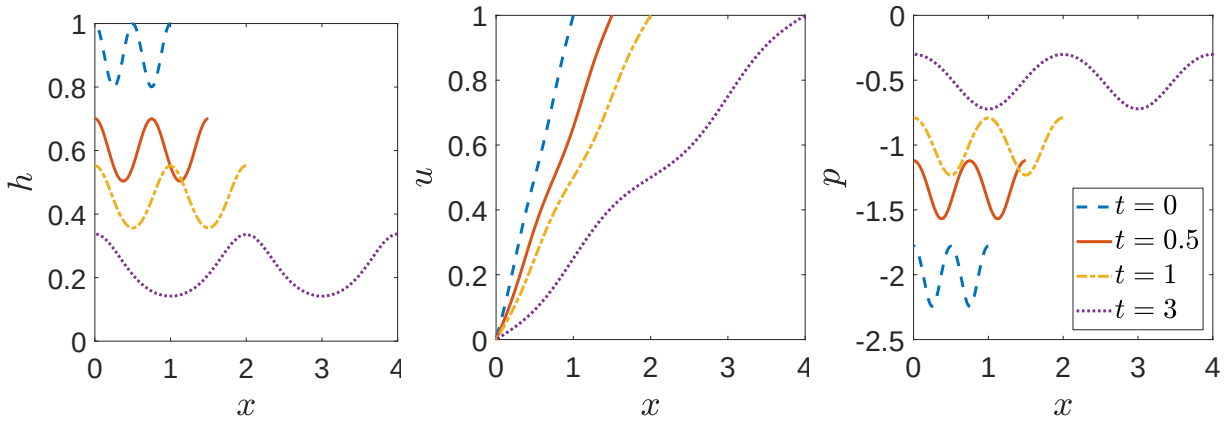

图 20。在 $k_0 = 2$ 时弱弹性情况下的薄片厚度剖面 h、流体速度 u 和压力 p。结果对应于边界条件案例 I，其中 $\gamma = 0.0025$ 和 $v_0 = 1$。

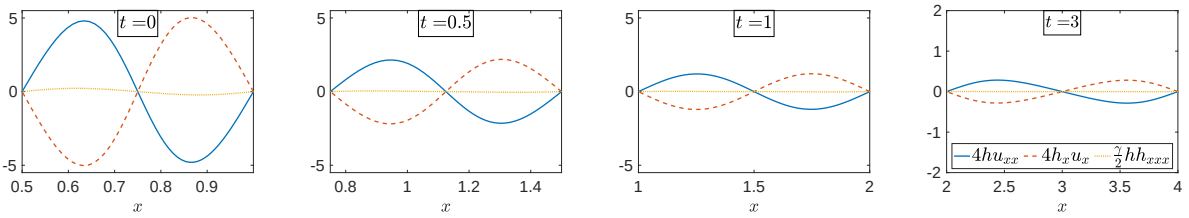

图 21。图 20 所示弱弹性情况下轴向力平衡方程 (4) 中的各项（$k_0 = 2$）。请注意，这里仅显示区域的右半部分，并且在最后一幅图中纵轴的刻度发生了变化。

端。 $t = 0.0625$时的速度分布显示，流体早期迅速流向移动端；此时移动端附近的速度短暂超过拉伸速度（$v_0 = 1$）。此后，速度分布中的波动逐渐平滑，分布变得近乎线性。对于 $t > 1$，压力衰减至接近零。图 23 展示了偏微分方程中各项的作用。在早期，我们看到最高阶导数项的作用正在发生转换。随着压力减小，伸展项开始占主导。

当 $k_0 = 3$ （图24）时，我们看到压力的作用发生了变化。压力和伸展共同阻止流体跟上移动端，右端很快变成全局最小值。在图24中间一列的薄片右端，可以看到速度分布中的边界层开始形成。到 $t = 0.0625$时，右端的压力达到最大值，并一直保持全局最大值，直到大约 $t = 0.25$。此后压力逐渐减小。

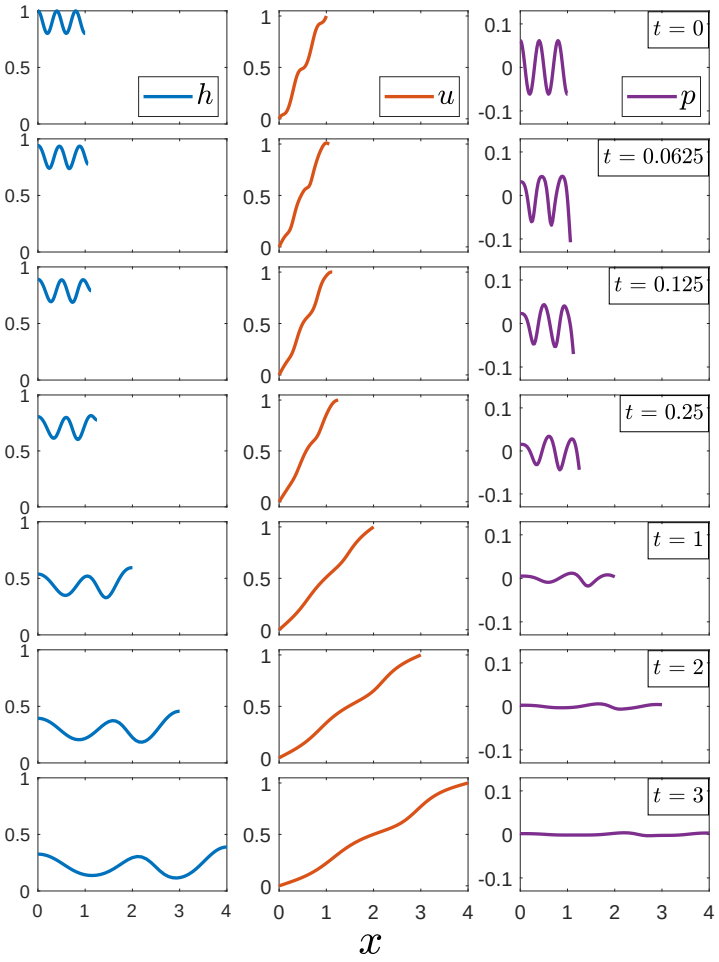

图 22. 初始条件包含两个半波时中等弹性情况下的薄片厚度 h、流体速度 u 和压力 p。结果适用于边界条件案例 I，其中 $\gamma = 0.0025$ 和 $v_0 = 1$。每一行代表一个时间层；每一列显示相应的因变量。

总之，我们关于中等弹性模型的结果表明，根据初始条件的不同，薄片中的波数可能会减少；由于压力变化导致流体移动，薄片的形状也会发生显著变化。模型参数，尤其是表面张力 γ，还会强烈影响伸展状态下薄片中保留的波数；在本小节中，这些模型参数被固定。在早期时间，压力在移动端要么与伸展相协同，要么与伸展相对抗，从而使该处的流体重新分布，并可能导致该处薄片厚度的最大值或最小值消失。当移动端的最大值消失时，速度分布中会形成边界层。随着时间增加，压力的幅度减小，

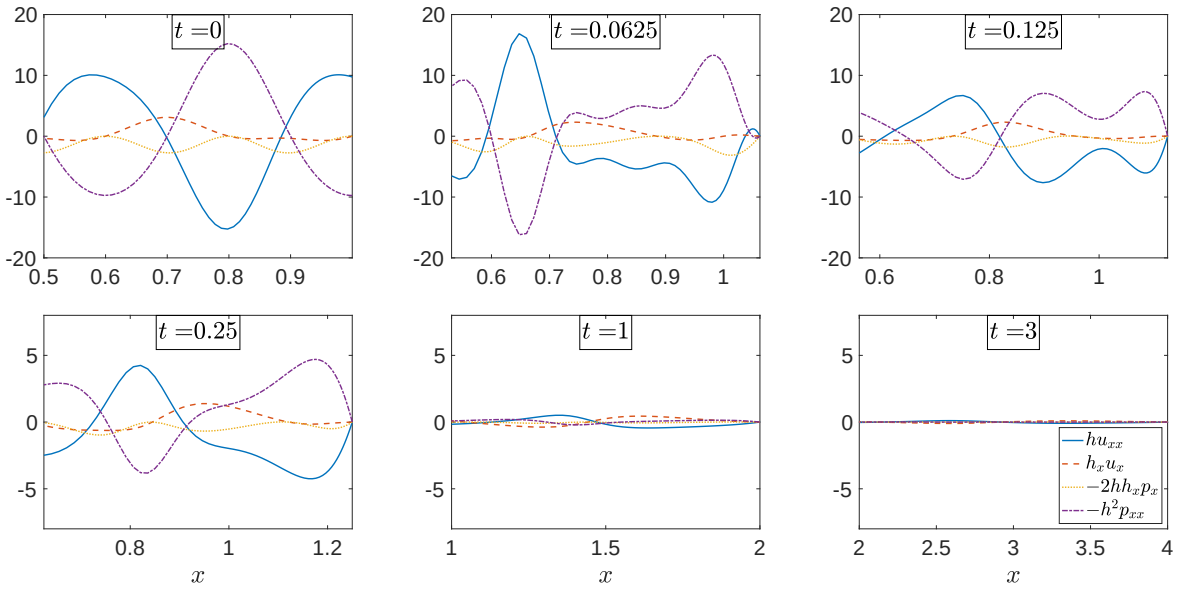

图23. 中等弹性情况下，轴向力平衡方程（17）中的各项；其完整剖面见前文图 22（此处仅显示区域的一半）。请注意，第二行中纵轴的刻度发生了变化。

它对薄片形状的影响减弱，而伸展的作用则变得更加显著。总的来说，与弱弹性情况下相比，压力与伸展的作用更加交织。

五、讨论与结论

我们提出了一种新模型，用于描述具有中等弹性的向列液晶薄片的伸展二维流动，并将结果与类似的弱弹性模型进行比较。与 Cummings 等人研究的弱弹性情形相比，中等弹性下的压力、表面张力和弹性能均增大。[38] 新模型中的轴向力平衡方程（13）比弱弹性模型具有更高的空间阶数；就薄片厚度而言，该方程对空间导数是四阶，而非三阶。这一变化需要增加一个边界条件。对方程（19）中薄片张力各项的考察促使我们采用了如下附加条件： $p_x(0,t) = 0$。数值探索表明，描述薄片剖面演化的单个方程（15）可视为具有色散性，而附加的边界条件可视为指定了

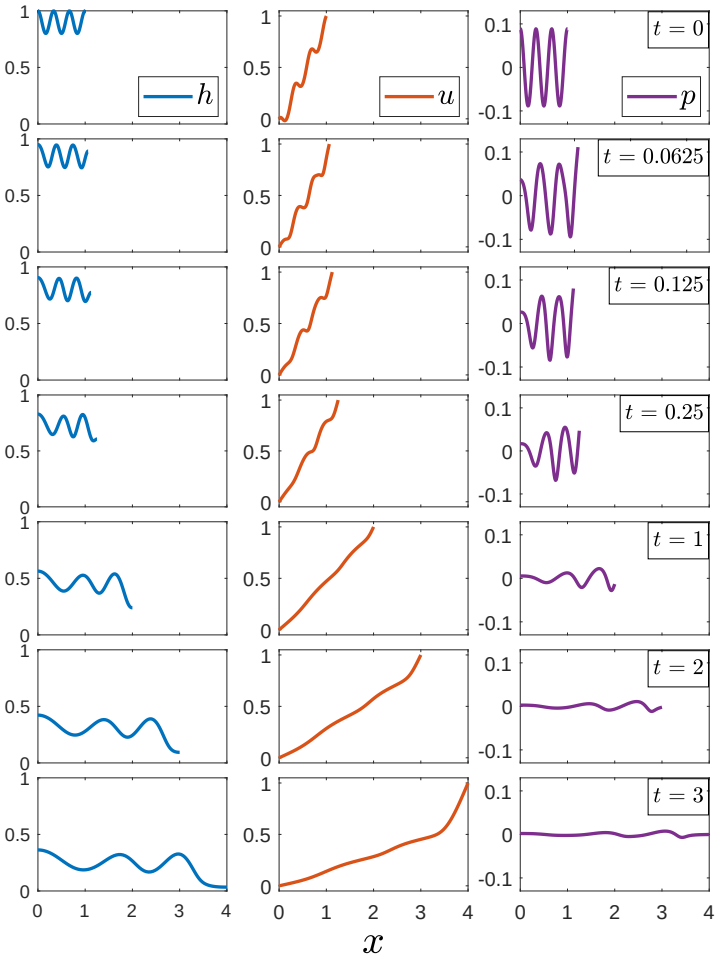

图 24. 中等弹性情况下，初始条件包含三个波且 $\gamma = 0.0025$ 时，薄片厚度剖面 h、流体速度 u 和压力 p。每一行代表一个时间层；每一列展示相应因变量的动力学。

入射特征线的值。

初始条件采用正弦曲线，并考察一系列初始波数。后续工作可以为两端的狄利克雷条件制定一致的初始条件。我们考察表面张力和运动速度变化对拉伸过程中演化中的片材动力学的影响。

中等弹性片材的响应与弱弹性材料或牛顿流体的响应明显不同。Cummings 等人[38]对弱弹性液晶进行了建模，但这项工作主要关注电场对液晶的影响。对于具有中等弹性的液晶，材料的弹性特性得到了展示。

以及图 19，其中显示了具有多个波的薄片中极小值位置的回弹。在弱弹性情况下，极小值在经历拉伸的同时，保持其在薄片中的相对位置。在图 11 中，我们展示了根据初始条件的不同，最小薄片厚度几乎可以出现在薄片中的任何位置，从最右端一直到靠近左端的位置。当改变表面张力时，我们再次观察到材料的弹性特性；见图12。当改变移动端的速度时，我们看到，对于相同的速度，具有中等弹性的薄片比弱弹性情况下略微更快地变薄；见图13。

我们还研究了薄片轮廓具有不同初始波数时的动力学和机制。我们增加初始条件中的波数，并观察薄片在拉伸过程中的形状。正如预期的那样，我们发现表面张力越大，拉伸过程中初始形状中消失的波就越多。如表 IV 所示，波的振幅对结果的影响远小于波数。早期阶段，压力会根据正弦波的数量，促进或阻碍拉伸流，从而改变薄片的形状，并可能导致移动端的最大值或最小值消失。当移动端的一个最大值消失时，尤其是移动端从最大值变为最小值时，我们会看到速度分布中形成边界层。流体迅速流出末端区域，数值计算失效前，薄片无法持续拉伸很长时间。这说明，在中等弹性条件下，压力在决定薄片形状方面发挥着更显著的作用；例如，见图23。

使用中等弹性的罗宾边界条件时，厚度分布中形成的弯月面让人联想到此前几位作者在眨眼期间对泪膜水层所发现的分布[44–51]。具体而言，边界条件情形 III（移动端采用罗宾条件）产生的分布，与眨眼上行程期间泪膜的分布相当。边界条件情形IV（固定端采用罗宾条件）类似于上行程期间对应于下眼睑的弯月面，此时上眼睑正从下眼睑移开。

我们注意到，Lin等人[52] 研究了基底上的向列相液晶膜的弱弹性极限和中等弹性极限。他们发现，仅对弹性项采用更大的尺度变换，会在描述厚度的单个非线性偏微分方程中引入一个附加项 h；该新项类似于扩散项，与重力的作用相似。

牛顿型薄膜。[53] 在我们的研究中，自由薄膜没有基底；与弱弹性极限相比，我们增大了弹性参数和表面张力参数。因此，我们将压力缩放得更大，新的平衡关系给出了两个偏微分方程，分别描述薄膜厚度 h 和轴向速度 u，这符合拉伸流的典型特征。[38] 本文报告的结果清楚地显示出弹性行为，而且这种表现可能比 Lin等人所提出的模型更为明显。[52]

我们的模型在计算更长时间区间以及更广泛的参数值范围方面存在一些局限性。有限差分和谱方法在达到 $t = 3$ 之前都运行良好，对于某些参数值，甚至可以运行更长时间；然而，要让其他情况运行更长时间，可能需要采用区域分解或自适应方法，以充分解析厚度较小的区域。[54] 导致串珠现象的情景[35,36]涉及更多的伸展和更长的计算时间；我们在此处看到的形变较不严重，因此尚不清楚在我们的情况下会产生什么结果。

我们将继续开发眼睛泪膜脂质层的模型。这需要采用更符合实际的参数值，并调整薄片末端速度，使其更贴近实际。[46,49,55,56] 我们已经建立了一个模型，按照以往研究的思路，在脂质层中加入了剪切主导的水层。[42, 57–59] 要将此类模型的动力学与泪膜脂质层观测到的图案联系起来，仍有大量工作要做。

致谢

本研究得到美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS 1909846、DMS 2206127 和 DMS 1815613。本文内容由作者独自负责，不一定代表资助方的官方观点。

附录 A：推导

1. Ericksen-Leslie 方程

Ericksen-Leslie 方程描述向列相液晶的流动；此处 $'$表示无量纲量。

$$\frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\frac{\partial W'}{\partial \theta_{x_i'}}\right) - \frac{\partial W'}{\partial \theta} + \tilde{g}_i' \frac{\partial n_i}{\partial \theta} = 0, \tag{A1a}$$

$$-\frac{\partial \pi'}{\partial x_i'} + \tilde{g}_k' \frac{\partial n_k}{\partial x_i'} + \frac{\partial \tilde{t}_{ik}'}{\partial x_k'} = 0, \tag{A1b}$$

$$\frac{\partial v_i'}{\partial x_i'} = 0. \tag{A1c}$$

第一个方程对应能量守恒；第二个方程对应动量守恒，第三个方程对应质量守恒。展开后，这些方程变为

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial W'}{\partial \theta_x}\right) + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial W'}{\partial \theta_z}\right) - \frac{\partial W'}{\partial \theta} + \tilde{g}_x' \frac{\partial n_x}{\partial \theta} + \tilde{g}_z' \frac{\partial n_z}{\partial \theta} = 0, \tag{A2}$$

$$-\frac{\partial \pi'}{\partial x'} + \tilde{g}_x' \frac{\partial n_x}{\partial x'} + \tilde{g}_z' \frac{\partial n_z}{\partial x'} + \frac{\partial \tilde{t}_{xz}'}{\partial z'} + \frac{\partial \tilde{t}_{xx}'}{\partial x'} = 0, \tag{A3}$$

$$-\frac{\partial \pi'}{\partial z'} + \tilde{g}_x' \frac{\partial n_x}{\partial z'} + \tilde{g}_z' \frac{\partial n_z}{\partial z'} + \frac{\partial \tilde{t}_{zx}'}{\partial x'} + \frac{\partial \tilde{t}_{zz}'}{\partial z'} = 0, \tag{A4}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0, \tag{A5}$$

其中

$$\tilde{g}_i' = -\gamma_1 N_i' - \gamma_2 e_{ik}' n_k, \qquad e_{ij}' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_j'} + \frac{\partial v_j'}{\partial x_i'}\right), \tag{A6}$$

$$N_i' = \dot{n}_i' - \omega_{ik}' n_k, \qquad \omega_{ij}' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_j'} - \frac{\partial v_j'}{\partial x_i'}\right), \qquad \pi' = p' + W', \tag{A7}$$

$$W' = \frac{1}{2}\Big[K_1(\nabla' \cdot \mathbf{n})^2 + K_2(\mathbf{n} \cdot \nabla' \wedge \mathbf{n})^2 + K_3((\mathbf{n} \cdot \nabla')\mathbf{n}) \cdot ((\mathbf{n} \cdot \nabla')\mathbf{n})\Big], \tag{A8}$$

$$\tilde{t}_{ij}' = \alpha_1' n_k n_p e_{kp}' n_i n_j + \alpha_2' N_i' n_j + \alpha_3' N_j' n_i + \alpha_4' e_{ij}' + \alpha_5' e_{ik}' n_k n_j + \alpha_6' e_{jk}' n_k n_i. \tag{A9}$$

重复指标上的求和默认成立，且 $\dot{n}_i$ 表示 $\mathbf{n}$ 的第 $\mathbf{i}$ 个分量的对流导数。上述定义的量见表 VI。我们求解满足以下边界条件的控制方程。下面列出上表面 $z' = \frac{1}{2}h'(x', t')$ 的边界条件；底表面 $z' = -\frac{1}{2}h'(x', t')$ 的边界条件定义方式相同。法向应力条件为

$$\hat{n}' \cdot \sigma' \cdot \hat{n}' = -\gamma' \kappa' \hat{n}' \quad \text{at } z = \frac{1}{2}h'(x', t'), \tag{A10}$$

其中，$\hat{n}' = (-h'_{x'}/2, 1)/\sqrt{1+(h'_{x'}/2)^2}$ 是上表面的单位法向量，$\kappa' = -\nabla \cdot \hat{n}'$ 是上表面的曲率，且 $\sigma'_{ij} = -p'\delta_{ij} + \theta_i\theta_j + \tilde{t}'_{ij}$。 σ' 的定义取自 Lin等人，[52] ，并包含一个相较于 Cummings 等人给出的形式所增加的项。[38] 切向应力条件为

$$\hat{n}' \cdot \sigma' \cdot t' = 0 \quad \text{at } z' = \frac{1}{2}h'(x', t'), \tag{A11}$$

其中 $t' = (1, h'_{x'}/2)/\sqrt{1+(h'_{x'}/2)^2}$ 是与上表面相切的单位向量。运动学边界条件为

$$w' = \frac{1}{2}\left(h'_{t'} + u'h'_{x'}\right) \quad \text{at } z' = \frac{1}{2}h'(x', t'). \tag{A12}$$

最后，在不存在电场的情况下，锚定边界条件为

$$\theta = \theta_B \quad \text{at } z' = \frac{1}{2}h'(x', t'). \tag{A13}$$

2. 弱弹性的标度

弱弹性的标度为

$$\begin{aligned}
&x' = Lx, \qquad z' = \delta L z, \qquad t' = \frac{L}{U}t, \qquad \gamma' = \frac{\mu U}{\delta}\gamma,\\
&u' = Uu, \qquad w' = \delta U w, \qquad h' = \hat{h}h, \qquad \hat{N} = \frac{K}{\mu U \delta L},\\
&p' = \frac{\mu U}{L}p, \qquad W' = \frac{K}{\delta^2 L^2}W, \qquad \alpha'_i = \mu\alpha_i.
\end{aligned}$$

采用这些标度进行无量纲化可得

$$\hat{N}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta_x}\right) + \hat{N}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta_z}\right) - \hat{N}\frac{\partial W}{\partial \theta} + g_x\frac{\partial n_x}{\partial \theta} + g_z\frac{\partial n_z}{\partial \theta} = 0, \tag{A14}$$

$$-\delta^2\frac{\partial p}{\partial x} - \delta\hat{N}\frac{\partial W}{\partial x} + \delta g_x\frac{\partial n_x}{\partial x} + \delta g_z\frac{\partial n_z}{\partial x} + \delta\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} = 0, \tag{A15}$$

$$-\delta\frac{\partial p}{\partial z} - \hat{N}\frac{\partial W}{\partial z} + g_x\frac{\partial n_x}{\partial z} + g_z\frac{\partial n_z}{\partial z} + \delta\frac{\partial t_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} = 0. \tag{A16}$$

那么，主阶方程系统为

$$h_t + (hu)_x = 0, \tag{A17}$$

$$\frac{F(\theta_B)}{G(\theta_B)}(hu_x)_x + \frac{\gamma}{2}hh_{xxx} = 0. \tag{A18}$$

表 VI. 模型中使用的参数和变量。[60]

量	描述
$\mathbf{v}' = (u', 0, w')$	流动的速度场
$\mathbf{n} = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$	指向矢场
$\theta(x, z, t)$	指向矢与 z轴之间的夹角
p'	压力
W'	体能量密度
$\pi' = p' + W'$	修正压力
$\tilde{t}'_{ij}$	额外应力张量（黏性应力）
σ	应力张量
$\alpha'_i,\ i = 1,\ldots\ldots,\ 6$	莱斯利黏度（牛顿流体： $\mu' = \alpha'_4/2$，其余均为 $\alpha_i = 0$）
$\gamma'_1 = \alpha'_3 - \alpha'_2$	转动/扭转黏度
$\gamma'_2 = \alpha'_6 - \alpha'_5$	扭转系数
$K_1,\ K_2,\ K_3$	分别表示展曲、扭曲和弯曲的弹性常数
ω'_{ij}	涡量张量
e'_{ij}	应变率张量
N_i	指向矢量 n 的共旋时间通量

其中

$$
\begin{aligned}
G(\theta_B) &= \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 8 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 - \alpha_1\cos(4\theta_B) \\
&\quad - 2\cos(2\theta_B)(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_5 + \alpha_6), \qquad \text{(A19)} \\
F(\theta_B) &= \alpha_1(-\alpha_2 + \alpha_3 + 8 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6) - \alpha_2(8 + \alpha_5 + 3\alpha_6) \\
&\quad + \alpha_3(8 + \alpha_5 + \alpha_6) + 32 + \alpha_5(16 + 2\alpha_5 + 4\alpha_6) + \alpha_6(16 + 2\alpha_6) \\
&\quad - 2\cos(2\theta_B)(\alpha + 4 + \alpha_5 + \alpha_6)(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_5 + \alpha_6) \\
&\quad - \cos(4\theta_B)\Big[\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3 + (\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_5 - \alpha_6)\Big]. \qquad \text{(A20)}
\end{aligned}
$$

在牛顿情形下，所有黏度均为零（$\alpha_i = 0,\ i = 1, \cdots 6$），且 $F(\theta_B)/G(\theta_B) = 4$。

3. 推导中等弹性的方程

为考虑中等弹性的情形，我们对逆埃里克森数、压力和表面张力作如下重新标度，同时保持其他标度不变。

$$\hat{N}=\frac{K}{\mu U L},\quad p'=\frac{\mu U}{\delta L}p,\quad \gamma'=\frac{\mu U}{\delta^2}\gamma.$$

采用中等弹性的标度后，无量纲化的控制方程变为

$$\hat{N}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta_x}\right)+\hat{N}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta_z}\right)-\hat{N}\frac{\partial W}{\partial \theta}+\delta g_x\frac{\partial n_x}{\partial \theta}+\delta g_z\frac{\partial n_z}{\partial \theta}=0, \tag{A21}$$

$$-\delta\frac{\partial p}{\partial x}-\hat{N}\frac{\partial W}{\partial x}+\delta g_x\frac{\partial n_x}{\partial x}+\delta g_z\frac{\partial n_z}{\partial x}+\delta\frac{\partial t_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial t_{xz}}{\partial z}=0, \tag{A22}$$

$$-\delta\frac{\partial p}{\partial z}-\hat{N}\frac{\partial W}{\partial z}+\delta g_x\frac{\partial n_x}{\partial z}+\delta g_z\frac{\partial n_z}{\partial z}+\delta^2\frac{\partial t_{zx}}{\partial x}+\delta\frac{\partial t_{zz}}{\partial z}=0. \tag{A23}$$

我们考虑无电场的情况，因此令 $\mathbf{E}=\mathbf{0}$。现在将因变量按 $\delta=h/L$ 的幂次进行渐近展开。例如，

$$u=u_0(x,z,t)+\delta\, u_1(x,z,t)+\delta^2\, u_2(x,z,t)+\cdots,$$

并对 θ、 v、 p 和 h进行同样的处理。将它们代入控制方程和边界条件，然后按 δ 的同次幂合并。接着，在 1 阶时，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\big(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_5+\alpha_6+2\alpha_1\cos 2\theta_0\big)\sin 2\theta_0 u_{0z}\theta_{0z}-\hat{N}\theta_{0z}\theta_{0zz}\\ &+\frac{1}{2}\left[2+(\alpha_5-\alpha_2)\cos^2\theta_0+(\alpha_3+\alpha_6)\sin^2\theta_0+\frac{1}{2}\alpha_1\sin^2 2\theta_0\right]u_{0zz}=0,\end{aligned} \tag{A24}$$

$$-\hat{N}\theta_{0z}\theta_{0zz}=0, \tag{A25}$$

$$\hat{N}\theta_{0zz}=0, \tag{A26}$$

$$u_{0x}+w_{0z}=0, \tag{A27}$$

$$-\hat{N}\theta_{0z}^2=0, \tag{A28}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[2+(\alpha_5-\alpha_2)\cos^2\theta_0+(\alpha_3+\alpha_6)\sin^2\theta_0+\frac{1}{2}\alpha_1\sin^2 2\theta_0\right]u_{0z}\\ &-\frac{1}{2}\hat{N}\theta_{0z}^2h_{0x}-\hat{N}\theta_{0z}\theta_{0x}=0,\end{aligned} \tag{A29}$$

$$w_0-\frac{1}{2}\big(h_{0t}+u_0h_{0x}\big)=0, \tag{A30}$$

$$\theta_0-\theta_B=0. \tag{A31}$$

从上到下，这些方程依次表示 x 和 z 分量的动量方程、能量方程和连续性方程，随后是上表面的边界条件：法向应力和切向应力、运动学条件以及锚定条件。求解 1 阶方程，得到

$$\theta_0 = \theta_B, \tag{A32}$$

$$u_0 = u_0(x,t), \tag{A33}$$

$$w_0 = w_0(x,z,t) = -u_{0x} z, \tag{A34}$$

$$h_{0t} + (u_0 h_0)_x = 0, \tag{A35}$$

其中 (A35) 是质量平衡方程。在 1 阶时，我们没有关于 h 的方程，因此，为了闭合系统，我们继续推导到 δ 阶。完成上述代换后， δ 阶方程为

$$\frac{1}{8}\Big[8+\alpha_1-2(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_5+\alpha_6)-2(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_5+\alpha_6)\cos 2\theta_B - \alpha_1\cos 4\theta_B\Big]u_{1zz} - p_{0x} = 0, \tag{A36}$$

$$p_{0z} = 0, \tag{A37}$$

$$\hat{N}\theta_{1zz} = 0, \tag{A38}$$

$$u_{1x} + w_{1z} = 0, \tag{A39}$$

$$p_0 + \frac{\gamma}{2} h_{0xx} = 0, \tag{A40}$$

$$-\frac{1}{2}(\alpha_1\cos 2\theta_B - \alpha_5 + \alpha_6)\sin 2\theta_B u_{0x} + \frac{1}{4}\Big[4 - 2(\alpha_2-\alpha_5)\cos^2\theta_B + 2(\alpha_3+\alpha_6)\sin^2\theta_B + \alpha_1\sin^2 2\theta_B\Big]u_{1z} = 0, \tag{A41}$$

$$w_1 - \frac{1}{2}(h_{1t} + u_1 h_{0x} + u_0 h_{1x}) = 0, \tag{A42}$$

$$\theta_1 = 0. \tag{A43}$$

求解后，得到

$$p_0(x,t) = -\frac{\gamma}{2} h_{0xx}, \tag{A44}$$

$$u_1(x,z,t) = \frac{p_{0x}}{F(\theta_B)}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{h_0}{2}z\right) - \frac{A(\theta_B, u_{0x})}{B(\theta_B)}z + K(x,t), \tag{A45}$$

$$\theta_1(x,z,t) = 0, \tag{A46}$$

其中 $K(x,t)$ 目前仍未知。虽然我们已经求得一些高阶项，但必须继续推导到 δ^2 阶，才能得到关于 h 的方程。我们代入上述各式，并进一步代入 $w_{1zz}=-u_{1xz}$；该式由对连续性方程求导得到。在这一阶，方程过于冗长，不宜完整列出，因此我们概述推导步骤。首先，我们利用 z-动量方程和法向应力条件来确定

$$p_1(x,z,t)=G_1(\theta_B)u_{0x}+H_1(\theta_B)\gamma(2z-h_0)h_{0xxx}-\frac{\gamma}{2}h_{1xx}, \tag{A47}$$

其中

$$\begin{aligned}G_1(\theta_B)=&\frac{1}{4}\big[-8-\alpha_1-2\alpha_5-2\alpha_6-2(\alpha_1+\alpha_5+\alpha_6)\cos 2\theta_B-\alpha_1\cos 4\theta_B\big]\\&+\frac{(-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\ \alpha_5-\alpha_6-\alpha_1\cos 2\theta_B)(-\alpha_5+\alpha_6+\alpha_1\cos 2\theta_B)\sin 2\theta_B^2}{8+\alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_5+2\alpha_6-2(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_5+\alpha_6)\cos 2\theta_B-\alpha_1\cos 4\theta_B},\end{aligned}$$

$$H_1(\theta_B)=\frac{(-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_5-\alpha_6\ -\alpha_1\cos 2\theta_B)\sin 2\theta_B}{2\big[8+\alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_5+2\alpha_6-2(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_5+\alpha_6)\cos 2\theta_B-\alpha_1\cos 4\theta_B\big]}.$$

然后，将 p_1 等代入 x 方向动量方程，求解 u_{2zz}，并在整个薄片上积分。由切向应力条件可得可解性条件，从而得到

$$\frac{B_2(\theta_B)}{A_2(\theta_B)}\left(h_0u_{0x}\right)_x+\frac{C_2(\theta_B)}{A_2(\theta_B)}\gamma(h_0^2h_{0xxx})_x+4\gamma h_0h_{1xxx}=0, \tag{A48}$$

其中

$$\begin{aligned}A_2(\theta_B)=&\,8+\alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_5+2\alpha_6,\\&-2(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_5+\alpha_6)\cos 2\theta_B-\alpha_1\cos 4\theta_B, \qquad\text{(A49)}\\B_2(\theta_B)=&-4\Big[2\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1\alpha_3-2\alpha_1\alpha_5+2\alpha_1\alpha_6\Big]\cos 6\theta_B\\&-4\Big[-64-16\alpha_1-\alpha_1^2+16\alpha_2+2\alpha_1\alpha_2-16\alpha_3-2\alpha_1\alpha_3-32\alpha_5\\&-4\alpha_1\alpha_5+6\alpha_2\alpha_5-2\alpha_3\alpha_5-4\alpha_5^2-32\alpha_6-4\alpha_1\alpha_6+2\alpha_2\alpha_6-6\alpha_3\alpha_6\\&-8\alpha_5\alpha_6-4\alpha_6^2+2\big(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_5+\alpha_6\big)\big(\alpha_1+2[4+\alpha_5+\alpha_6]\big)\cos 2\theta_B\\&+2\big(\alpha_1[\alpha_2-\alpha_3]-[\alpha_2+\alpha_3][\alpha_5-\alpha_6]\big)\cos 4\theta_B+\alpha_1^2\cos 8\theta_B\Big], \qquad\text{(A50)}\\C_2(\theta_B)=&-8\big(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_1\cos 2\theta_B\big)\sin\theta_B. \qquad\text{(A51)}\end{aligned}$$

注意，来自 u_1 的待定函数 $K(x,t)$ 并未出现在可解性条件中。然而，若取 δ 阶连续性方程，关于 z 积分，并应用运动学边界条件，我们得到

$$h_{1t} + u_0 h_{1x} + \big(h_0 K(x,t)\big)_x - \frac{\gamma}{6A_2(\theta_B)}\big(h_0^3 h_{0xxx}\big)_x = 0, \tag{A52}$$

其中， $A_2(\theta_B)$的定义如上。

为闭合该系统，我们假设

$$h(x,t) = h_0(x,t) + \delta^2 h_2(x,t) + O(\delta^3). \tag{A53}$$

换言之，在 δ阶下， h 没有修正项。于是，(A35)、(A48)和(A52)简化为

$$h_{0t} + (u_0 h_0)_x = 0, \tag{A54}$$

$$B_2(\theta_B)\,(h_0 u_{0x})_x + C_2(\theta_B)\gamma(h_0^2 h_{0xxx})_x = 0, \tag{A55}$$

$$\big(h_0 K(x,t)\big)_x - \frac{\gamma}{6A_2(\theta_B)}\big(h_0^3 h_{0xxx}\big)_x = 0. \tag{A56}$$

因此，我们有三个含三个未知量的方程： $u_0(x,t)$、 $h_0(x,t)$和 $K(x,t)$。通过对方程(A56)关于 x积分，我们求得 $K(x,t)$。通过沿深度对 u_1 积分，我们确定积分常数；由于 u_1 导致沿薄膜没有净通量，因此得到

$$K(x,t) = \frac{\gamma}{2}\frac{h_0^2 h_{0xxx}}{3A_2(\theta_B)}, \tag{A57}$$

$$u_1(x,z,t) = \frac{p_{0x}}{F(\theta_B)}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{h_0}{2}z\right) - \frac{A(\theta_B,u_{0x})}{B(\theta_B)}z + \frac{\gamma}{2}\frac{h_0^2 h_{0xxx}}{3A_2(\theta_B)}. \tag{A58}$$

然后，为求得轴向速度 u_0 和薄片厚度 h_0，我们可以求解耦合系统

$$h_{0t} + (u_0 h_0)_x = 0, \tag{A59}$$

$$(h_0 u_{0x})_x + \hat{\gamma}(h_0^2 h_{0xxx})_x = 0, \tag{A60}$$

其中

$$\hat{\gamma} = \frac{C_2(\theta_B)}{B_2(\theta_B)}\gamma. \tag{A61}$$

在论文中，我们取 $\hat{}\gamma = \gamma$。

参考文献

[1]R. J. Braun、P. E. King-Smith、C. G.Begley、L. Li 和 N.R.Gewecke，“泪膜相对于眨眼周期的动力学和功能”，《视网膜与眼科研究进展》45，132–164（2015年）。[2] M. Willcox、P. Argu¨eso、G. Georgiev、J.Holopainen、G. Laurie、T. Millar、E. Papas、J. Rolland、T. Schmidt、U.Stahl、T. Suarez、L. Subbaraman、O. Ucakhan和L.Jones，“TFOSDEWS-II泪膜报告”，《眼表》15，369–406（2017年）。[3] P. E. King-Smith、J.J. Nichols、K.K.Nichols和 R.J.Braun，“用于成像泪膜脂质层的高分辨率显微镜”，《眼表》9，197–211（2011年）。[4]P. E. King-Smith、B. A. Fink、R. M. Hill、K.W. Koelling和 J. M. Tiffany，“泪膜的厚度”，《当代眼科研究》29，357–368（2004年）。[5]A. Bron、J.Tiffany、S.Gouveia、N. Yokoi 和L. Voon，“泪膜脂质层的功能方面”，《实验眼科研究》78，347–360（2004年）。[6]I. K. Gipson，“黏蛋白在眼表的分布”，《实验眼科研究》78，379–388（2004年）。[7]B.Govindarajan 和I. Gipson，“膜锚定黏蛋白在眼表具有多种功能”，《实验眼科研究》90，655–693（2010年）。[8]A. Bron、P. Arg¨ueso、M. Irkec和F.V. Bright，“眼表的临床染色：机制和解读”，《视网膜与眼科研究进展》78，36–61（2015年）。[9]M. Fini、S. Jeong、H. Gong、R. Martinez-Carrasco、N.Laver、M.Hijikata、N. Keicho和P.Arg¨ueso，“眼表的膜相关黏蛋白：人类和小鼠中的新基因、新蛋白质功能和新的生物学作用”，《视网膜与眼科研究进展》75，100777（2020年）。[10]M. Hogan、J. Alvarado 和 J. Weddell，《人眼组织学》（W.B. Saunders，费城，1971年）。[11]P. E. King-Smith、C. G.Begley和R.J. Braun，“泪膜破裂的机制、成像和结构”，《眼表》16，4–30（2018年）。[12]N. Yokoi、G.A. Georgiev、H. Kato、A.Komuro、Y. Sonomura、C. Sotozono、K. Tsub- ota和S.Kinoshita，“荧光素破裂模式的分类：一种用于干眼鉴别诊断的新方法”，《美国眼科学杂志》180，72–85（2017年）。[13]J. P. Gilbard、R.L. Farris 和 J. Santamaria，“泪液微量体积中的渗透压”

干燥性角结膜炎”，《眼科学档案》96，677–681（1978）。[14]C. Baudouin、P. Aragona、E. M. Messmer、A. Tomlinson、M. Calonge、K. G. Boboridis、Y. A. Akova、G. Geerling、M. Labetoulle 和 M. Rolando，“高渗透压在干眼病发病机制与管理中的作用：OCEAN研究组会议纪要”，《眼表》11，246–258（2013）。[15]J. P. Craig、K. K. Nichols、E. K. Akpek、B. Caffery、H. S. Dua、C.-K. Joo、Z. Liu、J. D. Nelson、J. J. Nichols、K. Tsubota 等，“TFOS DEWS-II定义与分类报告”，《眼表》15，276–283（2017）。[16]P. E. King-Smith、K. S. Reuter、R. J. Braun、J. J. Nichols 和 K. K. Nichols，“通过同步视频记录荧光图像与泪膜脂质层（TFLL）图像研究泪膜破裂及结构”，《眼科研究与视觉科学》54，4900–4909（2013）。[17]S. Mishima 和 D. Maurice，“泪膜的油性层及角膜表面的蒸发”，《实验眼科研究》1，39–45（1961）。[18]P. E. King-Smith、E. A. Hinel 和 J. J. Nichols，“应用一种新型干涉测量法研究脂质层厚度与泪膜变薄之间的关系”，《眼科研究与视觉科学》51，2418–2423（2010）。[19]I. A. Butovich、H. Lu、A. McMahon、H. Ketelson、M. Senchyna、D. Meadows、E. Campbell、M. Molai 和 E. Linsenbardt，“使用热台偏光显微镜对人类正常睑脂和干眼睑脂进行生物物理学与形态学评估”，《眼科研究与视觉科学》55，87–101（2014）。[20]D. L. Leiske、C. I. Leiske、D. R. Leiske、M. F. Toney、M. Senchyna、H. A. Ketelson、D. L. Meadows 和 G. G. Fuller，“温度诱导的人类睑脂结构与界面流变学转变”，《生物物理学杂志》102，369–376（2011）。[21]D. L. Leiske、C. E. Miller、L. Rosenfeld、C. Cerretani、A. Ayzner、B. Lin、M. Meron、M. Senchyna、H. A. Ketelson、D. Meadows、S. Srinivasan、L. Jones、C. J. Radke、M. F. Toney 和 G. G. Fuller，“人类睑脂界面膜的分子结构”，Langmuir 28，11858—11865（2012）。[22]L. Rosenfeld、C. Cerretani、D. L. Leiske、M. F. Toney、C. J. Radke 和 G. G. Fuller，“睑板腺脂质的结构与流变特性”，《眼科研究与视觉科学》54，2720–2732（2013）。[23]E. Knop、N. Knop、T. Millar、H. Obata 和 D. Sullivan，“睑板腺功能障碍国际研讨会：解剖学、生理学与……分委员会报告”

睑板腺的病理生理学，”《眼科研究与视觉科学》52,1938–1978（2011年）。[24]P. Sirigu、R.-L.Shen和 P.da Silva，《人类睑板腺：通过薄切片和冷冻断裂透射电子显微镜观察的腺泡细胞超微结构》，《眼科研究与视觉科学》33, 2284–2292（1992年）。[25]P. E. King-Smith、M.D.Bailey 和R.J.Braun，《有效泪膜脂质层的四个特征及其模型》，《眼表》11, 1–10（2013年）。[26]J. C. Pandit、B. Nagyov´a、A. J.Bron 和 J. M. Tiffany，《受刺激和未受刺激泪液的物理性质》，《实验眼科研究》68,247–53（1999年）。[27]G. Georgiev、D. Borchman、P.Eftimov 和N.Yokoi，《人类泪液脂质的脂质饱和度与流变学》，Int.J.Molec. Sci. 20, 3431（2019年）。[28]D.-K. Yang 和 S.-T. Wu，《液晶器件基础》，第2版（Wiley，Chichester，2015年）。[29]C. J. Petrie，《拉伸流的一百年》，J. Nonnewton.FluidMech. 137,1–14（2006年）。[30]P. D.Howell，《拉伸薄层流动》，博士学位论文，牛津大学，英国牛津（1994年）。[31]W.W.Schultz和 S.H. Davis，《一维液体纤维》，J.Rheol. 26, 331–345（1982年）。[32]J. N. Dewynne、J.R.Ockendon和 P.Wilmott，《细长几何中拉伸流主导阶方程的系统推导》，《流体力学杂志》244, 323–338（1992年）。[33]J. N. Dewynne、P.D.Howell 和 P. Wilmott，《具有惯性和重力的细长黏性纤维》，Quart. J. Mech.Appl.Math. 47,541–555（1994年）。[34]J. J.Wylie、H.Huang和R. M.Miura，《低雷诺数下黏性丝的拉伸》，《流体力学杂志》683,212–234（2011年）。[35]C.Clasen、J.Eggers、M. A. Fontelos、J. Li和G.H. McKinley，《黏弹性丝的串珠结构》，《流体力学杂志》556, 283–308（2006年）。[36]M.C.Sostarecz和A.Belmonte，《蠕虫状胶束流体中的串珠现象》，《流体物理学》16, L67–L70（2004年）。[37]L. B. Smolka、A.Belmonte、D.M.Henderson 和 T.P.Witelski，《黏弹性细丝拉伸流动的精确解》，Eur.J. Appl. Math. 15, 679–712（2004年）。

[38]L. J. Cummings、J. Low 和 T. G. Myers，“施加电场下向列液晶的拉伸流”，《欧洲应用数学杂志》25，397–423（2014）。[39]F. M. Leslie，“液晶中的流动现象理论”，载于《液晶进展》第4卷（Elsevier，1979），第1–81页。[40]F. T. Trouton，“关于黏性牵引系数及其与黏度系数的关系”，《伦敦皇家学会会刊 A辑》77，426–440（1906）。[41]L. M. Tarakhan，“通过悬滴法测定5CB液晶的表面张力”，《乌克兰物理学杂志》51，22（2006）。[42]C.-C. Peng、C. Cerretani、R. J. Braun 和 C. J. Radke，“蒸发驱动的角膜前泪膜不稳定性”，《胶体与界面科学进展》206，250–264（2014）。[43]L. N. Trefethen，《MATLAB中的谱方法》（SIAM，费城，2000）。[44]M. B. Jones、D. L. S. McElwain、G. R. Fulford、M. J. Collins 和 A. P. Roberts，“脂质层对泪膜行为的影响”，《数学生物学通报》68，1355–1381（2006）。[45]M. B. Jones、C. P. Please、D. L. S. McElwain、G. R. Fulford、A. P. Roberts 和 M. J. Collins，“泪膜沉积与排液的动力学”，《IMA数学医学与生物学杂志》22，265–288（2005）。[46]A. Heryudono、R. J. Braun、T. A. Driscoll、K. L. Maki、L. P. Cook 和 P. E. King-Smith，“眨眼周期内泪膜的单方程模型：真实的眼睑运动”，《IMA数学医学与生物学杂志》24，347–377（2007）。[47]K. L. Maki、R. J. Braun、T. A. Driscoll 和 P. E. King-Smith，“用于研究反射性流泪的重叠网格方法”，《数学医学与生物学杂志》25，187–214（2008）。[48]L. Jossic、P. Lefevre、C. de Loubens、A. Magnin 和 C. Corre，“剪切变稀人工泪液的流体力学”，《非牛顿流体力学杂志》161，1–9（2009）。[49]E. Aydemir、C. J. W. Breward 和 T. P. Witelski，“极性脂质对泪膜动力学的影响”，《数学生物学通报》73，1171–1201（2010）。[50]M. Allouche、H. A. Abderrahmane、S. M. Djouadi 和 K. Mansouri，“曲率对泪膜动力学的影响”，《欧洲力学杂志 B辑：流体》66，81–91（2017）。[51]H. Mehdaoui、H. A. Abderrahmane、F. N. Bouda 和 A. Koulali，“泪膜动力学的二维数值模拟：剪切变稀性质的影响”，《欧洲力学杂志 B辑：流体》90，128–136（2021）。[52]T.-S. Lin、L. J. Cummings、A. J. Archer、L. Kondic 和 U. Thiele，“关于薄向列液膜的流体动力学描述的注记：强锚定模型”，《流体物理学》25，

082102（2013）。[53]A. Oron、S. H. Davis 和 S. G. Bankoff，“薄液膜的长尺度演化”，《现代物理评论》69，931–980（1997）。[54]A. L. Bertozzi、M. P. Brenner、T. F. Dupont 和 L. P. Kadanoff，“液晶中的流动现象理论”，载于《应用数学趋势与展望》，《应用数学科学》，第100卷，L. Sirovich 编（施普林格出版社，纽约，1994），第155–208页。[55]Q. Deng、R. J. Braun、T. A. Driscoll 和 P. E. King-Smith，“不完全眨眼条件下泪膜与眼表温度的模型”，《界面现象与传热》1（2013）。[56]Q. Deng、R. J. Braun 和 T. A. Driscoll，“多个眨眼周期中的传热与泪膜动力学”，《流体物理学》26，071901（2014）。[57]M. Bruna 和 C. J. W. Breward，“非极性脂质对泪膜动力学的影响”，《流体力学杂志》746，565–605（2014）。[58]M. R. Stapf、R. J. Braun 和 P. E. King-Smith，“双层泪膜蒸发分析”，《数学生物学通报》79，2814–2846（2017）。[59]V. S. Zubkov、C. J. W. Breward 和 E. A. Gaffney，“眼表泪膜内流体与溶质动力学的耦合：黑线渗透压的建模研究”，《数学生物学通报》74，2062–2093（2012）。[60]I. W. Stewart，《液晶静态与动态连续介质理论：数学导论》（CRC出版社，2019）。