量子反馈控制的性能界

弗莱明·霍尔托夫[*†], ¨ * *
弗兰克·舍费尔[*‡],朱利安·阿诺德[§],克里斯托弗·拉库卡斯,艾伦·埃德尔曼麻省理工学院，美国剑桥 [§] 巴塞尔大学，瑞士巴塞尔 [†] holtorf@mit.edu [‡] franksch@mit.edu

arXiv:2304.03366v2 [quant-ph] 5 Dec 2024

摘要——量子反馈控制的极限会立即影响整个量子信息科学，但至今仍鲜有研究。本文结合量子滤波理论与矩和平方和技术，构造出一个凸优化问题层级，为一大类量子反馈控制问题中可达到的最佳性能提供单调改进且可计算的界。这些界可用作基本限制的见证、最优性证书或性能目标。我们证明，在技术条件成立时，这些界会收敛至最优控制性能；并通过为腔中的量子比特设计可认证为近乎最优的控制器，展示了我们的方法在光子计数和齐次探测测量下的实际效用。

索引词—量子信息与控制、随机最优控制、量子滤波、凸优化

I. 引言

在量子尺度上对设备进行反馈控制，在当前和未来的量子信息科学领域应用中蕴藏着巨大潜力 [1, 2]。然而，连续观测下量子系统的非线性和随机性，使得在实践中有效部署反馈控制的探索变得复杂 [3]。尽管通过动态规划原理刻画最优量子反馈控制器由来已久，可追溯至 Belavkin 于 1988 年的工作 [4] ，但除少数简化情形外 [5–7], , 通过求解非线性 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程的量子类比来设计此类控制器，仍是一项难以企及的挑战。相较之下，在应用中设计量子反馈控制器，通常依赖启发式方法，这些方法往往植根于强化学习、基于梯度的优化或专家直觉 [8–10]。尽管这类通过启发式方法得出的控制策略常被发现表现出色，令人瞩目的是……然而，其次优性程度几乎始终无法量化，因此人们无法确定观察到的性能限制究竟是基本限制，还是仅仅源于次优的控制器设计。本文提出一种方法，通过计算一系列量子反馈控制问题中最佳可达控制性能的有效界限，厘清这类情况。这些界限可作为最优性证书、基本限制的佐证或性能目标，从而补充控制器设计启发式方法。

使我们的构造成为可能的关键洞见在于：通过 HJB次解上的线性规划视角来审视（随机）最优控制，可以赋予该问题一种凸的、尽管是无限维的几何结构 [11–13]。由此，矩-平方和层级 [14, 15] 带来了一个实用的计算方案；在温和的假设下，它会针对原始的无限维线性规划生成一系列日益紧致且易于处理的凸近似，进而为最佳可实现的控制性能提供一系列单调改进且能够实际计算的界。为了将这一已针对一系列经典控制问题 [16–18], 进行研究的方法应用于量子领域，我们借助量子滤波理论 [4, 19] ，并将量子反馈控制问题表述为随机最优控制问题。最终得到的方法能够通过锥优化，为在连续观测下的一大类量子系统的最佳可实现反馈控制性能计算出具有信息价值的界。

本文其余部分的组织如下。首先，第二节介绍我们的记号。接下来，在第三节中，我们定义所研究的量子反馈控制问题类别，并讨论关键假设。我们的主要贡献——为最佳可实现的量子反馈控制性能构造一系列日益严格的凸界定问题并分析其收敛性——将在第四节中介绍。第五节简要讨论该层级的扩展。最后，我们在第六节中通过一个量子比特控制示例展示界定方法的实际效用，然后在第七节中作出结论。

II. 符号

在本文中，我们始终采用以下记号约定。

本工作部分获美国国家科学基金会资助，资助编号为 OAC-1835443、SII-2029670、ECCS-2029670、OAC-2103804和 PHY-2021825；部分获美国国际开发署通过宾夕法尼亚州立大学提供的资助，资助编号为S002283-USAID；部分获麻省理工学院国际科学与技术倡议通过 MIT-瑞士洛克希德·马丁种子基金提供的资助；部分获美国能源部高级研究计划署（ARPA-E）资助，资助编号为DE-AR0001211 和 DE-AR0001222；部分获挪威研究委员会和EquinorASA 通过研究委员会项目提供的资助，资助编号为308817；部分获美国空军研究实验室资助；并且部分工作在美国空军人工智能加速器的支持下完成，合作协议编号为 FA8750-19-2-1000。Julian Arnold 的工作获瑞士国家科学基金会个人资助，资助编号为 200020 200481。

线性代数与分析 –矩阵（或向量）的伴随 A 记作 A^*。两个方阵 A 和 B 的对易子与反对易子分别记作 $[A,B] = AB - BA$和 $\{A,B\} = AB + BA$。记号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 不应与量子物理中通常使用的狄拉克记号混淆，而应作更广义的理解，即表示两个（对偶）向量空间（最常见的是厄米矩阵空间）之间的内积。我们使用 $\mathcal{C}^{1,\,2}(X \times Y)$表示定义域 $X \times Y$上关于其第一个和第二个自变量分别一次、二次连续可微的二元函数；当 $X \times Y$为闭集时，可微性应按惠特尼[20]的意义理解。

概率– 为了使记号简洁，我们将随机变量 x 的经典期望记为 $\mathbb{E}[x]$ ，并省略对底层概率测度的显式说明，因为上下文始终会使其含义清楚。我们用 δ_x 表示单点集 $\{x\}$ 上的狄拉克测度。

代数几何 – 变量 x 的实系数多项式集合记为 $\mathbb{R}[x]$; 类似地，我们用 $\mathbb{R}_d[x]$表示 $\mathbb{R}[x]$ 中次数至多为 d 的多项式所构成的子集。平方和多项式的集合记为 $\Sigma^2[x]$。当我们提及 $\mathbb{R}[\rho]$ 中的多项式且 $\rho \in \mathbb{C}^{n\times n}$时，指的是以 $\mathrm{Re}(\rho)$ 和 $\mathrm{Im}(\rho)$ 中的元素为变量的实系数联合多项式。最后，当向量值函数和矩阵值函数的所有分量都是多项式时，我们也称它们为多项式。

III. 量子随机最优控制

我们考虑具有如下形式的厄米哈密顿量的量子系统

$$H(u) = H_0 + \sum_{k=1}^{K} u_k H_k,$$

其中， H_0 表示系统的漂移哈密顿量，而$H_1, \ldots, H_K$是驱动强度可调的控制场 $u = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_K \end{bmatrix}$。此外，假设控制驱动被限制在可行集合 $U \subset \mathbb{R}^K$ 内。最后，我们假设所研究的系统受到连续测量过程的作用，以实现反馈控制。此类系统的动力学如下所述，不再进一步推导；其依据是量子滤波理论。关于该主题的入门介绍，请参阅 [3, 21]。

密度矩阵 ρ_t 对量子系统在连续测量过程ξ_t 条件下的状态进行编码，其随机动力学由量子滤波方程描述 [19]

$$\mathrm{d}\rho_t = \mathcal{L}(u_t)\rho_t \,\mathrm{d}t + \mathcal{G}\rho_t \,\mathrm{d}\xi_t. \qquad \text{(QFE)}$$

对于具有所述结构的系统，Lindbladian $\mathcal{L}(u)$的作用由下式给出

$$\mathcal{L}(u)\rho = -i[H(u),\rho] + \sum_{l=1}^{L} \left(\sigma_l \rho \sigma_l^* - \frac{1}{2}\{\sigma_l^*\sigma_l, \rho\} \right),$$

其中，跳跃算符 σ_l 描述了量子系统与其环境之间因观测而产生的相互作用。我们关注同时受到齐次探测和光子计数测量组合影响的系统。为方便记号，我们将测量的索引集 $\{1, \ldots, L\}$ 划分为HD 集和PC 集，分别对应齐次探测和光子计数测量。随后，新息算符 $\mathcal{G}$ 根据测量类型分解为两个独立的贡献：

$$\mathcal{G}\rho_t \,\mathrm{d}\xi_t = \sum_{l\in \mathrm{HD}} \mathcal{G}_l\rho_t \,\mathrm{d}w_t^l + \sum_{l\in \mathrm{PC}} \mathcal{G}_l\rho_t \,\mathrm{d}n_t^l - \mathcal{L}_l\rho_t \,\mathrm{d}t.$$

齐次探测会产生由标准高斯增量 $\mathrm{d}w_t^l$ 描述的扩散型新息，该增量与测得的齐次电流 [3]一一对应。相应的新息算符作用如下：

$$\mathcal{G}_l\rho_t \,\mathrm{d}w_t^l = (\sigma_l\rho_t + \rho_t\sigma_l^* - \mathrm{tr}(\sigma_l\rho_t + \rho_t\sigma_l^*)\rho_t) \,\mathrm{d}w_t^l.$$

相比之下，光子计数会产生确定性漂移

$$\mathcal{L}_l\rho_t \,\mathrm{d}t = (\sigma_l\rho_t\sigma_l^* - \mathrm{tr}(\sigma_l\rho_t\sigma_l^*)\,\rho_t) \,\mathrm{d}t.$$

并在检测到光子发射 [3] 时产生离散创新。光子发射由泊松计数器 n_t^l 描述，其以速率 $\lambda_l(\rho) = \mathrm{tr}(\sigma_l\rho\sigma_l^*)$ 触发；在测得光子发射的条件下，系统状态跳变为 $h_l(\rho) = \sigma_l\rho\sigma_l^*/\mathrm{tr}\,(\sigma_l\rho\sigma_l^*)$。相应的创新算符因此作用为

$$\mathcal{G}_l\rho_t \,\mathrm{d}n_t^l = (h_l(\rho_t) - \rho_t) \,\mathrm{d}n_t^l.$$

由于这一点在全文中都很重要，值得在此指出，由（QFE）描述的动力学本质上会保持（条件）量子态的纯态性。

引理 1. 纯量子态的集合

$$B = \left\{\rho \in \mathbb{C}^{n\times n} : \rho^* = \rho, \mathrm{tr}(\rho) = \mathrm{tr}\big(\rho^2\big) = 1\right\}$$

在量子反馈方程（QFE）的动力学作用下保持不变。

证明。 将伊藤引理应用于 (QFE) 可得

$$\mathrm{d}[\mathrm{tr}(\rho_t)] = \mathrm{d}\big[\mathrm{tr}\big(\rho_t^2\big)\big] = 0$$

如果 $\rho_0 \in B$。此外，(QFE) 的右侧将厄米矩阵映射为厄米矩阵。 □

鉴于上述在连续观测下反馈控制量子系统的抽象描述，本文旨在界定由量子随机最优控制问题所定义的可达到的最佳反馈控制性能

$$J^* = \inf_{u_t} \ \mathbb{E}\left[\int_0^T \ell(\rho_t, u_t)\,\mathrm{d}t + m(\rho_T)\right] \qquad \text{(QSOCP)}$$
$$\text{s.t.} \quad \rho_t \text{ satisfies (QFE) on } [0,T] \text{ with } \rho_0 \sim \nu_0,$$
$$u_t \in U \text{ is non-anticipative on } [0,T],$$

表I：常见量子控制任务作为（QSOCP）的特例。

控制任务	阶段代价 $\ell(\rho_t, u_t)$	终端代价 $m(\rho_T)$
状态制备	0	$1-\psi_{\mathrm{ref}}^{*}\rho_T\psi_{\mathrm{ref}}$
状态稳定	$1-\psi_{\mathrm{ref}}^{*}\rho_t\psi_{\mathrm{ref}}$	0
量子态纯化	$\mathrm{tr}(\rho_t^2)$	0
纠缠生成[1]	0	$1-\mathrm{tr}(\tilde{\rho}_T^2)$

[1] $\tilde{\rho}_T$ 表示给定子系统 [22] 的约化密度矩阵。

其中， ℓ 和 m 分别以累积阶段成本和终端成本的形式编码控制性能。我们希望强调，QSOCP包含许多常见的量子反馈控制任务作为特例。表I列出了几个示例。

为了应用矩和平方和技术为（QSOCP）构造易于处理的下界问题，我们最后作出以下假设。

假设1。 量子态的初始分布 ν_0 满足 $\mathit{supp}\,\nu_0 \subset B$，即初始态虽可能存在不确定性，但可以保证为纯态。

假设2。 可容许控制动作 U 的集合是一个紧的基本闭半代数集，即存在多项式 $\mathcal{U} = \{q_1, \ldots, q_r\}$ 使得 $U = \{u \in \mathbb{R}^K \colon q(u) \geq 0, \forall q \in \mathcal{U}\}$ 是紧的。我们将 $\mathcal{U}$ 称为控制约束。

假设3。 代价函数 ℓ 和 m 是多项式。

假设4。 对于 $l \in \mathrm{PC}$ 的跳跃算符 σ_l， $h_l(\rho)$是次数至多为一的多项式。

假设1确保根据引理1，在给定测量条件下，量子态始终保持纯态，因此被限制在一个基本闭半代数集中。假设2–4进一步保证，动力学（QFE）和控制问题（QSOCP）完全由多项式描述。这些性质对于我们在第四节中构造易处理的界定问题至关重要。

我们希望强调，尽管假设1–3极为宽松，甚至还可以进一步放宽（见第五节），但假设4的限制性更强，不过对于许多实际相关的光子计数测量设置仍然成立。满足假设4的光子计数测量示例包括与幺正跳跃算符相关的测量，或无论光子发射发生时所处的量子态为何，都会导致系统跳跃到同一量子态的测量。

IV. 凸界方法

为了推导出（QSOCP）最优值的可计算下界，我们借鉴动态规划启发式方法。动态规划启发式方法认为，与（QSOCP）相关联的值函数，即，

最小后续成本

$$
\begin{aligned}
V(t,\rho) = \inf_{u_s} \quad & \mathbb{E}\left[\int_t^T \ell(\rho_s, u_s)\,\mathrm{d}s + m(\rho_T)\right] \\
\text{s.t.} \quad & \rho_s \text{ satisfies (QFE) on } [t,T] \text{ with } \rho_t \sim \delta_\rho, \\
& u_s \in U \text{ is non-anticipative on } [t,T],
\end{aligned} \tag{1}
$$

满足 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程 [23]:

$$
\begin{aligned}
&\inf_{u\in U} \mathcal{A}V(\cdot,\cdot,u) + \ell(\cdot,u) = 0 \text{ on } [0,T)\times B \\
&\text{s.t. } V(T,\cdot) = m \text{ on } B.
\end{aligned}
$$

这里， $\mathcal{A}$ 指的是与（QFE）相关的无穷小生成元 [23]；$\mathcal{A}$ 作用于光滑函数 $w \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T]\times B)$ 上的形式为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}w(t,\rho,u) = &\frac{\partial w}{\partial t}(t,\rho) + \langle \tilde{\mathcal{L}}(u)\rho, \nabla_\rho w(t,\rho)\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{l\in \mathrm{HD}} \langle \mathcal{G}_l\rho, \nabla_\rho^2 w(t,\rho)\,\mathcal{G}_l\rho\rangle \\
&+ \sum_{l\in \mathrm{PC}} \lambda_l(\rho)\left(w(t,h_l(\rho)) - w(t,\rho)\right),
\end{aligned} \tag{2}
$$

其中 $\tilde{\mathcal{L}}(u) = \mathcal{L}(u) - \sum_{l\in PC}\mathcal{L}_l$ 是与控制作用 u相关的有效漂移算符。注意，由于假设1，只需在 $[0,T]\times B$ 上求解 HJB 方程，因为根据引理1，B 在（QFE）动力学下是不变的。

虽然 HJB 方程是一种非线性偏微分方程，即使对于低维系统也极难求解，但我们可以将寻找光滑 HJB 次解的问题转化为一个凸优化问题，尽管该问题是无限维的：

$$
\begin{aligned}
\sup_{w\in\mathcal{C}^{1,2}([0,T]\times B)} \quad & \int_B w(0,\cdot)\,\mathrm{d}\nu_0 \\
\text{s.t.} \quad & \mathcal{A}w + \ell \geq 0 \text{ on } [0,T]\times B\times U, \\
& m - w(T,\cdot) \geq 0 \text{ on } B.
\end{aligned} \tag{subHJB}
$$

引理 2.任何可行点 w 的 (subHJB) 都会低估 $[0,T]\times B$上的值函数(1)，因此 $\int_B w(0,\cdot)\,\mathrm{d}\nu_0$会低估可达到的最佳控制性能 J^*。

证明。 w的可行性 $w(T,\cdot) \leq V(T,\cdot) = m$在 B上成立。现在考虑任意时刻 $0 \leq t < T$、任意状态 $\rho \in B$以及任意在 $[t,T]$上可容许的反馈控制器 $\{u_s\}_{s\in[t,T]}$。由 w的可行性可知，对于 $\rho_t \sim \delta_\rho$,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_t^T \ell(\rho_s,u_s)\,\mathrm{d}s + m(\rho_T)\right] \\
&\geq \mathbb{E}\left[\int_t^T -\mathcal{A}w(s,\rho_s,u_s)\,\mathrm{d}s + w(T,\rho_T)\right] = w(t,\rho),
\end{aligned}
$$

其中，最后一步使用了Dynkin公式 [24]。最后，对所有可容许控制器的左侧取下确界可得 $V(t,\rho) \geq w(t,\rho)$。 □

（subHJB）的无限维特性使其直接实用价值相当有限。因此，我们接下来将构造易于处理的有限维限制形式。

使用矩-平方和层级求解（subHJB）。为此，我们将（subHJB）限制为仅在最大次数固定为 d 的多项式上进行优化，而不是任意光滑函数，并进一步将非负性约束强化为充分的平方和约束。为了使这一构造定义良好，我们要求非负性约束左侧的表达式为多项式，并且非负性是在闭基本半代数集上施加的。后者由假设2以及 B 是基本闭半代数集这一事实得到保证。前者则由假设 3、4 以及以下结果推出。

引理 3。 在假设*4*下，无穷小生成元$\mathcal{A}$ *[参见式(2)]* 将多项式映射为多项式。

证明。设 w 为一个多项式。由于多项式在˜微分运算下封闭，因此 $\frac{\partial w}{\partial t}$ 、 $\nabla_\rho w$和 $\nabla^2_\rho w$ 均为分量多项式。另请注意，$\mathcal{L}(u)\rho$、 $\mathcal{G}_l\rho$、 $\lambda_l(\rho)$，以及根据假设4， $h_l(\rho)$，均为分量多项式。由于多项式在加法、乘法和复合运算下也封闭，因此可知 $\langle\mathcal{L}(u)\rho$、 $\nabla_\rho w(t,\rho)\rangle$、$\langle\mathcal{G}_l\rho$、 $\nabla^2_\rho w(t,\rho)\ \mathcal{G}_l\rho\rangle$以及 $\lambda_l(\rho)\ (w(t,h_l(\rho))\ -w(t,\rho))$均为多项式，因此 $\mathcal{A}w$也是多项式。□

由此得到的（subHJB）平方和约束为

$$\begin{aligned} J_d^* = \sup_{w_d\in\mathbb{R}_d[t,\rho]} \quad & \int_B w_d(0,\cdot)\,\mathrm{d}\nu_0 \qquad\qquad (\text{sosHJB}_d)\\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{A}w_d+\ell\in Q_{d+2}\left[\mathcal{T}\cup\mathcal{B}\cup\mathcal{U}\right],\\ & m-w_d(T,\cdot)\in Q_d\left[\mathcal{B}\right], \end{aligned}$$

其中， $Q_d[\mathcal{S}]$ 表示与多项式集合 $\mathcal{S}=\{a_1,\dots,a_p\}$相关联的有界次数二次模；形式上，

$$Q_d[\mathcal{S}]=\{f\in\mathbb{R}[x]: f=s_0+\sum_{i=1}^p s_i a_i,\\ \text{where } s_i\in\Sigma^2[x] \text{ with } \deg s_i a_i\le d\}.$$

控制约束集合 $\mathcal{U}$ 的定义与假设 2 中相同。集合 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{B}$ 同样表示多项式约束集合，分别生成集合 $[0,T]$和 B。这些约束并非只有唯一的选取方式。因此，我们作出如下假设；如后文所示，该假设使相应的性能界序列J_d^* 具有良好的收敛保证。

假设5。 对于(sosHJB$_d$) 的构造，我们选择$\mathcal{T}=\{t,T-t\}$使得 $[0,T]=\{t\in\mathbb{R}:\ \ p(t)\ge 0,\ \forall p\in\mathcal{T}\}$。此外，为了将求解(sosHJB$_d$) 所带来的计算负担降至最低，我们明确消除了 B 中的对称性和单位迹约束，并仅使用剩余次数来表示密度矩阵，即对于 $1\le i<n$使用$\mathrm{Re}(\rho_{ii})$，以及对于 $1\le i<j\le n$使用 ρ_{ij}。这类约化密度矩阵表示的集合记为 D。下文中，我们滥用记号，将约化密度矩阵表示简单地称为 $\rho\in D$。在在这些约化坐标中，纯态密度矩阵集合 B 由一个多项式等式约束给出

$$\mathrm{tr}\big(\rho^2\big)=\left(1-\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{Re}(\rho_{ii})\right)^2+\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{Re}(\rho_{ii})^2 \\ +2\sum_{1\le i<j\le n}|\rho_{ij}|^2=1. \quad (3)$$

相应地，我们令 $\mathcal{B}=\left\{1-\mathrm{tr}\big(\rho^2\big),\mathrm{tr}\big(\rho^2\big)-1\right\}$，使得 $B=\{\rho\in D:\ \ p(\rho)\ \ge 0,\ \forall p\in\mathcal{B}\}$。

如下推论所述，界定问题关于次数参数 d 的层次结构，从实践角度看是理想的，因为它使我们能够以更多计算量换取更紧的界。

推论1. 问题 (sosHJB$_d$)的任意可行点 w_d 在 $[0,T]\times B$ 和$\int_B w_d(0,\cdot)\,\mathrm{d}\nu_0$ 上都低估值函数 (1)，因此也低估了 J^*。此外，最优值 J_d^* 构成一个单调递增序列。

证明. (sosHJB$_d$) 的任意可行点也是 (subHJB) 的可行点，因此根据引理 2，它低估了值函数。由于对于任意多项式集合$\mathcal{S}$， $Q_d[\mathcal{S}]\subset Q_{d+1}[\mathcal{S}]$，进一步可得，(sosHJB$_{d+1}$) 是 (sosHJB$_d$) 的一个松弛，因此 $J^*_{d+1}\ge J^*_d$。 □

由推论1引出的一个自然问题是，随着次数 d 增大，界 J_d^* 是否会趋近于真实最优值 J^* 。下面，我们初步分析这一收敛问题。具体而言，当 (QSOCP) 存在光滑值函数且控制约束满足以下温和的正则性条件时，我们证明其收敛。

定义1 (Putinar条件 [25])。如果存在某个正整数 d，使得 $\exists N>0$，并且 $N-\sum_{i=1}^n x_i^2\in Q_d[\mathcal{S}]$，那么我们称多项式集合 $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}[x]$ 满足 *Putinar*条件。

为此，我们首先注意到，只要控制约束满足 Putinar条件，用于界定问题 (sosHJB$_d$) 的多项式自然就满足 Putinar条件。

引理 4. 假设*5*中定义的集合 $\mathcal{B}$ 满足 *Putinar*条件。若控制约束集合 $\mathcal{U}$ 也满足 *Putinar*条件，则集合 $\mathcal{T}\cup\mathcal{B}\cup\mathcal{U}$ 同样满足 *Putinar*条件。

证明。根据假设5中的描述，不难验证集合 $\mathcal{B}$ 满足 Putinar条件，因为由式（3）可得，对于 $\rho\in D$，

$$1-\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{Re}(\rho_{ii})^2-\sum_{1\le i<j\le n}|\rho_{ij}|^2= \\ \left(1-\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{Re}(\rho_{ii})\right)^2+\sum_{1\le j<j\le n}|\rho_{ij}|^2+1-\mathrm{tr}\big(\rho^2\big).$$

上述关系的右侧显然是 $Q_2[\mathcal{B}]$ 的一个元素，因为前两项是平方和。此外，

任何定义有界多面体的一次多项式集合都满足Putinar条件，因此 [26], 也满足。最后注意， $a \in Q_d[\mathcal{T}]$、$b \in Q_d[\mathcal{B}]$、$c \in Q_d[\mathcal{U}]$ 意味着 $a+b+c \in Q_d[\mathcal{T} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{U}]$，因为 $\mathcal{T}$、$\mathcal{B}$和 $\mathcal{U}$ 由不同变量中的多项式组成。结论成立。□

据此，应用 Putinar 正定多项式定理 [25]，即可根据下述定理证明由 (sosHJB$_d$) 给出的界的收敛性。

定理 1. 如果值函数 (1) 属于 $\mathcal{C}^{1,\ 2}([0,T] \times B)$，且控制约束集合 $\mathcal{U}$ 满足 *Putinar*条件，那么 $J_d^* \uparrow J^*$。

证明。令 $\epsilon > 0$，并回顾一下，在紧集上，任意连续可微函数及其（偏）导数都可以由多项式及其导数一致逼近 [20]。因此，存在一个多项式 w 使得

$$\|V - w\|_\infty, \|\mathcal{A}V - \mathcal{A}w\|_\infty < \epsilon,$$

其中，$\|\cdot\|_\infty$分别表示相应定义域$[0,T] \times B$和 $[0,T] \times B \times U$上的上确界范数。在值函数 V具有所假设的光滑性的条件下，众所周知，V满足 HJB 方程（参见例如 [23, 定理 3.1]），因此特别有

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}V + \ell \geq 0 \text{ on } [0,T] \times B \times U, \\ &m - V(T,\cdot) \geq 0 \text{ on } B. \end{aligned}$$

现在考虑 $\hat{w} = w + 2\epsilon(t - T - 1)$，并注意到，根据构造，$\mathcal{A}\hat{w} = \mathcal{A}w + 2\epsilon$ and $\hat{w}(T,\cdot) = w(T,\cdot) - 2\epsilon$。由此可得

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}\hat{w} + \ell \geq \mathcal{A}V + \ell + \epsilon > 0 \text{ on } [0,T] \times B \times U, \\ &m - \hat{w}(T,\cdot) \geq m - V(T,\cdot) + \epsilon > 0 \text{ on } B. \end{aligned}$$

根据引理 4，Putinar 正定多项式定理 [25, 引理 4。1]因此保证对于足够大的 d，有 $\mathcal{A}\hat{w} + \ell \in Q_{d+2}[\mathcal{T} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{U}]$，同样地，$m - \hat{w}(T,\cdot) \in Q_d[\mathcal{B}]$，使得 $\hat{w}$ 对 (sosHJB$_d$) 是可行的。注意到即可得到该结果，即

$$\begin{aligned} J^* - J_d^* &\leq \int_B |V(0,\cdot) - \hat{w}(0,\cdot)| \, \mathrm{d}\nu_0 \\ &\leq \max_{\rho \in B} |V(0,\rho) - w(0,\rho)| + |2\epsilon(T+1)| \\ &< (2T+3)\epsilon. \end{aligned}$$

□

注释 1. 需要强调的是，假设(QSOCP) 具有光滑值函数绝非一个宽松的假设；即便该假设成立，通常也不容易验证。定理 *1* 只是为我们的经验观察奠定形式化基础的第一步：在实际应用中，由(sosHJB$_d$)给出的界似乎往往会收敛到 J^*。相关研究 *[12,13, 16]* 表明，保证收敛的条件或许可以大幅放宽。

最后，我们想强调，(sosHJB$_d$) 等价于一个半定规划（SDP）[14, 15], 它可以通过优化建模工具 [27–29] 轻松自动地构造出来；这些工具可用于 Julia [30] 等现代编程语言。随后，可以使用一系列功能强大的现成求解器 [31–36]来求解由此得到的半正定规划。

V. 扩展

A. 无限时域问题

尽管我们详细阐述了有限时域问题（QSOCP）的分析，但可以针对（折扣型）无限时域问题构造类似的界定问题。为此，假设我们的控制目标具有如下形式

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\gamma t} \ell(\rho_t, u_t) \, \mathrm{d}t\right]$$

折现率为 $\gamma > 0$。然后，可以从式 (2) 中注意到，

$$\mathcal{A}(e^{-\gamma t} w) = e^{-\gamma t} \left(\mathcal{A}w - \gamma w\right).$$

根据引理 2 的证明中类似的论证可知，对于任意 $w \in \mathcal{C}^{1,2}([0,\infty) \times B)$，其满足

$$\mathcal{A}w - \gamma w + \ell \geq 0 \text{ on } [0,\infty) \times B \times U,$$

$e^{-\gamma t} w$ 是与无限时域问题相关的值函数的全局下界估计。对界定问题（sosHJB$_d$）进行简单修改，便可实现对单调改进的值函数下界估计进行可处理的计算，从而在无限控制时域情况下得到性能界。

B. 混合初态

通过引入额外的保守性，可以将假设1 松弛至混合初始量子态。对于初始为混合态的量子态，当约束施加于所有混合量子态的集合上时，(subHJB)刻画了有效界。

$$\bar{B} = \left\{\rho \in \mathbb{C}^{n \times n} : \rho = \rho^*, \mathrm{tr}(\rho) = 1, \psi^* \rho \psi \geq 0 \ \forall \psi \in \mathbb{C}^n\right\}.$$

由于 B 可表示为有限个多项式不等式约束（根据 Sylvester 判据），因此原则上，所得到的问题可采用类似于 (sosHJB$_d$) 的有效平方和限制。然而，这些限制并不实用。它们依赖于将混合量子态的正性要求改写为其所有主子式均非负。此类多项式不等式数量众多且次数很高，使得相应的平方和限制求解代价高昂。更实用的方法是将 (subHJB) 中的约束施加于一个更简单的闭基本半代数集合上，该集合是 B 的外近似；例如，

$$\tilde{B} = \left\{\rho \in \mathbb{C}^{n \times n} : \rho^* = \rho, \mathrm{tr}(\rho) = 1, \mathrm{tr}\left(\rho^2\right) \leq 1\right\}.$$

这种修改可能会引入额外的保守性，因为 B 是 B 的严格超集，但会带来更实用的平方和约束。请注意，该约束 B 可以

通过施加以下形式的额外约束灵活地加以细化，适用于任意数量的固定状态向量 $\psi \in \mathbb{C}^n$。

C. 不完美测量

到目前为止，我们一直隐含地假设无损或完美的零差测量和光子计数测量。然而在实践中，各种因素都可能导致不完美探测 [3]。在大多数此类情况下，由于额外损耗通常会导致更严格的性能限制，(sosHJB$_d$) 给出的界仍然有效；但人们往往也希望明确量化测量不完美所带来的限制。本文提出的界定方法可自然地扩展至此任务。为此，必须在 (QFE) 中考虑测量效率的影响。对于效率为 $\eta \in [0,1]$ 的零差测量，(QFE) 中的创新算子作用如下

$$\mathcal{G}_l\rho = \eta(\sigma_l\rho_t + \rho\sigma_l^* - \mathrm{tr}(\sigma_l\rho_t + \rho\sigma_l^*)\,\rho),$$

对于效率低下的光子探测，漂移算子 $\mathcal{L}_l$ 则必须修改为

$$\mathcal{L}_l\rho = \eta\,(\sigma_l\rho\sigma_l^* - \mathrm{tr}(\sigma_l\rho\sigma_l^*)\,\rho_t)$$

驱动泊松计数器的速率则衰减为 $\lambda_l(\rho) = \eta\mathrm{tr}(\sigma_l\rho\sigma_l^*)$ [3, 第 4 节 .8]。容易看出，经过这些修改后，引理 3 的结论仍然成立。然而，在存在不完美测量 ($\eta < 1$) 的情况下，引理 1 的结论不再成立，纯量子态在由此产生的动力学过程中也不再保持纯态。因此，(subHJB) 中的纯态集合 B 必须替换为混合态集合的基本半代数超近似，详见第五节 B。

D. 启发式控制器的提取

通过 (sosHJB$_d$) 计算出的界可用于证明任意给定控制策略的近乎最优性。因此，所提出的界定方法可为控制策略设计中的启发式方法提供补充。然而，(sosHJB$_d$) 的解也可直接用于指导控制器设计。在 (sosHJB$_d$) 的最优点处，优化变量w_d 按构造即为值函数的最佳多项式下近似。因此，合理的做法是将 w_d 用作值函数 [17, 37] 的替代，并通过沿 w_d贪心下降来构造启发式控制器，即，

$$u_t^*(\rho) \in \arg\min_{u\in U} \mathcal{A}w_d(t,\rho,u) + \ell(\rho,u). \tag{4}$$

上述方法需要对 U 上的多项式进行最小化，这只有在控制输入为一个或少数几个时才有望具备可处理性。否则，我们认为，这种构造本质上具有启发式性质，或许足以成为采用以下方法的理由：

转而采用快速启发式方法寻找局部或近似极小值，例如借助机器学习领域的最新进展 [38, 39]。

VI. 示例

最后，我们展示了所提出的界定方法在稳定控制腔中量子比特状态这一问题上的实用性 [9]。图 1 展示了所研究的系统。量子比特的哈密顿量为

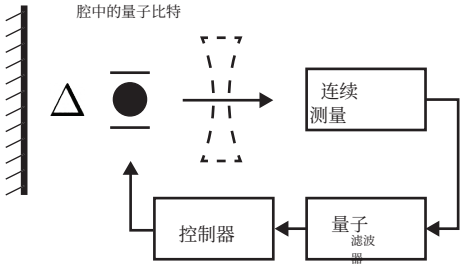


图 1：控制回路：腔中的量子比特受到连续测量。

$$H(u) = \frac{\Delta}{2}\sigma_z + \frac{\Omega}{2}u\sigma_x,$$

其中 σ_x 和 σ_z 表示泡利矩阵：

$$\sigma_x = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \text{ and } \sigma_z = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}.$$

为了启用反馈，我们假设量子比特受到与跳跃算符相关的连续测量。

$$\sigma = \kappa\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

注意，这样的测量符合假设4。参数选为 $\Delta = \Omega = 5$ 和 $\kappa = 1$；可容许控制动作的集合为 $U = [-1,1]$。下文中，我们考虑通过齐次探测和光子计数装置实现这些测量，并对二者进行比较。控制问题的目标是以最小的期望保真度亏损稳定激发态 $\psi_{\mathrm{ref}} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^*$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T 1 - \psi_{\mathrm{ref}}^*\rho_t\psi_{\mathrm{ref}}\,\mathrm{d}t\right]$$

（即最大期望保真度）。假设量子比特最初处于其基态 $\psi_0 = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^*$，因此初始状态的分布由 $\nu_0 = \delta_{\psi_0\psi_0^*}$ 给出。

对于所介绍的界定方法的实现，我们依托了 Julia 中的优化生态系统。具体而言，我们使用 MarkovBounds.jl [18]和 SumOfSquares.jl [28]来构建界定问题，并通过MathOptInterface [29] 将所得的半正定规划传递给 MOSEK v10 [31]。所有计算均在配备 16GB 统一内存的 MacBook M1 Pro 上完成。

表II总结了通过求解界定问题（sosHJB$_d$）在次数 d 逐渐增加时，采用两种测量设置所能达到的最大平均保真度的上界。这些界显然并非平凡界，并表明应

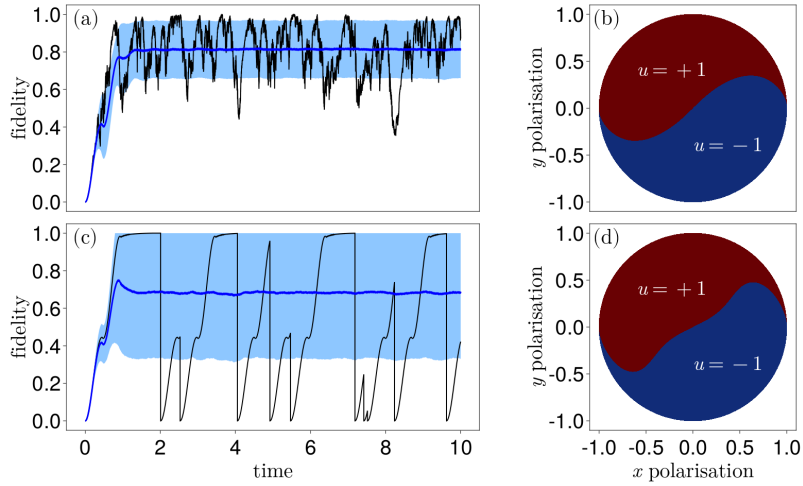


图2：闭环控制量子比特的保真度，以及在布洛赫球 x-y 平面上对 $t = 5$ 处启发式控制器的可视化，分别对应齐次探测（a、b）和光子计数测量（c、d）。蓝色显示平均迹和标准差带。黑色显示一条有代表性的样本路径。

表II：反馈控制量子比特的性能界

齐次探测

次数 d	保真度界	计算时间 [s]
2	0.8502	0.008
4	0.8111	0.078
6	0.7973	0.64
8	0.7893	5.0
10	0.7856	27.9
目前已知的最佳保真度： 0.7750		

光子计数

次数 d	保真度界	计算时间 [s]
2	0.9602	0.0043
4	0.7497	0.031
6	0.7153	0.180
8	0.6902	1.67
10	0.6798	14.9
目前已知的最佳保真度： 0.6547		

即使对于中等次数，也能提供有用信息。为强调这一点，我们进一步根据第五节中所述的(sosHJB$_4$) 最优解，为两种测量设置分别构造了启发式控制器。它们的经验性能为最佳可达平均保真度提供了一个可实现的下界。图 2 展示了两个控制器所达到的平均保真度和噪声水平，同时还将相关控制策略可视化为量子态极化方向的函数。对于齐次探测和光子计数设置，这两个控制器分别达到了 77.50% 和 65.47 % 的平均保真度（对10,000条样本轨迹取集合平均）。因此，在所计算的界限背景下，这些控制器经证实是近乎最优的，展现了所提出的界定方法的实际效用。这个例子一个有趣的延伸是这意味着，除非启发式控制器所实现保真度的估计存在（极不可能的）重大统计误差，否则本案例研究构成了一项计算证明：在假设条件下，齐次探测装置能够实现严格且显著高于光子计数的平均保真度。这表明，所提出的界定方法或可为量子器件的早期设计提供有价值的见解。

VII. 结论

借助量子滤波理论和矩和平方和技术，我们构建了一系列凸优化问题，为一大类受连续测量的量子系统的最佳可达反馈控制性能提供了一系列单调改进且可实际计算的界。在满足技术条件时，我们证明了该界序列收敛于真实的最优控制性能。以腔中的量子比特为例，我们论证了所提出的界定方法对受控量子器件的设计具有重要意义。一方面，该方法既能提供启发式控制器，也能给出性能界，从而指导控制器设计，或验证给定控制策略的最优性。另一方面，这些界可作为基本限制的见证，因此有助于量子系统的早期设计。

致谢

感谢 Gaurav Arya 和 Aparna Gupte 提供的宝贵讨论意见。本文作者所表达的观点和意见不一定代表或反映美国政府或其任何机构的立场。本文档所载的观点和结论仅属于作者，不应被解释为代表美国的官方政策，无论这些政策是明示的还是默示的

空军或美国政府。美国政府有权出于政府用途复制和发行重印本，即使本文中包含任何版权声明。

参考文献

[1] S. J. Glaser 等人。《训练薛定谔的猫：量子最优控制》。《欧洲物理学杂志 D》69.12（2015），第 1–24 页。[2] C. P. Koch 等人。《量子技术中的量子最优控制：欧洲当前研究现状、愿景与目标战略报告》。《EPJ 量子技术》9.1（2022），第 19 页。[3] H. M. Wiseman 和 G. J. Milburn。《量子测量与控制》。剑桥大学出版社，2009。[4] V. Belavkin。《福克空间中的非破坏性随机微积分，以及量子系统中的非线性滤波与控制》。《第二十四届卡尔帕奇冬季学校论文集：数学与物理中的随机方法》。世界科技出版公司，新加坡。1988，第 310–324 页。[5] L. Bouten、S. Edwards 和 V. P. Belavkin。《量子比特态最优反馈控制的贝尔曼方程》。《物理学杂志 B：原子、分子与光学物理》38.3（2005），第 151 页。[6] V. P. Belavkin、A. Negretti 和 K. Mølmer。《连续观测量子系统的动态规划》。《物理评论 A》79.2（2009），第 022123 页。[7] V. P. Belavkin。《量子随机过程的非破坏性测量、非线性滤波与动态规划》。《系统建模与控制：工程、量子力学、经济学与生物科学——1988 年贝尔曼连续统研讨会论文集》，1988 年 6 月 13–14 日，法国索菲亚·安提波利斯。Springer。2006，第 245–265 页。[8] M. Abdelhafez、D. I. Schuster 和 J. Koch。《利用量子轨迹和自动微分对开放量子系统进行基于梯度的最优控制》。《物理评论 A》99.5（2019），第 052327 页。[9] F. Sch¨afer 等人。《通过可微编程控制随机量子动力学》。《机器学习：科学与技术》2.3（2021），第 035004 页。[10] R. Porotti 等人。《利用弱非线性测量进行量子态制备的深度强化学习》。《量子》6（2022），第 747 页。[11] P.-L. Lions 和 J.-L. Menaldi。《随机积分最优控制与哈密顿–雅可比–贝尔曼方程 I》。《工业与应用数学学会控制与优化杂志》20.1（1982），第 58–81 页。[12] W. H. Fleming 和 D. Vermes。《基于凸对偶的扩散过程最优控制方法》。《工业与应用数学学会控制与优化杂志》27.5（1989），第 1136–1155 页。[13] A. G. Bhatt 和 V. S. Borkar。《受控马尔可夫过程的占用测度：刻画与最优性》。《概率年刊》24.3（1996），第 1531–1562 页。[14] P. A. Parrilo。《鲁棒性与优化中的结构化半正定规划和半代数几何方法》。博士论文。加州理工学院，2000。[15] J. B. Lasserre。《利用多项式进行全局优化与矩问题》。《工业与应用数学学会优化杂志》11.3（2001），第 796–817 页。[16] J. B. Lasserre 等人。《通过占用测度和线性矩阵不等式松弛实现非线性最优控制》。《工业与应用数学学会控制与优化杂志》47.4（2008），第 1643–1666 页。[17] C. Savorgnan、J. B. Lasserre 和 M. Diehl。《通过占用测度和矩松弛实现离散时间随机最优控制》。《2009 年第 48 届 IEEE 决策与控制会议（CDC）暨中国控制会议论文集》，第 519–524 页。IEEE。[18] F. Holtorf、A. Edelman 和 C. Rackauckas。《通过局部占用测度实现随机最优控制》。arXiv:2211.15652:v2（2024）。[19] V. P. Belavkin。《量子随机微积分与量子非线性滤波》。《多元分析杂志》42.2（1992），第 171–201 页。[20] H. Whitney。《定义在闭集上的可微函数的解析扩展》。《哈斯勒·惠特尼论文集》（1992），第 228–254 页。[21] K. Jacobs 和 D. A. Steck。《连续量子测量简明入门》。《当代物理学》47.5（2006），第 279–303 页。[22] V. S. Bhaskara 和 P. K. Panigrahi。《利用拉格朗日恒等式和楔积对多粒子纯态纠缠进行可靠量化的广义并发度度量》。《量子信息处理》16.5（2017），第 118 页。[23] B. Oksendal 和 A. Sulem。《跳扩散的应用随机控制》。第 2 版。Springer，2007。[24] B. Oksendal。《随机微分方程》。第 5 版。Springer，2003。[25] M. Putinar。《紧半代数集上的正多项式》。《印第安纳大学数学杂志》42.3（1993），第 969–984 页。[26] J.-B. Lasserre。《矩、正多项式及其应用》。第 1 卷。世界科技出版公司，2010。[27] I. Dunning、J. Huchette 和 M. Lubin。《JuMP：用于数学优化的建模语言》。《工业与应用数学学会评论》59.2（2017），第 295–320 页。[28] T. Weisser 等人。《Julia 和 JuMP 中的多项式与矩优化》。JuliaCon。2019。[29] B. Legat 等人。《MathOptInterface：数学优化问题的数据结构》。《INFORMS 计算杂志》34.2（2022），第 672–689 页。[30] J. Bezanson 等人。《Julia：一种数值计算的新方法》。《工业与应用数学学会评论》59.1（2017），第 65–98 页。[31] E. Andersen 和 K. Andersen。《用于线性规划的 MOSEK 内点优化器：齐次算法的实现》。《高性能优化》。Springer，2000，第 197–232 页。[32] K.-C. Toh、M. J. Todd 和 R. H. T¨ut¨unc¨u。《SDPT3——半定规划 MATLAB 软件包，1.3 版》。《优化方法与软件》11.1-4（1999），第 545–581 页。[33] J. F. Sturm。《使用 SeDuMi 1.02：用于对称锥优化的 MATLAB 工具箱》。《优化方法与软件》11.1-4（1999），第 625–653 页。[34] B. O’Donoghue 等人。《通过算子分裂和齐次自对偶嵌入实现锥优化》。《优化理论与应用杂志》169.3（2016），第 1042–1068 页。[35] M. Garstka、M. Cannon 和 P. Goulart。《COSMO：用于凸锥问题的锥算子分裂方法》。《优化理论与应用杂志》190.3（2021），第 779–810 页。[36] C. Coey、L. Kapelevich 和 J. P. Vielma。《利用 Hypatia.jl 求解自然锥形式》。《*INFORMS* 计算杂志》34.5（2022），第 2686–2699 页。[37] D. Henrion、J. B. Lasserre 和 C. Savorgnan。《通过占用测度综合非线性最优控制》。《*2008* 年第 *47* 届 *IEEE* 决策与控制会议》。IEEE。2008，第 4749–4754 页。[38] R. Deits、T. Koolen 和 R. Tedrake。《LVIS：通过值函数区间学习，实现具备接触感知能力的机器人控制器》。《*IEEE* 国际机器人与自动化会议论文集》。第 2019 年 5 月卷。电气电子工程师学会，2019 年 5 月，第 7762–7768 页。[39] D. Bertsimas 和 B. Stellato。《优化的声音》。《机器学习》110（2021），第 249–277 页。