arXiv:2304.03371v1 [math.LO] 6 Apr 2023

# 凝聚幂结构*

Valentina Harizanov 数学系 乔治·华盛顿大学 华盛顿哥伦比亚特区 20052，美国
harizanv@gwu.edu

Keshav Srinivasan 数学系 乔治·华盛顿大学 华盛顿哥伦比亚特区20052，美国
ksrinivasan@gwu.edu

2023年4月10日

摘要

结构的凝聚幂是结构的经典超幂的一种有效类比。我们从一个可计算结构出发，考察它在自然数的一个凝聚集上的可数超幂。凝聚集是一个关于可计算可枚举集不可分解的自然数无限集。它扮演超滤子的角色，而凝聚幂的元素是某些部分可计算函数的等价类。因此，与许多经典超幂不同，凝聚幂是可数结构。本文聚焦于图、等价结构以及具有满足各种性质的单个一元函数的可计算结构的凝聚幂；这些结构也可以看作有向图。对于这些可计算结构，我们研究其凝聚幂的同构类型，以及当凝聚幂与原结构不同构时凝聚幂所具有的性质。

2010年数学主题分类。主要分类 03C57，次要分类 03D45。

关键词和短语：凝聚幂、可计算结构、图、等价结构、部分单射结构、二对一结构。

*致谢 作者衷心感谢 NSF FRG资助项目 DMS-2152095 的支持。

# 1 引言与预备知识

我们考察一种针对结构的可计算性理论乘积构造。我们从同一可计算语言中的结构的一致可计算序列开始，并在它们的笛卡尔积中，考察模去一个固定的自然数凝聚集后的部分可计算序列。凝聚集是自然数的一个无限集，它相对于可计算可枚举集而言是不可分解的。在本文中，我们专注于作为单个可计算结构的幂的有效乘积。一些凝聚集是极大集的补集。余极大幂自然产生于对可计算可枚举向量空间格的自同构的研究中。特别是，Dimitrov [8] 使用域的凝聚幂刻画了拟极大向量空间的主滤子。随后，他在 [7] 中一般性地引入了可计算结构的凝聚幂这一概念。凝聚幂构造产生一个可数结构，因为其中的元素由部分可计算函数表示。在某些情况下，部分可计算函数可以由可计算函数替代。

凝聚幂的动机可追溯至 Skolem 构造可数非标准算术模型的工作（见 [10]）。他没有使用自然数上的所有函数来构造结构，而只使用算术函数。Feferman、Scott 和 Tennenbaum [15], 、Lerman [20]、Hirschfeld 和 Wheeler [18, 19]，以及 McLaughlin [22, 23, 24]在研究算术片段的模型时进一步发展了 Skolem 的这一思想。在 [25], 中，Nelson 研究了有效超积的递归饱和性。

凝聚幂构造使我们能够得到具有有趣性质的可数模型。结构 $\mathcal{A}$ 的凝聚幂可能与 $\mathcal{A}$初等等价。Dimitrov 为凝聚幂建立了 Lo´s 定理的一个受限版本。然而，对结构施加额外的可判定性条件，对于提高超幂中同一句子的可满足性起着重要作用。

回顾可计算性理论中的以下概念。集合 $X \subseteq \omega$ 的补集记作 $\overline{X}$。我们用 $\subseteq^*$ 表示除有限多个元素外的包含。c.e. 是可计算可枚举（computably enumerable）的缩写。若无限集合 $C \subseteq \omega$ 对于每个可计算可枚举集合 $W$ 都满足 $W \cap C$ 或 $\overline{W} \cap C$ 为有限集，则称其为凝聚集。若 $W \cap C$ 是无限的，则 $C \subseteq^* W$；若 $\overline{W} \cap C$ 是无限的，则 $C \subseteq^* \overline{W}$。显然，凝聚集的无限子集也是凝聚集。因此，如果凝聚集 $C$ 除有限多个元素外包含于有限个可计算可枚举集合的并集中，那么它除有限多个元素外包含于其中一个集合。也就是说，这是因为 $C$ 必定与并集中的至少一个有限个可计算可枚举集合有无限交集。可以证明，每个自然数的无限集合都有一个凝聚子集。因此，凝聚集有连续统多个。有些凝聚集是可计算可枚举集合的补集。当且仅当 $E$ 是可计算可枚举的且 $\overline{E}$ 是凝聚集时，集合 $E \subseteq \omega$ 是极大的。

如果 $L$ 是一个定义域为 $A$的结构 $\mathcal{A}$ 的语言，那么 $L_A$ 是通过为每个 $a \in A$添加一个常量符号而扩展得到的语言$L$，而 $\mathcal{A}_A = (\mathcal{A}, a)_{a \in A}$则是将 $\mathcal{A}$ 扩展到 $L_A$所得的对应扩展。$\mathcal{A}$ 的原子图是 $L_A$ 中在 $\mathcal{A}_A$里为真的所有原子句子及其否定所组成的集合。一个可数

可计算语言 $L$ 上的结构是可计算的，当且仅当其定义域可计算，且其原子图可计算；等价地说，其函数和关系都是一致可计算的。$\mathcal{A}$的初等图（或完全图）记作 $D^c(\mathcal{A})$，是 $L_A$ 中在$\mathcal{A}_A$里为真的所有一阶句子所组成的集合。 $\mathcal{A}$ 的 $\Sigma^0_n$ 图是 $D^c(\mathcal{A})$中的所有 $\Sigma^0_n$ 句子所组成的集合。如果一个结构的定义域可计算且其初等图可计算，则称该结构是可判定的。如果一个结构的定义域可计算且其 $\Sigma^0_n$ 图可计算，则称该结构是 $n$-可判定的。特别地，可计算结构与 0-可判定结构相同。

现在我们给出 [9] 中出现的可计算结构的凝聚积的定义。用 $\simeq$ 表示部分函数的相等。

定义 1 设 $L$ 是一种可计算语言。设 $(\mathcal{A}_i)_{i\in\omega}$ 是 $L$ 中一列一致可计算的可计算结构，其定义域序列 $(A_i)_{i\in\omega}$ 也是一致可计算的。设 $C \subseteq \omega$ 是一个凝聚集。$\mathcal{A}_i$ 关于 $C$ 的凝聚积 $\mathcal{B}$，记作 $\mathcal{B} = \prod_C \mathcal{A}_i$，是如下定义的一个结构。

1. 设

$$D = \{\psi \mid \psi : \omega \to \bigcup_{i\in\omega} A_i \text{ is a partial computable function} \wedge C \subseteq^* dom(\psi)\}.$$

对于 $\psi_1$、$\psi_2 \in D$，令

$$\psi_1 =_C \psi_2 \quad \textit{iff} \quad C \subseteq^* \{i : \psi_1(i)\downarrow = \psi_2(i)\downarrow\}.$$

$\prod_C \mathcal{A}_i$ 的定义域是商集 $D/_{=_C}$，在此记为 $B$。

2. 如果 $f \in L$ 是一个 $n$ 元函数符号，那么 $f^{\mathcal{B}}$ 是 $B$ 上的一个 $n$ 元函数，并且对于每个 $[\psi_1]$，.. ., $[\psi_n] \in B$，都有”】【

$$f^{\mathcal{B}}([\psi_1],\ldots,[\psi_n]) = [\psi] \quad \textit{iff} \quad (\forall i \in \omega)\left[\psi(i) \simeq f^{\mathcal{A}_i}(\psi_1(i),\ldots,\psi_n(i))\right].$$

3. 如果 $R \in L$ 是一个 $m$ 元关系符号，那么 $R^{\mathcal{B}}$ 是 $B$上的一个 $m$ 元关系，使得对于每个 $[\psi_1]$, .. ., $[\psi_m] \in B$,

$$R^{\mathcal{B}}([\psi_1],\ldots,[\psi_m]) \quad \textit{iff} \quad C \subseteq^* \{i \in \omega \mid R^{\mathcal{A}_i}(\psi_1(i),\ldots,\psi_m(i))\}.$$

4. 如果 $c \in L$ 是常量符号，那么 $c^{\mathcal{B}}$ 是关于 $=_C$ 的等价类，即满足以下条件的可计算函数 $g$： $\omega \to \bigcup_{i\in\omega} A_i$，使得对于每个 $i \in \omega$， $g(i) = c^{\mathcal{A}_i}$。

如果 $C$ 是余可枚举的，那么对于每个 $[\psi] \in \prod_C \mathcal{A}_i$ ，存在一个可计算函数$f$ ，使得 $[f] = [\psi]$。也就是说，对于（$a_i$）$_i \in \Pi_i A_i$ ，它是一个固定可计算序列，定义

$$f(i) = \begin{cases} \psi(i) & \text{if } \psi(i)\downarrow \text{ first,} \\ a_i & \text{if } i \text{ is enumerated into } \overline{C} \text{ first.} \end{cases}$$

如果 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ 对于 $i \in \omega$，那么 $\prod_C \mathcal{A}_i$ 称为 $\mathcal{A}$ 在 $C$上的凝聚幂，记作 $\prod_C \mathcal{A}$.

结构 $\mathcal{A}$ 到结构 $\mathcal{B}$ 的嵌入，是 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$的一个子结构之间的同构。结构 $\mathcal{A}$ 嵌入到其凝聚幂 $\mathcal{B} = \prod_C \mathcal{A}$中。对于 $a \in A$ ，令 $[c_a] \in B$ 为全函数 $c_a$ 的等价类，其中 $c_a(i) = a$ 对每个 $i \in \omega$都成立。函数 $d : A \to B$ ，满足 $d(a) = [c_a]$ ，称为 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$中的典范嵌入。

在 [9, 13] 中，我们为一致可计算结构的凝聚积，以及更一般的一致 $n$-可判定结构的凝聚积，给出 Lo´s 定理的变体。例如，在一个 $n$-可判定结构中为真的每个 $\Sigma^0_{n+3}$ 句子，在其凝聚幂中也为真。特别地，对于可计算结构的凝聚幂，我们有以下定理。

定理 2（Dimitrov *[7]*）设 $\mathcal{B} = \prod_C \mathcal{A}$ 是一个可计算结构的凝聚幂 $\mathcal{A}.$ ，设 $C$ 是一个凝聚集。

1. 如果 $\sigma$ 是 $L$ 中的 $\Pi^0_2$（或 $\Sigma^0_2$）句子，那么 $\mathcal{B} \models \sigma$ 当且仅当 $\mathcal{A} \models \sigma.$

2. 如果 $\sigma$ 是 $L$ 中的 $\Pi^0_3$ 句子，那么 $\mathcal{B} \models \sigma$ 蕴含 $\mathcal{A} \models \sigma.$

   由逆否命题可知，如果 $\sigma$ 是 $L$ 中的 $\Sigma^0_3$ 句子，那么 $\mathcal{A} \models \sigma$ 蕴含 $\mathcal{B} \models \sigma$

前一定理第 (2) 部分的逆命题不成立。Feferman、Scott 和 Tennenbaum 首先给出了这样的反例：他们在 [15] 中证明，算术标准模型的任何凝聚幂都不是皮亚诺算术的模型。存在一个涉及 Kleene$T$ 谓词的 $\Pi^0_3$ 句子，它在算术标准模型 $\mathcal{N}$ 中为真，但在 $\mathcal{N}$ 的每个凝聚幂中都为假（参见 [20]）。最近，在 [13], 中，我们给出了关于线性序的这类句子的自然例子。

在 [7], Dimitrov 证明了，如果 $\mathcal{A}$ 是一个可判定结构，那么 $\mathcal{A}$ 和$\prod_C \mathcal{A}$ 满足相同的一阶句子，即它们初等等价。 $n$-可判定结构也有一个相应的结果，见[14]。

等价结构 $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ 由集合 $A$ 和二元关系 $E^{\mathcal{A}}$ 构成，其中该关系是自反、对称且传递的。等价结构 $\mathcal{A}$ 是可计算的，当且仅当 $A$ 是可计算集且 $E^{\mathcal{A}}$ 是可计算关系。定理 2 的一个应用是：如果 $\mathcal{A}$ 是可计算等价结构，那么 $\prod_C \mathcal{A}$ 也是。原因在于，等价结构的理论是 $\Pi^0_1$-公理化的。同样，可计算域的凝聚幂也是一个域。在 [12], 中，我们研究了有理数域 $\mathbb{Q}$ 在

余极大集上的凝聚幂。例如，我们证明了，$\mathbb{Q}$ 在余极大集上的两个凝聚幂同构，当且仅当这些极大集具有相同的 $m$-度。

Dimitrov [7] 证明了，如果 $\mathcal{A}$ 是有限结构，那么 $\prod_C \mathcal{A} \cong \mathcal{A}$。此外，如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是可计算同构的结构，并且 $C$ 是一个凝聚集，那么$\Pi_C\mathcal{A} \cong \Pi_C\mathcal{B}$（证明见 [13]）。如果一个可计算结构 $\mathcal{A}$的每个可计算同构结构都与 $\mathcal{A}$可计算同构，则称其为可计算范畴的。

可计算（无穷）语言比通常的有限一阶语言表达能力更强。对于一个可计算序数 $\alpha$，Ash 递归地并同时定义了 $L_{\omega_1\omega}$ 的可计算$\Sigma_\alpha$ 和 $\Pi_\alpha$ 公式，并为它们赋予 G¨odel 数。对于自然数，我们大致有如下的公式分类。可计算的 $\Sigma_0$ 和 $\Pi_0$ 公式正是有限的无量词公式。对于 $n > 1$，一个可计算的 $\Pi_n$ 公式是公式 $\forall \overline{u}\, \phi$（$\overline{x}$、$\overline{u}$）的可计算可枚举合取，其中 $\phi$ 是某个$m < n$的可计算 $\Sigma_m$ 公式。对偶地，一个可计算的 $\Sigma_n$ 公式是公式$\exists \overline{v}\, \theta$（$\overline{y}$、$\overline{v}$）的可计算可枚举析取，其中 $\theta$ 是某个 $m < n$的可计算 $\Pi_m$ 公式。（见 [16]。）关于可计算性理论的更多内容，参见 [26]。用 $\langle k、\ n\rangle$ 表示从 $\omega^2$ 到 $\omega$的一个可计算双射，它关于每个坐标都严格递增，并且满足 $k、\ n \leq \langle k、\ n\rangle$。

本文是对 [17]中初步工作的极大扩展版，该初步工作将发表于美国数学学会（AMS）西部区域分会秋季会议之后的论文集，会议于2021年10月23日至24日举行。在那里，我们研究了某些图和等价结构的凝聚幂。例如，我们证明了每个可计算图都可以嵌入到某个强局部有限图的凝聚幂中。在本文中，我们还研究了具有满足各种性质的单个一元函数的可计算结-构，这些结构被称为单射结构、二对一结构和（2,0）-对一结构。我们进一步将部分单射结构视为关系结构，并研究其凝聚幂。我们刻画了这些可计算结构的凝聚幂的同构类型，并使用可计算（无穷）语言描述凝聚幂在不同构于原结构时的性质。

## 2 图的凝聚幂

一个图（或无向图）$(V, E)$是一个非空的 $V$ 顶点集合，带有一个对称的二元关系 $E$ （也称为边关系），因此可以用以下全称句子公理化：

$$\forall x \forall y[E(x, y) \Rightarrow E(y, x)].$$

因此，根据定理 2，图的凝聚幂也是一个图。

如果（$x$，$y$）$\in E$，那么顶点 $x$ 和 $y$ 彼此相邻。顶点的度是与其相邻的顶点数。若图 $G$ 中每个顶点的度都是有限的，则称图 $G$ 为局部有限图。若图 $G$ 的所有连通分支都是有限的，则称图 $G$ 为强局部有限图。在 [5], 中，针对某些强局部有限可计算图的可计算范畴性，给出了一个判据。

图（$V_1$， $E_1$）与图（$V_2$， $E_2$）的不交并，其中 $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ 是图（$V_1 \cup V_2$, $E_1 \cup E_2$）。因此， $V_1$ 与 $V_2$之间没有边。我们将（$V_1$， $E_1$） $\amalg$ （$V_2$， $E_2$）记作不交并分解。若$V_1 \cap V_2 = \varnothing$，则图 $G_1 =$ （$V_1$， $E_1$）与图 $G_2 =$ （$V_2$， $E_2$）的并，是任意满足 $E_1 \cup E_2 \subseteq E$ 且 $E \upharpoonright$ （$V_i \times V_i$） $= E_i$ 对于$i = 1$、2 的图 $G =$ （ $V_1 \cup V_2$， $E$ ）。我们简写为 $G = G_1 \cup G_2$.

下面的结果展示了某些可计算图的凝聚幂在嵌入性方面的普适性。

定理 3 设 $G$ 是一个可计算图。设 $C$ 是一个凝聚集。那么存在一个可计算的强局部有限图 $\mathcal{A}$ ，使得 $\Pi_C\mathcal{A}$ 与并集 $G \cup H$ 同构，其中 $G \cup H$ 对应某个图 $H$ 或 $H = \varnothing$。

证明。若 $G$ 是有限的，那么 $G$ 是强局部有限的，并且 $G \cong \Pi_C G$。

设 $\mathbb{N}^+ = \omega - \{0\}$. 现在，假设图 $G =$ （$V$， $R$）是无限的，并固定其顶点的一个可计算枚举 $f$ （ $V = \{f\}$ （$n$）： $n \in \mathbb{N}^+\}$. 。利用这个枚举，我们将构造一个定义域为 $\mathbb{N}^{+a}$、边集为 $E$ 的可计算图 $\mathcal{A}$ 。考虑顶点 $a$、$b \in \mathbb{N}^+$. 。若 $a$、$b$ 可写成 $a = {}^{k}{}_{(k+1)}{}_{2} + m$ 和 $b = {}^{k}{}_{(k+1)}{}_{2} + n$ 的形式，其中 $k$、$m$、$n$ ~~满足~~ $1 \leq m$、$n \leq \underline{k+1,}$ 则令

$$(a, b) \in E \Leftrightarrow (f(m), f(n)) \in R.$$

如果不存在上述的 $k, m, n$，那么令 $(a, b) \notin E$。注意， ${}^{k}{}_{(k+1)2} = 1 + 2 + \underline{\cdots + k,}$ 因此思路是将自然数划分为长度分别为 1、2、.....的区段。显然， $\mathcal{A}$是一个可计算的强局部有限图。

对于 $n \in N^+$，我们定义函数 $\psi_n$，使得 $\psi_n(x) = {}^{x}{}_{(x+1)}{}_{2} + n$。因此，每个 $[\psi_n]$都是凝聚幂 $\Pi_C\mathcal{A}$. 的一个元素。考虑 $\mathcal{A}$ 的子图 $\mathcal{S}$ ，其顶点集为 $\{[\psi_n]$： $n \in \mathbb{N}^+\}$。考虑函数 $\rho$: $\{[\psi_n]$： $n \in \mathbb{N}^+\} \to V$，定义为 $\rho([\psi_n]) = f(n)$。随后可以证明， $\rho$ 是一个图同构（见 [17]），因此 $\mathcal{S}$与 $G$. 同构。因此，对于某个图 $H$， $\Pi_C\mathcal{A}$与并 $G \cup H$同构。

如果可计算图 $G$ 是局部有限的，我们可以得到一个更强的结果。

定理 4 设 $G$ 是一个无限的局部有限可计算图。设 $C$是一个凝聚集。那么存在一个可计算的强局部有限图 $\mathcal{A}$，使得 $\Pi_C\mathcal{A}$ 与某个图 $H$的如下不交并 $G \sqcup H$ 同构。

证明。设 $G = (V, R)$。按前一定理的证明定义 $f, \mathcal{A}, \psi_n, \rho$。设 $\varphi$ 是一个部分可计算函数，使得 $[\varphi] \in \Pi_C A$ 且$E([\varphi], [\psi_m])$，其中某个 $m \geq 1$. 满足条件。那么 $C \subseteq^* \{i \in \omega$： $\varphi(i) \downarrow \wedge (\varphi(i)\ \psi_m(i)) \in E\}$。由于 $G$ 是局部有限的，我们有 $\{i \in \omega$： $\varphi(i) \downarrow \wedge (\varphi(i)\ \psi_m(i)) \in E\}$ 是以下有限个可计算可枚举集的不交并:

$$\coprod_{n: f(m) R f(n)} \{i \in \omega : \varphi(i) = \tfrac{i(i+1)}{2} + n \text{ where } 1 \leq m, n \leq i+1\}.$$

由于 $C$ 是凝聚的，因此存在某个 $n_0$ ，使得

$$C \subseteq^* \{i : \varphi(i) \downarrow = \tfrac{i(i+1)}{2} + n_0\} \subseteq \{i : \varphi(i) \downarrow = \psi_{n_0}(i)\}.$$

因此 $[\varphi] = [\psi_{n_0}]$. 因此， $\Pi_C\mathcal{A}$同构于不交并 $G \sqcup (\Pi_C\mathcal{A} - \{[\psi_m] : m \geq 1\})$。

■

# 3 等价关系的凝聚幂

设 $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ 是一个等价结构 $\mathcal{A}$。 $a \in A$的等价类为

$$eqv^{\mathcal{A}}(a) = \{x \in A : xE^{\mathcal{A}}a\}.$$

当可根据上下文推断上标时，我们通常省略它。

定义 5 (i) 设 $\mathcal{A}$ 是一个等价关系。 $\mathcal{A}$ 的特征是集合

$$\chi(\mathcal{A}) = \{\langle k, n\rangle : n, k > 0 \text{ and } \mathcal{A} \text{ has at least } n \text{ equivalence classes of size } k\}.$$

(ii) 若存在某个有限的 $k$ ，使得 $\mathcal{A}$ 的所有有限等价类的大小都不超过 $k$，则称 $\mathcal{A}$ 具有有界特征。

显然，两个可数等价结构若具有相同的特征，且无限等价类的数量相同，则它们同构。

对于集合 $X$，我们用 $card(X)$ 或 $|X|$ 表示 $X$. 的大小。令

$$Inf^{\mathcal{A}} = \{a : eqv^{\mathcal{A}}(a) \text{ is infinite}\} \text{ and } Fin^{\mathcal{A}} = \{a : eqv^{\mathcal{A}}(a) \text{ is finite}\}.$$

以下来自 [2] 的引理给出了我们一些重要的复杂性。

引理 6 对于任意可计算等价结构 $\mathcal{A}$:

(a) $\{\langle k, a\rangle : card(eqv^{\mathcal{A}}(a)) \leq k\}$ *is a* $\Pi^0_1$ *set, and* $\{\langle k, a\rangle : card(eqv^{\mathcal{A}}(a)) \geq k$ *is a* $\Sigma^0_1$ *set;*

(b) $Inf^{\mathcal{A}}$是一个 $\Pi^0_2$集合， $Fin^{\mathcal{A}}$是一个 $\Sigma^0_2$集合;

(c) $\chi(\mathcal{A})$ 是一个 $\Sigma^0_2$ 集合。

我们称 $K$ 的 $\omega$ 为一个特征，如果存在某个具有特征 $K$的等价结构。这等同于说，对于所有 $n > 0$ 和 $k$， $K \subseteq \langle \omega - \{0\}\rangle \times \langle \omega - 0\}\rangle$,

$$\langle k, n + 1\rangle \in K \Rightarrow \langle k, n\rangle \in K.$$

已在 [2] 证明，对于任意 $\Sigma^0_2$ 特征 $K$，都存在一个特征为 $K$的可计算等价结构 $\mathcal{A}$ ，它有无限多个无限等价类，同时 $Fin^{\mathcal{A}}$ 是一个 $\Pi^0_1$ 集。

定理 **7** *[2]* 令 $\mathcal{A}$ 为一个可计算等价结构。结构 $\mathcal{A}$是可计算范畴的，当且仅当它属于以下类型之一:

1. $\mathcal{A}$ 只有有限多个有限等价类；

2. $\mathcal{A}$ 有有限多个无限类，具有有界特征，并且至多有一个有限的 $k$ ，使得大小为 $k$的类有无限多个。

因此，如果 $\mathcal{A}$ 是如前一定理中的等价结构，并且 $\mathcal{D}$ 是与 $\mathcal{A}$ 同构的可计算结构，那么对于任意凝聚集 $C$ ，我们有 $\Pi_C\mathcal{A} \cong \Pi_C\mathcal{D}$.

命题 8 设 $\mathcal{A}$ 是一个可计算等价结构。设 $C$ 是一个凝聚集，并设 $\mathcal{B} = \Pi_C\mathcal{A}$.

(a) 那么 $\chi(\mathcal{B}) = \chi(\mathcal{A})$。

(b) 如果 $\mathcal{A}$ 有无限多个无限等价类，那么 $\mathcal{B}$ 也有无限多个无限等价类。

如果 $\mathcal{A}$ 恰有 $n$ 个无限等价类，那么 $\mathcal{B}$ 至少有 $n$ 个无限等价类。

(c) 如果 $\mathcal{A}$ 有无限等价类，那么 $\Pi_C\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$.

(d) 如果 $\mathcal{A}$ 具有有限多个有限等价类，且没有无限等价类，那么 $\Pi_C\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$.

证明。（a）等价结构的特征可由一个 $\Sigma^0_2$句子定义（见 [2]）。

(b) 这是成立的，因为存在一个从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$的嵌入。

(c) 这由 (a) 和 (b) 得出。也就是说，如果 $\mathcal{A}$ 有无限多个无限等价类，那么 $\Pi_C\mathcal{A}$ 也有无限多个无限等价类；并且由于 $\mathcal{A}$ 和 $\Pi_C\mathcal{A}$ 具有相同的特征，因此它们同构。

(d) 这是正确的，因为 $\mathcal{A}$ 是有限结构。 ■

定理 9 设 $\mathcal{A} = (A, E)$ 是一个可计算等价结构。设 $C$ 是一个凝聚集。如果 $\mathcal{A}$ 具有有界特征，那么 $\Pi_C\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$.

证明。由于 $\mathcal{A}$ 的特征是有界的，如果它非空，则令 $k \in \omega$ 为 $\mathcal{A}$的有限等价类的最大大小。如果 $\mathcal{A}$ 的特征为空，则令$k = 0$。回顾一下， $\mathcal{A}$ 和 $\Pi_C\mathcal{A}$ 具有相同的特征。如果 $\mathcal{A}$ 有无限多个无限等价类，则 $\mathcal{A}$ 和 $\Pi_C\mathcal{A}$ 同构。因此，假设$\mathcal{A}$ 至多有有限多个无限等价类。

若 $\mathcal{A}$ 没有无限等价类，则 $\mathcal{A}$ 满足以下 $\Pi^0_1$ 句子，说明不存在 $k+1$ 不等价元素：

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_{k+1})[\bigvee\nolimits_{1\le i<j\le k+1} x_i E x_j]$$

由于 $\Pi_C\mathcal{A}$ 满足相同的句子，因此它没有无限等价类，所以$\mathcal{A}$ 和 $\Pi_C\mathcal{A}$ 同构。

因此，假设 $\mathcal{A}$ 有 $m$ 无限等价类，其中 $m \in \omega$ 和$m > 0$。因此 $\mathcal{A}$ 满足以下 $\Sigma_2^0$ 句子，该句子说明恰好有$m$ 个等价类包含至少 $k+1$ 个元素，因而是无限的。我们将使用记号 $x_i^l$ 表示变量。

$$(\exists x_1^1)\cdots(\exists x_{k+1}^1)\cdots(\exists x_1^m)\cdots(\exists x_{k+1}^m)(\forall y_1)\cdots(\forall y_{k+1})[\bigwedge_{\substack{1\le l\le m\\ 1<i<j\le k+1}}(x_i^l \neq x_j^l \wedge x_i^l E x_j^l) \wedge (\bigwedge_{1\le i<j\le k+1}(y_i \neq y_j \wedge y_i E y_j) \Rightarrow \bigvee_{l=1,\ldots,m} y_1 E x_1^l)]$$

因此， $\Pi_C\mathcal{A}$ 满足相同的句子，所以它恰好有 $m$ 个无限等价类，因此它与 $\mathcal{A}$.同构。

■

定理10 设 $\mathcal{A} = (A, E)$是一个可计算等价结构。设 $C$ 是一个凝聚集。如果 $\mathcal{A}$ 具有无界特征，则 $\Pi_C\mathcal{A}$ 具有无穷多个无限等价类。

因此，如果 $\mathcal{A}$ 具有无界特征和有限个（可能为零个）无限等价类，那么 $\Pi_C\mathcal{A} \ncong \mathcal{A}$.

证明。不失一般性，我们假设 $A = \omega$. 因此可以按自然数的通常次序排列 $A$ 中的元素。令$\mathcal{B} = \Pi_C\mathcal{A}$，以及 $\mathcal{B} = (B, E_B)$。选取 $A$ 中的一个可计算序列:

$$a(0), a(1), a(2), a(3), \ldots$$

使它们都属于不同的等价类，并且对于每个 $k$， $a(k)$ 的等价类都有 $> k$ 个元素。由于 $E$ 是可计算的，且 $\mathcal{A}$ 的特征无界，因此可以通过枚举 $A$ 并检查条件来得到这样一个序列。我们可以将 $a(\langle m, i\rangle)$ 视为 $\mathcal{A}$ 中等价类的一个代表，其中部分函数 $\psi_{m,\ *}$ 可能取其 $i^{th}$ 坐标值（对于 $i \ge 0$）。也就是说，按如下方式定义部分可计算函数 $\psi_{m,\ n}(i)$，其中 $m$、 $i \ge 0$ 和 $n \ge 1$:

$$\psi_{m,n}(i) = \begin{cases} c_n & c_n \text{ is the } n^{th} \text{ element in } eqv(a\langle m,i\rangle) \text{ if it exists;} \\ \uparrow & \text{otherwise.} \end{cases}$$

每个 $\psi_{m,\ n}$ 除了可能有限个初始值外，均有定义，因此 $C \subseteq^* dom(\psi_{m,\ n})$。于是 $[\psi_{m,n}] \in B$.

固定 $m$.。令 $n_1 \neq n_2$。那么我们有 $[\psi_{m,n_1}] \neq [\psi_{m,n_2}]$，因为 $|eqv(a(\langle m,i\rangle)| > \langle m,i\rangle \ge i$，所以从某个 $i$ 开始， $eqv(a\langle m,i\rangle)$ 将具有 $n_1^{th}$ 和 $n_2^{th}$ 个元素，并且它们彼此不同。此外， $[\psi_{m,n_1}]E_B[\psi_{m,n_2}]$ ，因为 $\psi_{m,\ n_1}$ 和 $\psi_{m,\ n_2}$ 的值（若有定义）都来自 $\mathcal{A}$ 中的同一个等价类。因此， $[\psi_{m,1}]$ 的等价类是无限的。

现在，令 $m_1 \neq m_2$. 那么 $\neg([\psi_{m_1,1}]E_B[\psi_{m_2,1}])$，因为 $\psi_{m_1,\ 1}$ 和$\psi_{m_2,\ 1}$（当有定义时）的值分别来自 $\mathcal{A}$ 中不同的等价类。 ■

推论 11 设 $\mathcal{A} = (A, E)$ 是一个可计算等价结构。设 $C$ 是一个凝聚集。当且仅当 $\mathcal{A}$ 具有有界特征或无限多个等价类时，$\Pi_C\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$ 。

在 [1] 中证明了，以下模型论结果对等价结构成立。设公式 $\gamma_k(x)$ 表示 $x$ 的等价类至少有 $k$ 个元素，其中 $k \in \omega - \{0\}$。扩充了一元谓词 $\{\gamma_k$ 的等价关系语言 $\{E\}$ ： $k \geq 1\}$ 具有量词消去性质；也就是说，原语言中的每个一阶公式在新语言中都逻辑等价于一个无量词公式。由于公式$\gamma_k(x)$是 $\Sigma_1^0$ 公式，因此，可计算等价结构 $\mathcal{A}$及其凝聚幂满足相同的一阶句子。然而，在某些情况下，可以使用可计算（无穷）句子来区分它们。

推论 12 设 $\mathcal{A} = (A, E)$ 是一个特征无界且没有无限等价类的可计算等价结构。设 $C$ 是一个凝聚集。那么存在一个可计算无穷句子 $\Sigma_3$ ，使得 $\alpha$ 和 $\Pi_C\mathcal{A} \models \alpha$ 以及 $\mathcal{A} \models \neg\alpha$.

证明。我们知道， $\Pi_C\mathcal{A}$ 有一个无限等价类，而 $\mathcal{A}$ 没有。令 $\alpha$ 为表示存在一个无限等价类的句子:

$$\exists x \bigwedge_{n\in\omega} [\exists y_1 \cdots \exists y_n \bigwedge_{1\leq i<j\leq n} (y_i \neq y_j \wedge xEy_i)].$$

因此， $\alpha$ 是一个在 $\Pi_C\mathcal{A}$ 中为真、但在 $\mathcal{A}$中为假的可计算句子。 ■

# 4 单射结构

现在我们将研究具有单个一元函数的结构。单射结构 $\mathcal{A} = (A, f)$由一个非空集合 $A$及一个一一函数$f$: $A \to A$组成。令 $f^0(a) =_{def} a$。给定 $a \in A$， $a$ 在 $f$ 下的轨道定义为

$$\mathcal{O}_f(a) = \{b \in A : (\exists n \in \omega)[f^n(a) = b \vee f^n(b) = a]\}.$$

我们知道，轨道 $\mathcal{O}_f(a)$的大小为 $k \geq 1$，当且仅当 $f^k(a) = a$且$(\forall t < k)[f^t(a) \neq a]$。因此，性质 $card(\mathcal{O}_f(a)) = k$是可计算的。

类比于等价结构的特征，我们将单射结构 $\mathcal{A}$ 的特征 $\chi(\mathcal{A})$定义如下:

$$\chi(\mathcal{A}) = \{\langle k, n\rangle \in \langle \omega - \{0\}\rangle \times \langle \omega - \{0\}\rangle : \mathcal{A} \text{ has at least } n \text{ orbits of size } k\}.$$

因此， $\langle k, n\rangle \in \chi(\mathcal{A})$ 当且仅当

$$(\exists x_1)\cdots(\exists x_n)\left(\bigwedge_{i=1}^n card(\mathcal{O}_f(x_i)) = k \wedge \bigwedge_{i\neq j}(\forall t < k)[f^t(x_i) \neq x_j]\right).$$

我们用 $ran(f)$ 表示 $f$ 的值域， $ran(f) = f(A)$。单射结构 $(A, f)$ 可能有两种类型的无限轨道： $Z$-轨道，它们同构于

$(\mathbb{Z}, S)$，其中每个元素都属于 $ran(f)$；以及 $\omega$-轨道，它们同构于 $(\omega, S)$，形式为 $\mathcal{O}_f(a) = \{f^n(a) : n \in \omega\}$，其中$a \notin ran(f)$。因此，单射结构由每个有限 $k$ 对应的大小为 $k$ 的轨道数量，以及类型为 $Z$ 和类型为 $\omega$ 的轨道数量所刻画。

对于每个可计算单射结构 $\mathcal{A} = (A, f)$，重要关系的算术复杂度如下：

(a) $\{(k, a) : a \in ran(f^k)\}$ 是一个 $\Sigma^0_1$ 集，
(b) $\{(a, k) : card(\mathcal{O}_f(a)) \geq k\}$ 是一个$\Sigma^0_1$ 集，(c) $\{a : \mathcal{O}_f(a)$ 是无限的$\}$ 是一个$\Pi^0_1$ 集，(d) $\{a : \mathcal{O}_f(a)$ 的类型为 $Z\}$ 是一个 $\Pi^0_2$ 集，(e) $\{a : \mathcal{O}_f(a)$的类型为 $\omega\}$ 是一个$\Sigma^0_2$ 集，以及 (f) $\chi(\mathcal{A})$ 是一个 $\Sigma^0_1$ 集。

文献 [3] 已证明，对于任意可计算可枚举特征 $K$，都存在一个可计算单射结构 $\mathcal{A} = (\omega, f)$，其特征为 $K$，并且具有任意指定的有限个或可数无穷多个类型为 $\omega$ 和 $Z$ 的轨道；此外，$ran(f)$ 是可计算的，且 $\{a : \mathcal{O}_f(a)$ 是有限的$\}$ 是可计算的。

定理 **13** *[3]* 一个可计算单射结构 $\mathcal{A}$ 是可计算范畴的，当且仅当 $\mathcal{A}$ 有有限多个无限轨道。

因此，如果 $\mathcal{A}$ 是一个具有有限个无限轨道的单射结构，并且 $\mathcal{D}$ 是一个与 $\mathcal{A}$ 同构的可计算结构，那么对于任意凝聚集 $C$，我们有 $\Pi_C\mathcal{A} \cong \Pi_C\mathcal{D}$.

我们将用 $f^{-1}(b)$表示唯一的 $a$，使得 $f(a) = b$（如果存在），记作 $f^{-1}(b)\downarrow = a$；否则，$f^{-1}(b)$未定义，我们也将其记作$f^{-1}(b)\uparrow$。对于 $n \geq 1$，我们用 $f^{-n}$表示一个部分函数（$f^{-1}$）$^n$。

由于单射结构满足以下公理

$$\forall x \forall y[f(x) = f(y) \Rightarrow x = y],$$

我们有一个可计算单射结构的凝聚幂是一个单射结构。我们希望确定这类凝聚幂的同构类型。

命题14 设 $\mathcal{A} = (A, f)$是一个可计算单射结构。设 $C$ 是一个凝聚集，并且 $\mathcal{B} = \Pi_C\mathcal{A}$.

(a) 那么 $\chi(\mathcal{B}) = \chi(\mathcal{A})$。(b) 结构 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 具有相同数量的 $\omega$-轨道。
(c) 如果 $\mathcal{A}$ 具有有界特征且没有无限轨道，那么 $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

证明。(a) 可计算单射结构的特征可以由一个$\Sigma_1^0$ 句子定义。

(b) 令 $n \in \omega - \{0\}$. 我们可以通过以下 $\Sigma_2^0$ 句子 $\sigma_n$说明有 $\geq n$ 许多 $\omega$-轨道:

$$(\exists x_1)\cdots(\exists x_n)(\forall y)[\bigwedge_{1\leq i<j\leq n} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{1\leq i\leq n} x_i \neq f(y)].$$

因此，拥有 $< n$ 许多 $\omega$-轨道可以用一个 $\Pi_2^0$ 句子 $\neg\sigma_n$来表达。因此，如果 $\mathcal{A}$ 没有 $\omega$-轨道，那么 $\mathcal{B}$ 没有 $\omega$-轨道；如果 $\mathcal{A}$ 恰好有 $n$ 个$\omega$-轨道，那么 $\mathcal{B}$ 恰好有 $n$ 个 $\omega$-轨道。如果 $\mathcal{A}$ 有无穷多个 $\omega$-轨道，那么对于每个 $n \geq 1$， $\mathcal{A} \vDash \sigma_n$ ，从而 $\mathcal{B} \vDash \sigma_n$，所以 $\mathcal{B}$ 有无穷多个 $\omega$-轨道。最后一个结论也可由 $\mathcal{A}$ 可以嵌入 $\mathcal{B}$这一事实推出。

(c) 由于 $\mathcal{A}$ 的特征有界，令 $k \in \omega - \{0\}$ 为 $\mathcal{A}$ 的有限轨道的最大大小。

由于 $\mathcal{A}$ 没有无限轨道， $\mathcal{A}$ 满足以下 $\Pi_1^0$ 句子，表示不存在大小为 $k+1$的轨道:

$$\neg(\exists x)[\bigwedge_{1\leq i\leq k+1} f^i(x) \neq x]$$

因此， $\mathcal{B}$ 满足相同的句子，并且由于 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{A}$具有相同的特征，它与 $\mathcal{A}$同构。 ■

定理15 设 $\mathcal{A}$ 是一个具有无界特征的可计算单射结构。设 $C$ 是一个凝聚集，且 $\mathcal{B} = \Pi_C\mathcal{A}$. 那么 $\mathcal{B}$ 有无穷多个$Z$-轨道。

因此，如果 $\mathcal{A}$ 具有无界特征且只有有限多个 $Z$-轨道，那么 $A \ncong \Pi_C\mathcal{A}$.

证明。不失一般性，我们假设 $A = \omega$. 。选取 $A$中的一个可计算元素序列:

$$a(0), a(1), a(2), a(3), \ldots$$

使得这些元素都属于不同的有限轨道，并且对于每个 $k$， $a(k)$的轨道都包含 $> k$ 个元素。由于 $f$ 是可计算的，且 $\mathcal{A}$ 的特征无界，因此可以通过同时枚举 $A$ 中的元素并检查条件来得到这样的序列。

对于每个自然数 $m$ 和整数 $z \in \mathbb{Z}$，我们将定义一个可计算函数$\psi_{m,\ z}$ 如下:

$$\psi_{m,z}(i) = f^z(a(\langle m, i\rangle)).$$

每个 $[\psi_{m,z}]$ 都属于 $B$. Fix $m$。设整数 $z_1, z_2$ 使得 $z_1 \neq z_2$。从某个 $i_0$开始，$a(\langle m, i\rangle)$ 的轨道将足够大，以至于对于 $i \geq i_0$，我们将有

$$f^{z_1}(a(\langle m, i\rangle)) \neq f^{z_2}(a(\langle m, i\rangle)),$$

因此 $[\psi_{m,z_1}] \neq [\psi_{m,z_2}]$。此外，由于 $f^{z_2-z_1}([\psi_{m,z_1}]) = [\psi_{m,z_2}]$， $[\psi_{m,z_1}]$ 和 $[\psi_{m,z_2}]$ 属于 $\mathcal{B}$ 中的同一轨道。因此，集合 $\{[\psi_{m,z}] : z \in \mathbb{Z}\}$ 构成

一个 $Z$-轨道。另一方面，若 $m_1 \neq m_2$，则对于每个 $i, \langle m_1, i\rangle \neq \langle m_2, i\rangle$，所以 $a(\langle m_1, i\rangle)$ 和 $a(\langle m_2, i\rangle)$ 属于不同的轨道。因此，$[\psi_{m_1,0}]$ 和 $[\psi_{m_2,0}]$ 属于 $\mathcal{B}$ 中的不同轨道，所以存在无限多个 $Z$-轨道。 ■

定理 16 设 $\mathcal{A}$ 是一个具有无限轨道的可计算单射结构。设 $C$ 是一个凝聚集，并且 $\mathcal{B} = \Pi_C\mathcal{A}$. 那么 $\mathcal{B}$ 有无限多个 $Z$-轨道。

因此，如果 $\mathcal{A}$ 拥有一个无限轨道，但至多有有限个 $Z$-轨道，那么$\mathcal{A} \ncong \Pi_C\mathcal{A}$.

证明。假设 $\mathcal{A}$ 有一个无限轨道。令 $a$ 是该无限轨道中的一个元素。对于每个自然数 $m$ 和每个整数 $z$，我们定义一个部分可计算函数 $\psi_{m,\,z}$，使得 $\psi_{m.z}(n) = f^{m(2n+1)+n-1+z}(a)$。由于每个 $\psi$ 的定义域都是余有限的，我们有 $[\psi_{m,z}] \in B$。对于任意满足 $z_1 \neq z_2$ 的 $m$ 和 $z_1$，$z_2$，我们有 $\{n\colon \psi_{m,\,z_1}(n)\downarrow = \psi_{m,\,z_2}(n)\downarrow\} = \varnothing$，因为$a$的轨道是无限的；因此 $[\psi_{m,z_1}] \neq [\psi_{m,z_2}]$。我们还有 $f([\psi_{m,z}]) = [f \circ \psi_{m,z}] = [\psi_{m,z+1}]$。因此，对于每个 $m$，我们都有一个 $Z$-轨道 $\{[\psi_{m,z}]\colon z \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{O}([\psi_{m,0}])$。

现在，假设 $m_1 \neq m_2$。由于对任意 $k \in \omega$，我们有 $f^k([\psi_{m_1,0}]) \not\equiv [\psi_{m_2,0}]$，因此可得 $\mathcal{O}([\psi_{m_1,0}]) \neq \mathcal{O}([\psi_{m_2,0}])$。因此，$\mathcal{B}$ 具有无穷多个$Z$-轨道。 ■

推论 17 设 $\mathcal{A} = (A, f)$ 是一个可计算单射结构。设 $C$ 是一个凝聚集。那么 $\Pi_C\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$ 当且仅当 $\mathcal{A}$ 具有有界特征且没有无限轨道，或者 $\mathcal{A}$ 有无限多个 $Z$-轨道。

在 [3] 中已表明，以下模型论结果适用于单射结构。设公式 $\gamma_k(x)$表述（$\exists y$）$[f^k(y) = x]$。那么在用一元谓词$\{\gamma_k$ 扩充的单射结构的语言 $\{f\}$ 中：$k \geq 1\}$ 我们有量词消去；也就是说，原语言中的每个一阶公式在逻辑上都等价于新语言中的无量词公式。由于公式 $\gamma_k(x)$是$\Sigma_1^0$ 公式，因此，一个可计算单射结构 $\mathcal{A}$ 及其凝聚幂满足相同的一阶句子。然而，在某些情况下，可以利用可计算的（无穷）句子加以区分。

推论18 如果 $\mathcal{A}$ 是一个特征无界且没有无限轨道的可计算单射结构，那么存在一个可计算（无穷） $\Sigma_2$ 句子$\alpha$，使得 $\mathcal{B} \vDash \alpha$ 和 $\mathcal{A} \nvDash \alpha$。

证明。令 $\alpha$ 表示存在一个无限轨道：

$\exists x \bigwedge_{k\in\omega}[f^{(k)}(x) \neq x]$. ■

# 5 二对一结构

现在，我们将从可计算性理论的角度，探究 [4] fromthe 中引入并研究的二对一结构的凝聚幂，重点关注这些结构之间同构的复杂性。

定义 19二对一结构 $\mathcal{A} = (A, f)$由一个非空域 $A$ 和一个单个一元函数 $f : A \to A$ 组成，使得对于每个 $a \in A$ ，都有 $card(f^{-1}(a)) = 2$。

我们也将二对一结构称为2:1 结构，并常常将其与其有向图 $G_{\mathcal{A}}$（顶点集为 $A$，边为 $(a, f(a))$，对于 $a \in A$）等同起来。

定义 20 对于 $a \in A$， $a$ 的轨道是：

$$\mathcal{O}_f(a) = \{x \in A : (\exists n, m \in \omega)\ [f^n(x) = f^m(a)]\}.$$

也就是说， $a$ 的轨道是 $A$中属于 $a$ 所在的 $G_{\mathcal{A}}$ 的同一连通分支的元素集合。

设 $B$ 是一棵节点指向根节点的完全二叉树。我们可以证明，在一个2:1 结构中有两种类型的轨道： $Z$-链和 $k$-循环，适用于 $k \geq 1$。一个 $Z$-链由一个按整数排序的节点有向一一基本序列组成，并按照如下方式将一棵树 $B$ 连接到基本序列的每个节点：存在一条连接边，它不属于基本序列但指向该序列，并且 $B$ 的根连接到这条边上。一个 $k$-循环是一个大小为 $k$ 的有向一一循环，使得一棵树 $B$ 通过一条连接边连接到循环的每个节点；这条连接边不属于循环但指向该循环，并且 $B$ 的根连接到这条边上。因此，所有树边都指向该循环。有关说明轨道的图示，请参见 [4]中的第 1 节。

引理 **21** *[4]* (i) 谓词"$O_f(a)$ 是一个 $k$-循环"是 $\Sigma_1^0$.

*(ii) The predicate "$O_f(a)$ is a $Z$-chain" is* $\Pi_1^0$.

如果两个可数的 2:1 结构对于每个 $k \geq 1$ 都有相同数量的 $k$-循环，并且有相同数量的 $Z$-链，那么它们是同构的。

2:1 结构具有以下公理：

$$\forall y \exists x_1 \exists x_2 [x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = y \wedge f(x_2) \Rightarrow y]$$

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 [(f(x_1) = f(x_2) \wedge f(x_2) = f(x_3)) \Rightarrow (x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \vee x_2 = x_3)]$$

因此，可计算的 2:1 结构的凝聚幂仍是 2:1 结构。我们希望确定这些凝聚幂的同构类型。

定理 22 设 $\mathcal{A}$ 是一个可计算的 $2:1$ 结构。设 $C$ 是一个凝聚集，并且 $\mathcal{B} = \Pi_C \mathcal{A}$.

(i) 凝聚幂 $\mathcal{B}$ 对于任意 $k \geq 1$，具有与 $\mathcal{A}$ 相同数量的 $k$-循环。

（ii）凝聚幂 $\mathcal{B}$ 有无穷多个 $Z$-链。

因此，如果 $\mathcal{A}$ 至多有有限条 $Z$-链，那么 $\mathcal{A} \ncong \Pi_C \mathcal{A}$.

证明。 (i) 2:1结构至少有 $n$ 个 $k$-循环，其中 $n$、 $k \geq 1$ 可由一个存在句 $\theta_{n,\ k}$ 表达:

$$(\exists x_1)\cdots(\exists x_n)[\bigwedge_{1\leq m\leq n}(f^k(x_m)=x_m \wedge (\bigwedge_{1\leq l<k} f^l(x_m)\neq x_m))$$

$$\wedge \bigwedge_{(1\leq i<j\leq n)\&(1\leq l<k)} f^l(x_i)\neq x_j].$$

因此， $\mathcal{A}$ 和它的凝聚幂 $\mathcal{B}$ 都满足相同的这类句子，所以它们具有相同数量的 $k$-循环。

(ii) 在定义域 $A.$ 上固定一个自然序。我们将"滥用"这一记号，用 $f^{-1}$ 表示定义域 $A$ 上的一元函数；对于每个 $a$ ，该函数选取 $f$ 映射到 $a$中的两个元素里较小的一个。因此，对于每个整数 $z$， $f^{-z}$ 都有定义，其中，按通常约定， $f^0(a) = a.$

由于 $\mathcal{A}$ 始终包含一个完整二叉树分支 $\mathcal{T}$，我们可以定义一个可计算函数 $g:\ \omega \to A$，它在 $\mathcal{T}$ 上选取元素 $g(n)$，使这些元素彼此间隔足够远，从而对于不同的 $n$， $f^z(g(n))$ 中的 $|z| \leq n$ 不会相互"干扰"。更确切地说，如果 $n_1 \neq n_2$ 或 $z_1 \neq z_2$，那么 $f^{z_1}(g(n_1)) \neq f^{z_2}(g(n_2))$，其中$|z_1| \leq n_1$ 且 $|z_2| \leq n_2$。等价地，

$$|f^z(g(n)) : -n \leq z \leq n \wedge 0 \leq n \leq m\}| = (m+1)^2.$$

我们的目标是利用这一性质，为自然数$\psi_m$和$z$整数 $m$ 定义部分可计算函数 $z$，使得$\psi_{m,\ *}$成为存在无穷多个 $Z$-链的见证。

部分函数$\psi_{m,\ z}$： $\omega \to A$ 定义如下:

$$\psi_{m,z}(x) = \begin{cases} f^z(g(\langle m,x\rangle)) & \text{if } |z| \leq \langle m,x\rangle; \\ \uparrow & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由此可知，对于每个 $[\psi_{m,z}] \in B$， $m$， $z$。此外， $f$（$[\psi_{m,z}]$）$= [\psi_{m,z+1}]$，因此$\{[\psi_{m,z}]:\ z \in \mathbb{Z}\}$ 是某个 $Z$-链的子集。对于满足 $m_1 \neq m_2$的任意一对自然数 $m_1$ 和$m_2$，以及任意的 $k_1$， $k_2$，我们有 $f^{k_1}$（$[\psi_{m_1,0}]$）$\neq f^{k_2}$（$[\psi_{m_2,0}]$），因此 $[\psi_{m_1,0}]$ 和 $[\psi_{m_2,0}]$ 属于不同的 $Z$-链。因此， $\mathcal{B}$ 有无穷多个$Z$-链。

推论 23 设 $\mathcal{A}$ 是一个可计算的 2 : 1 结构。设 $C$ 是一个凝聚集。那么，当且仅当 $\mathcal{A} \cong \Pi_C\mathcal{A}$ 具有无穷多个 $Z$-链时， $A$ 。

推论 24 设 $\mathcal{A}$ 是一个没有 $Z$-链的可计算 2 : 1 结构。设 $C$ 是一个凝聚集，且 $\mathcal{B} = \prod_C \mathcal{A}$。那么存在一个可计算（无穷） $\Sigma_2$句子 $\alpha$，使得 $\mathcal{B} \vDash \alpha$ 且 $\mathcal{A} \nvDash \alpha$。

证明。令 $\alpha$ 表示存在一个 $Z$-链:

$$\exists x \bigwedge_{l\geq 0\&k>0}(f^{(l+k)}(x) \neq f^l(x)).$$ ■

# 6 (2,0):1 结构

现在我们将探讨 (2,0):1 结构这一类，其中包括 2:1 结构。它们由 [4] 从可计算性理论的角度引入并加以研究，重点关注这些结构之间同构的复杂性。

定义 25 $(2, 0) : 1$ 结构是具有单个一元函数 $\mathcal{A} = (A, f)$ 的结构，其中 $f\colon A \to A$，且对每个 $a \in A$，都有 $card(f^{-1}(a)) \in \{0, 2\}$。

通常，(2,0):1 结构 $\mathcal{A}$ 常被视为其有向图 $G(A, f)$，而 $a$ 的轨道定义为 $A$ 中所有属于包含 $a$ 的 $G(A, f)$ 连通分支的点的集合。(2,0):1 结构的轨道可以是 $k \geq 1$ 的 $k$-圈、 $Z$-链或 $\omega$-链。一个 $k$-圈由一个大小为 $k$ 的有向单射圈构成，圈上的每个节点都有一条与之相连、但不属于该圈且指向该圈的边；一棵二叉树的根附着在这条边上，且树的所有边都指向该圈。这里的树可以是有限的或无限的，并且必须满足条件 $card(f^{-1}(a)) \in \{0, 2\}$。

$Z$ 链由一列有向的一对一基本节点序列构成，节点按整数排序，并且基本序列的每个节点都附有一棵二叉树，具体如下：有一条连接边，它不属于基本序列，但指向该序列；树的根连接到这条边上。因此， $k$ 循环或 $Z$ 链中的每个元素也都附有一棵以该元素为根、且所有边均指向根的二叉分支树。 $\omega$ 链由一列有向的基本节点序列构成，节点按自然数排序；除第一个节点外，每个节点都按上述方式附有一棵二叉分支树，连接边指向基本序列，树的边则指向根。因此，基本序列的第一个节点不属于 $f$ 的值域。有关轨道的示意图，请参见 [4] 第 1 节。

设 $(A, f)$ 是一个 (2,0):1 结构，且 $a \in A$。 $a$ 的长度定义如下：

$$l(a) = \sup\{n + 1 : \left|\{a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{n+1}(a)\}\right| = n + 1\}.$$

它是以 $a.$ 开始的最长“非循环”有向路径。它可以是有限的，也可以是无限的。

定义 26 设 $\mathcal{A} = (A, f)$ 是一个 $(2, 0) : 1$ 结构。设 $k, n \in \omega - \{0\}$。

(a) $\mathcal{A}$ 的循环特征是

$$\chi_{cycle}(\mathcal{A}) = \{\langle k, n\rangle : \mathcal{A}\ has \geqslant n\ many\ k\text{-}cycles\}.$$

(b) $\mathcal{A}$ 的路径特征是

$$\chi_{path}(\mathcal{A}) = \{\langle k, n\rangle : \mathcal{A}\ has \geqslant n\ many\ a\ such\ that\ l(a) = k\}.$$

(c) $\mathcal{A}$ 的终端路径特征是

$$\chi_{endpath}(\mathcal{A}) = \{\langle k, n\rangle : \mathcal{A}\ has \geqslant n\ many\ a \notin f(A)\ such\ that\ l(a) = k\}.$$

如果存在 $k$ 的上界，我们就称一个特征是有界的。

(2,0):1 结构满足以下公理:

$\forall y \forall x \exists z[f(x) \neq y \vee (z \neq x \wedge f(z) = y)]$ and

$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3[(f(x_1) = f(x_2) \wedge f(x_2) = f(x_3)) \Rightarrow (x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \vee x_2 = x_3)]$.

因此，可计算的 (2,0):1 结构的凝聚幂是一个 (2,0):1 结构。

命题 27 设 $\mathcal{A}$ 是一个可计算的 (2, 0) : 1 结构。设 $C$ 是一个凝聚集，且 $\mathcal{B} = \prod_C \mathcal{A}$。那么 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 具有相同的循环特征、路径特征和终端路径特征。

证明。设 $k, n \geq 1$。那么 $\langle k, n\rangle \in \chi_{cycle}(\mathcal{A})$ 可以像定理 22 (i) 的证明中那样，用一个 $\Sigma_1^0$ 句子来表示。

此外，$\langle k, n\rangle \in \chi_{path}(\mathcal{A})$ 可由以下$\Sigma_1^0$ 句子表示:

$(\exists x_1) \cdots (\exists x_n)[\bigwedge_{1 \leq m \leq n}((\bigwedge_{0 \leq l < s < k} f^l(x_m) \neq f^s(x_m)) \wedge$

$\bigvee_{1 \leq l < k}(f^k(x_m) = f^l(x_m))) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j]$.

最后，$\langle k, n\rangle \in \chi_{endpath}(\mathcal{A})$ 可由以下 $\Sigma_2^0$ 句子表示:

$(\exists x_1) \cdots (\exists x_n)[\bigwedge_{1 \leq m \leq n}((\bigwedge_{0 \leq l < s < k} f^l(x_m) \neq f^s(x_m)) \wedge$

$\bigvee_{1 \leq l < k}(f^k(x_m) = f^l(x_m)) \wedge (\forall y)(f(x_m) \neq y)) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j]$.

由定理 2 可知，对于每一对（$k, n$），$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 满足上述相同的句子，因此 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 具有相同的特征。 ■

定理 28 设 $C$ 为一个凝聚集。

(i) 设 $\mathcal{A}$ 为一个路径特征有界且没有无限轨道的可计算 (2,0) : 1 结构。那么 $\Pi_C\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$。

(ii) 设 $\mathcal{A}$ 为一个路径特征无界或具有无限轨道的可计算 (2, 0) : 1 结构。那么 $\Pi_C\mathcal{A}$ 具有无限多个 $Z$-链。

因此，如果 $\mathcal{A}$ 只有有限个（包括零个） $Z$-链，则有 $\mathcal{A} \ncong \Pi_C\mathcal{A}$。

证明。(i) 设 $\mathcal{B} = \Pi_C \mathcal{A}$。设 $M \in \omega$ 为 $\mathcal{A}$ 中（有限）路径长度的最小上界。由于 $\mathcal{A}$ 没有无限轨道，它满足以下 $\Pi_1^0$ 句子:

$$(\forall x) \bigvee_{0 \leq m < n \leq M} (f^m(x) = f^n(x)).$$

根据定理 2, $\mathcal{B}$ 也满足这个句子，这意味着 $\mathcal{B}$ 没有无限轨道。由于我们可以用 $\Sigma_2^0$ 句子完全描述有限轨道，因此 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 同构。

(ii) 在定义域 $A$. 上固定一个自然序。我们用 $f^{-1}$ 表示 $A$上的一个部分可计算一元函数：对于每个 $a$，若 $f$ 将这两个元素映射到 $a$，且 $card(f^{-1}(a)) = 2$，则选取其中较小的元素；否则该函数未定义。因此，对于每个整数 $z$，都有 $f^{-z}$，其中 $f^0(a) = a$。

根据关于 $\mathcal{A}$的假设，我们可以定义一个可计算函数 $g : \omega \to A$，它选取 $A$ 中的元素 $g(n)$，使得对于每个 $m \in \omega$，都有$|\{f^z(g(n)) : f^z(g(n)) \downarrow \wedge\, 0 \leq n \leq m \wedge -n \leq z \leq m\}| = (m+1)^2$。现在我们仿照定理 22 的证明中 (ii) 的做法，证明存在无限多个 $Z$-链。

以下定理聚焦于 $\omega$-链。

定理 29 设 $C$ 是一个凝聚集。设 $\mathcal{A}$ 是一个终端路径特征有界的可计算 $(2, 0) : 1$ 结构，并且在 $A - f(A)$ 中，具有无限长度的元素有有限多个（包括 0 个）。那么 $\prod_C \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}$ 具有相同数量的 $\omega$-链。

证明。令 $\mathcal{B} = \Pi_C \mathcal{A}$。令 $M \in \omega$ 为 $\mathcal{A}$的终端路径特征的最小上界；也就是说，$M = \max\{k : \langle k, n \rangle \in \chi_{endpath}(\mathcal{A})\}$。

假设在 $\mathcal{B}$中我们选择 $[\psi] \in B - f(B)$，使得 $[\psi]$ 是一个 $\omega$-链中的元素。我们将证明，$[\psi]$ 属于从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的典范嵌入函数的值域。

考虑一个无限的可计算可枚举集 $W = \{i \in \omega : \psi(i) \uparrow \vee\, l(\psi(i)) > M\}$。我们断言 $C \subseteq^* W$。为证明这一断言，反设不然，于是 $C \subseteq^* \overline{W}$。我们有 $\overline{W} = \{i \in \omega : \psi(i) \downarrow \wedge\ l(\psi(i)) \leq M\}$，因此它是可计算可枚举集 $Y_j$的有限并，其中 $j \in \{1, \ldots, M\}$ 满足其中

$$Y_j = \bigcup_{0 \leq k < j} \{i \in \omega : \psi(i) \downarrow \wedge f^j(\psi(i)) \downarrow = f^k(\psi(i)) \downarrow \wedge$$

$$\bigwedge_{0 \leq m < n < j} f^m(\psi(i)) \downarrow \neq f^n(\psi(i)) \downarrow\}.$$

因此，由于 $C$ 是凝聚的，存在某个 $j_0$、$k_0$，使得 $j_0 > k_0$，我们有

$$C \subseteq^* \{i \in \omega : \psi(i) \downarrow \wedge f^{j_0}(\psi(i)) \downarrow = f^{k_0}(\psi(i)) \downarrow \wedge$$

$$\bigwedge_{0 \leq m < n < j_0} f^m(\psi(i)) \downarrow \neq f^n(\psi(i)) \downarrow\},$$

这将意味着 $f^{j_0}[\psi] = f^{k_0}[\psi]$，与 $[\psi]$是 $\omega$-链中的一个元素这一事实矛盾。因此

$$C \subseteq^* W = \{i \in \omega : \psi(i) \uparrow \vee\, l(\psi(i)) > M\}.$$

由于 $C \subseteq^* \{i \in \omega : \psi(i) \downarrow\}$，我们有

$$C \subseteq^* \{i \in \omega : \psi(i) \downarrow \wedge\, l(\psi(i)) > M\} =$$
$$\{i \in \omega : \psi(i) \downarrow \wedge\, l(\psi(i)) > M \wedge \psi(i) \in f(A)\} \cup$$
$$\{i \in \omega : \psi(i) \downarrow \wedge\, l(\psi(i)) > M \wedge f(i) \in A - f(A)\}.$$

我们还可以证明，$C \subseteq^* \{i \in \omega : \psi(i) \downarrow \wedge\, l(\psi(i)) > M \wedge f(i) \in A - f(A)\}$，否则就存在 $[\tau] \in B$，使得 $f([\tau]) = [\psi]$，这与 $[\psi] \in B - f(B)$ 的事实矛盾。

因此，$C \subseteq^* \bigcup\{X_a : a \in (A - f(A)) \wedge l(a) = \infty\}$.。根据假设，前一个公式中的并是有限并，因此对某个 $a_0$，我们有

$$C \subseteq \{i \in \omega : \psi(i) \downarrow = a_0\}.$$

因此，$[\psi]$ 属于典范嵌入的值域。由此可知，$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$中的 $\omega$-链数量相同。

■

对于下面的结果，我们需要可计算结构具有更强的可判定性。

定义 **30** *[4]*若一个可计算的 $(2, 0) : 1$ 结构 $\mathcal{A} = (A, f)$ 满足 $ran(f)$ 是可计算集，则称其为高度可计算的。

定理 31 设 $C$ 是一个凝聚集。设 $\mathcal{A}$ 是一个高度可计算的 $(2,0) : 1$ 结构，具有无界终路径特征，或者 $A - f(A)$ 中有无限多个无限长度的元素。那么 $\Pi_C\mathcal{A}$有无限多个 $\omega$-链。

因此，若 $\mathcal{A}$ 只有有限多个 $\omega$-链，则有 $\mathcal{A} \ncong \Pi_C\mathcal{A}$.

证明。设 $B = \Pi_C\mathcal{A}$。设 $g : \omega \to A$ 是一个可计算函数，使得$g(\omega) \subseteq A - f(A)$，且对每个 $m \in \omega$，都有

$$|\{f^k(g(n)) : f^k(g(n)) \downarrow \wedge\, 0 \leq n \leq m \wedge\ 0 \leq k \leq m\} = \tfrac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

部分函数 $\psi_{m,n} : \omega \to A$ 对于 $m, n \in \omega$ 定义如下:

$$\psi_{m,n}(x) = \begin{cases} f^n(g(\langle m, x\rangle)) & \text{if } 0 \leq n \leq \langle m, x\rangle; \\ \uparrow & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由此可知，每个 $[\psi_{m,n}] \in B$。如果 $n_1 \neq n_2$，那么 $[(\psi_{m,\ n_1})] \neq [(\psi_{m,\ n_2})]$。此外，$[(\psi_{m,\ 0})] \in B - f(B)$ 且 $f([\psi_{m,n}]) = [\psi_{m,n+1}]$，因此 $\{[\psi_{m,n}] : n \in \omega\}$是某个 $\omega$-链的子集。对于任意一对满足$m_1 \neq m_2$的自然数 $m_1$、$m_2$，以及任意的 $k_1$、$k_2$，我们有 $f^{k_1}([\psi_{m_1,0}]) \neq f^{k_2}([\psi_{m_2,0}])$，所以 $[\psi_{m_1,0}]$和 $[\psi_{m_2,0}]$ 属于不同的 $\omega$-链。因此，$\mathcal{B}$ 有无穷多个 $\omega$-链。

■

推论 32 如果 $\mathcal{A}$ 是一个具有无界终路径特征且没有 $\omega$-链的高度可计算 (2, 0) : 1 结构。令 $C$ 为一个凝聚集，且 $\mathcal{B} = \prod_C \mathcal{A}$。那么存在一个可计算的 $\Sigma_2$ 句子 $\alpha$，使得 $\mathcal{B} \vDash \alpha$ 且 $\mathcal{A} \nvDash \alpha$。

证明。存在一条 $\omega$-链这一性质可以用一个可计算（无穷）$\Sigma_2$ 句子 $\alpha$ 表达:

$$\exists x(\bigwedge_{y\in A}(x \neq f(y)) \wedge \bigwedge_{l\geq 0\wedge k>0}(f^{(l+k)}(x) \neq f^n(x)))$$

■

# 7 部分单射结构

一个部分单射结构 $(A, f)$ 由一个集合 $A$ 和一个部分函数 $f$: $A \to A$ 构成，并满足：若 $x$, $y \in dom(f)$ 且 $x \neq y$，则 $f(x) \neq f(y)$。我们称 $f$ 为部分单射。按照惯例，我们写作 $f(x)\downarrow$，表示 $x \in dom(f)$；写作 $f(x)\uparrow$，表示 $x \notin dom(f)$。此外，$f(x)\downarrow y$ 表示 $f(x)\downarrow$ 且 $f(x) = y$。部分逆函数 $f^{-1}$ 的定义很自然。对于 $z \in \mathbb{Z}$, $f^z$ 按照部分函数的通常复合方式定义。Marshall 在 [21] 中研究了部分单射结构及其可计算性理论性质，包括其同构的复杂度。她将部分单射结构 $(A, f)$ 称为部分可计算单射结构，条件是 $A$ 为可计算集且 $f$ 为部分可计算函数。

为了将一个部分单射结构 $(A, f)$转换为一阶结构，我们将其视为关系结构 $\mathcal{A} = (A, G_f)$，其中 $G_f$ 是 $f$ 的图:

$$G_f = \{(x, y) : x \in dom(f) \wedge f(x) = y\}.$$

牢记这一框架，我们仍可写作 $(A, f)$。

定义 33 我们称部分可计算单射结构（$A, f$）为可计算偏单射结构，如果 $G_f$ 是可计算二元关系。因此（$A, G_f$）是可计算结构。

命题 34 设 $(A, f)$ 是一个部分可计算单射结构。(i) 如果 $ran(f)$ 是可计算的，那么 $G_f$ 是可计算的。(ii) 如果 $dom(f)$ 是可计算的，那么 $G_f$ 是可计算的。

证明。(i) 不失一般性，我们可以假设 $A = \omega$。给定一对 $(x, y)$，首先判断是否 $y \in ran(f)$。如果 $y \notin ran(f)$，那么 $(x, y) \notin G_f$. 如果 $y \in ran(f)$，则运行图灵机程序 $P_f$，在 0、1、2、. . . 上同时计算 $f$，不断增加输入和计算步数（尽管每个阶段都是有限的），直到找到 $z$，使得程序 $P_f$ 在$z$上停机并输出 $y$。如果 $x = z$，那么 $(x, y) \in G_f$，而如果 $x \neq z$，那么 $(x, y) \notin G_f$。

(ii) 给定一对 $(x, y)$，先确定 $x \in dom(f)$ 是否成立；若成立，则计算 $f(x)$。

■

值域为可计算值域的部分可计算单射函数，其定义域不一定是可计算的。例如，对于停机集 $K$，考虑一个可计算的 $1-1$ 枚举 $g$：$\omega \to K$。令 $f$：$\omega \to \omega$ 定义如下：

$$f(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{if } x \in K \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

那么， $f$ 是一个部分可计算单射，且 $ran(f) = \omega$ 和 $dom(f) = K$。

设$(A, f)$是一个部分单射结构。 $a$ 的轨道定义为：

$$\mathcal{O}_f(a) = \{b : \exists n \in \omega(f^n(a) \downarrow = b \vee f^n(b) \downarrow = a)\}.$$

轨道有五种类型。有限轨道可以是 $k$-循环或 $k$-链，对于$k \geq 1.$， $k$-链的形式为 $\{x_i : 1 \leq i \leq k\}$ ，其中 $x_i \neq x_j$ 对 $1 \leq i < j \leq k$成立，且 $x_1 \in A - ran(f)$、 $x_{i+1} = f(x_i)$和 $x_k \notin dom(f)$。无限轨道可以是$Z$-链、 $\omega$-链或 $\omega^*$-链。 $\omega^*$-链的形式为 $\{x_i : i \in \omega\}$ ，其中$x_0 \in A - dom(f)$、 $x_i = f(x_{i+1})$，且 $x_i \neq x_j$ 对 $i \neq j$成立。

定义 35 设 $\mathcal{A} = (A, f)$是一个部分单射结构。在以下定义中，我们假设 $k$, $n \in \omega - \{0\}$.

(a) $\mathcal{A}$ 的循环特征是$\chi_{cycle}$（$\mathcal{A}$） $= \{\langle k, n\rangle :$ $\mathcal{A}$ 有 $\geqslant n$ 个 $k$ -循环$\}$.(b) $\mathcal{A}$ 的有限链特征是$\chi_{path}$（$\mathcal{A}$） $= \{\langle k, n\rangle :$ $\mathcal{A}$ 有 $\geqslant n$ 个 $k$ -链$\}$。

如果存在一个上界限制 $k$ 的大小，我们就称前一定义中的特征是有界的。两个可数部分单射结构同构，当且仅当它们具有相同的循环特征、相同的有限链特征，以及相同数量的 $Z$-链、 $\omega$-链和 $\omega^*$-链。

设 $\mathcal{A} = (A, f)$是一个可计算偏单射结构。设 $C$是一个凝聚集，并且 $\mathcal{B} = \Pi_C\mathcal{A}$。那么，若 $C \subseteq^* \{i \in \omega,$ 则 $f^{\mathcal{B}}([\psi]) \downarrow :$ $f(\psi(i)) \downarrow\}$且$f^{\mathcal{B}}([\psi]) \uparrow$；否则则相反。类似地，当且仅当 $C \subseteq^* \{i \in \omega :$ $f(\psi(i)) \downarrow = \phi(i) \downarrow\}$时， $f^{\mathcal{B}}([\psi]) = [\phi]$。我们通常省略 $f^{\mathcal{B}}$中的上标。

下面的命题基于定理 2。

定理 36 设 $\mathcal{A} = (A, f)$ 是一个可计算偏单射结构。设 $C$是一个凝聚集。那么，凝聚幂 $\Pi_C\mathcal{A}$ 是一个部分单射结构，其循环特征和有限链特征与 $\mathcal{A}$相同。

证明。部分单射结构可以由以下 $\Pi^0_1$句子描述：

$$\forall x \forall y \forall z[(f(x) = z \wedge f(y) = z) \Rightarrow x = y]$$

$$\forall x \forall y \forall z[(f(x) = y \wedge f(x) = z) \Rightarrow y = z]$$

此外,

$\langle k,n\rangle \in \chi_{cycle}(\mathcal{A})$ iff

$\exists x_1 \cdots \exists x_n[\bigwedge_{1\le i\le n}(f^k(x_i)=x_i \wedge \bigwedge_{1\le l<k} f^l(x_i)\neq x_i) \wedge \bigwedge_{1\le i<j\le n \& 1\le l<k} f^l(x_i)\neq x_j]$,

这是一个 $\Sigma_1^0$ 句子。

另外,

$\langle k,n\rangle \in \chi_{path}(\mathcal{A})$ 当且仅当

$\exists x_1 \cdots \exists x_n \exists y_1 \cdots \exists y_k \forall y[\bigwedge_{1\le i<j\le n} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{1\le i\le n}(f(y \quad x_i = y_i \wedge f\ y_i \neq y\ ], \quad ) \neq x_i \wedge f^{k-1}(\ )(\ )\ )$

这是一个 $\Sigma_2^0$ 句子。 ■

在某些情况下，凝聚幂与原结构同构。

定理 37 设 $\mathcal{A}$ 是一个具有有界环特征、有界有限链特征且没有无限轨道的可计算偏单射结构。设 $C$ 是一个凝聚集。那么 $\mathcal{A}\cong\Pi_C\mathcal{A}$。

证明。设 $\mathcal{A}=(A,f)$ 且 $\mathcal{B}=\Pi_C\mathcal{A}$。令 $M$ 为有限轨道的最大大小。由于 $\mathcal{A}$ 没有无限轨道，它满足以下 $\Pi_2^0$ 句子:

$\neg\exists x\exists y(f^{M+1}(x)=y \wedge \bigwedge_{1\le i\le M}(f^i(x)\neq x))$.

因此， $\mathcal{B}$ 满足同一个句子，所以它没有无限轨道。于是，结合定理 36，我们得到 $\mathcal{A}\cong\mathcal{B}$。 ■

如果前一个定理的条件不满足，凝聚幂将具有无穷多个 $Z$-链。

定理 38 设 $\mathcal{A}$ 是一个具有无界环特征、无界有限链特征或无限轨道的可计算偏单射结构。设 $C$ 是一个凝聚集。那么 $\Pi_C\mathcal{A}$ 具有无穷多个 $Z$-链。

因此，如果 $\mathcal{A}$ 只有有限多个 $Z$-链，那么 $\mathcal{A}\ncong\Pi_C\mathcal{A}$.

证明。该证明与定理 22 的 (ii) 部分类似。 ■

凝聚幂的某种固定类型的轨道数总是不少于 $\mathcal{A}$。在某些情况下， $\omega$-链和 $\omega^*$-chans 的数量相同。

定理 39 设 $\mathcal{A}$ 是一个具有有界有限链特征的可计算偏单射结构。设 $C$ 是一个凝聚集。那么， $\Pi_C\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{A}$ 具有相同数量的 $\omega$-链和相同数量的 $\omega^*$-链。

证明。设 $\mathcal{A}=(A,f)$ 且 $\mathcal{B}=\Pi_C\mathcal{A}$。设 $M$ 为有限链的最大大小。 $\mathcal{A}$ 具有 $\geq n$ 个 $\omega$-链这一性质可以用以下 $\Sigma_2^0$ 句子来表达:

$$\exists x_1\cdots\exists x_n\exists y_1\cdots\exists y_n\forall z[\bigwedge_{1\leq i<j\leq n}x_i\neq x_j\wedge\bigwedge_{1\leq i\leq n}(f^M(x_i)=y_i\wedge f(z)\neq x_i)]$$

因此， $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 具有相同数量的 $\omega$链。

类似地， $\mathcal{A}$ 具有 $\geq n$ 多条 $\omega^*$-链这一性质可以用以下 $\Sigma_2^0$ 句子表示:

$$\exists x_1\cdots\exists x_n\exists y_1\cdots\exists y_n\forall z[\bigwedge_{1\leq i<j\leq n}x_i\neq x_j\wedge\bigwedge_{1\leq i\leq n}(f^M(y_i)=x_i\wedge f(x_i)\neq z)].$$ ■

定理 40 设 $\mathcal{A}=(A,f)$ 是具有无界有限链特征的可计算部分单射结构。设 $C$ 是一个凝聚集。

(i) 假设 $ran(f)$ 是可计算的。那么 $\Pi_C\mathcal{A}$ 有无限多个 $\omega$-链。

因此，如果 $\mathcal{A}$ 只有有限多个 $\omega$链，那么 $\mathcal{A}\ncong\Pi_C\mathcal{A}$。

(ii) 假设 $dom(f)$ 是可计算的。那么 $\Pi_C\mathcal{A}$ 有无限多个 $\omega^*$-链。

因此，如果 $\mathcal{A}$ 只有有限多个 $\omega^*$-链，那么 $\mathcal{A}\ncong\Pi_C\mathcal{A}$。

证明。（i）证明与定理 31 的证明类似。

（ii）令 $g:\ \omega\to(A-dom(f))$ 为一个可计算函数，使得如果自然数 $m_1$、 $m_2$、 $n_1$、 $n_2$ 满足 $m_1\neq m_2$ 或 $n_1\neq n_2$，那么 $f^{-n_1}(g(m_1))\neq f^{-n_2}(g(m_2))$，其中 $n_1\leq m_1$ 且 $n_2\leq m_2$。由于链特征是无界的，且 $dom(f)$ 是可计算的，这样的函数存在。

我们定义部分函数 $\psi_{m,\ n}:\ \omega\to A$ ，对于 $m$、 $n\in\omega$ 如下:

$$\psi_{m,n}(x)=\begin{cases} f^{-n}(g(\langle m,x\rangle)) & \text{if } n\leq\langle m,x\rangle;\\ \uparrow & \text{otherwise.}\end{cases}$$

由此可得 $[\psi_{m,n}]\in\Pi_CA$ ，因为 $dom(\psi_{m,n})$ 是余有限的。我们可以证明 $\{[\psi_{m,n}]:\ n\in\omega\}$ 构成 $\omega^*$-链，并且对于 $m_1\neq m_2$ ， $[\psi_{m_1,0}]$和 $[\psi_{m_2,0}]$ 属于不同的 $\omega^*$-链。因此， $\Pi_C\mathcal{A}$ 有无穷多个 $\omega^*$-链。■

# 8 总结

本文聚焦于具有单个二元关系的某些可计算结构的凝聚幂的同构类型，例如图、等价结构和部分单射结构。这是对先前关于自然数的有序集合（$\omega$、$<$）以及 [14, 13] 中其他自然线性序的凝聚幂研究的补充。这里，我们还研究具有一元函数的可计算结构，其中一元函数分别是一对一、二对一以及 (2, 0) :1 的；这些结构可以与它们所诱导的有向图对应起来。研究由函数诱导的其他有向图的凝聚幂的同构类型将是有意义的。在我们所考虑的类中，有些结构与它们的所有凝聚幂同构。此前已知，对于有限结构、有理数的有序集合、随机图以及可数无原子布尔代数，情况也是如此。在我们所考虑的类中，有些结构与它们的凝聚幂不同构；它们具有能够将其区分开的性质，而这些性质可以由可计算的（无穷）句子描述。

我们的目标是通过研究有效结构的凝聚幂，以及更一般地说，凝聚积的代数性质、可计算性理论性质和句法性质，进一步发展相关理论。我们希望纳入更复杂的代数结构，例如半群、群、环和域。可计算域的凝聚幂将拓展此前对有理数域凝聚幂的研究，$(Q, +, \cdot)$，见 [12]，并将在研究可计算可枚举向量空间格及其自同构时进一步发挥作用，从而推广 [11] 中的结果。

# 参考文献

[1] W. Calvert、D. Cenzer 和 V. Harizanov，《稠密可计算结构》，《逻辑与计算杂志》32（2022），第 581–607 页。[2] W. Calvert、D. Cenzer、V. Harizanov 和 A. Morozov，《等价结构的有效范畴性》，《纯粹与应用逻辑年刊》141（2006），第 61–78 页。[3] D. Cenzer、V. Harizanov 和 J.B. Remmel，《单射结构的可计算性理论性质》，《代数与逻辑》53（2014），第 39–69 页。[4] D. Cenzer、V. Harizanov 和 J.B. Remmel，《二对一结构》，《逻辑与计算杂志》23（2013），第 1195–1223 页。[5] B.F. Csima、B. Khoussainov 和 J. Liu，《有限分支图的可计算范畴性》，载于：逻辑与算法理论，CiE 2008，A. Beckmann、C. Dimitracopoulos 和 B. Lowe 编，《计算机科学讲义》5028，第 139–148 页，2008。[6] R.D. Dimitrov，《拟极大性与主滤子之间的同构》，$\mathcal{E}^*$ 与 $\mathcal{L}^*(V_\infty)$，《数学逻辑档案》43（2004），第 415–424 页。

[7]R.D. Dimitrov, 《可计算结构的凝聚幂》, 索非亚大学“圣克利门特·奥赫里德斯基”年刊, 数学与信息学系, 第 99 卷（2009）, 第 193–201 页。´ R.D. Dimitrov, 《´（´）的某些部分自同构的扩张》, 索非亚大学“圣克利门特·奥赫里德斯基”年刊, 数学与信息学系, 第 99 卷（2009）, 第 183–191 页。[8] R. Dimitrov 和 V. Harizanov, 《有效超积及其应用》, 已获准发表于《计算的各个方面》, N. Greenberg、K.M. Ng、G. Wu 和 Y. Yang 编, IMS, 新加坡国立大学, 世界科学出版社。 $\mathcal{L}^*$R. Dimitrov 和 V. Harizanov, 《可数非标准模型：沿袭 Skolem 的方法》, 已获准发表于《数学实践史与哲学手册》, 施普林格, B. Sriraman 编。$V_\infty$R. Dimitrov 和 V. Harizanov, 《极大向量空间的轨道》, 《代数与逻辑》54（2016）, 第 440–476 页。´ R. Dimitrov、V. Harizanov、R. Miller 和 K.J. Mourad, 《非标准域的同构与 Ash 猜想》, 载于：第 10 届欧洲可计算性会议, A. Beckmann、E. Csuhaj-Varj´u 和 K. Meer 编, 《计算机科学讲义》8493（2014）, 施普林格, 第 143–152 页。´R. Dimitrov、V. Harizanov、A. Morozov、P. Shafer、A. Soskova 和 S. Vatev, 《关于线性序的凝聚幂》, 已获准发表于《符号逻辑杂志》。https://arxiv.org/abs/2009.00340[9] R. Dimitrov、V. Harizanov、A. Morozov、P. Shafer、A. Soskova 和 S. Vatev, 《线性序的凝聚幂》, 载于：《前瞻性与工业计算》, F. Manea、B. Martin、D. Paulusma 和 G. Primiero 编, 《欧洲可计算性》, 英国达勒姆, 施普林格（2019）, 第 168–180 页。[10] S. Feferman、D.S. Scott 和 S. Tennenbaum, 《通过函数环构造算术模型》, 《美国数学学会通报》6, 173（1959）。摘要编号 #556-31。[11] E. Fokina、V. Harizanov、A. Melnikov, 《可计算模型论》, 载于：《图灵的遗产：逻辑中源自图灵思想的发展》, R. Downey 编, 《逻辑学讲义》42, 剑桥大学出版社（2014）, 第 124–194 页。[12] V. Harizanov 和 K. Srinivasan, 《图及其他结构的有效超幂》, 已获准发表于《当代数学》。 J. Hirshfeld, 《算术模型与递归函数》, 《以色列数学杂志》20（1975）, 第 111–126 页。[13] J. Hirshfeld 和 W.H. Wheeler, 《强迫法、算术与除环》, 《数学讲义》454, 施普林格, 柏林, 1975。

[20] M. Lerman，模去 co-$r$-极大集的递归函数，《美国数学学会汇刊》148（1970），第429–444页。[21]L.B. Marshall，《部分单射、树与嵌套等价关系的可计算性理论性质》，博士学位论文，乔治·华盛顿大学，2015年。[22] T. McLaughlin，Nerode 半环的一些扩张与重排定理，《数学逻辑与数学基础杂志》f ¨ur 35（1989），第197–209 页。[23] T.McLaughlin，子算术超幂：一篇综述，《纯粹与应用逻辑年刊》49（1990），第143–191 页。[24] T.McLaughlin，$\Delta_1$ 超幂是完全刚性的，《数学逻辑档案》46（2007），第379–384页。[25] G.C.Nelson，递归饱和超幂的构造性超积与同构，《圣母大学形式逻辑杂志》33（1992），第433–441 页。[26] R.I. Soare，《递归可枚举集与度：可计算函数和可计算生成集的研究》，施普林格出版社，柏林，1987 年。