arXiv:2304.03377v1 [cs.DS] 6 Apr 2023

利用可复用性：提升贪心算法在可复用资源问题中的竞争比

Jackie Baek纽约大学斯特恩商学院，baek@stern.nyu.eduShixin Wang香港中文大学商学院，香港中文大学，shixinwang@cuhk.edu.hk

我们研究可复用资源的在线加权二分图匹配问题，其中请求资源的对抗序列会随时间到达。匹配到的资源会被“使用”一段随机持续时间，该时长独立地取自依赖于资源的分布；使用结束后，资源会返回并可再次参与匹配。我们研究贪心策略的表现，该策略将请求匹配给能够带来最高奖励的资源。此前已知，面对预先知晓请求序列的先知算法这一全知基准，贪心策略的竞争比为 1/2。在本文中，我们引入一个量化资源 *degree of reusability* 的参数，从而改进了这一结果。具体而言，如果 p 表示在使用时长分布中，已匹配资源在一个时间步内返回的最小概率，那么贪心策略可达到 $1/(2-p)$的竞争比。此外，当使用时长分布为几何分布时，我们证明了更强的竞争比（$1+p$）/2，并证明该结果是紧的。这两项结果均与两个极端情形下的已知结果一致： $p=0$ 对应不可重复使用的资源，此时已知 1/2 是紧的；而 $p=1$ 对应每个资源都会立即返回，此时贪心算法即为最优策略，因此竞争比为 1。最后，我们证明这两项结果对贪心策略的近似实现均具有鲁棒性。我们的研究表明，与不可重复使用的情形相比，资源的可复用性能够提升性能；当可复用程度较高时，简单的贪心策略便已足够。我们的发现有助于理解资源可复用性如何影响在线算法的表现，并凸显了随着可复用程度提高，性能进一步提升的可能性。

1. 引言

在线二分图匹配是一类经典问题：资源与陆续到来的请求进行匹配，每次到来一个请求（Karp 等人，1990 年）。近年来，由于这一问题在在线市场、在线广告和资源调度等各种应用中具有现实意义，因此受到了广泛关注。我们的研究考察一种资源可复用的情形：匹配后，资源会在随机持续时间内不可用，之后归还并可以再次进行匹配

。现实世界中的可复用资源包括云计算平台上的机器，例如亚马逊云科技和微软 Azure；在线市场中的住宅和度假屋租赁，例如爱彼迎和 Vrbo；以及在线劳务平台上的专业服务，例如 Upwork 和 Fiverr。

近年来，在线匹配问题中可复用资源相关算法的设计与性能分析日益受到关注，该领域不断涌现的研究成果便是明证——详尽综述请见第 1.1 节。与近期通过设计新策略来改善性能保证的研究（例如 Delong 等人（2022））不同，我们研究的是贪心策略的性能。该策略将每个到达的请求匹配给能够提供最高即时奖励的资源，通常被视为解决这一问题最直观、最具吸引力的选择。它在理解和实现方面都十分简单，因此尤其适用于实际应用。因此，明确此类策略在何种情况下能够取得良好表现具有重要价值，也能为理解简单的贪心策略在哪些情形下已足够有效提供实践见解。本文表明，资源的“可复用性”能够显著提升贪心算法的性能。通过考察资源可复用性与算法性能之间的相互作用，我们希望加深对可复用资源在线二分图匹配问题中算法设计与评估的理解。

[{ "id": 0, "output": "形式化地说，我们考虑一个在线二分图匹配问题，其中一侧有 N 个顶点（‘资源’），另一侧有 T 个顶点（‘请求’）。请求侧的顶点逐个到达；每当一个请求到达时，我们会获知与该请求相邻的资源，并且必须将该请求匹配至至多一个可用的相邻资源。当资源 i 在时间 t 被匹配时，我们获得奖励 r_i，而资源 i 会在随机持续时间 $D_{it} \geq 1$ 内变得不可用，该持续时间独立地取自分布 F_i。该资源会在时间 $t + D_{it}$ 返回，并且可以立即再次被匹配。" }]

我们将贪心算法定义为这样一种策略：将每个请求匹配到当前可用且能带来最高即时奖励的资源 r_i。我们通过竞争比评估贪心算法的表现，即在所有实例中，贪心算法的期望奖励与最优基准算法的期望奖励之比的最坏情况。我们采用的最优基准，是由一个先知算法实现的最优算法：它预先知道请求与资源之间的整个二分图，但不知道随机使用时长的具体取值。此前，已知贪心算法的最佳竞争比为 1/2（Gong 等人，2022）——这与贪心算法在经典不可重复使用情形下的竞争比相同；在该情形中，已知 1/2 是紧确的（Mehta 等人，2013）。

然而，直观上，资源可复用应当能提升贪心算法的表现。这种提升源于任何次优匹配决策所造成的代价都会较小，因为资源最终会再次变为可用，从而可以用于未来的匹配。因此，在这种情形下，像贪心算法这样只着眼于最大化即时奖励的短视策略，可能会有出色表现。在极端情况下，如果每种资源都能在一个时间步内立即返回，那么贪心算法确实是最优算法。这是因为资源实际上不受数量限制，使算法总能将请求匹配到奖励最高的资源，而无需担心未来的可用性。在这种情况下，贪心算法非常适合利用问题本身的结构。受这一直觉启发，我们希望引入一个刻画资源使用时长分布的参数，以此描述贪心算法的表现。该参数实质上衡量资源匹配后多快会重新回到可用选项池中。通过分析这一参数与贪心算法表现之间的关系，我们旨在更深入地理解简单贪心策略在哪些条件下表现良好。最终，我们的分析将为具有可复用资源的在线二分图匹配问题中的算法设计与评估提供有价值的见解。

我们的结果。令 $p = \min_i \Pr(F_i = 1)$ 表示在所有资源中，某个已匹配资源在下一个时间步返回的最小概率，我们证明贪心算法可达到 $\frac{1}{2-p}$ 的竞争比。危险率至少为 p 的分布符合这一假设。我们的保证与两个极端情形下已有的研究结果一致：当 $p = 0$时，资源不可复用，这对应于经典设置，其中紧竞争比为 $1/2$。当 $p = 1$ 时，每个资源都会立即返回，使贪心算法达到最优，并得到为1的竞争比。接下来，在所有使用持续时间分布均为参数至少为 p的几何分布这一特殊情形下，我们证明了更强的竞争比 $\frac{1+p}{2}$。该竞争比在端点 $p = 0$和 $p = 1$ 处与第一个结果一致，但当 $p \in \in$ (0,1) 时提供了严格更好的保证。第二个结果是紧的，因为存在一个仅有两个时间步的简单实例，对于任意 $\varepsilon > 0$，贪心算法获得的奖励是先知算法所获奖励的 $\frac{1+p}{2} + \varepsilon$。最后，我们证明这两个结果对于贪心策略的近似都是稳健的。具体而言，如果某个算法将请求匹配给奖励至少为贪心算法会匹配的资源奖励的 $\alpha \in [0, 1]$ 倍的资源，那么在这两个假设下，该算法的竞争比分别为 $\frac{1}{1-p+1/\alpha}$ 和 $^{1}{}_{(1-p)/(1+p)+1/\alpha}$。

证明思路。我们采用样本路径耦合技术，对 Gong 等人（2022）证明竞争比为 1/2 的方法进行扩展。令 OPT 表示先知算法所采用的最优算法，我们将“匹配损失”定义为这样一个事件：
OPT 在某个时刻匹配了资源i，而此时该资源在贪心算法下不可用 i。我们的分析关键在于给出匹配损失概率的上界，并通过两种方式实现。第一种方式利用资源的

可复用性——如果 p 是最小返回概率，那么每种资源在每个时间步都至少以 p的概率处于可用状态。第二种方式则通过刻画并研究一个能够避免匹配损失发生的事件。具体而言，时间 t发生匹配损失，是因为贪心算法在更早的时间 $t' < t$匹配了该资源，而该资源截至t仍未返回。此时，若 OPT 也在时间 t'匹配了同一资源，且两个算法的使用时长相耦合，那么时间 t就不会发生匹配损失。我们分析该事件的概率，并将其与匹配损失事件联系起来。这一步需要一系列精细论证，且依赖使用时长服从几何分布，因此仅在几何分布假设下的第二个结果中采用。

在我们的工作之前，由于可复用性带来的分析困难，针对可复用资源的在线算法，其性能保证不优于针对不可重复使用的资源的性能保证。相比之下，我们的工作利用可复用性表明，贪心策略相较于不可重复使用的情形能够实现更好的性能保证。这一现象背后的主要洞见是，资源的可复用性能够减轻次优匹配造成的未来损失，因为该资源将来会重新返回，并可以再次匹配。这带来的管理启示是，当可重复使用程度较高时，简单的贪心策略也能表现出色。据我们所知，我们是首个刻画在线算法的性能如何随资源可重复使用程度变化的研究。

1.1. 相关文献

我们首先简要介绍具有不可重复使用的资源的经典在线匹配问题相关文献。在请求序列具有对抗性的设置下，贪心策略可达到1/2 的竞争比（Mehta等人，2013），而已有研究表明，随机排名策略是最优的，其竞争比为 $1-1/e$ （Karp等人，1990；Birnbaum和 Mathieu，2008；Goel和 Mehta，2008）。Aggarwal等人（2011）引入了在线顶点加权二分图匹配问题，并证明随机扰动贪心算法也能达到 $1-1/e$ 竞争比；该算法是排名算法的严格推广。当每个资源具有较高库存时，Kalyanasundaram 和 Pruhs（2000）提出了一种确定性的Balance算法，可达到 $1-1/e$ 竞争比。Mehta 等人（2007）引入了 AdWords 问题，并提出了一种可达到 $1-1/e$ 竞争比的新颖算法，这是排名算法和Balance 算法的推广。Buchbinder等人（2007）以及 Devanur 等人（2013）从随机原始-对偶视角出发，为上述算法的一个一般版本提供了简洁优雅的证明。关于更详细的讨论，请参阅 Mehta 等人（2013）。在线决策还研究了定价（Ma和 Simchi-Levi，2020）、网络收益管理（Ma 等人，2020）、产品组合优化（Chan和 Farias，2009；Golrezaei 等人，2014）以及在线随机

背包问题（Jiang 等，2022）。在上述提到的所有设置下，如果没有大库存假设，任何确定性算法都无法达到大于$_{1\ 2}$ 的竞争比。

将资源的可复用性纳入考量，为在线匹配算法的分析带来了新的挑战。现有文献旨在使可复用场景达到与不可重复使用的资源场景相同的性能保证。本文所关注的对抗性到达模型最早由Gong等人（2022）研究，他们证明了贪心算法具有 $1/2$ 的竞争比。Delong等人（2022）提出了一种竞争比为 0.589 的策略，该策略是经典的、针对不可重复使用的资源的 RANKING算法的推广。在大库存这一额外假设下，Goyal 等人（2020）和 Feng 等人（2021）分别针对在线匹配问题和在线组合问题提出了不同的算法，实现了 $1-1/e$ 的竞争比。Huo 和Cheung（2022）、Zhang 和Cheung（2022）研究了奖励依赖于需求的在线资源分配问题。

可复用资源在随机到达的情形下也得到了研究，此时请求到达的分布是已知的。Dickerson 等人（2021）提出了一种基于模拟的算法，为在线匹配问题实现了 $1/2$ 竞争比。Rusmevichientong 等人（2020）研究了选品场景下的问题，并基于近似动态规划，证明其相较于基于最优动态规划的结果可达到 1/2 的近似比。Feng 等人（2019）以及 Baek 和 Ma（2022）提出了不同的算法，其相对于线性规划基准的竞争比为 1/2。Feng 等人（2022）针对无限库存情形提出了一种近乎最优的算法。Rusmevichientong 等人（2023）研究了酒店客房预订场景中的资源分配问题，并提出了性能取决于最长使用持续时间的算法。Xie 等人（2022）研究了过载网络中资源单元数量较多的渐近情形，并提出了一种实现对数遗憾的算法。

除了在线匹配场景外，还有一些研究考察了可复用资源的定价问题。Besbes 等人（2019）研究了可复用资源的定价问题，并证明静态定价相对于最优策略，在利润、市场份额和服务水平方面可同时获得 78.9% 的性能保证。Jia 等人（2022）研究了可复用资源的在线定价问题，其中服务率和服务率均呈指数分布且依赖于价格。Banerjee 等人（2022）研究了车辆共享系统中的定价决策，并提供了一种算法，其性能保证仅取决于每个站点的平均车辆数。

2. 模型与结果

我们考虑一个在线匹配问题，其中 G 是一个二分图，‘离线’一侧有 N 个顶点，‘在线’一侧有 T 个顶点，边 E 表示离线顶点是否可以用于匹配在线顶点。我们将离线一侧的顶点称为‘资源’，并且

将在线侧的顶点称为“请求”。在每个时间步 $t=1,\dots,T$，在线顶点 t到达，与 t 相连的边会被揭示，我们必须做出不可撤销的决定，将 t 匹配到至多一个尚未被匹配的资源。如果我们将 t 匹配到资源 i，那么 i 将在随机持续时间 $D_{it} \geq 1$内不可用，我们将其称为“使用时长”。资源 i 会在时间 $t+D_{it}$开始时返回，并立即可以再次被匹配。对于每个资源 i，我们假设存在一个分布 F_i，每当 i 被匹配时，其使用时长都会从该分布中独立抽取。每当资源 i 被匹配时，我们就获得奖励 r_i，并且假设 $0 \leq r_1 \leq \cdots \leq r_N$。

令 $I_t \subseteq [N]$ 表示在时间 t可供匹配的资源集合，令$N_t \subseteq [N]$ 表示与请求 t相邻的资源集合。我们用 $A_t \in (N_t \cap I_t)$ 表示在时间 t匹配的资源，其中 $A_t = 0$ 表示不匹配操作。贪心策略会匹配可用资源中奖励最高的资源；即 $A_t = \max((N_t \cap I_t) \cup \{0\})$。我们将贪心策略的表现与最优的全知基准进行比较。该基准知道完整的到达序列，但不知道使用时长的实现值 D_{it}。我们将这一先知算法称为最优算法。

一个问题实例 $\mathcal{I}$ 由二分图 G、奖励 r_i 以及所有离线顶点 $i \in N$的使用时长分布 F_i确定，即 $\mathcal{I} = (G, \{r_i, F_i\}_{i\in[N]})$。令最优算法$(\mathcal{I})$和贪心算法$(\mathcal{I})$分别表示最优算法和贪心算法的期望奖励。当显然时，我们不特别说明对 $\mathcal{I}$ 的依赖。对于实例类 $\mathcal{C}$，如果对于每个实例 $\mathcal{I} \in \mathcal{C}$，$\frac{\text{贪心算法}(\mathcal{I})}{\text{最优算法}(\mathcal{I})} \geq c$，则称贪心算法达到了 c 的竞争比。我们在使用时长的两种不同假设下分析贪心算法的竞争比。

2.1. 结果

首先，我们证明$\frac{\text{贪心算法}(\mathcal{I})}{\text{最优算法}(\mathcal{I})}$的一个上界，该上界由 $p = \min_i \Pr(F_i = 1)$ 参数化，其中 $p = \min_i \Pr(F_i = 1)$ 是所有资源中该资源在下一个时间步立即返回的最小概率。

THEOREM 1. 给定一个实例 $\mathcal{I}$，令 $p = \min_i \Pr(F_i = 1)$。则，

$$\frac{\mathsf{Greedy}(\mathcal{I})}{\mathsf{OPT}(\mathcal{I})} \geq \frac{1}{2-p}.$$

定理 1 意味着，对于任意固定的 $p \in [0,1]$，对于满足 $\min_i \Pr(F_i = 1) \geq p$ 的实例类别，贪心算法实现了 $1/(2-p)$ 的竞争比。

Next，我们考虑使用时长服从几何分布的实例类别。

ASSUMPTION 1. $F_i =$ 几何分布(p_i) 对某个 $p_i \geq 0$ 对所有 $i \in [N]$。

THEOREM 2. 对于满足假设 1 的任意实例 $\mathcal{I}$，如果 $p = \min_i p_i$，那么

$$\frac{\mathsf{Greedy}(\mathcal{I})}{\mathsf{OPT}(\mathcal{I})} \geq \frac{1+p}{2}.$$

根据定理 1 和定理 2，当 $p=0$ 时，竞争比从 1/2 开始，并随着 p 增大到 1 而单调递增。$p=0$ 的情况对应不可重复使用的资源，这两个结果都与 Mehta 等人，2013 所确立的在线匹配的 1/2 竞争比一致。另一方面，当 $p=1$ 时，任何已匹配的资源都会在下一个时间步立即返回，因此贪心策略就是最优解。

对于具有 $p\in(0,1)$ 的实例，定理 2 给出的界严格强于定理 1 给出的界。现在我们将举例说明定理 2 是紧的。换言之，对于任意 p 和 $\epsilon>0$，都存在一个满足假设 1 的实例，使得$\frac{\text{贪心算法}(\mathcal{I})}{\text{最优算法}(\mathcal{I})}\leq\frac{1+p}{2}+\epsilon$。

Example 1. 固定 $p\in[0,1]$。设 $T=2$, $N=2$和 $\delta>0$。设 $r_1=1, r_2=1+\delta$，并令 $N_1=\{1,2\}, N_2=\{2\}$。假设 $p_1=p_2=p$。先知算法将在时刻 1 选择项目 1，并在时刻 2 选择项目 2，从而获得奖励 $\mathrm{OPT}=2+\delta$。贪心算法将在时刻 1 选择项目 2。如果项目 2 在时刻 2 返回，贪心算法将选择项目 2；否则将不会进行分配。期望奖励为贪心算法 $=(1+p)(1+\delta)$。于是，贪心算法/最优算法 $=(1+p)(1+\delta)/(2+\delta)\to(1+p)/2$，因为 $\delta\to0$。

最后，我们考虑一种算法 ALG，它并非完全等同于贪心策略，但在其匹配的资源奖励方面近似于贪心策略。我们将在下一个定理中证明，ALG 也具有竞争比，且该竞争比会随着 ALG 对贪心策略的近似程度而平稳变化。为便于分析，我们定义 $r^*(I)=\max_{i\in I} r_i$，表示资源集合 $I\in[N]$ 中的最高奖励。

Theorem 3. 设 ALG 是一种策略，且存在一个 $\alpha\in[0,1]$，使得

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} r_{A_t}\right]\geq\alpha\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} r^*(I_t)\right], \tag{1}$$

其中，A_t 是 ALG 在时刻 t 匹配的资源，I_t 是 ALG 在时刻 t 可用的资源。于是，对于给定的实例 $\mathcal{I}$，当 $p=\min_i \Pr(F_i=1)$ 时，

$$\frac{\mathsf{ALG}(\mathcal{I})}{\mathsf{OPT}(\mathcal{I})}\geq\frac{1}{1-p+1/\alpha}.$$

接下来，如果使用时长服从几何分布且 $p=\min p_i$，

$$\frac{\mathsf{ALG}(\mathcal{I})}{\mathsf{OPT}(\mathcal{I})}\geq\frac{1}{(1-p)/(1+p)+1/\alpha}.$$

例如，如果 ALG 总是选择奖励至少为奖励最高的资源的一半的资源，那么满足条件 (1) 时 $\alpha=1/2$，在两种假设下分别得到 $\frac{1}{3-p}$ 和 $\frac{1+p}{3+p}$ 的近似。条件 (1) 比要求 ALG 必须

在每个时间步都满足近似要求更宽松；它只要求在所有时间步上的总近似在期望意义下得到满足。这一结果适用于无法获知确切奖励或需要对其进行估算的场景，也适用于业务约束妨碍实施精确贪心策略的其他情形。通过证明竞争比会随着近似程度的变化而平稳调整， α，我们的研究表明，在特定场景中，即使采用次优的贪心算法近似，也能取得出色的性能。这一发现对从业者尤其有用，因为他们必须应对现实环境的复杂性，而在这些环境中，完备信息或遵循理想策略可能并不可行。

3. 证明

定理 1和定理 2的证明从相同步骤开始。两个证明都依赖于在贪心算法和最优算法之间对样本路径进行耦合，并且这两个结果使用了两种不同的耦合机制，我们将在后文具体说明。

对于一个固定实例 $\mathcal{I}$，我们假设贪心算法和最优算法的样本路径是耦合的（耦合将在后文指定）。我们将 I_t、 $I_t^* \subseteq [N]$ 分别记为在时间 t贪心算法和最优算法下可用的资源。同样地，将 $A_t \in I_t$、 $A_t^* \in I_t^*$分别记为在时间 t 由贪心算法和最优算法匹配的资源。我们将 $O_{it} = \{j \notin I_t \, \forall j \geq i\}$ 定义为这样一个事件：在时间t，所有资源 $j \geq i$ 在贪心算法下均不可用。

对于 OPT 下匹配的每个资源 i，我们根据是否发生 O_{it} 来分解奖励：

$$\begin{aligned}\mathsf{OPT} &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_{i\,\mathbb{I}}(A_t^*=i)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_{i\,\mathbb{I}}(A_t^*=i,\neg O_{it})\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_{i\,\mathbb{I}}(A_t^*=i,O_{it})\right] \qquad (2)\end{aligned}$$

当 $\neg O_{it}$ 发生时，根据贪心算法的定义，贪心算法将在时间 t将奖励高于资源 i 的资源进行匹配。因此，(2) 的第一项至多为贪心算法。将 (2)中的第二项记为 $\mathsf{LOST} = \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_{i\,\mathbb{I}}(A_t^*=i,O_{it})\right]$，于是我们有

$$\mathsf{OPT} \leq \mathsf{Greedy} + \mathsf{LOST}.$$

LOST表示当贪心算法没有可用的该资源（或更有价值的资源）而最优算法匹配了某项资源时所获得的奖励，因此我们将其称为“损失”匹配。随后，我们在两种不同的假设下分别给出两个对 LOST 进行上界约束的命题，并由此分别得到定理 1 和定理 2。

如果 $p = \min_i \Pr(D_{i1} = 1) \geq 0$,

$$\mathsf{LOST} \leq (1-p)\mathsf{Greedy}.$$

PROPOSITION 2. 在假设 1 下，

$$\mathsf{LOST} \leq \frac{1-p}{1+p}\mathsf{Greedy}.$$

我们在以下小节中证明这两个命题。我们注意到，命题 2 的证明借鉴了命题 1 证明中的思想。

3.1. 命题 1 的证明

在此证明中，我们采用了一种与Gong等人（2022）所使用的方法类似的样本路径耦合，该耦合强制要求最优算法与贪心算法具有相同的使用持续时间实现。

样本路径耦合。对于每个资源 i，我们维护一个堆栈 S_i，其初始为空。在时间步 t，如果贪心算法和最优算法匹配同一个资源 i，那么我们从 F_i 生成一个独立同分布（i.i.d.）样本，并将其用作两种策略的使用时长。否则，当资源 i 在贪心算法下被匹配时，我们从分布 F_i 生成一个独立同分布（i.i.d.）样本，将其压入堆栈S_i，并将其用作资源 i在贪心算法下的使用时长。当资源 i 在最优算法下被匹配时，我们从堆栈 S_i 中弹出一个样本（后进先出顺序），并将其用作使用时长，同时将其从堆栈中移除。如果堆栈为空，则我们直接从 F_i生成一个独立同分布（i.i.d.）样本。这种样本路径耦合方法旨在同步贪心算法和最优算法中资源的使用时长，从而公平地比较它们的性能。它确保在可能的情况下，两种策略共享使用时长的实现值，在保留这些实现值之间依赖关系的同时，仍然考虑每种算法所作匹配决策之间的差异。

命题 1 的证明。回顾一下，$\mathsf{LOST} = \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_i \mathbb{I}(A_t^* = i, O_{it})\right]$。固定某个 i 和 t，使得事件 $\{A_t^* = i, O_{it}\}$ 发生——我们将此事件称为一次“失配”。失配意味着贪心算法在较早的时间步匹配了资源 i，且此后该资源尚未返回。定义 $\tau_i(t) < t$ 为 i 在贪心算法中最后一次被匹配的时间：

$$\tau_i(t) \triangleq \max\{t' < t : A_{t'} = i \text{ or } t' = 0\}. \tag{3}$$

接下来，我们声称，如果在时间 t 和 s 发生了匹配损失，那么 $\tau_i(t) \neq \tau_i(s)$。具体而言，假设 $t < s$，使得 $\{A_t^* = i, O_{it}\}$ 且 $\{A_s^* = i, O_{is}\}$。根据样本路径耦合，当 OPT 在时间 t 匹配资源 i 时，它使用的持续时间与 Greedy 在时间 $\tau_i(t)$ 匹配资源 i 时相同。因此，该资源在 Greedy 下的返回时间早于其在 OPT 下的返回时间。在时间 $s > t$，OPT 再次匹配该资源；于是，要使 O_{it} 发生，Greedy 必定也在 $\tau_i(t)$ 之后再次匹配了该资源。因此，$\tau_i(t) < \tau_i(s)$。

这种 $\tau_i(\cdot)$ 的一一对应关系使我们能够将最优算法中的销售总额转换为贪心算法中的销售总额。

$$\begin{aligned}\mathsf{LOST} &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_i \mathbb{I}(A_t^* = i, O_{it})\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{t'=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_i \mathbb{I}(A_{t'} = i, \exists t > t' \text{ s.t. } i \notin I_t, A_t^* = i, t' = \tau_i(t))\right].\end{aligned}$$

注意，要使事件 $\{A_{t'} = i, \exists t > t' \text{ s.t. } i \notin I_t, t' = \tau_i(t)\}$ 发生，必须满足 $D_{it'} > 1$；也就是说，i 的使用持续时间必须长于 1，才能导致未来匹配损失。因此，

$$\begin{aligned}\mathsf{LOST} &\le \mathbb{E}\left[\sum_{t'=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_i \mathbb{I}(A_{t'} = i, D_{it'} > 1)\right] \\ &= \sum_{t'=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_i \Pr(A_{t'} = i)\Pr(D_{it'} > 1 \mid A_{t'} = i).\end{aligned}$$

根据 p 的定义，$\Pr(D_{it'} > 1 \mid A_{t'} = i) \le (1-p)$，由此得到所需的界 $\mathsf{LOST} \le (1-p)$贪心算法。□

3.2. 命题 2 的证明

在此证明中，我们采用以下机制对样本路径进行耦合，该机制利用了使用持续时间服从几何分布这一假设。

样本路径耦合。令 $P_{it} \sim \mathsf{Bern}(p_i)$，对每个 $i \in [N]$ 和 $t \in [T]$ 独立抽取。不可用的资源 i 当且仅当 $P_{it} = 1$ 时，才会在时间 t 开始时返回。贪心算法和最优算法共享相同的 P_{it} 随机变量。

现在，我们在命题 1 的证明基础上，利用更强的假设 1 来收紧界。在命题 1 的证明中，核心思想是：如果在时间 t' 被贪心算法匹配的资源在下一个时间步立即返回（这以概率 $\ge p$ 发生），那么它就不会对 LOST 作出贡献。于是，我们的想法是进一步纳入这样一个事实：如果最优算法在时间 t' 匹配了同一资源，那么贪心算法在时间 t' 所作的一次分配也不会对 LOST 作出贡献。也就是说，如果贪心算法和最优算法都在时间 t' 匹配资源 i，那么在两种策略下，该资源会在同一时间返回（由于样本路径耦合）。因此，这不会导致事件 $\{A_t^* = i, O_{it}\}$ 在未来发生。于是，当贪心算法在时间 t' 匹配资源 i 时，只要该资源在下一个时间步之前返回，或者最优算法也在时间 t' 匹配了资源 i，它就不会对 LOST 作出贡献。上述论证给出了以下界。

Proposition 3.

$$\mathsf{LOST} \le (1-p)\left(\mathsf{Greedy} - \sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_i \Pr(A_t^* = A_t = i)\right). \tag{4}$$

(4)式右侧记录了贪心算法的奖励中有多少可能对 LOST 作出贡献。如果资源在下一个时间步返回（因此有 $(1-p)$ 项），或者最优算法匹配了同一资源（因此要减去相应的项），则该奖励无法对 LOST 作出贡献。命题 3 将在第 3.3 节中形式化推导。接下来，我们的目标是为项 $\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_i \Pr(A_t^* = A_t = i)$ 给出下界。我们通过以下引理来实现这一点：

LEMMA 1. 对于任意 $i \in [N]$ 和 $t \in [T]$,

$$\Pr(A_t^* = A_t = i) \geq \frac{p}{1-p}\Pr(A_t^* = i, O_{it}).$$

这是我们证明中的一个关键结果，它依赖于使用时长服从几何分布——证明见第 3.4 节。主要直觉是，事件 $\{A_t = i\}$ 发生还是 O_{it} 发生，实际上取决于资源 i 是否在时间 t 开始时归还；归还和未归还的概率分别为 p 和 $(1-p)$。因此，比值 $\Pr(A_t^* = A_t = i)/\Pr(A_t^* = i, O_{it})$ 等于 $p/(1-p)$。

将引理 1 代入（4）可得

$$\begin{aligned}\mathsf{LOST} &\leq (1-p)\left(\mathsf{Greedy} - \frac{p}{1-p}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_i \Pr(A_t^* = i, O_{it})\right)\\ &= (1-p)\left(\mathsf{Greedy} - \frac{p}{1-p}\mathsf{LOST}\right).\end{aligned}$$

重新整理后即可得到 $\mathsf{LOST} \leq \frac{1-p}{1+p}\cdot$贪心算法 的所需结果，从而完成命题 2 和定理 2 的证明。

3.3. 命题 3 的证明

定义 $\tau_i(t) < t$ 为 i 在贪心算法中最后一次被匹配的时间：

$$\tau_i(t) \triangleq \max\{t' < t : A_{t'} = i \text{ or } t' = 0\}.$$

若事件 $\{A_t^* = i, O_{it}\}$ 发生，则 $\tau_i(t)$ 是贪心算法匹配资源 i 的时间，并且资源 i 自那时起尚未归还。也就是说，时间 $\tau_i(t)$ 的销售导致了分配损失 $\{A_t^* = i, O_{it}\}$。

$$\begin{aligned}\mathsf{LOST} &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_i \mathbb{I}(A_t^* = i, O_{it})\right]\\ &\leq \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_i \mathbb{I}(A_t^* = i, i \notin I_t, A_{\tau_i(t)} = i)\right] \qquad (5)\end{aligned}$$

我们证明，(5) 中的每一项都对应唯一的 $\tau_i(t)$，这得益于样本路径耦合。

CLAIM 1. 如果 $t \neq s$ 使得事件 $\{A_t^* = i, i \notin I_t\}$ 和 $\{A_s^* = i, i \notin I_s\}$ 同时发生，那么 $\tau_i(t) \neq \tau_i(s)$。

这使我们能够将求和改为对 t' 求和：

$$\mathsf{LOST} \leq \mathbb{E}\left[\sum_{t'=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_i \mathbb{I}(A_{t'} = i, \exists t > t' \text{ s.t. } A_t^* = i, i \notin I_t, t' = \tau_i(t))\right]. \tag{6}$$

式（6）的右侧对由之前已被贪心算法匹配的资源产生的损失奖励进行求和，而指示函数表示这是否会导致未来损失销售。

对于每个 i 和 t，定义 $D_{it} = \max\{d \geq 1 : P_{i,\ t+d'} = 0\ \forall d' \leq d\}$ 表示资源i 若在时间 t 被匹配，将会有多长的持续时间处于不可用状态。

我们证明，对于事件 $\{A_{t'} = i, \exists t > t' \text{ s.t. } A_t^* = i,\ i \notin I_t,\ t' = \tau_i(t)\}$ 发生的情况，贪心算法和最优算法必定在时间 t' 匹配了不同的资源，并且 $D_{it'} > 1$。

CLAIM 2. 对于任意 $i \in [N],\ t' \in [T]$，如果 $\{A_{t'} = i, \exists t > t' \text{ s.t. } A_t^* = i,\ i \notin I_t,\ t' = \tau_i(t)\}$ 发生，则$\{A_{t'} = i, A_{t'}^* \neq A_{t'}, D_{it'} > 1\}$ 发生。

这一结果成立是由于样本路径耦合。如果贪心算法和最优算法都在时间 t' 匹配资源 i，那么这些资源会同时返回，因此事件 $\{A_{t'} = i, \exists t > t' \text{ s.t. } A_t^* = i, i \notin I_t, t' = \tau_i(t)\}$ 不可能发生。利用断言 2 可得

$$\begin{aligned}
\mathsf{LOST} &\leq \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_i \mathbb{I}(A_t = i, A_t^* \neq A_t, D_{it} > 1)\right] \\
&= \sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_i \Pr(A_t = i, A_t^* \neq A_t) \Pr(D_{it} > 1 \mid A_t = i, A_t^* \neq A_t).
\end{aligned}$$

注意，D_{it} 仅是变量 $(P_{is})_{s>t}$ 的函数，而这些变量与 A_t 和 A_t^* 相互独立。因此，$\Pr(D_{it} > 1 \mid A_t = i, A_t^* \neq A_t) \leq 1 - p$。于是我们有

$$\begin{aligned}
\mathsf{LOST} &\leq (1-p)\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_i \Pr(A_t = i, A_t^* \neq A_t) \\
&= (1-p)\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_i \mathbb{I}(A_t = i, A_t^* \neq A_t)\right] \\
&= (1-p)\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_i \left(\mathbb{I}(A_t = i) - \mathbb{I}(A_t^* = A_t = i)\right)\right] \\
&= (1-p)\left(\mathsf{Greedy} - \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_i \mathbb{I}(A_t^* = A_t = i)\right]\right),
\end{aligned}$$

如所需。

3.3.1. 主张 1 的证明。设 $t<s$，使得两个事件 $\{A_t^*=i, i\notin I_t\}$ 和 $\{A_s^*=i, i\notin I_s\}$ 都发生。若 $A_t^*=i$ 和 $A_s^*=i$ 都发生，则资源 i 必须在时间 t 和 s 之间返回。也就是说，存在一个 $t'\in\{t+1,\dots,s\}$，使得 $P_{it'}=1$。那么，由于样本路径耦合，资源 i 在时间 t' 可供贪心算法使用；即 $i\in I_{t'}$。如果 $i\notin I_s$，那么贪心算法必定在时间 t' 和 s 之间匹配了资源 i。于是，根据定义 $\tau_i(s)\geq t'>t>\tau_i(t)$。

3.3.2. 主张 2 的证明。固定 i, t'，使得满足 $\{A_{t'}=i, \exists t>t'$ 的 $A_t^*=i, i\notin I_t, t'=\tau_i(t)\}$ 发生。反设 $A_{t'}^*=A_{t'}$。那么，由于样本路径耦合，资源 i 在贪心算法和最优算法下会于同一时刻 $s>t'$ 返回。必有 $t\geq s$。若 $i\notin I_t$，则贪心算法必定在时间 t 之前再次匹配了资源 i，因此根据定义，$\tau_i(t)\neq t'$。

若 $D_{it'}=1$，则 i 在时间 $t'+1$ 可用。因此，基于相同的理由，要使 $i\notin I_t$ 发生，贪心算法必定再次匹配资源 i，此时 $\tau_i(t)\neq t'$。

3.4. 引理 1 的证明

回忆一下 $O_{it}=\{j\notin I_t\ \forall j\geq i\}$。那么，根据贪心算法的定义，$O_{it}$ 当且仅当 $A_t<i$ 时发生。因此，我们希望证明

$$\Pr(A_t^*=A_t=i)\geq\frac{p}{1-p}\Pr(A_t^*=i, A_t<i).$$

固定任意 i和 t，使得 $i\in N(t)$。用 $H_t=\{(P_{is})_{i\in[N]}, N_s, A_s, A_s^*\}_{s\leq t}$ 表示时间 t 结束时贪心算法和最优算法的事件历史。

令 $F_{it}=\{i\notin I_t\}\cup\{A_t=i\}$ 表示在贪心算法下，i 在时间 t 不可用或在时间 t 已匹配的事件。F_{it} 表明资源 i 在时间 t结束时不可用。类似地为 OPT 定义$F_{it}^*=\{i\notin I_t^*\}\cup\{A_t^*=i\}$。

如果事件$\{A_t^*=i, A_t<i\}$ 发生，则必然是 $F_{i,t-1}\cap\neg F^*{}_{i,t-1}$ 发生。

证明。假设 $\{A_t^*=i, A_t<i\}$ 成立。如果没有发生 $F_{i,\ t-1}$，那么在贪心算法下，资源 i 在时间 t 可用，因此贪心算法会匹配资源 i （或价值更高的资源），这与 $A_t<i$矛盾。因此，必定发生了 $F_{i,\ t-1}$。接下来，假设发生了 $F_{i,\ t-1}^*$。但是，由于 $A_t^*=i$ 发生了，资源 i 必定恰好在时间 t 归还，因此 $P_{it}=1$。但这意味着资源 i 在贪心算法下也可用，因此不可能出现 $A_t<i$。所以，必定发生了 $F_{i,\ t-1}$（i），而 $F_{i,\ t-1}^*$ 没有发生。□

令 $\mathcal{H}_t$ 为满足$F_{it}\cap\neg F^*{}_{i,\ t-1}$ 发生的历史集合。要使事件 $A_t<i$ 发生，以下各项都必须发生：$H_t\in\mathcal{H}_t$、$P_{it}=0$，并且 $j\notin I_t\ \forall j>i$。于是，对于任意历史$h\in\mathcal{H}_t$,

$$\Pr(A_t^*=i, A_t<i, H_t=h)$$

$$
\begin{aligned}
&= \Pr(A_t^* = i, H_t = h, P_{it} = 0, j \notin I_t \, \forall j > i) \\
&= \Pr(P_{it} = 0 \mid A_t^* = i, H_t = h, j \notin I_t \, \forall j > i) \Pr(A_t^* = i, H_t = h, j \notin I_t \, \forall j > i) \\
&= (1 - p_i) \Pr(A_t^* = i, H_t = h, j \notin I_t \, \forall j > i)
\end{aligned}
$$

最后一个等式成立，是因为 P_{it} 与条件化中的所有事件相互独立。具体而言，由于历史 h 满足F_i^*, </style}$_{t-1}$ 未发生，因此无论 P_{it}如何， P_{it} 都不会以任何方式影响最优算法 OPT——$i \in I_t^*$。类似地，$\Pr(P_{it} = 1 \mid A_t^* = i, H_t = h, j \notin I_t \, \forall j > i) = p_i$。利用这一点，我们得到

$$
\begin{aligned}
\Pr(A_t^* = i, A_t < i, H_t = h) &= (1 - p_i)/p_i \Pr(A_t^* = i, H_t = h, P_{it} = 1, j \notin I_t \, \forall j > i) \\
&= (1 - p_i)/p_i \Pr(A_t^* = i, H_t = h, A_t = i).
\end{aligned}
$$

然后，我们对所有可能的历史记录 $h \in \mathcal{H}_t$ 求和：

$$
\begin{aligned}
\Pr(A_t^* = i, A_t < i) &= \sum_{h \in \mathcal{H}_t} \Pr(A_t^* = i, A_t < i, H_t = h) \\
&= \frac{1 - p_i}{p_i} \sum_{h \in \mathcal{H}_t} \Pr(A_t^* = A_t = i, H_t = h) \\
&\leq \frac{1 - p_i}{p_i} \Pr(A_t^* = A_t = i) \\
&\leq \frac{1 - p}{p} \Pr(A_t^* = A_t = i),
\end{aligned}
$$

其中，第一个不等式是因为在历史 $h \notin \mathcal{H}_t$ 下可能发生 $A_t^* = A_t = i$，而最后一个不等式则是因为对于所有 i， $p_i \geq p$。

3.5. 定理 3 的证明

考虑定理1和2的前几个步骤，其中我们将贪心策略替换为 ALG。具体而言，令 I_t 表示在时间 t ALG 下可用的资源，并令 A_t 表示在时间 t 在 ALG下匹配的资源。于是， O_{it} 是这样一个事件：在时间 t，所有资源 $j \geq i$ 在 ALG 下均不可用。

随后我们也可以使用与 (2) 中相同的 OPT 的分解：

$$
\mathsf{OPT} = \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in [N]} r_{i\,\mathbb{I}}(A_t^* = i, \neg O_{it})\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in [N]} r_{i\,\mathbb{I}}(A_t^* = i, O_{it})\right] \tag{7}
$$

考虑式 (7) 中的第一项。事件 $\{A_t^* = i, \neg O_{it}\}$ 意味着，在 ALG 下，至少存在一个可用资源 $j \geq i$，其中 i 是由最优算法匹配的资源。因此，根据 $r^*(I_t)$ 的定义，我们有

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in [N]} r_{i\,\mathbb{I}}(A_t^* = i, \neg O_{it})\right] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} r^*(I_t)\right].
$$

根据关于 ALG 的近似假设，

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} r^*(I_t)\right] \leq \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} r_{A_t}\right] = \frac{1}{\alpha}\mathsf{ALG}.$$

因此，

$$\mathsf{OPT} \leq \frac{1}{\alpha}\mathsf{ALG} + \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in[N]} r_i \mathbb{I}(A_t^* = i, O_{it})\right]. \tag{8}$$

式（8）中的第二项在定理 1 和定理 2 的证明中被定义为 LOST。对 LOST 给出上界的命题 1 和命题 2 完全不依赖于被比较的策略，因此这些结果在 ALG 下仍然成立。结合这些命题与式（8），即可得到定理 3 所需的结果。

4. 结论与未来方向

我们研究了含可复用资源的在线二分图匹配问题中贪心策略的表现。我们证明，若每个匹配的资源至少以概率 p 在下一时段变为可用，则贪心算法可达到 $\frac{1}{2-p}$ 的竞争比。此外，当使用持续时间服从参数为 p 的几何分布时，我们给出了更强的竞争比 $\frac{1+p}{2}$，并证明该界是紧的。我们还证明，若某算法将每个请求匹配给奖励为贪心算法所得奖励的 $\alpha \in [0,1]$ 的资源，则在上述两项假设下，该算法的竞争比分别为 $\frac{1}{1-p+1/\alpha}$ 和 $1 \ (1-p) \ / \ (1+p) \ +1/\alpha$。我们的结果表明，资源的“可复用性”可以显著提升贪心算法的表现。

这项工作提出了若干值得在未来探索的问题。一个方向是探究能否针对一般的使用时长分布证明 $\frac{1+p}{2}$ 的紧确保证。当前用于证明这一更紧界限的分析高度依赖几何分布，因此，推广这些结果可能需要新的技术创新。另一个方向是研究在采用相同的可重复使用程度参数化方式时，能否通过其他策略改进贪心算法的性能界限。或许还存在其他自然策略，能够利用资源的可重复使用性来实现更好的性能；探索这些可能性将很有意义。

参考文献

Aggarwal G、Goel G、Karande C、Mehta A（2011）在线顶点加权二分图匹配与单次出价预算分配。《第二十二届 ACM-SIAM 离散算法年度研讨会论文集》，1253–1264（SIAM）。

Baek J，Ma W（2022）通过拆分约束提高可复用资源网络收益管理的近似比。《运筹学》70(4):2226–2236。

Banerjee S，Freund D，Lykouris T（2022）共享车辆系统中的定价与优化：一种近似框架。《运筹学》70(3):1783–1805。Besbes O，Elmachtoub AN，Sun Y（2019）静态定价：可复用资源的普适保证。2019年ACM经济学与计算会议论文集，393–394。Birnbaum B，Mathieu C（2008）简化在线二分图匹配。ACM SIGACT News 39(1):80–87。Buchbinder N，Jain K，Naor J（2007）用于最大化广告拍卖收入的在线原始—对偶算法。《算法—ESA 2007：第15届年度欧洲算法研讨会论文集》，以色列埃拉特，2007年10月8日至10日。第15卷，253–264（Springer）。Chan CW，Farias VF（2009）随机耗竭问题：一类动态优化问题的有效短视策略。《运筹学数学》34(2):333–350。Delong S，Farhadi A，Niazadeh R，Sivan B（2022）具有可复用资源的在线二分图匹配。第23届ACM经济学与计算会议论文集，962–963。Devanur NR，Jain K，Kleinberg RD（2013）在线二分图匹配中排序算法的随机化原始—对偶分析。第二十四届年度ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，101–107（SIAM）。Dickerson JP，Sankararaman KA，Srinivasan A，Xu P（2021）网约车平台中的分配问题：利用离线可复用资源进行在线匹配。《ACM经济与计算汇刊》（TEAC）9(3):1–17。Feng Y，Niazadeh R，Saberi A（2019）基于线性规划的在线策略：可复用资源的实时组合优化。芝加哥大学布斯商学院研究论文（20-25）。Feng Y，Niazadeh R，Saberi A（2021）具有外生补充的可复用资源在线组合优化。可见于SSRN 3795056。Feng Y，Niazadeh R，Saberi A（2022）近乎最优的贝叶斯在线可复用资源组合优化。第23届ACM经济学与计算会议论文集，964–965。Goel G，Mehta A（2008）随机输入模型下的在线预算约束匹配及其在AdWords中的应用。SODA，第8卷，982–991。Golrezaei N，Nazerzadeh H，Rusmevichientong P（2014）个性化组合的实时优化。《管理科学》60(6):1532–1551。Gong XY，Goyal V，Iyengar GN，Simchi-Levi D，Udwani R，Wang S（2022）利用可复用资源进行在线组合优化。《管理科学》68(7):4772–4785。Goyal V，Iyengar G，Udwani R（2020）在线分配可复用资源的渐近最优竞争比。arXiv预印本 arXiv:2002.02430。Huo T，Cheung WC（2022）多类到达情形下的在线可复用资源分配。可见于SSRN 4320423。

Jia H, Shi C, Shen S（2022）具有可复用资源的服务系统中的在线学习与定价。《运筹学》。Jiang J, Ma W, Zhang J（2022）多单位先知不等式与在线随机背包问题的紧确保证。《2022 年 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集》（SODA），1221–1246（SIAM）。KalyanasundaramB，Pruhs KR（2000）在线 b-匹配的最优确定性算法。《理论计算机科学》233(1-2)：319–325。Karp RM, Vazirani UV, Vazirani VV（1990）在线二分图匹配的最优算法。《第二十二届 ACM 计算理论年会论文集》，352–358。Ma W, Simchi-Levi D（2020）具有紧致权重相关竞争比的在线匹配、商品组合与定价算法。《运筹学》68(6)：1787–1803。Ma Y, Rusmevichientong P, Sumida M, Topaloglu H（2020）非平稳到达下网络收益管理的近似算法。《运筹学》68(3)：834–855。Mehta A, Saberi A, Vazirani U, Vazirani V（2007）Adwords 与广义在线匹配。《美国计算机学会期刊》（JACM）54(5)：22–电子页。Mehta A 等（2013）在线匹配与广告分配。《理论计算机科学中的基础与趋势》® 8(4)：265–368。Rusmevichientong P, Sumida M, Topaloglu H（2020）具有随机使用时长的可复用产品动态商品组合优化。《管理科学》66(7)：2820–2844。Rusmevichientong P, Sumida M, Topaloglu H, Bai Y（2023）异质资源的收益管理：单位资源容量、提前预订以及跨时间区间的行程。《运筹学》。Xie X, Gurvich I, K¨u¸c¨ukyavuz S（2022）可复用资源的动态分配：过载网络中的对数遗憾。《arXiv 预印本》arXiv:2212.02855。Zhang X, Cheung WC（2022）可复用资源的在线资源分配。《arXiv 预印本》arXiv:2212.02855。