arXiv:2304.03389v3 [math.LO] 5 Nov 2023

关于极小非-σ-散序线性序

JAMES CUMMINGS、TODD EISWORTH 和 JUSTIN TATCH MOORE

Abstract. 本文旨在给出新的线性序构造，使其在成为 *non-σ-scattered*方面是 *minimal* 的。具体而言，我们将证明 Jensen 原理 $\diamondsuit$ 蕴含存在一个极小的 Countryman 线，从而回答 Baumgartner 的一个问题 [5]。我们还给出了首批一致的例子：基数大于 $\aleph_1$的极小非-σ-散列线性序；给定一个后继基数 κ^+，我们可得到基数为 κ^+ 的此类线性序，并且它们的平方可分解为 κ条链的并。我们给出两种构造：一种是直接利用力迫构造此类例子，另一种是从组合原理推导其存在性。后一种方法表明，在 G¨odel 的可构造宇宙中，对每个基数 κ，都存在基数为 κ^+ 的极小非-σ-散列线性序；此外（利用 Rinot 的工作 [30]），在不存在满足“存在一个 Mitchell 阶为 μ^{++}的可测基数 μ ”这一条件的内模型时，奇异强极限基数的后继处必定存在此类例子。

1. Introduction

由 σ-散序线性序构成的类 $\mathfrak{M}$，曾由 Galvin 视为可数线性序类和良序类的一种自然推广。一方面，$\mathfrak{M}$ 相当丰富；另一方面，它也适合进行精细的结构分析。回顾一下，如果一个线性序不包含有理数直线的副本$(\mathbb{Q},\leqslant)$，则称其为散序；如果它是可数多个散序子序的并，则称其为 σ-散序。这两个类都包含良序，并且对字典序和 L上的逆序运算封闭 $\sum_{i\in K} L_i$；事实上，Hausdorff [13] 证明了散序构成具有这些封闭性质的最小类。

σ-散乱序构成满足这些闭包性质且额外满足对可数并封闭这一性质的最小类。在 [24]，，Laver 证明了 Fra¨ıss´e 的猜想，即可数线性序是良拟序的：每当 $L_i\ (i<\infty)$ 是可数线性序的一个序列时，都存在一个 $i<j$，使得 L_i 嵌入 L_j。事实上，他的证明确立了以下著名结果。

定理 1.1。（Laver *[24]*）类 $\mathfrak{M}$ 在可嵌入关系下是良拟序的。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03E04, 03E35, 03E45, 06A05.

Key words and phrases. Aronszajn 线、阿朗佐恩树、可构造宇宙、Countryman 线、力迫、线性序、极小、散乱。作者感谢 Assaf Rinot 阅读本文早期版本，并指出 $\square^+_\kappa$等价于 $\square_\kappa$。经他许可，文中已加入这一事实的证明。作者还感谢匿名审稿人认真审阅本文并提出宝贵意见。第一作者在本项目中的研究部分由 NSF 资助（项目编号 DMS–2054532）。第三作者在本项目中的研究部分由 NSF 资助（项目编号 DMS–1854367 和 DMS–2153975）。

从经验来看， $\mathfrak{M}$ 是对集合论独立性现象免疫的最大线性序类。因此，研究那些恰好处于 $\mathfrak{M}$ 之外的线性序是很自然的。一般而言，给定一个线性序类 $\mathfrak{C}$ ，我们称线性序 L 是 $\mathfrak{C}$ 的极小元，如果 L 属于 $\mathfrak{C}$ ，并且嵌入到其所有属于 $\mathfrak{C}$ 的子序中。本文将研究那些相对于不属于 $\mathfrak{M}$ 而极小的线性序 L 。更确切地说，我们将证明：对于每个无限基数 κ，存在一个基数为 κ^+ 、相对于非-σ-散布这一性质而言极小的线性序。此前，人们尚不知道，是否可能一致地存在一个基数大于 $\aleph_1$ 的极小非-σ-散布序。此外，即使是我们构造基数为 $\aleph_1$ 的极小非-σ-散布序，也属首创，并回答了 Baumgartner [5, 第 275] 页提出的一个问题。

数学与历史背景。关于散序线性序的最早结果之一是 Hausdorff 的以下结果。

定理 1.2。（Hausdorff *[13], 另见 [32]*）如果 κ 是正则基数，且 L是基数为 κ的散乱线性序，那么 κ 或 κ* 嵌入到 L中。

尽管直到 [24], 定理 1.2 才考虑 σ-散序线性序， σ-散序线性序类立即可以推广该定理。由于 ω_1 和 ω_1^* 都不能嵌入 $\mathbb{R}$，因此可知，没有任何不可数实数集是 σ-散序的。为简洁起见，我们将称一个线性序为实型，若它同构于实数直线的一个不可数子序。

实型的性质已经对集合论十分敏感。一方面，经典的对角化论证得出了 Dushnik 和 Miller 的以下结果。

定理1.3。（Dushnik 和Miller *[8]*）假设连续统假设。对于任意不可数的 $X \subseteq \mathbb{R}$, 存在一个不可数的 $Y \subseteq X$ ，使得 Y^2 不包含任何非恒等的不可数严格单调函数的图（因而不能嵌入任何真子序）。

另一方面，Baumgartner 证明，如果 $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ 是 $\aleph_1$-稠密的[1]，且连续统假设成立，那么存在一种可数链条件强迫，使 X 和 Y 保序同构[4]。特别地，他证明总是存在一个强迫扩张，在其中任意两个 $\aleph_1$-稠密的实数集都是同构的。如今，这个结果通常被表述为以下公理形式。

定理 1.4.（Baumgartner *[4]*）假设 PFA。任意两个 $\aleph_1$ 稠密子集 $\mathbb{R}$ 都同构。特别地，基数为 $\aleph_1$ 的任意实型都是极小的。

此处，适当强迫公理（Proper 强迫公理，PFA）是贝尔范畴定理的一个强大推广。正如我们稍后将看到的，它在对非-σ-散序线性序进行更广泛的分析中发挥着重要作用。关于线性序语境下的 PFA， [38]中可以找到更多信息；例如，[1], [7], [29], [39] 可参阅有关 PFA 及其后果的介绍。

另一类非-σ-散序的线性序由Aronszajn线提供：[2] 具有以下性质的不可数线性序：它们不包含既不可数又可分或散序的子序。Aronszajn线最初由 Aronszajn 和 Kurepa 构造（见 [18] [40]），是在分析过程中

[1]如果一个线性序没有最小元或最大元，且每个区间的基数为 κ，则称其为 κ-$dense$ 。[2] Aronszajn 线也称为 *Specker types*。

Souslin问题 [37], 询问 $\mathbb{R}$ 是否是唯一的完备稠密线性序，其中每个两两不交区间族都是可数的。根据定理 1.2，Aronszajn 线必然是非-σ-散的。

20 世纪 70 年代，R. Countryman 引入了一类如今称为 Countryman 线的线性序。这些是满足 $C \times C$ 为可数多个链之并的不可数线性序 C。这类线性序必为 Aronszajn 序，并且具有这样的性质：没有不可数线性序能够同时嵌入 C 和 C^*。Shelah 首先构造了它们 [34], ，随后 Todorcevic 给出了一个简化的构造 [41]。显然，Countryman 性质可由不可数子序继承。

Abraham 和 Shelah 证明了 Countryman 线的定理 1.4 的类似结果。

定理 1.5。（Abraham 和 Shelah *[2]*）假设连续统假设。任意 Countryman 线都可嵌入其所有不可数子序。此外，任意两个正则的 [3] Countryman 线要么同构，要么反向同构。

接下来的结果给出了 PFA 下 Aronszajn 线的完整分类。

定理 1.6。（Moore *[27]*）假设 PFA。每条 Aronszajn 线都含有一条 Countryman 子序。

定理 1.7。（Martinez-Ranero *[25]*）假设 PFA。Aronszajn 线在可嵌入关系下是良拟序的。

下一个定理给出了 PFA$^+$（PFA 的一种加强形式）下极小非-σ-散序线性序的完整刻画。

定理 1.8。（Ishiu 和 Moore *[14]*）假设 PFA$^+$。每个极小非-σ-散序线性序都同构于一个基数为 $\aleph_1$ 的实数集或一条 Countryman 线。此外，任何非-σ-散序线性序都含有一个基数为 $\aleph_1$ 的非-σ-散序子序。

由于 PFA 和 PFA$^+$ 都是相当强的假设，因此自然会问，在集合论的其他模型中哪些结果是可能的。尽管人们有理由认为，某种枚举原理（例如连续统假设或 $\diamondsuit$ ）或许能证明 Aronszajn 线的定理 1.3 的类似结果，但 Baumgartner 证明事实并非如此（Baumgartner 的构造中有一处错误，后来由 D. Soukup 修正）。

定理 1.9。（Baumgartner *[5],* D. Soukup *[36]*）假设 $\diamondsuit^+$。存在一条 Souslin 线，它能嵌入其所有不可数子序。

这里，Souslin 线是指一种不可分线性序，其中任意一族两两不相交的区间都是可数的。任何 Souslin 线都可以嵌入到一条作为线性序还具有稠密性和完备性的 Souslin 线中——因此，Souslin 线的存在等价于 Souslin 问题的反例的存在。另一方面，任何 Souslin 线 L 都包含一个 Aronszajn 子序——只需选取一个点的序列 $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$，取自 L，使得对所有 $\beta < \omega_1$， x_β 都不在 $\{x_\alpha$ 的闭包中：$\alpha < \beta\}$。此外，容易验证，Souslin 线的 Aronszajn 子序本身也是 Souslin 线。

[3]若 L 的所有在序拓扑下闭的可数子集构成 $([L]^\omega, \subset)$ 中的一个闭共尾集，则称 Aronszajn 线 L 是 *regular* 的 L -稠密 $\aleph_1$。

尽管 Baumgartner 的构造生成了一条极小 Aronszajn 线，但应注意，苏斯林直线必定不是 Countryman。在 [5], Baumgartner 提出，能否在他的构造中将 $\diamondsuit^+$ 弱化为 $\diamondsuit$，以及能否调整他的论证，构造出一条不是苏斯林线的极小 Aronszajn 线。

在 [28], 中，第三位作者证明了“不存在极小 Aronszajn 线”这一命题是一致的。为此，他们构造了一个满足连续统假设且也满足某个 Proper 强迫公理的组合推论的模型。该模型满足连续统假设这一点还带来了以下更强的结果。

定理 1.10。（Moore *[28]*）“ ω_1 和ω_1^* 是仅有的极小不可数线性序”这一命题与连续统假设相容。

在 [35], 中，D. Soukup 对这一论证作了调整，以证明 Souslin 线的存在并不意味着极小 Aronszajn 线的存在。

将 [28] 中的策略与对 [14] 的分析结合起来，得到了以下结果。

定理 1.11。（Lamei Ramandi 和 Moore *[23]*）如果存在一个超紧基数，那么就存在一个强迫扩张，其中连续统假设成立，且不存在极小的非σ散序线性序。

另一方面，Lamei Ramandi 已证明， $\diamondsuit$ 与存在一种极小的非-σ-散序线性序相一致；这种线性序既不是实数，也不属于 Aronszajn 型。事实上，他给出了两种性质迥异的构造。

定理 1.12。（Lamei Ramandi *[21]*）与 $\diamondsuit$ 相一致的是，存在一个极小的非-σ-散序线性序 L，其基数为 $\aleph_1$，且是某条 Kurepa线[4]的稠密子序。

定理 1.13。（Lamei Ramandi *[20]*）与 $\diamondsuit$ 相一致的是，存在一个极小的非-σ-散序，其性质是每个不可数子序都包含一个 ω_1 的副本。

主要结果。尽管如此，到目前为止，所有与之相一致的极小非-σ-散序线性序的基数都是 $\aleph_1$。为了陈述我们的主要结果，我们需要引入另一个定义。若线性序 L 的基数为 κ^+，且 L^2 是 κ 条链的并，则称其为 κ^+-Countryman。

定理 1.14。假设 V = L。对于每个无限基数 κ，存在一个 κ^+-Countryman 线，它相对于非-σ-散列而言是极小的。

事实上，定理 1.14 中的构造经过了在 [3], [30], [31] 中考察的组合原理 $\boxdiamond_\kappa$。这更增添了其意义，因为 Rinot 的 [30] 主要结果表明，若 μ 是奇异基数，则原理 $\boxdiamond_\mu$ 等价于 $\square_\mu$ 与 $2^\mu = \mu^+$ 的合取。由此可推得一个推论：在奇异强极限基数处， $\boxdiamond_\mu$ 的失败具有大基数强度；在这种情况下，要么奇异基数假设不成立，要么 $\square_\mu$ 失败。这两种可能性都具有大基数强度 [9], [10], [16], [33]，因此我们得到如下引人注目的推论。

[4]A *Kurepa line* 是一个稠密度为 $\aleph_1$、基数大于 $\aleph_1$ 且不包含实型的线性序。更多信息请参见 [40]。

推论 1.15. 假设不存在满足如下条件的内模型：其中存在一个 Mitchell 阶为 μ^{++} 的可测基数 μ。若 κ 是某个奇异强极限基数的后继，则存在一个基数为 κ 的极小非-σ-散乱线性序。

κ^+-Countryman线性序本身就很有趣。尽管它们几乎一直只在 $\kappa = \aleph_0$ 时被研究（在这种情况下，它们简称为Countryman 线性序），但它们的显著性质很容易推广到更高基数的情形：

- κ^+-Countryman 线性序不包含 κ^+ 或其逆序的副本。• 如果 L 是 κ^+-Countryman且 $X \subseteq L$ 的基数为 κ^+，那么存在一个由 X 的两两不交区间组成的族，其基数为 κ^+。特别地， X的稠密度为 κ^+。• 如果 L 是 κ^+-Countryman，那么没有任何基数为 κ^+ 的线性序能同时嵌入 L 和 L^*。

我们关于 $\kappa = \aleph_0$ 的论证稍微简单一些，而且具有独立的意义，因为它回答了上文提到的 Baumgartner 的问题。

定理 1.16. 假设 $\diamondsuit$。存在一条 Countryman 线，可以嵌入其所有不可数子序中。

组织。第 2 节将回顾我们所需的树与线性序的基础分析。在第 3 节中，我们将证明 $\diamondsuit$ 足以构造一个极小 Countryman 线。第4节包含对任意无限基数 κ 的 κ^+-Countryman 线的基础分析。第 5 节将介绍一种构造 κ^+-Countryman 线的框架，使其在非-σ-散列这一性质下为极小。随后，我们将在第 6 节和第 7 节中运用这一框架，给出此类线性序的力迫构造和公理化构造。最后，第 8 节包含一些总结性评论。

2. Preliminaries

我们将首先简要回顾一些我们所需的集合论中的记号、术语和概念。本节中的材料均非新内容，也并非由作者提出。关于树和线性序的更多信息可参见 [32] 和 [40]。 [15] 和 [17] 都是集合论的标准参考文献（ [15] 为百科全书式著作，而 [17] 则更加注重细节）。

所有计数从 0 开始。按照惯例，我们用 ω 表示有限序数的集合，并将其视为与非负整数一致。序列是定义域为序数的函数。序列 s 的定义域通常称为其长度，记作 $|s|$。如果 s 和 t 是序数序列，则当且仅当 s 是 t 的初始部分，或者存在一个 $\xi < \min(|s|, |t|)$，使得 $s(\xi) \neq t(\xi)$，且对于最小的此类 ξ，有 $s(\xi) < t(\xi)$ 时，我们定义 $s \leqslant_{\mathrm{lex}} t$。我们通常将函数与其图等同起来。特别地，如果 f 和 g 是函数，则当且仅当 f 是 g 的限制（包括 $f = g$ 的可能性）时， $f \subseteq g$。

如果 s 和 t 是取值于 $\mathbb{Z}$ 的两个序列，我们将 $s + t$ 定义为在受限定义域上逐坐标相加所得的长度为 $\min(|s|, |t|)$ 的序列。如果 t 是取值于 $\mathbb{Z}$ 的序列，那么 $-t$ 是逐坐标乘以 -1 所得的长度为 $|t|$ 的序列。按照惯例， $s - t$ 是 $s + (-t)$ 的缩写。

我们注意到，任意线性序都同构于一个由序数序列构成的集合，这些序列按 $\leqslant_{\text{lex}}$ 排序。若将这个序列集合对初始段封闭，那么赋予扩展偏序的该集合结构便能刻画线性序的重要性质。因此，抽象这一概念是有益的。树是一个偏序集 $(T, \leqslant_T)$，其中对于任意 $t \in T$，其前驱集合 $\{s \in T\colon\ s <_T t\}$ 由 $<_T$ 良序。该集合的序型称为 t 的高度。将 T 中高度为 δ 的所有元素组成的集合记为 T_δ，称为 T 的第 δ^{th} 层。树 T 的高度是最小的 δ，使得 T 不含高度为 δ 的元素。诸如 $T_{\leqslant\delta}$ 这样的记号应作显而易见的解释。若 κ 是无限基数，则树是一个 κ-树，当且仅当 T 的高度为 κ，且 T 的所有层的基数都小于 κ。

我们称 T 是 Hausdorff 的，如果任意两个具有极限高度且互不相同的 s、$t \in T$，其前驱集合也互不相同。如果 T 是一个关于 $\leqslant$ 向下封闭的序列集合，那么 $(T$、$\leqslant)$ 是一棵 Hausdorff 树，而且 T_α 由 T 中长度为 α 的序列组成；我们称 T 是一棵序列树。反过来，任何 Hausdorff 树都同构于一棵序列树。

本文中，我们将研究序列树，这些树还具有如下性质：长度为极限的序列 δ 会由树中长度为 $\delta+1$ 的唯一元素延伸。为此，我们通常研究由后继长度的序列组成、且对取后继长度初始段封闭的树。

树 T 中的反链是由两两不可比较的元素构成的集合。值得注意的是，在树中，如果 s 和 t 不可比较，它们就没有共同上界（即它们不相容）。如果 T 是一棵树，那么当且仅当 S 在 T中向下封闭，且 S 与 T具有相同的高度时， S 才是 T 的子树[5] 。T 中作为链的子树是 T的一条分支。

κ-Aronszajn 树是一个没有分支的 κ-树。若一个线性序 L 不包含 κ 或 κ^* 的副本，且每当 $X \subseteq L$ 的基数为 κ 时，其稠密度为 κ，则它是一个 κ-Aronszajn 线。一个标准事实是， κ-Aronszajn 树上的字典序是一个 κ-Aronszajn 线，而任意 κ-Aronszajn 线都同构于某个 κ-序列树的子集上的字典序。若$\kappa = \aleph_1$，则我们只写“Aronszajn”，而不写“κ-Aronszajn”。

（注意，根据豪斯多夫定理，任何不包含 κ 或 κ^* 的线性序，也不包含任何基数为 κ 的散序子序。因此，Aronszajn 线的这一界定等同于引言中给出的界定。）若线性序 C 的基数为 κ，且 C^2 是少于 κ 条链（按逐坐标序）的并，则称 C 为 κ-Countryman；我们用“Countryman”表示“$\aleph_1$-Countryman”。 κ-Countryman 线的基本分析见第4节。

最后，我们回顾一个关于 σ-散序线性序的有用刻画，它很容易由 Galvin 对 $\mathfrak{M}$ 的分析推出（见 [24]）。若 γ 是一个无限序数，考虑由所有有限次改变其取值的 x 构成的集合 $\mathbb{Q}_\gamma \subseteq \mathbb{Q}^\gamma$：存在 $0 = \xi_0 < \ldots < \xi_n = \gamma$，使得若 $i < n$，则 x 在 $[\xi_i$ 上恒为 q_i，$\xi_{i+1})$。我们赋予 $\mathbb{Q}_\gamma$ 字典序。由于 $|\mathbb{Q}_\gamma| = |\gamma|$，$\gamma^+$ 及其逆序均不能嵌入 $\mathbb{Q}_\gamma$。通过归纳也很容易验证，对于任意序数 $\delta < \gamma^+$， $\mathbb{Q}_\gamma$ 中的任何区间都包含 δ 和 δ^* 的副本。因此，根据 [24] 的定理 3.3， $\mathbb{Q}_\gamma$ 是 σ-散序的，并且任何基数为。

[5]“子树”和“分支”的这种含义并不完全标准。

$|\gamma|$ 嵌入 $\mathbb{Q}_\gamma$（如果 L 是 σ-散布的且基数至多为 $|\gamma|$，那么 $L\times\mathbb{Q}_\gamma$ 和 $\mathbb{Q}_\gamma$ 满足 [24, 3 的 (i)–(iii) 条件。3] 对于 $\alpha=\beta=\gamma^+$ 因此彼此双嵌入）。换言之，我们有如下结论。

命题 2.1. 若 γ 是无限序数，则基数至多为 $|\gamma|$ 的线性序是 σ-散乱的，当且仅当它可嵌入 $\mathbb{Q}_\gamma$。特别地，$\mathbb{Q}_\gamma$ 与 $\mathbb{Q}_{|\gamma|}$ 可双向嵌入。

3. Baumgartner's Question

在本节中，我们证明定理 1.16，从而通过证明可由 $\diamondsuit$ 构造一个极小的 Countryman 线来回答 Baumgartner 的问题。如前所述，这样的线性序是 Aronszajn 序，但不是 Souslin 序。

在继续之前，先定义一些记号和术语将会很有帮助。

定义 3.1。 $\mathbb{S}$是所有后继长度且有限对一的$s\in{}^{<\omega_1}\omega$的集合。

我们将把 $\mathbb{S}$ 视为带有扩张序的集合，从而使其成为一棵树。定义 $f\colon\ \mathbb{S}\to\omega\times\omega$ 如下:

$$f(s):=(s(\xi),|\{\eta<\xi:s(\eta)=s(\xi)\}|)$$

其中 $|s|=\xi+1$。注意，若 $f(s)=f(s')$，则 s 与 s' 不可比较。因此， $\mathbb{S}$ 是特殊的。

接下来的定义抽象了与函数 ϱ_2 的 [41]相关联的序列树的若干特征。

定义 3.2。 ϱ_2-修饰子是一个取整数值的、连续的、具有后继长度的序列。若 s， $t\in\mathbb{S}$，则称 s是 t的一个 ϱ_2-修改，当且仅当 $|s|=|t|$且 $s-t$是一个 ϱ_2-修饰子。若 $X\subseteq\mathbb{S}$，则称 X 在 ϱ_2-修改下封闭，意即只要$s\in X$ 且 t 是 s的一个 ϱ_2-修改，就有 $t\in X$。若 X 不可数，且在后继长度的初始段及 ϱ_2-修改下封闭，则称 X 是 ϱ_2-完备的。

为简洁起见，我们有时会省略 ϱ_2-修饰子中的前缀“ϱ_2-”。注意，若 m 是一个长度为 $\alpha+1$、针对 α 极限的 ϱ_2-修饰子，则 m 可由其在 α 上的限制唯一确定。事实上，任意取值于 $\mathbb{Z}$ 的连续序列 s ，只要它最终为常值且具有极限长度，就能唯一扩展为长度为 $|s|+1$的 ϱ_2-修饰子。有时，将这类序列 s 与扩展它们的最小修饰子等同起来，并将其视为 ϱ_2-修饰子，会很有用。

命题 2.1 推出以下命题。

命题 3.3. 对任意后继序数 α，长度为 α 的修饰子 s 按 $\leqslant_{\mathrm{lex}}$ 排序时构成一个 σ-散列集。

定义 3.4. 若对于任意满足 $|s|\leqslant|t|$的 s、$t\in X$， $X\subseteq\mathbb{S}$ 都是 s的 ϱ_2-修改，则称子集 $X\subseteq\mathbb{S}$ 为 ϱ_2-相干。为便于阅读，在“ϱ_2-相干”的语境中，我们将用“完备”代替“ϱ_2-完备”。

注意，$\mathbb{S}$ 中一个元素的 ϱ_2 修改只有可数多个，因此 $\mathbb{S}$ 的任意 ϱ_2 相干完备子集都是一棵子树，其各层均为可数集，因而是一棵阿朗佐恩树。下述定理基本上归功于 Todorcevic（见 [41, 3.4]）；更一般的命题 4.3 的证明见下文。

定理 3.5。如果 $C\subseteq\mathbb{S}$ 不可数且 ϱ_2-相干，那么 $(C,\leqslant_{\mathrm{lex}})$ 是 Countryman。

我们将通过证明 $\diamondsuit$ 蕴含存在一棵完备的ϱ_2-相干树 $T \subseteq \mathbb{S}$ 来证明定理 1.16，并且该树具有如下性质：对于 T 的任意不可数反链 X 以及 T 的任意不可数子集 Y，都存在一个将 $(X, \leqslant_{\mathrm{lex}})$ 嵌入$(Y, \leqslant_{\mathrm{lex}})$ 的嵌入。

引理 3.6. 设 T 是 $\mathbb{S}$ 的一个 ϱ_2-相干子树，使得对于 T 的任意子树 S，都存在一个嵌入 $\phi\colon\ T \to S$，该嵌入同时保持字典序 $\leqslant_{\mathrm{lex}}$ 以及关于 T 的树序的不相容性。那么，给定 T 的任意不可数反链 X 和 T 的不可数子集 Y，存在一个从 $(X, \leqslant_{\mathrm{lex}})$ 到 $(Y, \leqslant_{\mathrm{lex}})$ 的嵌入。

证明。注意到，如有必要，将 Y 替换为不可数子集后，我们可以假设 Y 是 T 中的反链。令 S 为 Y 在 T 中的向下闭包，并令 $\phi\colon T \to S$ 为所假设的嵌入。我们定义函数 $f\colon X \to Y$，令 $f(x)$ 为 Y 中某个延伸 $\phi(x)$ 的元素；根据我们对 S 的选择，这是可能的。给定 $x <_{\mathrm{lex}} y$ 中的元素，我们知道 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 在 S 中必定不相容，并且 $\phi(x) <_{\mathrm{lex}} \phi(y)$。但这也意味着 $f(x) <_{\mathrm{lex}} f(y)$，于是证明完成。□

前一个引理如何助力我们的研究？它告诉我们，构造一个 ϱ_2-相干 T，使其能够嵌入到其任意子树中，就足够了。我们的策略是构造 T，使得每个子树都包含一棵具有典范形式的树，从而使所需 ϕ 的存在显而易见。这正是接下来一组定义的出发点，它们刻画了我们证明中的一个关键要素。

定义 3.7. 设 $n < \omega$、s 和 t 属于 $\mathbb{S}$。若 $s \subseteq t$，且只要 $|s| \leqslant \xi < |t|$，就有 $t(\xi) \geqslant n$，则称 t 是 s的一个 n-扩张，记作 $s \subseteq_n t$。

定义 3.8. 设 $T \subseteq \mathbb{S}$ 是 ϱ_2-相干且完备的。

(1) 由 s确定的 T 的锥，记作 $T[s]$，按通常方式定义为

$$T[s] := \{t \in T : t \subseteq s \text{ or } s \subseteq t\}.$$

(2) 由 s 和 n确定的 T 的冻结锥，记作 $T[s, n]$，定义为

$$T[s, n] := \{t \in T : t \subseteq s \text{ or } s \subseteq_n t\}.$$

(3) 给定一个序数 δ，我们用 $T_\delta[s]$ 表示高度为 δ的 $T[s]$ 的元素；对于 $T_\delta[s$、$n]$，也类似。

显然，T的任意一个锥也是冻结锥，因为 $T[s]$不过是 $T[s$、$0]$。由于T是 ϱ_2-完备的，T的冻结锥也都是 T的子树。

引理 3.9. 如果 $T \subseteq \mathbb{S}$ 是 ϱ_2-相干且完备的，那么对于任意的 $s \in T$和 $n < \omega$，存在一个将 T嵌入 $T[s$的嵌入 ϕ，$n]$，它保持字典序 $\leqslant_{\mathrm{lex}}$ 以及相对于树序的不相容性。

在开始证明该引理之前，先介绍在 $\mathbb{S}$上进行的两种操作会很有帮助。

定义 3.10. 如果 s、t、$u \in \mathbb{S}$、$|s| < |t| = |u|$，以及

$$u(\xi) := \begin{cases} s(\xi) & \text{if } \xi < |s|, \text{ and} \\ t(\xi) & \text{if } |s| \leqslant \xi < |t| \end{cases}$$

于是我们称，u 是通过将 s 写在 t上方得到的。

定义 3.11. 如果 $t \in T$、 $\beta < |t|$ 和 $n < \omega$，则由 v 定义的序列。

$$v(\xi) := \begin{cases} t(\xi) & \text{if } \xi < \beta, \text{ and} \\ t(\xi) + n & \text{if } \beta \leqslant \xi < |t| \end{cases}$$

是将 t 平移 n 后超出 β 的结果 .

引理 3.9的证明。注意，如果 $T \subseteq \mathbb{S}$ 是 ϱ_2-相干且完备的，那么它在这两个运算下是封闭的。我们分两个阶段证明该引理。首先，我们证明，对于任意 $s \in T$ 和 $n < \omega$，都存在这样一个从（普通）锥 $T[s]$到冻结锥 $T[s, n]$的嵌入。具体来说很简单：给定一个延伸s的 $t \in T[s]$，我们将 t 平移 n，使其超出 $|s|$。这个函数具有所需的性质，并且根据我们关于 T的假设，其值域包含于 $T[s, n]$中。

接下来，我们证明对于任意 $s \in T$， T 都可以嵌入到（普通）锥$T[s]$ 中，同时保留字典序和不相容性。为此，定义$\delta := |s| + \omega + 1$。注意到 $(T_\delta[s], <_{\mathrm{lex}})$ 是一个稠密线性序。由于 $T_{\leqslant\delta}$ 是可数的，存在一个保留 $\leqslant_{\mathrm{lex}}$的嵌入

$$\phi_0 : T_{\leqslant\delta} \to T_\delta[s].$$

注意到，由于 $T_\delta[s]$ 是一个反链， ϕ_0 平凡地保持了不相容性。我们通过令 $\phi(t)$ 为对于高度大于 δ 的 t 将 $\phi_0(t \restriction \delta)$写在 t 上所得的结果，将 ϕ_0 扩展为一个函数 $\phi : T \to T[s]$。再次，我们的假设蕴含着，ϕ 的值域包含于 $T[s]$ 中，并且该函数同时保持了 $\leqslant_{\mathrm{lex}}$ 和不相容性。□

现在我们来到关键之处：如果我们能构造出一个引理 3.9 中那样的树，并使其具有如下性质：任意子树都包含一个冻结锥，那么我们就能得到证明定理 1.16 所需的结果。

命题 3.12。假设 $T \subseteq \mathbb{S}$ 是 ϱ_2-相干的、完备的，并且具有 T 的每个子树都包含一个冻结锥这一性质。如果 $C \subseteq T$ 是任意不可数反链，那么 $(C, \leqslant_{\mathrm{lex}})$ 是一条极小的 Countryman 线。

因此，我们已将任务归结为证明以下命题。

命题 3.13。假设 $\diamondsuit$。存在一个 $T \subseteq \mathbb{S}$，它是 ϱ_2-相干的、完备的，并且具有这样的性质： T 的每个子树都包含一个冻结锥。

我们先停下来引入一些记号和术语。它们现在看来或许有些多余，但能为后面各节中更高基数构造的复杂性预作铺垫。令 $\equiv$ 表示 $\mathbb{S}$ 上由以下条件定义的等价关系：若 t 是 s 的一个 ϱ_2-修改，则 $s \equiv t$。定义 $\mathbb{P} := \{[s] \colon s \in \mathbb{S}\}$ 为 $\mathbb{S}$ 中所有函数的 $\equiv$-等价类所组成的集合，并以自然方式为 $\mathbb{P}$ 定序：给定 $\mathbb{P}$ 中的 q 和 p，定义 $q \leqslant_{\mathbb{P}} p$ 表示 q 中某个元素在 $\mathbb{S}$ 中延伸了 p 中的某个元素。我们以显而易见的方式将“高度”的概念扩展到 $\mathbb{P}$ 的元素： p 的高度就是其任一元素的高度。

我们的构造将取决于偏序集 $(\mathbb{S}, \supseteq)$ 和 $(\mathbb{P}, \leqslant_{\mathbb{P}})$之间的相互作用，并通过以下观察对这种关系作些探讨。我们首先记录等价关系 $\equiv$ 与引理 3.9 中序列上的运算之间相互作用的一些简单事实。

引理 3.14。以下结论成立：

(1) 设 $s_0, t_0, s_1, t_1 \in \mathbb{S}$ 满足 $s_0 \equiv s_1$, $t_0 \equiv t_1$ 且 $|s_0| = |s_1| < |t_0| = |t_1|$。令 r_i 为将 s_i 写在 t_i 上方所得的结果。则 $r_0 \equiv r_1$。

(2)令 $t \in \mathbb{S}$，令 $\beta < |t|$，并令 r 为将 t 平移 n 超出$\beta+1$的结果。则 $r \equiv t$。
(3)对于每个 $s \in \mathbb{S}$ 和可数的 $\beta \geqslant |s|$，存在一个 $t \in \mathbb{S}$ 使得 $s \subseteq t$ 且 $|t| = \beta + 1$。

证明。显然。 □

引理 3.15。以下结论成立：
(1) 若 $\langle s_n : n < \omega \rangle$ 是 $\mathbb{S}$ 中满足 $s_n \subseteq_n s_{n+1}$ 的一个序列，则对所有 $i < \omega$，都有 $(\bigcup_{n<\omega} s_n)^\frown\langle i\rangle \in \mathbb{S}$。(2) 若 $s, t \in \mathbb{S}$ 满足 $s \equiv t \restriction \alpha$，则对任意 $n < \omega$，存在一个 $s \subseteq_n r$ 使得 $r \equiv t$。(3) $\mathbb{P}$ 中的任意递降序列 $\langle p_n : n < \omega\rangle$ 都有一个下界。

证明。对于 (1)，令 $s = (\bigcup_n s_n)^\frown\langle i\rangle$。显然，$|s|$ 是一个可数后继序数，因此我们只需验证 s 是有限到一的。对于 $k < n < \omega$，

$$s^{-1}(\{k\}) \subseteq s_n^{-1}(\{k\}) \cup \{|s| - 1\}$$

根据序列 $\langle s_n : n < \omega\rangle$ 的选取方式，这个集合是有限的，因为 $s_n \in \mathbb{S}$。为证明 (2)，令 r' 为将 s 写在 t 上方所得的结果，并令 r 为将 r' 向 α 之外平移 n 所得的结果。根据定义，$s \subseteq_n r$；由引理 3.14 $r \equiv t$。对于 (3)，注意到根据 (2)，我们可以递归地选取 $s_n \in \mathbb{S}$，使得 $s_n \subseteq_n s_{n+1}$ 且 $p_n = [s_n]$。由 (1)，$[(\bigcup_{n<\omega} s_n)^\frown\langle 0\rangle]$ 是 $\langle p_n : n < \omega\rangle$ 的一个下界。□

利用引理 3.15，可以很容易地构造 $\leqslant_{\mathbb{P}}$-递降序列 $\langle p_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle$，使得在 $\mathbb{P}$ 中，p_α 是某个 t_α 的 $\equiv$-类：$\alpha + 1 \to \omega$。给定这样一个序列，定义

$$T := \{t \in \mathbb{S} : t \in p_\alpha \text{ for some } \alpha < \omega_1\} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} p_\alpha.$$

显然，T 是 ϱ_2-相干且完备的，因此根据定义 3.1 和 3.4 之后的说明，它是一棵阿朗佐恩树。

现在，我们证明定理 1.16 的总体策略逐渐明朗。我们需要利用 $\diamondsuit$ 构造一个由 $\mathbb{S}$ 中元素组成的序列 $\langle t_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle$，使得：
- $t_\alpha : \alpha + 1 \to \omega$，• 序列 $\langle [t_\alpha] : \alpha < \omega_1\rangle$ 在 $\mathbb{P}$ 中是 $\leqslant_{\mathbb{P}}$-递降的，并且• 相应的树具有这样的性质：任意子树都包含一个冻结锥。

如果我们能做到这一点，那么定理 1.16 就得证了。

定理 1.16 的证明。设 $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle$ 为一个 $\diamondsuit$-序列，我们假设它经过专门构造，能够猜测 $\mathbb{S}$ 中 ω_1-树的初始段；也就是说，如果 $S \subseteq \mathbb{S}$ 是一棵 ω_1-树，那么就有平稳多个极限序数 $\delta < \omega_1$ 满足 $A_\delta = S_{<\delta}$，即 S 在层 δ 之前所有层构成的初始段（见下文定理 7.7 证明中的讨论）。

构造的一部分是平凡的：我们令 $t_0 = \langle 0\rangle$，如果给定 t_α，那么我们设置 $t_{\alpha+1} := t_\alpha{}^\frown\langle 0\rangle$。因此，有趣的情形发生在 $\delta < \omega_1$ 是一个极限序数且我们已经构造出 $\langle t_\alpha : \alpha < \delta\rangle$ 时。在这些情况下，我们将知道 T 在 δ 层以下的样子，而我们对 $t_\delta : \delta + 1 \to \omega$ 的选择将决定哪些穿过 T 这一初始段的分支会在 δ 层拥有延续。

$\diamondsuit$-序列为我们呈现了一个可数的 A_δ $\mathbb{S}$子树，我们想知道 A_δ是否是 $T_{<\delta}$ 的一个子树，且不包含 $T_{<\delta}$的冻结锥。如果答案是这个

如果答案是“否”，那么我们就不必担心 A_δ，并令 $t_\delta\colon \delta+1\to\omega$ 为 $\mathbb{S}$ 中任意一个元素，使得 $[t_\delta]$ 是 $\mathbb{P}$ 中 $\langle [t_\alpha]\colon \alpha<\delta\rangle$ 的下界。如果答案是“是”，那么我们需要选择 $t_\delta\colon \delta+1\to\omega$ 属于 $\mathbb{S}$，使得对每个 $s\equiv t_\delta$，都存在 $\alpha<\delta$，令 $s{\restriction}\alpha+1$ 不属于 A_δ。

我们分可数多个步骤来完成。首先，令 $\langle\delta_n\colon\ n<\omega\rangle$ 为 δ 中的一个共尾递增序列。在我们的构造中，我们将选取序数 α_n 以及相应的 $s_n\in p_{\alpha_n}$，使得:

- $\delta_n\leqslant\alpha_n<\delta$, and
- $s_n\subseteq_n s_{n+1}$.

这保证

$$t_\delta:=\left(\bigcup_{n<\omega}s_n\right)^\frown\langle 0\rangle$$

将属于 $\mathbb{S}$，且长度恰当。

我们从 $\alpha_0=\delta_0$ 开始，并令 $s_0=t_{\alpha_0}$。构造出 s_n 和 α_n 后，我们假设某个记账过程会给我们一个 ϱ_2-修饰子 $m_n\colon\ \delta+1\to\mathbb{Z}$。函数 m_n 可看作是对我们正在构造的 t_δ 的某个等价类成员进行编码。因此，我们考察定义在 $|s_n|$ 上的函数 s_n+m_n，其定义为

$$(s_n+m_n)(\xi):=s_n(\xi)+m_n(\xi)$$

并询问它是否属于 A_δ。如果答案是“否”（这包括 s_n+m_n 取负值的情形），那么我们选取大于δ_{n+1}的 α_{n+1}，并令 s_{n+1} 为 s_n 在 $=^*$等价类 $[t_{\alpha_{n+1}}]$ 中的某个 n-扩张。如果答案是“是”，那么我们最终需要使用如下假设：当把 A_δ 看作 $T_{<\delta}$ 的子树时，它不包含 $T_{<\delta}$ 的冻结锥。

定义

$$M:=\max\{|m_n(\xi)|:\xi<\delta\}\qquad\text{and}\qquad N:=M+n+1.$$

我们的假设表明，s_n+m_n 在 $T_{<\delta}$ 中将有一个 N 扩张 r，它不是 i n A_δ。扩展 r 不会改变这种情况，因此我们可以假设 $|r|=\alpha_{n+1}+1$，其中

$$\alpha_{n+1}\geqslant\delta_{n+1}.$$

现在的想法是，我们应该定义

$$s_{n+1}:=r-m_n.$$

注意，如果 $\xi<\alpha_n$，那么

$$s_{n+1}(\xi)=r(\xi)-m_n(\xi)=s_n(\xi)+m_n(\xi)-m_n(\xi)=s_n(\xi),$$

因此 s_{n+1} 延伸至 s_n。如果 $\alpha_n\leqslant\xi<\alpha_{n+1}$，那么 $r(\xi)\geqslant N$，从而

$$s_{n+1}(\xi)=r(\xi)-m_n(\xi)\geqslant n+1.$$

因此，s_{n+1} 实际上是 n 的扩张。最后，$s_{n+1}\equiv t_{\alpha_{n+1}}$，因为 s_{n+1} 等价于 r 和 $r\in T_{<\delta}$。关键在于，如果 t 是 s_{n+1} 在 T_δ 中的任意扩张，那么对 t 应用修改 m_n 后，会得到某个 s，使得 $s{\restriction}\alpha_n+1$ 不在 A_δ 中。

既然我们确保安排了 $s_n\subseteq_n s_{n+1}$，我们就知道

$$t_\delta:=\Big(\bigcup_{n<\omega}s_n\Big)^\frown\langle 0\rangle,$$

位于 $\mathbb{S}$ 中且高度为 δ。因此， $[t_\delta]$ 将是 $\langle [t_\alpha]$ 的下界： $\alpha<\delta\rangle$ 位于 $\mathbb{P}$中，而 t_δ 的 ϱ_2-修改将成为 T 的 δ^{th} 层。

上述构造将产生一个递降序列 $\langle [t_\alpha]$: $\alpha<\omega_1\rangle$ 在 $\mathbb{P}$ 中。接下来只需证明， T 的每个子树都包含一个冻结锥。假设 $S\subseteq T$ 向下封闭且不包含冻结锥。根据我们选择 $\diamondsuit$-序列的方式，必定存在一个 $\delta<\omega_1$，使得 $A_\delta=S_{<\delta}$ 和 $(T_{<\delta}, <_T, S_{<\delta})\prec(T, <_T, S)$。特别地， δ 是一个极限序数， $A_\delta\subseteq T_{<\delta}$，且 $A_\delta=S_{<\delta}$ 不包含 $T_{<\delta}$ 的冻结锥。

只需证明 $S\subseteq T_{<\delta}$。不过，这可由我们的构造推出：若 t 是 T 的第 δ 层中的任意元素，那么在构造 t_δ 的过程中，曾有一个阶段，函数 $t-t_\delta$ 作为 m_n 出现。由于 S 不包含冻结锥，因此选择了 s_{n+1}，使得 $s_{n+1}+m_n$ 属于 $T_{<\delta}\backslash S_{<\delta}$。因为 t 延伸了 $s_{n+1}+m_n$，所以 t 也不属于 S。因此， S 的高度至多为 δ，故 S 是可数的。由此可知， T 的任意子树都包含一个冻结锥，证毕。□

4. Countryman lines at higher cardinals

在本文余下部分，我们的目标是将上一节中的构造推广到更大的基数。这本身就颇有趣，但我们的主要动机是构造基数为 $\kappa^+>\aleph_1$ 的极小非 σ-散序线性序的例子。事实上，这些线性序将是 κ^+-Countryman 线性序。

我们将开始记录一些关于 κ^+-Countryman 线的基本事实，其中κ 是一个无限基数。若线性序 C 的基数为 κ^+，且 C^2 是相对于 C^2上的逐坐标偏序由 κ 条链并成的，则称其为 κ^+-Countryman。

引理4.1。假设 L 是一个基数为 κ^+ 的线性序，并且每当 $Z\subseteq L\times L$ 是一条链时，至多有 κ 个元素 $x\in L$ 使得

$$Z_x:=\{y\in L:(x,y)\in Z\}$$

具有基数 κ^+。那么 L 不是 κ^+-Countryman。

证明。设 $\mathscr{Z}$ 是 $L\times L$ 中一个满足 $|\mathscr{Z}|=\kappa$ 的链的集合。由于 κ^+ 不是由 κ 个基数为 κ 的集合之并，我们的假设蕴含存在一个 $x\in L$，使得对于每个 $Z\in\mathscr{Z}$， Z_x 的基数至多为 κ。再次利用 κ^+ 的正则性，存在一个 $y\in L$，使得对于每个 $Z\in\mathscr{Z}$， $y\notin Z_x$。但现在 $(x, y)\in L\times L$ 未被 $\mathscr{Z}$ 覆盖。由于 $\mathscr{Z}$ 是任意的， L 不是 κ^+-Countryman。□

命题 4.2。设 C 是 κ^+-Countryman。以下结论成立：

(1) C^* 是 κ^+-Countryman，且 C 的任何基数为 κ^+ 的子序都是 κ^+-Countryman。(2) C 不是良序。(3) C 没有基数为 κ 的稠密子序。(4) C 是 κ^+-Aronszajn。(5) 若 L 是一个可嵌入 C 的线性序，且 C^*， $|L|\leqslant\kappa$。

证明。(1)显然，(4)是(1)–(3)的直接推论。为证明(2)，注意到由(1)可知，只需证明 κ^+ 不是 Countryman。注意，若 $Z\subseteq\kappa^+\times\kappa^+$ 是一个链，且某个截段 Z_α 的基数为 κ^+，那么它在 κ^+ 中共尾，因此只要 $\alpha<\alpha'$， $Z_{\alpha'}$ 就为空。特别地，至多有一个α 满足 Z_α 的基数为 κ^+。由引理 4.1 κ^+ 不是 Countryman。

为证明(3)，假设 C 的基数为 κ^+ ，但它有一个基数为 κ的稠密子集 D 。若 $Z \subseteq C \times C$ 是一个链，令 X 为所有满足以下条件的 $x \in C$ 的集合：截段 Z_x 包含至少两个元素 $a_x < b_x$。由于 D 是稠密的，只要$x \in X$ ，我们就可以选取 $d_x \in D$ 使得 $a_x < d_x < b_x$。由于 $x < x'$ 蕴含 $Z_x < Z_{x'}$，它也蕴含 $d_x \neq d_{x'}$。因此 $|X| \leqslant |D| \leqslant \kappa$。同样，由引理 4.1， C 不是κ-Countryman。

最后，为了证明 (5)，注意到如果 L 是任意线性序，且 $f\colon L \to C$ 和$g\colon L \to C^*$ 是保序的，那么 $\{(f(x), g(x))\colon x \in L\}$ 与 C^2中的任意链至多相交于一点。特别地，如果 C 是 κ^+-Countryman， $|L| \leqslant \kappa$。□

注意，我们先前给出的 ϱ_2-修改和 ϱ_2-相干的定义，在 ${}^{<\kappa^+}\omega$的一般情形下仍然有意义。若 X 是 ${}^{<\kappa^+}\omega$ 的子集，且其基数为 κ^+ ，并且对后继长度的初始段以及 ϱ_2-修改封闭，则称 X 关于 κ^+ 是 ϱ_2-完备的。若从上下文中可以清楚看出 κ^+ ，我们有时会滥用记号，写作“ϱ_2-完备”（或仅写“完备”），表示“关于 κ^+的ϱ_2-完备”。下一个命题给出了一个有用的判据，用于证明线性序是 κ^+-Countryman。证明是对 Todorcevic [41] 的论证作常规修改，并为求完整而列出。回顾一下，高度为 κ^+ 的树若是 κ 个反链的并，则称为特殊树。

命题 4.3. 假设 $T \subseteq {}^{<\kappa^+}\omega$ 是 ϱ_2-相干且基数为 κ^+。若 T 是特殊的，则 $(T, \leqslant_{\mathrm{lex}})$ 是 κ-Countryman。

证明。只需用 κ 条链覆盖 $\{(s, t) \in T^2\colon |s| \leqslant |t|\}$。给定带有 $|s| \leqslant |t|$的 $(s, t) \in T^2$，令 $n = n(s, t)$ 和 $\xi_i = \xi_i(s, t)$ 关于 $i \leqslant n$ 满足：

- $\xi_0 = 0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = |s|$,
- $t(\xi_i) - s(\xi_i) \neq t(\xi_{i+1}) - s(\xi_{i+1})$, 和• 如果 $\xi_i < \eta < \xi_{i+1}$,

那么 $t(\eta) - s(\eta) = t(\xi_i) - s(\xi_i)$。

令 $f\colon T \to \kappa$，使得对于每个 $\alpha < \kappa$， $f^{-1}(\alpha)$ 都是一个反链。定义 $\sigma(s, t)$和 $\phi(s, t)$ 为由下式给出的长度为 $n(s, t)$ 的序列：

$$\sigma(s,t)(i) := t(\xi_i) - s(\xi_i) \qquad \phi(s,t)(i) := f(s{\restriction}\xi_{i+1})$$

当 $i < n(s, t)$时。

由于 σ 和 ϕ 的可能取值集合的基数为 κ，只需证明：若 $\sigma(s, t) = \sigma(s', t')$ 以及 $\phi(s, t) = \phi(s', t')$，则以下两者必有其一：

- $s \leqslant_{\mathrm{lex}} s'$ 和 $t \leqslant_{\mathrm{lex}} t'$,

或• $s' \leqslant_{\mathrm{lex}} s$ 和 $t' \leqslant_{\mathrm{lex}} t$。

注意，如果 $s = s'$ 或 $t = t'$，则该命题是空真。为便于阅读，我们将 ξ_i 记作 $\xi_i(s, t)$，并将 ξ'_i 记作 $\xi_i(s', t')$。令 $i \leqslant n$ 为满足 $\xi_i = \xi'_i$的极大者。若 $i = n$ 且 $s = s'$，则所需结论成立。否则，若$i = n$ ，则置 $\zeta = |s|$ ；若 $i < n$，则置 $\zeta = \min(\xi_{i+1}, \xi'_{i+1})$。

断言 4.4. $s{\restriction}\zeta \neq s'{\restriction}\zeta$。

证明。如果 $i = n$ ，那么 $\xi_n = \xi'_n = |s| = |s'| = \zeta$，由于 $s \neq s'$，故得证。因此，不妨设 $i < n$。由于 $s{\restriction}\xi_{i+1} \neq s'{\restriction}\xi'_{i+1}$ 和 $f(s{\restriction}\xi_{i+1}) = f(s'{\restriction}\xi'_{i+1})$，可知 $s{\restriction}\xi_{i+1}$ 与 $s'{\restriction}\xi'_{i+1}$ 不相容，从而 $s{\restriction}\zeta \neq s'{\restriction}\zeta$。□

如有必要，交换 s 和 s' 的角色，假设 $s <_{\mathrm{lex}} s'$。注意，由于 $\sigma(s, t) = \sigma(s', t')$,

$$t(\eta) - s(\eta) = t'(\eta) - s'(\eta)$$

因此

$$t(\eta) - t'(\eta) = s(\eta) - s'(\eta) \tag{4.1}$$

每当 $\eta < \zeta$。令 δ 为满足 $s(\delta) \neq s'(\delta)$的极小值。由于 $\delta < \zeta$，(4.1)蕴含$t\restriction\delta = t'\restriction\delta$ 且 $t(\delta) < t'(\delta)$。因此 $t <_{\mathrm{lex}} t'$，如所求。□

命题 4.5。假设 $C \subseteq {}^{<\kappa^+}\omega$ 是 ϱ_2-相干且完备的。如果 $X \subseteq C$ 的基数至多为 κ，那么 $(X, \leqslant_{\mathrm{lex}})$ 是 σ-散列的。

证明。必要时，将元素的所有取值都加上1，我们可以假设 X 中没有元素取值为0。令 $t \in C$ 使得 $|t|$ 是 X中元素长度的一个上界，并令 Y 为 t的所有 ϱ_2-修改所组成的集合。定义 $f\colon X \to Y$，令

$$f(s)(\xi) := \begin{cases} s(\xi) & \text{if } \xi < |s| \\ 0 & \text{if } \xi = |s| \\ t(\xi) & \text{if } \xi > |s| \end{cases}$$

并注意到 f保持 $\leqslant_{\mathrm{lex}}$（因为我们已经安排好 s 只取正值，所以 0 实际上充当了该序列的终止符号，而我们定义了 $\leqslant_{\mathrm{lex}}$，使得终止符号小于所有其他符号）。由于 $y \mapsto y - t$ 也保持 $\leqslant_{\mathrm{lex}}$，并将 Y映射到长度为 $|t|$的 ϱ_2-修饰子的集合中，根据命题 3.3 即可得证。□

5. Higher ϱ_2-coherence and the tree $\mathbb{S}_\kappa$

为了应用命题 4.3，构造一个 $\mathbb{S}_\kappa \subseteq {}^{<\kappa^+}\omega$ 的高基数 κ 类比版本将很有帮助，使得任何 ϱ_2-相干且完备的 $T \subseteq \mathbb{S}_\kappa$ 都是特殊的。为此，假设 κ 是一个（可能是奇异的）无限基数。如果存在一个 $\square_\kappa$-序列，那么利用沿着 $\square_\kappa$-序列向下的最小游走所定义的树 $T(\varrho_2)$ 具有许多良好的相干性质。我们的计划是以抽象方式捕捉其中一部分结构。

定义 5.1。定义 $\mathbb{S}_\kappa$ 为所有满足以下条件的函数 $t \in {}^{<\kappa^+}\omega$ 所组成的集合：

(1) 对某个 $\delta < \kappa^+$，$|t| = \delta + 1$（记作 $\mathrm{top}(t)$）；(2) 对每个整数 $n \geqslant -1$，集合 $C^t_n := \{\alpha < |t| : t(\alpha) \leqslant n\}$ 是闭的；(3) 若 $\alpha < |t|$ 是极限序数，则 $t(\alpha)$ 是使得 C^t_n 在 α 中无界的最小 n（注意 $C^t_{-1} = \varnothing$）；(4) 若 I 是 $|t|$ 的一个极大开区间，且与 C^t_{n-1} 不相交，则

$$\mathrm{otp}(C^t_n \cap I) < \kappa \cdot \omega.$$

若 $t \in \mathbb{S}_\kappa$，则令 $\mathrm{last}(t)$（t 的最后一个值）为

$$\mathrm{last}(t) := t(\mathrm{top}(t)).$$

在 (4) 中取 $n = 0$ 和 $I = |t|$，则 $\mathrm{otp}(C^t_0) < \kappa \cdot \omega$。现在，简单的归纳法（将 $|t|$ 分解为由闭集 C^t_n 的元素划定的块）表明，对所有 $n < \omega$，$\mathrm{otp}(C^t_n) < (\kappa \cdot \omega)^{n+1}$。

注意，如果 $s \neq t$ 属于 $\mathbb{S}_\kappa$，$\mathrm{last}(s) = \mathrm{last}(t) =: n$，且 $s \subseteq t$，那么 C^s_n 是 t 的真初始段，从而 $\mathrm{otp}(C^s_n) < \mathrm{otp}(C^t_n)$。特别地，

$$s \mapsto (\mathrm{last}(s), \mathrm{otp}(C^s_{\mathrm{last}(s)}))$$

是针对 $\mathbb{S}_\kappa$的专化函数。（定义中使用特定的序数 $\kappa{\cdot}\omega$ 并不重要： $\kappa{\cdot}\omega$ 足够大，可以保证 $\mathbb{S}_\kappa$ 在某些类型的递增并下保持闭性，但又足够小，从而确保我们的专化函数的值落在一个基数为 κ的集合中。）

第 3 节给出的 $\subseteq_n$ 定义可不作任何修改地推广到 $\mathbb{S}_\kappa$，冻结锥的定义也是如此。以下命题总结了迄今为止我们得到的结果；后一个陈述的证明可对第 3 节中的论证作相应调整而得。

命题 5.2。若 $T \subseteq \mathbb{S}_\kappa$ 是 ϱ_2-相干且完备的，则 $(T, \leqslant_{\mathrm{lex}})$ 是一条 κ^+-Countryman 线，且基数至多为 κ 的任何子序都是 σ-散布的。此外，若 T 的每个子树都包含一个冻结锥，那么只要 $C \subseteq T$ 是一个基数为 κ^+ 的反链，$(C, \leqslant_{\mathrm{lex}})$ 就是一个极小非-σ-散布线性序。

与第 3 节的情形不同，在某个给定的集合论模型中，当 $\kappa > \aleph_0$ 时，未必存在 $\mathbb{S}_\kappa$ 的一个子集 T，使其为 ϱ_2- 相干且完备 —— 毕竟，这样的 T 是一棵 κ^+-Aronszajn 树，因此见证了在 κ^+ 处树性质失效（见 [26]）。另一方面，若按照 [41], 中的方式由一个 $\square_\kappa$-序列定义 ϱ_2，那么所有 ϱ_2-修改的集合

$$\{\varrho_2(\cdot,\beta)\restriction\alpha+1 : \alpha<\beta<\kappa^+\}$$

是 $\mathbb{S}_\kappa$ 的一个子集，它是 ϱ_2-相干且完备的 [41]。

现在我们将确立 $\mathbb{S}_\kappa$ 的一些基本性质，并定义一些术语 y 和记号。

引理 5.3。设 $t \in \mathbb{S}_\kappa$ 且 $\delta = \mathrm{top}(t)$。

(1) 序列 $\langle C^t_n : n<\omega\rangle$ 是由闭集构成的递增序列，其并为 $\delta+1=|t|$.(2) 若 $\alpha<|t|$ 是极限序数，则 $t(\alpha)=n$ 意味着 t 在 α的某个闭无界子集上恒等于 n。(3) 对每个 $n<\omega$，(C^t_n) 的非聚点集合 $\mathrm{nacc}(C^t_n)$ 由后继序数组成。(4) 函数 t 由其在后继序数上的取值所确定。

证明。(1) 由定义立即可得。对于(2)，假设 $t(\alpha)=n$。$C^t_{n-1}\cap\alpha$和 $C^t_n\cap\alpha$ 在 α中都是闭集，但前者在 α 以下有界，而后者无界。因此，$C^t_n\cap\alpha\setminus\sup(C^t_{n-1})$ 是 α中的闭无界集。但由于它包含于满足 $t(\beta)=n$的 $\beta<\alpha$ 的集合中，结论得证。(3)和(4)立即可得。□

集合 $\mathbb{S}_\kappa$ 在某些自然运算下封闭。例如，显然该集合在限制到后继序数时封闭。此外，如果 $t\in\mathbb{S}_\kappa$，那么对每个 $n<\omega$，$t^\frown\langle n\rangle$ 也如此。不过，对我们而言最重要的是，$\mathbb{S}_\kappa$ 在本质上对某些类型的递增并封闭。下一个定义将帮助我们分析这一情形。

定义 5.4. 给定一个极限序数 $\delta<\kappa^+$，函数 $t:\delta\to\omega$ 是一个 $\mathbb{S}_\kappa$-极限，当且仅当对每个 $\alpha<\delta$，$t\restriction\alpha+1$ 都属于 $\mathbb{S}_\kappa$。

关键在于，$\mathbb{S}_\kappa$ 中元素的任何严格 $\subseteq$递增并都属于一个 $\mathbb{S}_\kappa$极限。如果 t 是一个 $\mathbb{S}_\kappa$极限，其定义域为某个极限序数 δ，那么 t 将自动具备 $\mathbb{S}_\kappa$ 中元素的许多特征。例如，C^t_n的定义

对每个 n都有意义，并且这些集合中的每一个在 δ 中都是闭的，因为它们所有的真初始段都是闭的。我们还注意到，如果 t 确实存在一个带有顶端$(s) = \delta$的扩张 $s \in \mathbb{S}_\kappa$，那么事实上这个扩张是唯一的，因为值 $s(\delta)$必须是使 C^t_{n+1} 在 δ中无界的最小 n。我们将多次遇到这一思想，因此为这个特定的 n 命名会很方便。

定义 5.5。设 $t : \delta \to \omega$，其中某个极限序数为 $\delta < \kappa^+$。t 的下极限，记作 $\liminf(t)$，定义为满足其原像在 δ 中无界的最小 $n < \omega$；如果存在这样的 n，则取此值，否则称其为 8。

注意，如果 δ 具有不可数共尾性，那么通过一个简单的计数论证，任意 $t : \delta \to \omega$ 都有有限的下极限。因此，只有在 $\mathrm{cf}(\delta) = \omega$ 时，$\mathrm{liminf}(t) = \infty$ 这种情况才可能出现。

对于一个 $\mathbb{S}_\kappa$-极限 t，t 是否可以扩展为 $\mathbb{S}_\kappa$ 的一个元素，取决于是否存在一个有限的下极限，且其原像不太大。以下引理将对此作出精确说明。

引理 5.6。设 t 是一个 $\mathbb{S}_\kappa$-极限，其定义域为某个极限序数 $\delta < \kappa^+$。那么以下两个陈述等价：

- t 有一个扩张 $s \in \mathbb{S}_\kappa$，且其顶端为$(s) = \delta$。• 的下极限(t) 是某个有限的 $n < \omega$，而 n 在 t 下的原像包含一个序型小于 $\kappa \cdot \omega$的尾段。

特别地，若 t 是一个 $\mathbb{S}_\kappa$-极限，且 $|t| = \delta$ 具有不可数共尾性，则 t 有一个扩张 $s \in \mathbb{S}_\kappa$，且其顶端为$(s) = \delta$。

证明。对于正向蕴含，设 $s \in \mathbb{S}_\kappa$ 是 t 的一个扩张，且顶端为$(s) =\delta$。由于 $s \in \mathbb{S}_\kappa$，下极限$(t) = s(\delta)$ 是有限的。若 $\alpha < \delta$ 满足在区间 $(\alpha、\ \delta]$上 $t \geqslant s(\delta)$，那么

$$\mathrm{otp}(\{\eta \in (\alpha, \delta) : t(\eta) = s(\delta)\}) < \kappa \cdot \omega$$

因为 s 满足定义 5.1 中的条件（4）。

对于反向蕴含，假设 t 满足下极限$(t) = n$。我们要证明函数 $s := t^\frown\langle n\rangle$ 属于 $\mathbb{S}_\kappa$。由于 t 是一个 $\mathbb{S}_\kappa$-极限，且 $s(\delta) =$ 下极限$(t) = n$，定义 5.1 的条件（1）–（3）很容易满足。

对于条件（4），给定 m，设 $I \subseteq \delta + 1$ 是一个开区间，在其上 $s > m$。若 $m \geqslant n$，那么由于 $s^{-1}(n)$ 在 δ 中共尾，必有 $\beta := \sup(I) < \delta$。由于 $t{\restriction}\beta + 1$ 属于 $\mathbb{S}_\kappa$，因此

$$\mathrm{otp}(C^s_{m+1} \cap I) = \mathrm{otp}(C^{t{\restriction}\beta+1}_{m+1} \cap I) < \kappa \cdot \omega.$$

若 $m < n - 1$，则 $s^{-1}(m + 1) = t^{-1}(m + 1)$ 被某个 $\beta < \delta$ 有界；又因为 $t{\restriction}\beta + 1$ 属于 $\mathbb{S}_\kappa$，所以结论再次成立。最后，若 $m = n - 1$，则根据我们的假设，可写作 $I \cap \delta = I_0 \cup I_1$，其中 I_0 是 $I \cap \delta$ 的一个初始段，且在 δ 中有界；I_1 是 $I \cap \delta$ 的一个尾段，满足 $\mathrm{otp}(\{\eta \in I_1 : t(\eta) = n\}) < \kappa \cdot \omega$。由于 t 是一个 $\mathbb{S}_\kappa$-极限，我们有 $\mathrm{otp}(\{\eta \in I_0 : t(\eta) = n\}) < \kappa \cdot \omega$。由于 $\kappa \cdot \omega$ 对序数加法封闭，故 $\mathrm{otp}(\{\eta \in I : s(\eta) = n\}) < \kappa \cdot \omega$，如所需。□

这极大地简化了在 $\mathbb{S}_\kappa$ 中构造 $\subseteq$-递增序列的工作：我们只需要关注可数共尾性的极限阶段会发生什么。特别是，我们需要保证下极限是有限的，并且其原像的序型不会增长到序型 $\kappa \cdot \omega$。事实证明，变态另类

只要我们在后继阶段谨慎行事，就相对容易安排。下面的定义阐述了一种直接的做法。

定义 5.7。设 s、$t \in \mathbb{S}_\kappa$。我们称 t 是 s 的封顶扩张，如果：

- $s \subset t$（因此 t 真扩张了 s），
- 最后一个 $(t) = 0$（因此 t 以值 0 结束），并且
- $t(\xi) > 0$ 对所有 $|s| \leqslant \xi < |t| - 1$ 都成立（因此 top (t) 是 s 之后唯一使 t 返回值 0 的位置）。

此定义的动机如下。设 $\langle s_n : n < \omega \rangle$ 是 $\mathbb{S}_\kappa$ 中元素的一个序列，并且对于所有 $n < \omega$，s_{n+1} 都是 s_n 的封顶扩张。该定义保证链的并集 t 满足 liminf $(t) = 0$，并且

$$\operatorname{otp}(t^{-1}(\{0\})) = \operatorname{otp}(s_0^{-1}(\{0\})) + \omega < \kappa \cdot \omega.$$

因此，序列 $\langle s_n : n < \omega \rangle$ 可以按规范方式继续：我们可以定义

$$s_\omega := t^\frown\langle 0 \rangle.$$

如此定义的函数 s_ω 实际上是 $\mathbb{S}_\kappa$ 中该序列的最小上界，因为任何这样的扩张都必须在顶端(s)取值 0。现在我们以显而易见的方式将这一概念推广到更长的序列。

定义 5.8。若 $\subset$ 中元素的递增序列 $\bar{s} = \langle s_\beta : \beta < \alpha \rangle$ 满足以下条件，则称其为截顶序列：

- $s_{\beta+1}$ 对所有 $\beta < \alpha$ 都是 s_β 的封顶扩张。
- 对于 $\gamma < \alpha$，若其为极限序数，则有

$$s_\gamma = \Big(\bigcup_{\beta<\gamma} s_\beta \Big)^\frown\langle 0 \rangle.$$

（因此，对于极限 γ，s_γ 是序列 $\langle s_\beta : \beta < \gamma \rangle$ 在 $\mathbb{S}_\kappa$ 中的典范扩张。）

现在我们已具备所需的一切，可以轻松得出构造 $\mathbb{S}_\kappa$ 中递增序列 $\subseteq$ 的充分条件，并保证这些序列具有上界。

引理 5.9。$\mathbb{S}_\kappa$ 中长度至多为 κ 的截顶序列在 $(\mathbb{S}_\kappa$ 中有最小上界，$\subseteq)$。

证明。令 $\langle s_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ 是 $\mathbb{S}_\kappa$ 中关于 $\gamma \leqslant \kappa$ 的一个截顶序列，并令 $t = \bigcup_{\alpha<\gamma} s_\alpha$。令 $\delta_\alpha = |s_\alpha|$，并注意到 $\{\delta_\alpha : \alpha < \gamma\}$ 是 $|t|$ 中的一个闭无界集，而且还是 $t^{-1}(0)$ 的一个尾段。特别地，lim inf $t = 0$，且 $t^{-1}(0)$ 的一个尾段具有序型 $\gamma \leqslant \kappa < \kappa \cdot \omega$。根据引理 5.6，$t^\frown\langle 0 \rangle$ 属于 $\mathbb{S}_\kappa$。□

接下来，我们讨论 $\mathbb{S}_\kappa$ 中元素的修改。为简单起见，在 $\mathbb{S}_\kappa$ 的语境下，所有修饰子的长度均为 $\kappa^+ + 1$，并且如第 3 节中的说明，我们将它们与其在 κ^+ 上的限制等同起来。

定义一些与给定修饰子相关的记号和术语将会有所帮助。

定义 5.10。设 $m : \kappa^+ \to \mathbb{Z}$ 是一个修饰子。

(1) m 的高度记为 ht(m)，是使 h 在 $[\zeta, \kappa^+)$ 上为常数的最小 $\zeta < \kappa^+$。

（2） m 的范数记为 $\|m\|$，是形如 $|m(\xi)|$ 的最大值。等价地，$\|m\|$ 是满足 m 的每个值都属于 $[-N, N]$ 的最小 N。

（3）我们将 m 的变化集定义为由满足以下条件的序数组成的集合：序数 $\xi_0 = 0 < \xi_1 < \cdots \xi_n = \mathrm{ht}(m)$ 使得对于每个 $i < n$ 和 $m(\xi_{i+1}) \neq m(\xi_i)$，$m$ 在 $[\xi_i, \xi_{i+1})$ 上为常数；对于 $0 < i \leqslant n$ 而言的序数 ξ_i 是 m 的变化点。

我们称修饰子 t 对 $s \in \mathbb{S}_\kappa$ 合法，如果 $s + t$ 的取值均为非负数。以下引理说明了这个定义的动机。

引理 5.11. 若 $s \in \mathbb{S}_\kappa$ 和 m 是对 s 合法的 ϱ_2-修饰子，则 $s + m \in \mathbb{S}_\kappa$。

证明。显然，$|s + m| = |s|$ 是后继序数，且 $s + m$ 的取值属于 ω，因此满足定义（5.1）的条件 (1)。为验证条件 (2) 和 (3)，取 $\alpha < |s|$，使得 α 是极限，并取 $s(\alpha) = k$ 和 $m(\alpha) = l$。由于对所有充分大的 $\beta < \alpha$，m 是连续的$m(\beta) = l$；又由于对所有充分大的 $\beta < \alpha$，$s \in \mathbb{S}_\kappa$, $s(\beta) \geqslant k$，且对共尾多个 $\beta < \alpha$，$s(\beta) = k$。因此，对所有充分大的 $\beta < \alpha$，$(s + m)(\alpha) = k + l$, $(s + m)(\beta) \geqslant k + l$，并且对共尾多个$\beta < \alpha$，$(s + m)(\beta) = k + l$。

至于条件（4），设 I 是一个区间，使得 $(s+m)(\alpha) \geqslant n$ 对所有 $\alpha \in I$，并将 I 分解为有限个互不相交的子区间 I_i，对于 $i < k$，使得 m 在 I_i上为常值，值为 l_i。对于 $\alpha \in I_i$，我们有 $s(\alpha) = (s+m)(\alpha)-l_i \geqslant n-l_i$，因此

$$\mathrm{otp}(\{\alpha \in I_i : s(\alpha) = n - l_i\}) < \kappa \cdot \omega,$$

这意味着 $\mathrm{otp}(\{\alpha \in I_i : (s + m)(\alpha) = n\}) < \kappa \cdot \omega$。由于序数 $\kappa \cdot \omega$对有限和封闭，$\mathrm{otp}(\{\alpha \in I : s(\alpha) = n\}) < \kappa \cdot \omega$，我们已验证条件（4）。□

注意到，由引理 5.11 可立即得出：若 $s \in \mathbb{S}_\kappa$ 和 m 对于 s是合法的，则 $-m$ 对于 $s + m$是合法的，此时 $(s + m) - m = s$。

命题 5.12. 设 $s : \delta + 1 \to \omega$ 属于 $\mathbb{S}_\kappa$，并令 $\alpha < \delta$。

(1) 序列 s 有一个修改 t，它扩张 $s \restriction \alpha$ 并满足 $t(\delta) = 0$。(2) 若 δ 是后继序数，则 s 有一个修改，它是 $s \restriction \alpha$的封顶扩张。

证明。除 δ 是满足 $n := s(\delta) > 0$的极限序数这一情形外，(1) 部分显然。由于 $s \in \mathbb{S}_\kappa$，n 是 ω 中原像在 δ内无界的最小元素。如有必要，增大 α，我们可以假设 $s(\xi) \geqslant n$ 对 $\xi \geqslant \alpha$成立。现在可以定义一个函数 $m : \kappa^+ \to \mathbb{Z}$，如下：

$$m(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{if } \xi \leqslant \alpha, \text{ and} \\ -n & \text{if } \alpha < \xi < \kappa^+. \end{cases}$$

函数 m 是一个修饰子，根据 α 的选择，我们知道它对于 s是合法的。函数 $t := s + m$ 具有所有所需的性质。

现在设 $\delta = \gamma + 1$。若 $\alpha = \gamma$，则 (2) 部分很容易，因此我们假设 $\alpha < \gamma$，并定义一个修饰子 $m : \kappa^+ \to \omega$，如下：

$$m(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{if } \xi \leqslant \alpha, \\ 1 & \text{if } \alpha < \xi \leqslant \gamma, \text{ and} \\ -s(\delta) & \text{if } \xi = \delta. \end{cases}$$

现在，m 对 s是合法的，而 $s + m$ 是 $s \restriction \alpha$ 的封顶扩张，并且与s等价。□

6. Forcing an Example

回想一下，在第 3 节中，我们从集合 $\mathbb{S}$ 导出了一个偏序集 $\mathbb{P}$，研究了 $\mathbb{P}$ 作为强迫偏序集的性质，随后使用 $\diamondsuit$ 和 $\mathbb{P}$ 构造了 $\mathbb{S}$ 的一个子树，使我们得以回答 Baumgartner 的问题。第 3 节的论证很容易表明，使用 $\mathbb{P}$ 进行力迫会添加一棵合适的树；事实上，我们可以将 $\diamondsuit$ 构造视为构造一个由元素组成的 ω_1-序列，该序列生成一个足够泛型的滤子。

类比于 $\mathbb{S}$ 中 $\mathbb{P}$ 的定义，我们令 $[s]$ 为 $s \in \mathbb{S}_\kappa$ 下 s 的合法修改集合，令 $\mathbb{P}_\kappa = \{[s] : s \in \mathbb{S}_\kappa\}$，并规定 $\mathbb{P}_\kappa$ 上的序如下：当且仅当 $|s| \leqslant |t|$ 且 $[s] = [t\restriction|s|]$ 时，$[t] \leqslant [s]$。本节将研究 $\mathbb{P}_\kappa$ 作为一种力迫概念，并证明 $\mathbb{P}_\kappa$ 是一种 $(\kappa+1)$-策略闭的力迫概念，它会添加一棵符合我们所需类型的树。

定义 6.1。设 $\mathbb{P}$ 是一种力迫概念，α 是一个序数。博弈$G_\alpha(\mathbb{P})$ 由两位玩家 Odd 和 Even 参与，双方轮流从$\mathbb{P}$ 中选择条件，共进行 α 步。Odd 在奇数阶段选择行动，Even 在偶数阶段选择行动（包括所有极限阶段）。第零步时，Even 必须选择 $1_{\mathbb{P}}$（$\mathbb{P}$ 的最大元素）。如果在第 β 步选择的条件是 p_β，那么选择 p_β 的玩家立即输掉，除非对所有 $\gamma < \beta$ 都有 $p_\beta \leqslant p_\gamma$。如果直到阶段 $\beta < \alpha$ 都没有玩家输掉，那么 Even 赢得该博弈。

定义 6.2. 设 $\mathbb{P}$ 是一种力迫概念，γ 是一个序数。当且仅当 Even 在 $G_\gamma(\mathbb{P})$ 中拥有获胜策略时，力迫概念 $\mathbb{P}$ 是 γ-策略闭的。

现在我们来讨论一个主要观点。

定理 6.3. $\mathbb{P}_\kappa$ 是 $(\kappa+1)$-策略闭的。

证明. Even 在该博弈中的策略很简单，涉及构造一个截顶序列 $\langle t_\beta : \beta < \kappa\rangle$，其中 t_β 是 $p_{2\beta}$ 的一个元素。最后，应用引理 5.9 即可确保 Even 获胜。

每当 Odd 选择其行动 $p_{2\beta+1}$ 时，Even 就会选择一个 $t \in p_{2\beta+1}$，使其为 t_β 的 1-扩张，并定义 $t_{\beta+1} = t^\frown\langle 0\rangle$ 和 $p_{2(\beta+1)} = [t_{\beta+1}]$。在极限阶段 $\delta \leqslant \kappa$，截顶序列 $\langle t_\beta : \beta < \delta\rangle$ 将在 $\mathbb{S}_\kappa$ 中有一个最小上界 t_δ，随后 Even 将打出条件 $p_\delta = [t_\delta]$。□

注意到，对于Even而言，这个博弈非常容易获胜：如果他们正在构建一个截顶序列 $\langle t_\xi : \xi < \kappa\rangle$ 在后台，那么在后继阶段，他们所需做的全部事情就是确保其对 $p_{2\beta+1}$ 的回应必须包含一个封顶扩张 t_β。如果做到这一点，那么 Even将始终能够在极限阶段进行操作。这种灵活性将是对我们而言一个重要的要素，因为我们的证明部分依赖于这样一个事实：Even 在后继阶段有许多可用的获胜着法。

$\mathbb{P}_\kappa$ 是 $(\kappa+1)$-策略闭的这一事实告诉我们，它不会添加任何 κ序数序列，因此会保留所有不超过 κ^+（包括 κ^+）的基数。如果我们也假设 $2^\kappa = \kappa^+$，那么所有基数和共尾数都将得到保留。

该力迫也会添加一棵 κ^+-树。给定一个泛型滤子 $G \subseteq \mathbb{P}_\kappa$，我们进入扩张 V[$G$]。一个简单的稠密性论证表明，$G$ 将由 $\mathbb{P}_\kappa$ 中元素构成的递降序列 $\langle p_\delta : \delta < \kappa^+\rangle$ 组成，我们对其进行枚举，使得p_δ 由长度为 $\delta+1$ 的序列构成。

如果现在我们定义

$$T(G) := \bigcup_{\delta<\kappa^+} p_\delta$$

那么很容易看出， $T(G)$ 在扩张关系下构成一棵树。此外，根据构造， $T(G)$ 是 ϱ_2-相干且完备的。

我们需要使用一些基数为 κ的初等子模型。当 κ 是正则基数且 $\kappa^{<\kappa} = \kappa$ 时，我们可以使用对长度为 $< \kappa$的序列封闭的这类模型；但如果 κ 是奇异的，这就不可能，因为此时 $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa$。无论如何，我们都不想对基数算术作出假设。我们将采用一种标准做法，使用某种“内部可达”模型。

若 χ 是一个足够大的正则基数，我们将稍微滥用记号，把“$N \prec H(\chi)$”作为“$N \prec (H(\chi), \in, <_\chi)$”的简写，其中 $<_\chi$ 是 $H(\chi)$的某个固定良序。我们声称，对于任意参数 $x \in H(\chi)$，都可以找到一个满足以下条件的初等子模型 $M \prec H(\chi)$：

- $x \in M$；
- M的基数为 κ，且满足 $\kappa + 1 \subseteq M$；
- $M \cap \kappa^+$ 是某个序数 $\delta < \kappa^+$；
- 对于每个满足 $|X| \geqslant \kappa$ 的 $X \in M$，都存在 $\vec{x} = \langle x_i$ 的一个枚举 $i < \kappa\rangle$： $X \cap M$，使得对所有 $j < \kappa$，都有 $\vec{x}{\restriction}j \in M$。

设 $\mathrm{cf}(\kappa) = \mu$。我们将 M 构造为一个 μ-链 $(M_i)_{i<\mu}$ 的并，其中：

- x， $\kappa \in M_0$；
- 对所有 $i < \mu$，•；
- 对所有满足 $i < j < \mu$ 的 i 和 j，•；
- 对所有 $j < \mu$，$\langle M_i :$ •；
- 对所有 $\gamma < \kappa$，存在 $i < \mu$ 使得 $\gamma \subseteq M_i$。

只要我们选择 χ 足够大，这一切都是可能的。

我们验证，若设定 $M := \bigcup_{i<\mu} M_i$，则 M 符合要求。根据构造$\kappa \subseteq M$，因此 $M \cap \kappa^+ \in \kappa^+$。现在假设 $X \in M$ 且满足 $|X| \geqslant \kappa$。为了构造 $\vec{x}$，不失一般性，假设 $X \in M_0$。我们首先选择 $\langle x_i : i < \gamma_0\rangle$，使其成为 $X \cap M_0$的按 $<_\chi$最小枚举，并注意到 $\gamma_0 < \kappa$，因为 $|M_0| < \kappa$且 $\langle x_i : i < \gamma_0\rangle \in M_1$，因为 X， $M_0 \in M_1$。接下来我们将归纳进行 μ 步，选择 $\langle x_i : i < \gamma_j\rangle$ 枚举 $X \cap M_j$，且满足 $\gamma_j < \kappa$ 和 $\langle x_i : i < \gamma_j\rangle \in M_{j+1}$。给定 $\langle x_i : i < \gamma_j\rangle$，我们选择 $\langle y_i : i < \delta_j\rangle$，使其成为 $X \cap (M_{j+1} \backslash M_j)$ 的按 $<_\chi$最小枚举，然后设定 $\gamma_{j+1} = \gamma_j + \delta_j$ 和 $x_{\gamma_j+i} = y_i$，其中$i < \delta_$。由于 X、M_j、$M_{j+1} \in M_{j+2}$，可得 $\langle y_i : i < \delta_j\rangle \in M_{j+2}$，因此$\langle x_i : i < \gamma_{j+1}\rangle \in M_{j+2}$。当 j 为极限时，令 $\gamma_j = \sup_{j_0<j} \gamma_{j_0}$，则 $\gamma_j < \kappa$，因为$j < \mu = \mathrm{cf}(\kappa)$，且 $\langle x_i : i < \gamma_j\rangle \in M_{j+1}$，因为它可以由 $\langle M_i : i < j\rangle$定义，并且我们有 $\langle M_i : i \leqslant j\rangle \in M_{j+1}$。

观察 6.4. 如果要求对集合 $X \cap M$ 进行含重复项的枚举，那么我们将 X 替换为 $\kappa \times X$，并令 $\langle(\alpha_i, x_i) : i < \kappa\rangle$ 是 $(\kappa \times X) \cap M$ 的一个枚举，其所有真初始段都属于 M。那么 $\langle x_i : i < \kappa\rangle$ 就是对 X 的含重复项枚举，且其所有真初始段都属于 M。

设 M 是此类型的子模型，并注意，由于 $\kappa \in M$，任何由参数 κ 定义的集合也属于 M：特别地，集合 $\mathbb{S}_\kappa$、强迫偏序集 $\mathbb{P}_\kappa$、博弈 $G_{\kappa+1}(\mathbb{P}_\kappa)$的获胜策略、长度为 κ^+的 ϱ_2-修饰子的集合，以及 $\mathbb{P}_\kappa$ 的所有稠密子集组成的集合，都是 M 的元素。给定任意

$p \in M \cap \mathbb{P}_\kappa$，我们可以利用我们的博弈 $G_{\kappa+1}(\mathbb{P}_\kappa)$ 来构造一个 $(M, \mathbb{P}_\kappa)$-泛子集 G of $M \cap \mathbb{P}_\kappa$，并同时为 G 找到一个下界；也就是说，得到一个完全 $(M, \mathbb{P}_\kappa)$-泛型的$\vec{}$条件。为此，我们固定一个枚举 D，按序型 κ 枚举 $\mathbb{P}_\kappa$ 的稠密子集，这些子集属于$_\sim M$，并且 D 的每个真初始段都属于 M。然后，我们构造博弈 $G_{\kappa+1}(\mathbb{P}_\kappa)$ 的一局，其中 Even 使用获胜策略，而玩家 Odd 选择 $p_{2\beta+1}$，使其成为属于 D_β 的 $p_{2\beta}$ 的 $<_\chi$-最小扩张。关键在于，对于每个 $\gamma < \kappa$，截至 γ 的行动序列由$\vec{}$策略和 D 的一个初始段确定，因此它属于 M：特别是，对所有 $\gamma < \kappa$，都有 $p_\gamma \in M$。现在显然，最后一步 p_κ 是完全 $(M, \mathbb{P}_\kappa)$-泛型的。特别地，p_κ 诱导出一个 $(M, \mathbb{P}_\kappa)$-泛型滤子，它将我们的泛型树$\dot{}$确定到 $\delta = M \cap \kappa^+$ 层；若 S 是 M 中一个名称，表示 T 的一个子树$\dot{}$，也会出现同样的情况。我们利用这一点证明，由 $\mathbb{P}_\kappa$ 添加的泛型树 $T(G)$ 具有这样的性质：它的所有子树都包含一个冻结锥。

定理 6.5。泛树 $T(G)$ 经 $\mathbb{P}_\kappa$ 添入的每个子树都包含一个冻结锥。因此，在泛扩张中存在一个基数为 κ^+ 的最小非-σ-散线性序。

证明。设 T 是泛树 $T(G)$ 的一个 $\mathbb{P}_\kappa$-名称，并设

$$p \Vdash \text{“}\dot{S} \text{ is a subtree of } \dot{T} \text{ that does not contain a frozen cone”}. \tag{6.1}$$

我们将找出 $\delta < \kappa^+$ 和 $q \leqslant p$，使得

$$q \Vdash \text{“}\dot{S} \subseteq \dot{T}_{<\delta}\text{.”} \tag{6.2}$$

设 χ 是某个充分大的正则基数，并设 M 是 $H(\chi)$ 的一个初等子模型，如上文所述，其中包含我们所关注的所有参数。令 δ 为 $M \cap \kappa^+$。如前文所述，令 $\vec{D} = \langle D_i : i < \kappa \rangle$ 枚举所有属于 M 的 $\mathbb{P}_\kappa$ 的稠密开子集，并且 $\vec{D}$ 的每个真初始段都属于 M；再令 $\vec{m} = \langle m_i : i < \kappa \rangle$ 枚举属于 M 的修饰子（允许重复），并且 $\vec{m}$ 的每个真初始段都属于 M。我们进行博弈 $G_{\kappa+1}(\mathbb{P}_\kappa)$，以产生所需的 q。最初的几步如预期进行：Even 必须以 $[\varnothing]$ 开局，而我们让 Odd 以 p 应对。

现在假设我们正在进行这场博弈，轮到 Odd 行动。在这种情况下，我们已经协作构造了 $\langle p_\gamma : \gamma \leqslant 2\beta \rangle$，而 Even 则在一旁构造其辅助序列 $\langle t_\gamma : \gamma \leqslant \beta \rangle$。我们的构造将由$\vec{}$ D 和 $\vec{m}$ 指引，因此，和此前构造全泛条件时一样，我们有 $\langle p_\gamma : \gamma \leqslant 2\beta \rangle$ 和 $\langle t_\gamma : \gamma \leqslant \beta \rangle$ 都属于 M。序列 $\langle t_\gamma : \gamma \leqslant \beta \rangle$ 将被置于顶端，尤其是最后一个 $(t_\beta) = 0$。

现在我们考虑修饰子 m_β，注意到由于 $m_\beta \in M$，我们有 $h(m_\beta) < \delta$。我们首先询问：对于顶端为 (t_β) 的 t_β，m_β 是否合法，并且 $h(m_\beta) <?$ 如果答案是“否”，Odd 无需采取任何特别行动，而是选择 $p_{2\beta+1} := p_{2\beta}$。在这种情况下，Even 会选择 $t_{\beta+1} := t_\beta$ 作为回应。

如果答案是“是”，那么我们将要求 Odd 做一些额外工作。注意，由于 m_β，$t_\beta + m_\beta \in M$ $t_\beta \in M$。另请注意，m_β 的最终常数值是非负的，因为 m_β 对于 t_β、$h(m_\beta) <$ 的上端 (t_β) 和末端 $(t_\beta) = 0$ 是合法的。特别地，对于 t_β 的任何扩张，m_β 都自动合法。我们选择 $q \leqslant p_{2\beta}\dot{}$ 为决定“$t_\beta + m_\beta \in S$”的 $<_\chi$-极小扩张 $p_{2\beta}$。由于 q 可由 M 中的参数通过$\dot{}$定义，因此它属于 M。如果 q 强制“$t_\beta + m_\beta \notin S$”，我们就令 $p_{2\beta+1} = q$。在这种情况下，Even 选择 $t_{\beta+1}$ 作为满足 $[t_{\beta+1}] \leqslant q$ 的 t_β 的 $<_\chi$-最小封顶扩张。

如果 q 力迫“$t_\beta + m_\beta \in S$”，我们取 q 并按照上文所述的过程将其扩展为一个完全 $(M, \mathbb{P}_\kappa)$-泛型条件，从而在 $M \cap \mathbb{P}_\kappa$上生成一个 $(M, \mathbb{P}_\kappa)$-泛型滤子 G_β。当然，G_β 本身不在 M中，但我们很快就会看到，这并不是问题。利用 G_β ，我们可以解释 $\dot{S}$的初始段以及属于 M 的 T 的名称，从而确定 $T_{<\delta}$ 和 $S_{<\delta}$的身份：这些对象将依赖于 G_β，但对任意 $\alpha < \delta$ ，在 G_β 中都存在一个条件，力迫这些信息在层 α之前均有效。由于 $q \in G_\beta$ ，我们有 $t_\beta + m_\beta \in S_{<\delta}$。

由于 $p \in G_\beta$，我们的假设 (6.1) 意味着，对于任意 $s \in T_{<\delta}$ 和 $n < \omega$ ，存在一个 n-扩张 t ，它是 s 在 $T_{<\delta}$ 中的扩张，但不属于 $S_{<\delta}$。这是我们论证的关键要素。令 N 为修饰子 m_β 的范数。由于 $t_\beta + m_\beta \in S_{<\delta}$， $t_\beta + m_\beta$ 在 $T_{<\delta}$ 中有一个 N-扩张 s ，使得 $s \notin S_{<\delta}$。某个扩张 q 的 G_β 中的条件，迫使这一情形对于这个特定的 s 成立。

我们已经证明，存在一个 N-扩张 s，它是 $t_\beta + m_\beta$ 的扩张；还存在 r 的一个扩张 $9q$ ，使得 r 力迫“$s \notin S$”。令 (s', r') 为具有这些性质的 $<_\chi$-最小的一对；照例，这一对属于 M，并令 $p_{2\beta+1} = r'$。我们注意到，没有理由认为 $p_{2\beta+1} \in G_\beta$ 或 $s' = s$。还要注意，我们只需查看 s'，就能判断它是 $t_\beta + m_\beta$ 的一个 N-扩张，无须参考力迫；因此，关键在于 $p_{2\beta+1}$ 包含足够的信息，以确定 s' 属于 T，但不属于 S。这会带来一些后果，因为 $p_{2\beta+1}$ 力迫 s' 属于 T 的唯一方式，是 $p_{2\beta+1}$ 扩张 s' 在 $\mathbb{P}_\kappa$ 中的等价类。

根据 $p_{2\beta+1}$、 $p_{2\beta+1}$ 的闭包性质， $p_{2\beta+1}$ 包含 s'的一个 N-扩张 s'' 。根据 T的定义， $p_{2\beta+1}$ 迫使 $s'' \in T$ 成立；又由于 S 被迫向下封闭， $p_{2\beta+1}$ 迫使 $s'' \notin S$成立。总之，$p_{2\beta+1}$ 包含$t_\beta + m_\beta$ 的一个 N-扩张 s'' ，而 $p_{2\beta+1}$ 迫使该扩张位于 S之外。

现在定义 $t := s'' - m_\beta$。由于 N 是 m_β 的范数，且 s'' 是 $t_\beta + m_\beta$的一个 N-扩张，我们知道 $-m_\beta$ 对 s'' 是合法的，而 t 将是 t_β的一个1-扩张。现在 Even 定义

$$t_{\beta+1} := t^\frown\langle 0\rangle$$

以及$p_{2(\beta+1)} := [t_{\beta+1}]$，然后继续进行博弈。正如上文所观察到的， m_β 对$t_{\beta+1}$是合法的。

我们总结这一轮构造的结果，同时牢记其中涉及多种情形。我们声称，在所有 m_β 对 t_β 合法且 t_β 具有$h(m_\beta)$ <顶端(t_β)的情形中， $t_{\beta+1}$ 是 t_β 的一个封顶扩张，并且

$$p_{2(\beta+1)} \Vdash \text{“}t_{\beta+1} + m_\beta \notin \dot{S}\text{.”}$$

若属于 q 强迫“$t_\beta + m_\beta \notin S$”的情形，则令 $p_{2\beta+1} := q$ ，此时由于 $t_{\beta+1} + m_\beta$ 扩张了 $t_\beta + m_\beta$，结论立即成立。若属于 q 强迫“$t_\beta + m_\beta \in S$”的情形，则我们已安排好使 $t_{\beta+1} + m_\beta$ 扩张 s'' ，且 $p_{2\beta+1}$ 强迫“$s'' \notin S$”。

由于我们谨慎地在后继阶段使用良序 $<_\chi$、$\langle p_\gamma$ 作出所有选择，因此 $\gamma \leqslant 2\beta\rangle$ 和 $\langle t_\gamma$ 对所有 $\gamma < \kappa$ 都属于 M。如果 Even 采用这一策略，那么根据引理 5.9，他们最终将赢得博弈，因为序列 $\langle t_\beta : \beta < \kappa\rangle$ 是一个截顶序列。令 q 为 Even 对应的最终着法 p_κ ，现在我们断言

$$q \Vdash \text{“}\dot{S} \subseteq \dot{T}_{<\delta}\text{.”}$$

为此，我们来定义

$$t := \Big(\bigcup_{\beta<\kappa} t_\beta\Big)^\frown\langle 0\rangle.$$

注意， $t \in \mathbb{S}_\kappa$ 是截顶序列 $\langle t_\beta$ 的一个上界： $\beta < \kappa\rangle$ ，这是Even 在我们进行博弈期间构造的。我们知道 $q = [t]$, 因此只需证明，对于任何对 t 合法的 ϱ_2-修饰子 m ，

$$q \Vdash \text{“}t + m \notin \dot{S}.\text{”}$$

只需对属于 M 的修饰子 m 进行检验，因为 $t + m$ 完全由 $m \restriction \delta$ 确定，而且 m 必须在 δ 的一个尾段上保持常量。由于我们在 M 中重复枚举了修改，在进行博弈的过程中，我们到达了阶段 $2\beta + 1$ ，此时 $m_\beta = m$ 且 $\mathrm{ht}(m_\beta) < \mathrm{top}(t_\beta)$。由于 m 对于 t 是合法的，我们知道 m 对于 t_β 是合法的，因此选择了 $t_{\beta+1}$ ，使得

$$p_{2(\beta+1)} \Vdash \text{“ } t_{\beta+1} + m_\beta \notin \dot{S}.\text{”}$$

因此

$$q \Vdash \text{“ } t + m \notin \dot{S}\text{”}$$

按要求。 □

7. Building many examples

本节的目标是证明，如果 V =L，那么对每个无限基数 κ，都存在一个基数为 κ^+ 的极小非 -σ- 散布线性序。我们将通过证明可以利用 “ 方阵中的菱形 ” 原理 $\diamondsuit_\kappa$ 构造这类线性序来实现这一点。这类原理将某个无限基数 κ 的 $\diamondsuit_{\kappa^+}$ 与 $\square_\kappa$ 结合起来，最早由 Gray [11] 在其博士论文中针对 $\kappa = \omega_1$ 引入，并首次见于 Abraham、Shelah 和 Solovay [3] 的文献中。论文 [3] 提出了若干“方阵中的菱形”原理：如今称为 $\diamondsuit_\kappa$ 的原理在那里以稍有不同（但等价）的形式出现，名称为 SD_κ。如果 V = L，那么对每个无限基数κ [3,, $\diamondsuit_\kappa$ 都成立（见第 2] 节）。

我们回顾 $\diamondsuit_\kappa$的定义。如果 C 是一个序数集合，令 $\mathrm{acc}(C)$ 表示 C 中属于 C 的极限点的元素集合。

定义 7.1。原理$\diamondsuit_\kappa$ 断言存在一个序列

$$\langle (C_\delta, X_\delta) : \delta < \kappa^+\rangle$$

满足：

(1) 对于极限 $\delta < \kappa^+$ ，集合 C_δ 是 δ 的闭无界子集，其序型至多为 κ；(2)对所有 $\delta < \kappa^+$， $X_\delta \subseteq \delta$ ；(3) 如果 $\alpha \in \mathrm{acc}(C_\delta)$ ，则：• $C_\alpha = C_\delta \cap \alpha$,
• $X_\alpha = X_\delta \cap \alpha$；(4)对于每个子集 $X \subseteq \kappa^+$ 和每个闭无界集 $C \subseteq \kappa^+$ ，存在一个极限序数 $\delta \in C$ ，使得：• $C_\delta \subseteq C$，• $\mathrm{otp}(C_\delta) = \kappa$，并且• $X \cap \delta = X_\delta$。

我们将需要以下由 Assaf Rinot 提出的引理；见下文的注记 7.6。

引理 7.2。设 $\vec{C} := \langle C_\delta : \delta < \kappa^+ \rangle$ 是一个 $\square_\kappa$-序列。那么存在一个函数序列 $\langle f_\delta : \delta < \kappa^+ \rangle$，使得对于每个极限序数 $\delta < \kappa^+$:

- 对于每个 $\gamma \in \mathrm{acc}(C_\delta)$, $f_\gamma = f_\delta \restriction \gamma$，并且
- 若 $\mathrm{otp}(C_\delta) = \kappa$，则 f_δ 将 C_δ 映射到 δ上。

证明。这个结果可以从引理 3.8], 的证明中提取出来，但我们从头证明这个简化情形。固定一个映射 $e\colon [\kappa^+]^2 \to \kappa$，使得若 $\alpha < \beta < \gamma$，则$e(\alpha,\gamma) \neq e(\beta,\gamma)$。令 $\pi\colon \kappa \to \kappa \times \kappa$ 为一个满射，使得任意单元素集的原像在 κ 中共尾。对于每个 $\delta \in \mathrm{acc}(\kappa^+)$，定义一个函数 $f_\delta : C_\delta \to \delta$，令所有 $\beta \in C_\delta$:

$$f_\delta(\beta) := \text{最小}(\{\alpha < \beta : \pi(\mathrm{otp}(C_\delta \cap \beta)) = (\mathrm{otp}(C_\delta \cap \alpha), e(\alpha, \text{最小}(C_\delta \backslash (\alpha+1))))\} \cup \{\beta\}).$$

断言 7.3. 设 $\delta \in \mathrm{acc}(\kappa^+)$ 且 $\gamma \in \mathrm{acc}(C_\delta)$。那么 $f_\gamma = f_\delta \restriction \gamma$。

证明。由于 C是一个 $\square_\kappa$-序列，$C_\gamma = C_\delta \cap \gamma$。因此，对于所有 $\alpha < \beta < \gamma$，$C_\delta \cap \beta = C_\gamma \cap \beta$、$C_\delta \cap \alpha = C_\gamma \cap \alpha$和 $C_\delta \backslash (\alpha+1) = C_\gamma \backslash (\alpha+1)$。由此可得，$f_\gamma = f_\delta \restriction \gamma$。□

断言 7.4. 设 $\delta \in \mathrm{acc}(\kappa^+)$ 且 $\mathrm{otp}(C_\delta) = \kappa$。那么 f_δ 将 C_δ 映射到 δ上。

证明。设 $\alpha < \delta$。令 $\eta := \min(C_\delta \backslash (\alpha+1))$ 且 $(i,\ j) := (\mathrm{otp}(C_\delta \cap \alpha),\ e(\alpha,\ \eta))$。根据满射 π的选取，$\{\varepsilon < \kappa : \pi(\varepsilon) = (i,\ j)\}$ 是 $\mathrm{otp}(C_\delta)$的共尾子集，因此我们可以固定某个大于 α 的 $\beta \in C_\delta$，使得 $\pi(\mathrm{otp}(C_\delta \cap \beta)) = (i,\ j)$。根据 f_δ的定义，现可得，若 $f_\delta(\beta) \neq \alpha$，则存在某个 $\bar{\alpha} < \alpha$使得 $\mathrm{otp}(C_\delta \cap \bar{\alpha}) = i$ 且 $e(\bar{\alpha},\ \min(C_\delta \backslash (\bar{\alpha}+1))) = j$。为导出矛盾，假设 $\bar{\alpha} < \alpha$ 是这样的一个序数。但由于 $\mathrm{otp}(C_\delta \cap \bar{\alpha}) = i = \mathrm{otp}(C_\delta \cap \alpha)$，有 $\min(C_\delta \backslash (\bar{\alpha}+1)) = \min(C_\delta \backslash (\alpha+1)) = \eta$，因此，$e(\bar{\alpha},\ \eta) = j = e(\alpha,\ \eta)$，这与纤维 $e(\cdot,\ \eta)$ 是单射这一事实矛盾。□

证明至此完成。 □

下面的$\diamondsuit_\kappa$ 的形式强化——根据引理 7.2，它与之等价——将有助于我们开展下文的构造。

定义 7.5. 若 $\langle (C_\delta, X_\delta) : \delta < \kappa^+ \rangle$ 是一个 $\diamondsuit_\kappa$-序列，且 $\langle f_\delta : \delta < \kappa^+ \rangle$ 关于 $\langle C_\delta : \delta < \kappa^+ \rangle$ 满足引理 7.2 的结论，则称 $\langle (C_\delta, X_\delta, f_\delta) : \delta < \kappa^+ \rangle$ 是一个 $\diamondsuit^{+\epsilon}_\kappa$-序列。假设 $\diamondsuit^{+\epsilon}_\kappa$ 断言存在一个 $\diamondsuit^{+\epsilon}_\kappa$-序列。

注记 7.6. 根据引理 7.2，$\diamondsuit_\kappa$ 蕴含 $\diamondsuit^{+\epsilon}_\kappa$。本文最初流传的草稿从 Rinot 和 Schindler 于 [31] 引入的更强假设 $\diamondsuit^*_\kappa$ 推导出 $\diamondsuit^{+\epsilon}_\kappa$，而且当 V = L 时该假设也成立。在第三位作者于 2023年2月 在多伦多集合论研讨会报告本文结果后，Rinot 告知我们，$\diamondsuit^{+\epsilon}_\kappa$ 已经由$\diamondsuit_\kappa$ 推出。他慷慨地允许我们在上文列出他对引理 7.2 的表述及其证明。

现在我们转而处理这样一项任务：使用 $\diamondsuit_\kappa$ 构造一个基数为 κ^+ 的极小非-σ-散布线性序。

定理 7.7. 若 κ 是满足 $\diamondsuit_\kappa$ 的无限基数，则存在一个$T \subseteq \mathbb{S}_\kappa$，它是 ϱ_2-相干且完备的。因此，存在一个基数为 κ^+ 的极小非-σ-散布线性序，而且它还是 κ^+-Countryman。

证明。应用引理 7.2，令 $\langle (C_\delta, X_\delta, f_\delta) : \delta < \kappa^+ \rangle$ 为一个 $\square^{+\epsilon}_\kappa$-序列，并固定一个枚举 $\langle m_\delta : \delta < \kappa^+ \rangle$，枚举所有 ϱ_2-修饰子，且满足 $\mathrm{ht}(m_\delta) < \delta$，并且每个修饰子都在该枚举中无界次出现。

我们需要稍微关注一下如何利用我们的 $\square^{+\epsilon}_\kappa$-序列来猜测$\kappa^+$-树。我们会以完全直接的方式进行，但在证明中的某个地方，这种具体性会很方便。由于 $\diamondsuit(\kappa^+)$ 是 $\square^{+\epsilon}_\kappa$的推论，我们知道 $\kappa^\kappa = \kappa^+$，因此可以固定一个枚举 $\langle \sigma_\alpha : \alpha < \kappa^+ \rangle$，其序型为 κ^+，枚举对象为 $\mathbb{S}_\kappa$。给定任意 κ^+-树 $S \subseteq \mathbb{S}_\kappa$，我们可以通过令 $X \subseteq \kappa^+$ 为如下集合，将 S 编码为

$$X := \{\alpha < \kappa^+ : \sigma_\alpha \in S\}.$$

我们需要注意的是，如果这样做，那么将存在一个由 $\delta < \kappa^+$ 构成的闭无界集，使得

$$S_{<\delta} = \{\sigma_\alpha : \alpha \in X \cap \delta\}. \tag{7.1}$$

这一观察稍后会在我们尝试应用 $\square^{+\epsilon}_\kappa$时有所帮助。

这棵树通过一个长度为 κ^+的构造建立，我们构造一个序列 $\langle t_\alpha : \alpha < \kappa^+ \rangle$，其元素取自 $\mathbb{S}_\kappa$，顶端为$(t_\alpha) = \alpha$，并且还满足

$$t_\beta \equiv_\kappa t_\alpha \restriction \beta + 1$$

每当 $\beta < \alpha < \kappa^+$。在构造的典型阶段 α，我们将拥有序列 $\langle t_\beta : \beta < \alpha \rangle$（因此我们将知道 $T_{<\alpha}$），并且需要生成一个合适的 t_α，其定义域为 $\alpha + 1$。

对 t_α 的具体选择只会在 α 是极限序数的情况下产生影响，因为如果 α 是后继序数 $\gamma + 1$，那么我们令

$$t_\alpha := t_\gamma{}^\frown\langle 0 \rangle.$$

在我们的构造的极限阶段 α，我们决定构建一个 $t_\alpha \in \mathbb{S}_\kappa$，它对应于穿过 $T_{<\alpha}$ 的共尾分支，并满足以下两个条件:

$$\beta \in \mathrm{acc}(C_\alpha) \Longrightarrow t_\beta \subseteq t_\alpha, \tag{7.2}$$

and

$$\mathrm{acc}(C_\alpha) \subseteq t_\alpha^{-1}(\{0\}) \subseteq \mathrm{acc}(C_\alpha) \cup \{\beta + 1 : \beta \in \mathrm{nacc}(C_\alpha))\}. \tag{7.3}$$

请注意，最后这个条件将保证满足$t_\alpha(\beta) = 0$ 的 $\beta < \alpha$ 的集合的序型至多为 κ。由于 α 是一个极限序数，t_α 属于 $\mathbb{S}_\kappa$ 需要类似于 (7.3) 的条件，以便我们定义 $t_\alpha(\alpha) = 0$。

如果 $\mathrm{acc}(C_\alpha)$ 在 α 中恰好是无界的，我们就没有自由选择的余地，因为 (7.2) 将迫使我们定义

$$t_\alpha := \Big(\bigcup_{\beta \in \mathrm{acc}(C_\alpha)} t_\beta \Big)^\frown\langle 0 \rangle,$$

而这将是 $\mathbb{S}_\kappa$ 中具有所需性质的一个元素。因此，我们的构造中唯一的回旋余地出现在集合 $\mathrm{acc}(C_\alpha)$ 在 α 以下有界时，而我们采取的任何实质性行动都必须发生在这些阶段。

那么，假设我们的构造到达了一个极限序数 α，对于它，$\gamma := \sup(\mathrm{acc}(C_\alpha))$ 小于 α。在这种情况下，我们知道 $C_\alpha \backslash \gamma + 1$ 的序型必定为 ω，因此可以按递增顺序将其列为 $\langle \alpha_n : n < \omega \rangle$。选择 $t_\alpha \in \mathbb{S}_\kappa$ 时，我们需要确保它满足以下结构要求:

• 顶部$(t_\alpha)=\alpha$, • $t_\gamma \subseteq t_\alpha$
• $t_\alpha \restriction \beta+1 \in T_{<\alpha}$ 对于所有 $\beta<\alpha$,
并且• 存在一个 $m<\omega$ 使得

$$t_\alpha^{-1}(\{0\}) \cap (\gamma,\alpha) = \{\alpha_n+1 : m \leqslant n < \omega\}.$$

只要 t_α 满足这些要求，我们的构造就可以继续。安排这些条件并不困难：如果 $T_{<\alpha}$ 中的任意 t_γ 有一个 1-扩张 s，那么我们就可以借助一个长度为 ω 的截顶序列，将 s 扩张为合适的 t_α；该序列的顶端由序数 α_n+1（对应 $m \leqslant n<\omega$）组成。

我们在阶段 α 的工作将取决于 $\square_\kappa^{+\epsilon}$-序列提供给我们的集合 X_α。我们约定：若满足以下三个条件，就称 α 为活动阶段：

• X_α 编码了 $T_{<\alpha}$的一个无界子树 Y_α，• Y_α 不包含 $T_{<\alpha}$ 的冻结锥，并且存在一个 $\xi \in C_\gamma$，使得 $t_\gamma + m_{f_\gamma(\xi)}$ 属于 Y_α。

如果 α 是一个活动阶段，那么令 $\zeta \in C_\gamma$ 为上述最小的 ξ。我们称这个 ζ在阶段 α被选定采取行动；我们的任务是找到 t_γ的一个扩张 t_α，使其满足所有结构性要求，并且还具有以下性质：

$$(t_\alpha + m_{f_\gamma(\zeta)}) \restriction \alpha \text{ is not a cofinal branch through } Y_\alpha. \tag{7.4}$$

另一方面，如果 α 不是活动阶段，那么我们只需令 $t_\alpha \in \mathbb{S}_\kappa$ 为满足结构要求的 t_γ 的任意扩张即可。

现在假设 α 是一个活动阶段，而 $\zeta \in C_\gamma$ 是相应的目标。只需在 $T_{<\alpha}$ 中构造 t_γ 的一个 1-扩张 s，使得 $s+m_{f_\gamma(\zeta)}$ 不在 Y_α 中，因为这样的 s 可以扩张为我们所需的 t_α。为此，令 N 为修饰子 $m_{f_\gamma(\zeta)}$ 的范数。由于 Y_α 不包含 $T_{<\alpha}$ 的冻结锥，我们知道 $t_\gamma + m_{f_\gamma(\zeta)}$ 在 $T_{<\alpha}$ 中有一个不属于 Y_α 的 N-扩张 t。根据定义，修饰子 $-m_{f_\gamma(\zeta)}$ 对 t 将是合法的，并且

$$s := t - m_\zeta$$

将是 t_γ 在 $T_{<\alpha}$ 中的一个 1-扩张，属于我们所寻求的类型，因此我们可以找到 t_α，它除了满足结构要求外，还满足 (7.4)。这完成了阶段 α。

为什么这一构造会成功？我们令 T 为由我们的序列 $\langle t_\alpha : \alpha<\kappa^+\rangle$ 确定的 κ^+-树，使得 T 的层 α 由 t_α 的所有合法修改组成。我们的任务是证明 T 的任何无界子树都包含一个冻结锥，因此反设 $S \subseteq T$ 是一个反例，并令 $X \subseteq \kappa^+$ 为 S 编码。

存在一个由 E 序数 $\delta<\kappa^+$ 构成的闭无界集，满足以下两个陈述：

• 若 s 属于 $S_{<\delta}$ 且 $n<\omega$，则 s 在 $T_{<\delta}$ 中有一个不属于 S 的 n-扩张；• 若 $\delta \in E$，则 $S_{<\delta}$ 由 $X \cap \delta$ 编码。

注意，最后这一点正是我们使用在（7.1）背景下讨论的编码机制性质之处。

如果 χ 是某个足够大的正则基数，我们就可以找到 $H(\chi)$ 的一个初等子模型 M，其基数为 κ，且包含 S、T 和 E，满足：

• $M \cap \kappa^+ = \delta < \kappa^+$,

- $C_\delta \subseteq E$、
- $X_\delta = X \cap \delta$ 和 • f_δ

将 C_δ 映射到 δ 上。

之所以能够实现这一点，是因为我们的 $\square^{+\epsilon}_\kappa$-序列具有相应的性质：注意到定义意味着存在一个由满足上述后三项要求的 δ 组成的平稳集，因此我们可以找到满足第一项要求的 δ。

由于 S 包含来自 T的 δ 层中的一个元素，因此 t_δ 在 S中至少有一种合法的修改。由于 δ 是一个极限序数，我们可以假设相关的修饰子 m 满足$\mathsf{ht}(m) < \delta$，因此修饰子 m 将位于模型 M中，从而会在我们的 $\mathbb{S}_\kappa$枚举中出现在阶段 δ 之前。

由于函数 f_δ 将 C_δ 映射到 δ 上，修饰子 m 保证存在某个最小的 $\zeta \in C_\delta$，使得

$$t_\delta + m_{f_\delta(\zeta)} \restriction \delta \text{ is a cofinal branch through } S_{<\delta}. \tag{7.5}$$

现在将注意力转向我们的构造如何经过由$\mathsf{acc}(C_\delta)$索引的阶段。现在假设 α 属于 $\mathsf{acc}(C_\delta)$。根据我们的$\square^{+\epsilon}_\kappa$-序列的一致性，我们知道

$$X_\alpha = X_\delta \cap \alpha = X \cap \alpha$$

并且由于 α 也在 E 中，我们得出 X_α 编码了 $S_{<\alpha}$。我们还知道 $S_{<\alpha}$ 不包含 $T_{<\alpha}$ 的冻结锥，因为根据我们对 E 的选择，这一事实会反映到 α 上。因此，任意 $\alpha \in \mathsf{acc}(C_\delta)$ 都将满足成为我们构造的活动阶段所需的前两项要求。

现在我们证明，$\mathsf{nacc}(\mathsf{acc}(C_\delta))$ 中所有足够大的元素都将是我们构造的活动阶段。更具体地说，如果 $\alpha \in \mathsf{acc}(C_\delta)$ 且

$$\zeta < \gamma := \sup(\mathrm{acc}(C_\delta) \cap \alpha) < \alpha,$$

那么 α 将满足成为我们构造的活动阶段的第三项要求。为此，注意到由于我们使用的是一个$\square^{+\epsilon}_\kappa$-序列，因此有

$$\zeta \in C_\gamma = C_\delta \cap \gamma, \tag{7.6}$$

and

$$f_\gamma(\zeta) = f_\delta(\zeta). \tag{7.7}$$

由于 $t_\delta + m_{f_\delta(\zeta)} \restriction \delta$ 是穿过 $S_{<\delta}$ 的共尾分支，我们知道

$$t_\gamma + m_{f_\gamma(\zeta)} \restriction \gamma \text{ is a cofinal branch through } S_{<\gamma},$$

因此，α 必定是构造的一个活动阶段。

换言之，我们已经证明，所有足够大的 $\alpha \in \mathsf{nacc}(\mathsf{acc}(C_\delta))$ 都是活动阶段。这足以导出矛盾：由于 $\mathsf{otp}(C_\delta) = \kappa$，我们知道

$$\mathrm{otp}(\mathrm{nacc}(\mathrm{acc}(C_\delta))\backslash(\gamma+1)) = \kappa,$$

并且，我们的构造保证，一旦某个序数在这样的阶段 α 被选为目标，那么在 $\mathsf{acc}(C_\delta)$ 中的任何后续阶段都不会再以它为目标。因此，我们最终必将到达一个活动阶段 $\alpha \in C_\delta$，届时将对 ζ 采取行动，但此时对 t_α 的选择与 (7.5) 矛盾。由此可知，S 必须包含一个冻结锥，定理得证。□

8. Concluding remarks

我们认为，本文的方法很可能可以加以改造，从而证明：在 L 中，只要 κ 是一个不可数的正则基数且不是弱紧基数，就存在一条 κ-Aronszajn 线，它在非 σ-散列这一性质下是极小的。大概只要 κ 是不可数正则基数且不是弱紧基数，L 就满足某个适当的原理 $\square(\kappa)$；而该原理又意味着存在一棵 κ-Aronszajn 树 $T \subseteq \omega^{<\kappa}$，具有以下性质：

- T 是 ϱ_2-相干且完备的；• T 的每个基数为 κ 的子集都包含一个基数为 κ的反链；• T 的每棵子树都包含一个冻结锥。

本文所提出的论证表明，T中任一基数为 κ 的反链上的字典序，在不属于 σ-散布序这一意义下是极小的。

Galvin 曾问，是否存在一个极小的非-σ-散布线性序，并且具有如下额外性质：每个不可数子序都包含一个 ω_1 的副本——这等价于在不是良序的可数并这一意义下为极小（见 [6, 问题 4]）。正如引言中所述，Ishiu 和第三作者已证明，根据 Proper 强迫公理$^+$ [14] 可得否定答案；Lamei Ramandi 则证明，肯定答案是一致的 [20]。是否存在基数大于$\aleph_1$ 、在不是良序的可数并这一意义下为极小的线性序一致模型，仍是一个悬而未决的问题。这类序必然不是 κ-Aronszajn，因此本文的方法似乎无法为这一问题提供多少启示。Todorcevic 已证明，$\square_{\aleph_\omega}$意味着存在一个基数为 $\aleph_{\omega+1}$ 、稠密度为 $\aleph_\omega$ 的线性序，使得每个基数为 $\aleph_\omega$ 的子序都是良序的可数并 [38, 7.6]。然而请注意，Dushnik 和 Miller 的构造 [8] 可推广为：若 $2^\kappa = \kappa^+$，则不存在基数为 κ^+ 、稠密度为 κ的极小线性序。因此，至少在某些一致模型中，Todorcevic 的例子 [38, 7.6] 并未解决 Galvin 的问题；我们需要一个 Baumgartner 模型 [4] 在 $\aleph_{\omega+1}$这一层次上的类似版本，而这似乎超出了当前方法的能力。

一个基数为 $\lambda > \aleph_1$ 的最小非-σ-散乱序是一个“不反射”对象，因为它具有其任何真子序都不具备的性质。大基数假设排除了这种现象。例如，如果 λ 是弱紧致的，那么任何基数为 λ 的非-σ-散乱序都有一个基数更小的非-σ-散乱子序。类似地，如果 κ 是超紧致的，那么任何非-σ-散乱线性序都有一个基数小于 κ的非-σ-散乱子序。这些陈述的证明只是对 [6, §7] 中论证的常规修改。

References

[1] U. Abraham。正规力迫。载于 *Handbook of set theory. Vols. 1*，第2、3卷，第333–394页。Springer, Dordrecht，2010年。[2] U. Abraham，S. Shelah。阿朗佐恩树的同构类型。 *Israel J. Math.*，50(1-2)：75–113，1985年。[3] U. Abraham，S. Shelah，R. M. Solovay。带菱形的方阵与带特殊方阵的苏斯林树。 *Fund. Math.*，127(2)：133–162，1987年。[4] J. E. Baumgartner。所有

$\aleph_1$ 79 2 101 106, -稠密的

1973

实数集都可以同构。 *Fund. Math.*，（）：–。

[5] . 实数及其他不可数序型。载于 *Ordered sets (Banff, Alta., 1981)* 83 *NATO Adv. Study Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci.* 239 277 ，第 卷，第 – 页。Reidel，Dordrecht-Boston, Mass.，1982。[6] . 一类新的序型。 *Ann. Math. Logic*，9(3):187–222，1976。[7] . 适当强迫公理的应用。载于 *Handbook of set-theoretic topology*，第 913–959 页。North-Holland出版社，阿姆斯特丹，1984。[8] B. Dushnik, E. W. Miller. 关于线性有序集的相似变换。*Bull. Amer. Math. Soc.*，46:322–326，1940。[9] M. Gitik. 来自 $o(\kappa) = \kappa^{++}$ *Ann. Pure* 的 *Appl. Logic* 43 3 209 234, 1989 奇异基数假设的否定。，( ): – 。[10] . 奇异基数假设的强度。 *Ann. Pure Appl. Logic*，51(3):215–240，1991。[11] C. W. Gray. *Iterated forcing from the strategic point of view*。ProQuest LLC, Ann Arbor, MI，1980。博士论文——加州大学伯克利分校。[12] A. Hajnal, Z. Nagy, L. Soukup. 关于没有大团和独立子集的图中某些子图的数量。载于 *A tribute to Paul Erdős*，第 223–248 页。剑桥大学出版社，剑桥，1990。[13] F. Hausdorff. 有序集理论基础。 *Math. Ann.*，( ): – 。[14] T. Ishiu, T. Tatch Moore. 非- σ 205 1 29 44, -散 2009 序的极小性。 *Fund. Math.*，( ): – 。[15] T. Jech. *Set theory*。数学专著丛书。Springer-Verlag，柏林，2003。第三个千年版，修订扩充版。[16] R. Jensen, J. Steel. K 且没有可测基数。 *J. Symbolic Logic*，70(3):708–734，2013。[17] K. Kunen. *Set theory*， *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*第 102 卷。North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹-纽约，1980。独立性证明导论。[18] G. Kurepa. 有序与分支集合。 *Publ. Inst. Math. (Beograd)*，4(4):1–138，1935。[19] Chris Lambie-Hanson 和 Assaf Rinot. 关于着色与色数的反射。*Combinatorica*，39(1):165–214，2019。[20] H. Lamei Ramandi. Galvin 关于非-σ-良序线性序的疑问。 *Adv. Math.*，398:论文编号 108231，18，2022。[21] . 一个新的极小非-σ-散序线性序。 *J. Symb. Log.*，84(4):1576–1589，2019。[22] . 关于 Souslin 树及其泛型分支的刚性，2020。[23] H. Lamei Ramandi, J. Tatch Moore. 可能不存在极小非-σ-散序线性序。*Math. Res. Lett.*，25(6):1957–1975，2018。[24] R. Laver. 关于 Fra¨ıss´e 序型猜想。 *Ann. of Math. (2)*，93:89–111，1971。[25] C. Martinez-Ranero. Aronszajn 线的良拟序。 *Fund. Math.*，213(3):197–211，2011。[26] W. Mitchell. Aronszajn 树与传递性质的独立性。 *Ann. Math.* , : – *Logic* 5 21 46, 1972 73 / 。[27] J. Tatch Moore. 不可数线性序的五元素基。 *Ann. of Math. (2)*，163 2 669( ): –688，2006。[28] . ω_1 和 $-\omega_1$ 可能是仅有的极小不可数线性序。 *Michigan Math. J.*，55 2 437 457，2007 ( ): – 。[29] . 适当强迫公理。载于 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II* 3 29 2010 ，第 – 页。Hindustan Book Agency，新德里，。[30] A. Rinot. 将菱形置于方阵之中。 *Bull. Long. Math. Soc.*，47(3): 436-442，2015。[31] A. Rinot, R. Schindler. 内置 diamond-plus 的方阵。 *J. Symb. Log.*，82 833，2017 3 809( ): – 。[32] J. G. Rosenstein. *Linear orderings*， *Pure and Applied Mathematics*第 98 卷。Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], 纽约-伦敦，1982。[33] E. Schimmerling, M. Zeman. 内模型中 $\square_\kappa$ 4 1 1 72, 的 2004 刻画。 *J. Math. Log.*，( ): – 。[34] S. Shelah. 将不可数方阵分解为可数多个链。 *J. Combinatorial* , ( ): *Theory Ser. A* 21 1 110 114, 1976 – 。[35] D. T. Soukup. 一个存在 Suslin 树、但除 ω_1 和 $-\omega_1$ 外不存在极小不可数线性序的模型。 *Israel J. Math.*，233(1):199–224，2019。[36] . 不可数强满射线性序。 *Order*，36(1):43–64，2019。

[37] M. Souslin。问题 3。 *Fund. Math.*，1(1):223，1920。[38] S. Todorcevic。 *Walks on ordinals and their characteristics* 263 *Progress in Math-* ，卷。巴 *ematics* ¨ 2007
塞尔：Birkhauser Verlag，。[39] .
_____ *Notes on forcing axioms* 26 *Lecture Notes Series. Institute for Mathemat-* ，卷。新 *ical Sciences. National University of Singapore*
泽西州哈肯萨克：世界科学出版公司，2014。由 Chitat Chong、Qi Feng、Yue Yang、Theodore A. Slaman 和 W. Hugh Woodin 编辑并撰写前言。[40] 。树与线性序集。载于 *Handbook of set-theoretic topology*，第 235–293 页。阿姆斯特丹：North-Holland出版社，1984 年。[41] 。~~可数序~~数对的划分。 *Acta Math.*，159(3-4):261–294，1987。

Todd Eisworth, Department of Mathematics, Ohio University, Athens, OH 45701 – 2979

James Cummings, Mathematical Sciences Department, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA 15213-3890

Justin Tatch Moore, Department of Mathematics, 310 Malott Hall, Cornell University, Ithaca, NY 14853–4201