arXiv:2304.03395v1 [math.CO] 6 Apr 2023

高斯不等式

TEWODROS AMDEBERHAN 和 David Callan

Abstract. 我们证明Bergeron不等式的一些特殊情形，其中涉及两个高斯多项式（或 q-二项式）。

1. Introduction

我们首先回顾阶乘的 q-模拟式 $[n]!_q = \prod_{j=1}^{n} \frac{1-q^j}{1-q}$ 以及二项式系数的 q-模拟式 $\binom{n}{k}_q = \frac{[n]!_q}{[k]!_q[n-k]!_q}$。约定 $[0]!_q = 1$。众所周知，这些有理函数$\binom{n}{k}_q$ 是 q中的多项式，也称为高斯多项式，具有非负系数，且这些系数还具有单峰性和对称性。此外，这些对象有多种组合解释，我们陈述其中两种。

一个长度为 n、字母表为 $\{0,1\}$ 的单词是一个有限序列 $w = a_1 \cdots a_n$。构造

$$\mathcal{W}_{n,k} = \{w = a_1 \cdots a_n : w \text{ has } k \text{ zeros and } n-k \text{ ones}\}$$

以及 w 的反演集记为 $\mathsf{Inv}(w) = \{(i,j) : i < j \text{ 和 } a_i > a_j\}$。相应的 w 的反演数记为 $\mathsf{inv}(w) = \#\mathsf{Inv}(w)$。那么，我们有

$$\binom{n}{k}_q = \sum_{w \in \mathcal{W}_{n,k}} q^{\mathrm{inv}(w)}.$$

然而，另一种表述后来也受到许多组合学家的青睐。

$$\binom{a+d}{a}_q = \sum_T q^{area(T)}$$

其中 T是 $a \times d$ 盒子内的一条格路， $area(T)$是曲线 T上方的面积 .

给定两个多项式 $f(q)$ 和 $g(q)$，如果 $f(q) - g(q)$按 q 的幂展开后具有非负系数，我们记 $f(q) \geq g(q)$。

著名的福尔克斯猜想（例如 [4]）由韦森尼斯 [8]推广。她猜想道

$$(h_b \circ h_c) - (h_a \circ h_d) \tag{1}$$

日期：2023年4月10日。2010年数学主题分类：11B65，11A07。

只要满足 $a \le b < c \le d$，且 $n = ad = bc$，它就是Schur正的（在对称多项式的 Schur 基 $\{s_\mu\}_{\mu\vdash n}$ 中展开时具有正整数系数），并将$(h_n \circ h_k)$记作完全齐次对称函数的 plethysm。一个众所周知的事实是，$(h_n \circ h_k)(1,q) = \binom{n+k}{k}_q$。此外，Schur 函数在1 和 q处的任何非零取值都具有 $q^i + q^{i+1} + \cdots + q^j$ 的形式，其中某个 $i < j$。利用这些事实，在 [3], 之际并假设 (1) 成立，F.Bergeron（另见 [4]）指出，在 1 和 q处对 (1) 中差值的取值将意味着如下结论：

猜想1.假设 $0 < a \le b < c \le d$ 为正整数且满足 $ad = bc$。那么，以下两个高斯多项式之差是对称的并满足

$$\binom{b+c}{b}_q - \binom{a+d}{a}_q \ge 0. \tag{2}$$

在 $GL(V)$ 的表示论背景下，可以为 Vessenes 猜想赋予直接的组合意义。事实上，如果该猜想成立，就意味着对称幂的复合 $S^a(S^d(V))$ 可以嵌入 $S^b(S^c(V))$ 中，作为 $GL(V)$-模。然而，或许更自然的表述是，存在一个反向的满射 $GL(V)$-模态射（这两种表述也是等价的）。因此，每个 $GL(V)$-不可约表示在 $S^a(S^d(V))$ 中出现的重数都小于其在 $S^b(S^c(V))$ 中的重数，而该猜想在相应特征的层面反映了这一点（其中 Schur 多项式作为不可约表示的特征出现）。

唯一一次尝试 [9]解决猜想 1 是由 F. Zanello 作出的，他研究了特殊情形 $a \le 3$，包括对称性和单峰性。若一个数列在严格递减后不再严格递增，则称其为单峰数列。文献 [9] 中的作者提出了对猜想 1 的加强版，具体如下：

猜想 2. 保留猜想 1 中的假设。则对称多项式

$$\binom{b+c}{b}_q - \binom{a+d}{a}_q$$

的系数非负且呈单峰性。

注意，对称性显然成立，因为 $\binom{b+c}{b}_q$ 和 $\binom{a+d}{a}_q$ 都是次数相同的对称多项式，$ad = bc$。我们开展这个项目的初衷，是证明猜想 1 的以下三参数特殊情形，我们将其称为 β-猜想。具体而言，

猜想 3. 对整数 $0 < a < b$ 和 $\beta \ge 1$，有

$$\binom{b+\beta a}{b}_q \ge \binom{a+\beta b}{a}_q. \tag{3}$$

$\beta = 1$ 是平凡的。然而，我们在这项工作中的探索未能完整涵盖β-猜想。下文中，我们将详细介绍我们成功解决特例 $\beta = 2$的过程。让我们先陈述一个有用的恒等式。

定理 1。（q-类比范德蒙-丘公式）。以下结论成立。

$$\sum_{j\geq 0}\binom{X}{Z-j}_q\binom{Y}{j}_q q^{j(X-Z+j)}=\binom{X+Y}{Z}_q. \tag{4}$$

注 2. 鉴于 (4)，猜想 1 等价于

$$\binom{b+c}{b}_q=\sum_{k=0}^{\boldsymbol{b}}\binom{b}{k}_q\binom{c}{k}_q q^{k^2}\geq\sum_{k=0}^{\boldsymbol{a}}\binom{a}{k}_q\binom{d}{k}_q q^{k^2}=\binom{a+d}{a}_q.$$

2. THE CASE $\beta=2$ AND $q=1$

在本节中，我们希望说明普通二项式系数（$q=1$）的 β 猜想的解决过程，同时 $\beta=2$，这阐述了一个自然的发展。

对于 $a<b<c<d$，其中 $ad=bc$，且在特殊情形 $c=2a$、$d=2b$（即 $b=a+i$、$i\geq 1$）下，最好能找到一个双射证明，用以证明

$$\binom{3a+i}{a+i}\geq\binom{3a+2i}{a}.$$

如果能构造一个从计数较小的集合到计数较大的集合的单射就好了，不过更好的证明是将差表示为显然为正的若干项之和。对于 $i=1$，我们有

$$\binom{3a+1}{a+1}-\binom{3a+2}{a}=\binom{3a+1}{a-1},$$

且右侧显然为正。对于一般的 $i=1$，2，.....，似乎

$$\binom{3a+i}{a+i}-\binom{3a+2i}{a}=\sum_{k=1}^{i}c_k(i)\binom{3a+i}{a-k}$$

对于整数 $c_k(i)$，此外，$c_k(i)$全部为正。以下是当 $1\leq k\leq i\leq 8$ 时 $c_k(i)$ 的表格：

1							
3	1						
6	6	1					
10	19	9	1				
15	45	39	12	1			
21	90	120	66	15	1		
28	161	301	250	100	18	1	
36	266	658	755	450	141	21	1

但似乎很难理解它们。我们下一步进展的演变始于发现了

$$c_k(i)=\binom{i+k-1}{2k}+2\binom{i+k-1}{2k-1}-\binom{i}{k}.$$

将这些系数记作 $c_k(i)=\frac{i+3k}{i+k}\binom{i+k}{2k}-\binom{i}{k}$，其中 $i,k\geq 1$。注意到 $c_0(i)=0$。我们需要一些预备结果。

引理 1. 我们有

$$\binom{3a+2i}{a}=\sum_{k\geq 0}\binom{i}{k}\binom{3a+i}{a-k}.$$

证明。这由范德蒙德-丘恒等式（$q=1$ 的定理 1）得出。

$$\binom{X+Y}{Z}=\sum_{k\geq 0}\binom{X}{k}\binom{Y}{Z-k}$$

应用于 $\binom{3a+2i}{a}=\binom{i+3a+i}{a}$，其中 $X=i$、$Y=3a+i$ 和 $Z=a$。 □

引理 2. 我们有

$$\binom{3a+i}{a+i}=\sum_{k\geq 0}\frac{i+3k}{i+k}\binom{i+k}{2k}\binom{3a+i}{a-k}=\sum_{k\geq 0}\left[\binom{i+k}{2k}+\binom{i+k-1}{2k-1}\right]\binom{3a+i}{a-k}.$$

证明。我们实现 Zeilberger 算法（源自 Wilf-Zeilberger 理论）。定义

$$F(i,k)=\frac{i+3k}{i+k}\cdot\frac{\binom{i+k}{2k}\binom{3a+i}{a-k}}{\binom{3a+i}{a+i}}\qquad\text{and}\qquad G(i,k)=-\frac{\binom{i+k-1}{2k-2}\binom{3a+i}{a-k}}{\binom{3a+i}{a+i}}.$$

验证 $F(i+1,k)-F(i,k)=G(i,k+1)-G(i,k)$，并对 k 的所有整数值将等式两边求和。然后注意到右侧消失，因此我们得到一个关于变量 i 为常数的和$\sum_k F(i,k)$。通过代入（例如 $i=1$）来确定这个常数，

$$\sum_{k=0}^{1}F(1,k)=\frac{\binom{3a+1}{a}}{\binom{3a+1}{a+1}}+\frac{2\binom{3a+1}{a-1}}{\binom{3a+1}{a+1}}=\frac{a+1}{2a+1}+\frac{a}{2a+1}=1.$$

因此，对所有 $i\geq 1$，$\sum_k F(i,k)=1$ 恒成立。证明如下。 □

现在陈述本节的主要结果。

定理 3。我们有

$$\binom{3a+i}{a+i}-\binom{3a+2i}{a}=\sum_{k\geq 1}\left\{\frac{i+3k}{i+k}\binom{i+k}{2k}-\binom{i}{k}\right\}\binom{3a+i}{a-k}.$$

证明。由引理 1 和引理 2 立即得出。 □

引理 3. 对于 $k\geq 1$，系数 $c_k(i)$ 非负。

证明。我们可以从两个不同的角度来看待它：(1) $c_k(i)$ $=\frac{2k}{i+k}\binom{i+k}{2k}+\binom{i+k}{2k}-\binom{i}{k}=\frac{2k}{i+k}\binom{i+k}{2k}+\binom{i+k}{i-k}-\binom{i}{i-k}$。显然，$\binom{i+k}{i-k}\geq\binom{i}{i-k}$，因此 $c_k(i)$ ≥ 0。(2) $c_k(i)=\binom{i+k}{2k}+\binom{i+k-1}{2k-1}-\binom{i}{k}=\binom{i+k}{2k}+\sum_{r=0}^{k-2}\binom{i+r}{k+1+r}$ 清楚地表明，$c_k(i)$ ≥ 0。恒等式 $\binom{i+k-1}{2k-1}=\binom{i}{k}+\sum_{r=1}^{k-1}\binom{i+r-1}{k+r}$ 源于熟悉的二项式递推式 $\binom{u}{v}+\binom{u}{v-1}=\binom{u+1}{v}$所产生的级联效应。□

3. q-ANALOGUES WHEN $\beta = 2$

在本节中，我们旨在将论证从普通二项式提升到高斯多项式，从而推广上一节给出的证明。

引理 4. 我们有

$$\binom{3a+2i}{a}_q = \sum_{k\geq 0} q^{(a-k)(i-k)} \binom{i}{k}_q \binom{3a+i}{a-k}_q.$$

证明。这由范德蒙德-丘恒等式（定理 1）得出。

$$\binom{X+Y}{Z}_q = \sum_{k\geq 0} q^{(Z-k)(X-k)} \binom{X}{k}_q \binom{Y}{Z-k}_q$$

在 $\binom{3a+2i}{a}_q = \binom{i+3a+i}{a}_q$ 上，具有 $X = i$、$Y = 3a + i$ 和 $Z = a$。 □

引理 5. 我们有

$$\binom{3a+i}{a+i}_q = \sum_{k\geq 0} q^{(a-k)(i-k)} \left[\binom{i+k}{2k}_q + q^{a+i} \binom{i+k-1}{2k-1}_q \right] \binom{3a+i}{a-k}_q.$$

证明。我们重写 $\binom{i+k}{2k}_q + q^{a+i}\binom{i+k-1}{2k-1}_q = \left[1 + \frac{q^{a+i}\left(1-q^{2k}\right)}{1-q^{i+k}}\right] \binom{i+k}{2k}_q$ 并定义函数

$$F(i,k) = q^{(a-k)(i-k)} \left[1 + q^{a+i} \cdot \frac{1-q^{2k}}{1-q^{i+k}}\right] \frac{\binom{i+k}{2k}_q \binom{3a+i}{a-k}_q}{\binom{3a+i}{a+i}_q}, \qquad \text{and}$$

$$G(i,k) = -q^{(a-k+1)(i-k+1)} \cdot \frac{\binom{i+k-1}{2k-2}_q \binom{3a+i}{a-k}_q}{\binom{3a+i}{a+i}_q}.$$

将目标恒等式两边除以 $\binom{3a+i}{a+i}_q$。我们的目标是通过采用 Wilf-Zeilberger 技巧证明 $\sum_k F(i,k) = 1$通过。为此，计算以下两个比值

$$A(i,k) := \frac{F(i+1,k)}{F(i,k)} - 1 \qquad \text{and} \qquad B(i,k) := \frac{G(i,k+1)}{F(i,k)} - \frac{G(i,k)}{F(i,k)}$$

从而导致

$$A(i,k) = \frac{q^{a-k}(1-q^{i+k})(1-q^{a+i+1})(1-q^{i+k+1}+q^{a+i+1}-q^{a+i+2k+1})}{(1-q^{i-k+1})(1-q^{2a+i+k+1})(1-q^{i+k}+q^{a+i}-q^{a+i+2k})} - 1 \qquad \text{and}$$

$$B(i,k) = \left[-\frac{1-q^{a-k}}{1-q^{2a+i+k+1}} + \frac{q^{a+i-2k+1}(1-q^{2k})(1-q^{2k-1})}{(1-q^{i+k})(1-q^{i-k+1})}\right] \cdot \frac{1-q^{i+k}}{1-q^{i+k}+q^{a+i}-q^{a+i+2k}}.$$

常规验证 $A(i,k) = B(i,k)$。因此 $F(i+1,k) - F(i,k) = G(i,k+1) - G(i,k)$。现在，对所有整数值 k 将等式两边求和。接着注意到，右边为零

因此，我们得到一个关于变量 i 为常数的和 $\sum_k F(i,k)$。例如，代入 $i=1$ 来确定这个常数，然后经过一些化简，得到

$$\sum_{k=0}^{1} F(1,k) = q^a \cdot \frac{1-q^{a+1}}{1-q^{2a+1}} + \frac{1-q^a}{1-q^{2a+1}} = 1.$$

因此，对于所有 $i \geq 1$，恒等地有 $\sum_k F(i,k) = 1$。断言得证。 □

引理 6. 我们有恒等式

$$\binom{i+k}{2k}_q = \binom{i}{k}_q + \sum_{r=1}^{k} q^{k+r} \binom{i+r-1}{k+r}_q.$$

证明。使用递推关系 $\binom{a}{b}_q = \binom{a-1}{b}_q + q^{a-b}\binom{a-1}{b-1}_q = q^b\binom{a-1}{b}_q + \binom{a-1}{b-1}_q$。 □

引理 7. 我们有不等式 $\binom{i+k}{i-k}_q \geq \binom{i}{i-k}_q$。

证明。我们使用高斯多项式作为长度为 n、含有 k 个零和 $n-k$ 个一的所有比特串的逆序数生成函数的解释，即

$$\binom{n}{k}_q = \sum_{w \in 0^k 1^{n-k}} q^{\mathrm{inv}(w)}.$$

令 $w' \in 0^{i-k}1^k \sqcup 1^k$ 表示一个最低 k 位全为 1 的比特串。在此意义下，我们得到

$$\begin{aligned}
\binom{i+k}{i-k}_q = \sum_{w \in 0^{i-k}1^{2k}} q^{\mathrm{inv}(w)} &= \sum_{w' \in 0^{i-k}1^k \sqcup 1^k} q^{\mathrm{inv}(w')} + \sum_{w' \notin 0^{i-k}1^k \sqcup 1^k} q^{\mathrm{inv}(w')} \\
&= \sum_{w \in 0^{i-k}1^k} q^{\mathrm{inv}(w)} + \sum_{w' \notin 0^{i-k}1^k \sqcup 1^k} q^{\mathrm{inv}(w')} \\
&= \binom{i}{i-k}_q + \sum_{w' \notin 0^{i-k}1^k \sqcup 1^k} q^{\mathrm{inv}(w')}
\end{aligned}$$

其中我们注意到，如果单词 $w' \in 0^{i-k}1^k \sqcup 1^k$ 与通过去掉最后 k 个而找到的$w \in 0^{i-k}1^k$ 相关联，则 $\mathrm{inv}(w') = \mathrm{inv}(w)$。该断言现在显然成立。 □

我们证明本节及本文的主要结果，即关于 $\beta = 2$ 的 β 猜想。
定理 4. 多项式 $P(q) := \binom{3a+i}{a+i}_q - \binom{3a+2i}{a}_q$ 具有非负系数。

证明。根据引理 4 和引理 5，我们推断

$$P(q) = \sum_{k \geq 1} q^{(a-k)(i-k)} \left[\binom{i+k}{2k}_q + q^{a+i} \binom{i+k-1}{2k-1} - \binom{i}{k}_q \right] \binom{3a+i}{a-k}_q.$$

只需验证右侧内层括号中的各项为正。我们可以将这些项配对，并补足下标，使得

$$\binom{i+k}{2k}_q - \binom{i}{k}_q + q^{a+i}\binom{i+k-1}{2k-1}_q = \binom{i+k}{i-k}_q - \binom{i}{i-k}_q + q^{a+i}\binom{i+k-1}{2k-1}_q.$$

要得出结论，只需应用引理 6 或引理 7。 □

4. Final remarks

在本节中，我们以一个猜想作为结尾；它是我们在探寻证明 β-猜想的方法时，针对某些计算所作的附带推测。

猜想 4. 对于每个 $0 \le k \le a < b$，我们有

$$\binom{a}{k}_q\binom{a+b}{b-k}_q \ge \binom{b}{k}_q\binom{a+b}{a-k}_q \qquad or \qquad \binom{a}{k}_q\binom{b}{k}_q\binom{b+a}{b}_q\left[\frac{1}{\binom{a+k}{k}_q} - \frac{1}{\binom{b+k}{k}_q}\right] \ge 0.$$

如果决定着手研究这一猜想，下面这个初等结果可能会有所帮助。

引理 8. 对于 $0 \le k \le a < b$，我们有

$$\frac{1}{\binom{a+k}{k}_q} - \frac{1}{\binom{b+k}{k}_q} = \sum_{i=1}^{k} q^{a+i}\frac{1-q^{b-a}}{1-q^{b+i}}\prod_{j=i}^{k}\frac{1-q^j}{1-q^{a+j}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{1-q^j}{1-q^{b+j}}.$$

证明。这是由部分分式展开得出的。 □

例 1。

$$\frac{1}{\binom{a+1}{1}_q} - \frac{1}{\binom{b+1}{1}_q} = \frac{q^{a+1}(1-q)(1-q^{b-a})}{(1-q^{a+1})(1-q^{b+1})}$$

$$\frac{1}{\binom{a+2}{2}_q} - \frac{1}{\binom{b+2}{2}_q} = \frac{q^{a+1}(1-q)(1-q^2)(1-q^{b-a})}{(1-q^{a+1})(1-q^{a+2})(1-q^{b+1})} + \frac{q^{a+2}(1-q)(1-q^2)(1-q^{b-a})}{(1-q^{a+2})(1-q^{b+1})(1-q^{b+2})}.$$

示例 2。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\binom{a+3}{3}_q} - \frac{1}{\binom{b+3}{3}_q} &= \frac{q^{a+1}(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^{b-a})}{(1-q^{a+1})(1-q^{a+2})(1-q^{a+3})(1-q^{b+1})}\\ &+ \frac{q^{a+2}(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^{b-a})}{(1-q^{a+2})(1-q^{a+3})(1-q^{b+1})(1-q^{b+2})}\\ &+ \frac{q^{a+3}(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^{b-a})}{(1-q^{a+3})(1-q^{b+1})(1-q^{b+2})(1-q^{b+3})}.\end{aligned}$$

注5. 顺带一提，我们回顾一下，G. E. Andrews [2] 将 $\binom{n}{k}_q - \binom{n}{k-1}_q$ 表示为具有特定 Frobenius 符号的分拆的生成函数，而 L. M. Butler[5] 借助 Kostka-Foulkes 多项式证明了系数的非负性。我们将提供一种替代性的代数方法。

引理 9. 对于 $0 \le 2k \le n$，我们有 $\binom{n}{k}_q - \binom{n}{k-1}_q \ge 0$。

证明。令 $n = \alpha k + d$，其中 $0 \le d < k$。改写

$$\binom{n}{k}_q - \binom{n}{k-1}_q = q^k \binom{n}{k-1}_q \frac{1-q^{(\alpha-2)k}}{1-q^k} + q^{(\alpha-1)k} \binom{n}{k-1}_q \frac{1-q^{d+1}}{1-q^k}.$$

注意，$\frac{1-q^{(\alpha-2)k}}{1-q^k}$ 已经是一个非负系数多项式。此外，由于 $U(q) := \binom{n}{k-1}_q$ 是单峰的，[1], [6], [7], $U(q) \cdot (1-q^{d+1})$ 中 q^j 的系数只要满足 $2j \le \deg(U)$ 就是非负的。对于形式幂级数 $U(q)\frac{1-q^{d+1}}{1-q^k}$，结论同样成立。由于多项式 $U(q)\frac{1-q^{d+1}}{1-q^k}$ 是对称的，且次数不超过 $U(q)$，$U(q)\frac{1-q^{d+1}}{1-q^k}$ 的其余所有系数也都是非负的。□

Acknowledgement

第一作者感谢 R. P. Stanley 让他注意到 Bergeron 的猜想，也感谢 F. Bergeron 慷慨地解释了本文所研究的问题。

References

[1] G. E. Andrews，关于倒数多项式及其在排列与组合中的应用的一条定理，Amer. Math. Monthly 82，第 8 期（1975）。[2] G. E. Andrews，关于连续高斯多项式之差，J. Statist. Plann. Inference 34，第 1 期（1993）。[3] F. Bergeron，q-Foulkes 猜想，2016 年 9 月 24 日于缅因州鲍登学院所作报告。[4] F. Bergeron，Foulkes 猜想的一个 q-类比，Electron. J. Combin. 24，第 1 期（2017）。[5] L. M. Butler，有限阿贝尔群子群计数中的一个单峰性结果，Proc. Amer. Math. Soc. 101，第 4 期（1987）。[6] J. W. B. Hughes、J. Van der Jeugt，与李代数及超代数相关的单峰多项式，J. Computational and Applied Math. 37（1991）。[7] K. B. Stolarsky，高阶分拆函数及其与有限生成幂零群的关系，博士论文，威斯康星大学（1968）。[8] R. Vessenes，广义 Foulkes 猜想与杨表，J. Algebra 277（2004）。[9] F. Zanello，关于 Bergeron 的 q-二项式系数正性问题，Electron. J. Combin. 25，第 2 期（2018）。

Department of Mathematics, Tulane University, New Orleans, LA 70118, USA电子邮箱地址: tamdeber@tulane.edu

Department of Statistics, University of Wisconsin-Madison, Madison, WI 53715, USA电子邮箱地址: callan@stat.wisc.edu