arXiv:2304.03415v1 [math.NT] 6 Apr 2023

临界线附近L-函数分布的差异界

YOONBOK LEE

Abstract. 我们研究 L-函数在直线 $\sigma = \frac{1}{2} + G^{-1}(T)$ 和 $t \in [T, 2T]$上的联合分布，其中~~log~~ log $T \le G(T) \le \log T(\log\log T)^2$。我们得到了~~$L$-函数~~的联合分布与其随机模型的分布之间差异的一个上界。作为应用，我们证明了 L-函数在$\sigma = \frac{1}{2} + G^{-1}(T)$ 和 $t \in [T, 2T]$上的塞尔伯格中心极限定理的一个多维版本的渐近展开，其中 $(\log T)^{\epsilon} \le G(T) \le \log T(\log\log T)^{2+\epsilon}$ 对于 $\epsilon > 0$成立。

1. 引言

我们利用由随机欧拉乘积定义的概率模型，研究黎曼ζ函数 $\zeta(s)$在 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ 时的分布

$$\zeta(\sigma, \mathbb{X}) = \prod_p \left(1 - \frac{\mathbb{X}(p)}{p^{\sigma}}\right)^{-1},$$

其中，素数 p 对应的 $\mathbb{X}(p)$ 是取值于 $\mathbb{C}$ 单位圆上的均匀、相互独立且同分布的随机变量。根据柯尔莫哥洛夫三列级数定理，该乘积对 $\sigma > \frac{1}{2}$ 几乎必然收敛。我们主要关注的问题是，当 $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ 时， $\zeta(\sigma, \mathbb{X})$ 的分布对黎曼ζ函数的分布逼近得有多好。

考虑两个测度

$$\Phi_{\zeta,T}(\sigma, \mathcal{B}) := \frac{1}{T}\mathrm{meas}\{t \in [T, 2T] : \log\zeta(\sigma + it) \in \mathcal{B}\}$$

and

$$\Phi_{\zeta}^{\mathrm{rand}}(\sigma, \mathcal{B}) := \mathbb{P}(\log\zeta(\sigma, \mathbb{X}) \in \mathcal{B})$$

对于 $\mathbb{C}$ 中的博雷尔集 $\mathcal{B}$，定义上述两个测度之间的差异为

$$\mathbf{D}_{\zeta}(\sigma) := \sup_{\mathcal{R}} |\Phi_{\zeta,T}(\sigma, \mathcal{R}) - \Phi_{\zeta}^{\mathrm{rand}}(\sigma, \mathcal{R})|,$$

其中 $\mathcal{R}$ 遍历 $\mathbb{C}$ 中的所有矩形盒，其边平行于坐标轴且可以无界。这个量衡量了 $\log\zeta(\sigma, \mathbb{X})$ 的分布对 $\log\zeta(\sigma + it)$ 的分布的逼近程度。

日期：2023年4月10日。2010年数学主题分类：11M41、11M06、11M26。关键词和短语： L 函数的联合分布、差异界、塞尔伯格中心极限定理。

Harman 和 Matsumoto [2] 证明了

$$\mathbf{D}_\zeta(\sigma) \ll (\log T)^{-\frac{4\sigma-2}{21+8\sigma}+\varepsilon}$$

对于固定的 $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ 和任意的 $\varepsilon > 0$。另请参见 Matsumoto 在 [10], [11] 和 [12] 中较早的结果。Lamzouri、Lester 和 Radziwiłł [5] 将其改进为

$$\mathbf{D}_\zeta(\sigma) \ll (\log T)^{-\sigma}$$

对于固定的 $\frac{1}{2} < \sigma < 1$。定义

$$\sigma_T := \frac{1}{2} + \frac{1}{G(T)} \tag{1.1}$$

对于固定的 $0 < \theta < \frac{1}{2}$，若 $4 \le G(T) \le (\log T)^\theta$，则 Ha 和 Lee [1] 将上述结果推广为使得

$$\mathbf{D}_\zeta(\sigma_T) \ll (\log T)^{-\eta}$$

对于某个 $0 < \eta < \frac{1-\theta}{4}$ 成立。这里，我们将其推广到对更接近 $\frac{1}{2}$ 的 σ_T 也成立。

定理 1.1. 假设 $\log\log T \le G(T) \le \log T(\log\log T)^2$，则我们有

$$\mathbf{D}_\zeta(\sigma_T) \ll \frac{\sqrt{G(T)}\log\log T}{\sqrt{\log T}}.$$

接下来我们考虑一个多变量扩展。设 $L_1, \dots, L_J$ 为满足以下假设的 L-函数：

A1：（欧拉乘积）对于 $j = 1, \dots, J$ 且 $\mathrm{Re}(s) > 1$，我们有

$$L_j(s) = \prod_p \prod_{i=1}^{d} \left(1 - \frac{\alpha_{j,i}(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

其中 $|\alpha_{j,i}(p)| \le p^\eta$ 对某个固定的 $0 \le \eta < \frac{1}{2}$ 以及对每个 $i = 1, \dots, d$.

A2：（解析延拓）对于某个整数 $m \ge 0$，每个 $(s-1)^m L_j(s)$ 都是有限阶整函数。

A3：（函数方程）函数 L_1、L_2、……、L_J 满足相同的函数方程。

$$\Lambda_j(s) = \omega\overline{\Lambda_j(1-\bar{s})},$$

其中

$$\Lambda_j(s) := L_j(s)Q^s \prod_{\ell=1}^{k} \Gamma(\lambda_\ell s + \mu_\ell),$$

$|\omega| = 1$、$Q > 0$、$\lambda_\ell > 0$ 和 $\mu_\ell \in \mathbb{C}$，其中 $\mathrm{Re}(\mu_\ell) \ge 0$。

A4：（平均意义下的拉马努金猜想）

$$\sum_{p \le x} \sum_{i=1}^{d} |\alpha_{j,i}(p)|^2 = O(x^{1+\epsilon})$$

对于每个 $\epsilon > 0$ 以及每个 $j = 1, \dots, J$，当 $x \to \infty$ 时成立。

A5：（零点密度假设）令 $N_f(\sigma, T)$表示 $f(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s) \geq \sigma$ 且 $\mathrm{Im}(s) \leq T$中的零点个数。那么存在一个常数 $\kappa > 0$ 使得对于每个$j = 1$、.....、 J以及所有 $\sigma \geq \frac{1}{2}$，我们都有

$$N_{L_j}(\sigma, T) \ll T^{1-\kappa(\sigma-\frac{1}{2})} \log T.$$

A6：（塞尔伯格正交猜想）根据假设 A1，我们可以写成

$$\log L_j(s) = \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\beta_{L_j}(p^r)}{p^{rs}}.$$

那么，对于所有 $1 \leq j$、 $k \leq J$，存在常数 $\xi_j > 0$和$c_{j,\ k}$使得

$$\sum_{p \leq x} \frac{\beta_{L_j}(p)\overline{\beta_{L_k}(p)}}{p} = \delta_{j,k}\xi_j \log\log x + c_{j,k} + O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

其中$\delta_{j,k} = 0$ 若 $j \neq k$ 且$\delta_{j,k} = 1$ 若 $j = k$。

假设 A1–A6 对于所有源自自守表示的 L-函数 $GL(n)$ 都是标准的，并且预期成立。特别地， $GL(1)$和 $GL(2)$ L-函数已得到验证，其中包括黎曼ζ函数、狄利克雷 L-函数，以及与 Hecke 全纯形式或马斯尖点形式相关联的 L-函数。

定义

$$\mathbf{L}(s) := \Big(\log|L_1(s)|, \dots, \log|L_J(s)|, \arg L_1(s), \dots, \arg L_J(s)\Big)$$

and

$$\mathbf{L}(\sigma, \mathbb{X}) := \Big(\log|L_1(\sigma, \mathbb{X})|, \dots, \log|L_J(\sigma, \mathbb{X})|, \arg L_1(\sigma, \mathbb{X}), \dots, \arg L_J(\sigma, \mathbb{X})\Big)$$

对于 $\sigma > \frac{1}{2}$，其中

$$L_j(\sigma, \mathbb{X}) := \prod_p \prod_{i=1}^{d} \left(1 - \frac{\alpha_{j,i}(p)\mathbb{X}(p)}{p^{\sigma}}\right)^{-1} \tag{1.2}$$

根据柯尔莫哥洛夫三列级数定理，对于 $\sigma > \frac{1}{2}$ ，该式再次几乎必然收敛。于是，$\mathbf{L}(\sigma, \mathbb{X})$ 是 $\mathbf{L}(s)$ 的随机模型。定义两个测度

$$\Phi_T(\mathcal{B}) := \frac{1}{T}\mathrm{meas}\{t \in [T, 2T] : \mathbf{L}(\sigma_T + it) \in \mathcal{B}\} \tag{1.3}$$

and

$$\Phi_T^{\mathrm{rand}}(\mathcal{B}) := \mathbb{P}(\mathbf{L}(\sigma_T, \mathbb{X}) \in \mathcal{B}) \tag{1.4}$$

对于博雷尔集 $\mathcal{B}$ 在 $\mathbb{R}^{2J}$ 中以及在 (1.1) 中定义的 σ_T。上述两个测度之间的差异定义为

$$\mathbf{D}(\sigma_T) := \sup_{\mathcal{R}} |\Phi_T(\mathcal{R}) - \Phi_T^{\mathrm{rand}}(\mathcal{R})|,$$

其中， $\mathcal{R}$遍历 $\mathbb{R}^{2J}$ 的所有矩形盒，其边平行于坐标轴且可能无界。于是，定理 1.1 是下述定理的一个特例。

定理 1.2。假设 $\log\log T \le G(T) \le \log T(\log\log T)^2$，则有

$$\mathbf{D}(\sigma_T) \ll \frac{\sqrt{G(T)}\log\log T}{\sqrt{\log T}}.$$

上述定理是 [4, 定理 2.3],的推广，后者给出了相同的估计，但仅适用于 $\log\log T \le G(T) \le \sqrt{\log T}\log\log T$。在 [4, 定理 2.3] 的证明中，我们使用了一个近似，将每个 $\log L_j(\sigma_T + it)$ 近似为一个狄利克雷多项式

$$R_{j,Y}(\sigma_T + it) := \sum_{p^r \le Y} \frac{\beta_{L_j}(p^r)}{p^{r(\sigma_T+it)}} \tag{1.5}$$

对于 $t \in [T, 2T]$，存在一些例外。例外主要源于每个 $L_j(s)$在临界线外可能存在非平凡零点；根据假设 A5， $[T, 2T]$中例外 t 的集合测度很小。细节见 [4, 引理 4.2] 。然而，如果 σ_T 更接近 $\frac{1}{2}$，这种近似就没有用处。我们通过定理 2.1 中对 $\log L_j(\sigma_T + it)$ 的二阶矩估计克服了这一困难。

作为定理 1.2 的一个应用，我们考虑塞尔伯格中心极限定理。令$\psi_{j,T} := \xi_j \log G(T)$，其中 $j \le J$且

$$\mathcal{R}_T := \prod_{j=1}^{J}[a_j\sqrt{\pi\psi_{j,T}}, b_j\sqrt{\pi\psi_{j,T}}] \times \prod_{j=1}^{J}[c_j\sqrt{\pi\psi_{j,T}}, d_j\sqrt{\pi\psi_{j,T}}]$$

对于固定实数 a_j、 b_j、 c_j、 d_j。那么，关于

$$\Phi_T(\mathcal{R}_T) = \frac{1}{T}\mathrm{meas}\{t \in [T, 2T] : \frac{\log L_j(\sigma_T + it)}{\sqrt{\pi\psi_{j,T}}} \in [a_j, b_j] \times [c_j, d_j] \text{ for } j = 1, \dots, J\}$$

的渐近公式称为塞尔伯格中心极限定理。关于塞尔伯格的原始思想，参见 [15, 定理 2] 。令 $0 < \theta < 1$。为了求出 $\Phi_T(\mathcal{R}_T)$ 的渐近式

$$(\log T)^\theta \le G(T) \le \frac{\log T}{(\log\log T)^2}, \tag{1.6}$$

由于定理1.2，现在只需估计 $\Phi_T^{\mathrm{rand}}(\mathcal{R}_T)$。容易验证， [9, 定理2.1] 中 $\Phi_T^{\mathrm{rand}}(\mathcal{R}_T)$ 的渐近公式对于满足 (1.6) 的 $G(T)$ 同样成立。因此，我们得到以下推论。

推论1.3。假设对于某个 $0 < \theta < 1$ 满足(1.6)，且对于 L_1、...、L_J 满足假设 A1–A6。那么存在常数 ϵ_1、$\epsilon_2 > 0$ 以及一个实数序列 $\{b_{\mathbf{k},\mathbf{l}}\}$，使得

$$\begin{aligned}\Phi_T(\mathcal{R}_T) = &\sum_{\mathcal{K}(\mathbf{k}+\mathbf{l})\le\epsilon_1\log\log T} b_{\mathbf{k},\mathbf{l}}\prod_{j=1}^{J}\frac{1}{\sqrt{\psi_{j,T}}^{k_j+\ell_j}}\\ &\times\prod_{j=1}^{J}\left(\int_{a_j}^{b_j}e^{-\pi u^2}\mathcal{H}_{k_j}(\sqrt{\pi}u)du\int_{c_j}^{d_j}e^{-\pi v^2}\mathcal{H}_{\ell_j}(\sqrt{\pi}v)dv\right)\\ &+O\left(\frac{1}{(\log T)^{\epsilon_2}}+\frac{\sqrt{G(T)}\log\log T}{\sqrt{\log T}}\right),\end{aligned}\tag{1.7}$$

其中 $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_J)$ 和 $\mathbf{l}=(\ell_1,\dots,\ell_J)$ 是 $(\mathbb{Z}_{\ge0})^J$, $\mathcal{K}(\mathbf{k})$ 中的向量：$=k_1+\cdots+k_J$以及

$$\mathcal{H}_n(x) := (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

是第 n 个厄米特多项式。此外，$b_{0,\,0}=1$, $b_{\mathbf{k},\,\mathbf{l}}=0$ 若对于某个 $\delta_0>0$ 以及所有 $\mathbf{k},\mathbf{l}\in(\mathbb{Z}_{\ge0})^J$，都有 $\mathcal{K}(\mathbf{k}+\mathbf{l})=1$ 且$b_{\mathbf{k}+\mathbf{l}}=O(\delta_0^{-\mathcal{K}(\mathbf{k}+\mathbf{l})})$。

注意，推论 1.3 推广了 $\zeta(s)$ 在 [8, 定理 1.2] 中的渐近展开，以及 $L(s)$ 在 [9, 定理 1.2]中的渐近展开。如果 $G(T)$ 非常接近 $\log T(\log\log T)^2$，则 (1.7) 中的误差项较大,~~一因此我~~们可以用如下较短的和进行近似。

推论 1.4. 在与推论 1.3 相同的假设下，除去...

$$G(T)=\frac{\log T}{(\log\log T)^{2+g}}$$

对于常数 $g>0$，我们有

$$\begin{aligned}\Phi_T(\mathcal{R}_T) = &\sum_{\mathcal{K}(\mathbf{k}+\mathbf{l})<g} b_{\mathbf{k},\mathbf{l}}\prod_{j=1}^{J}\frac{1}{\sqrt{\psi_{j,T}}^{k_j+\ell_j}}\\ &\times\prod_{j=1}^{J}\left(\int_{a_j}^{b_j}e^{-\pi u^2}\mathcal{H}_{k_j}(\sqrt{\pi}u)du\int_{c_j}^{d_j}e^{-\pi v^2}\mathcal{H}_{\ell_j}(\sqrt{\pi}v)dv\right)+O\left(\frac{1}{(\log\log T)^{\frac{g}{2}}}\right).\end{aligned}$$

注意到，类似于 (1.7) 的渐近展开预期在 [3]中无需证明即可成立。

2. High moments of 对数 L

设 L 是一个满足本节假设 A1–A6 的 L-函数。在这里，我们在假设 A1 和 A4 中使用 $\alpha_i(p)$ 而不是 $\alpha_{j,\ i}(p)$，并且假设 A6 简单地是

$$\sum_{p\le x}\frac{|\beta_L(p)|^2}{p}=\xi_L\log\log x+c_L+O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

对于某些 常数 $\xi_L>0$ 和 $c_L\in\mathbb{R}$。令 σ_T 如 (1.1) 中所定义，并假设 tha t

$$(\log T)^{\frac{1}{3}}\le G(T)\le\frac{\log T}{(\log\log T)^2} \tag{2.1}$$

i在本节中。然后我们需要以下定理来证明定理 1.2 .

定理 2.1.假设 $e^{G_{(T)^2}}\le Y\le T^{\varepsilon}$，其中 $0<\varepsilon<\min\{\frac{1}{48},\frac{\kappa}{3}\}$。则存在 $\kappa_0>0$ 使得

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T}|\log L(\sigma_T+it)-R_Y(\sigma_T+it)|^2dt\ll e^{-\kappa_0\frac{\log T}{G(T)}}+e^{-2\frac{\log Y}{G(T)}}\frac{G(T)}{\log Y},$$

其中

$$R_Y(s):=\sum_{p^r\le Y}\frac{\beta_L(p^r)}{p^{rs}}.$$

为了证明上述定理，我们修改了 Tsang 的论文 [16] 中对 $\log\zeta$ 的高阶矩估计，并计算了 $\log L$ 的高阶矩。所有这些计算均基于 Selberg [13] 和 [14]。由于 $L(s)$ 的狄利克雷系数可以大于 1，定理 2.1 并非 Tsang [16] 的直接推论。我们需要利用假设 A4 和 A6，仔细地对涉及 $\log L$ 的狄利克雷系数的各种和进行估计。由此得到以下定理。

定理 2.2. 设 k 为正整数，且满足 $k\le\frac{\varepsilon}{4}(\log\log\ T)^2$。那么存在 κ_0、$c>0$ 使得

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T}|\log L(\sigma_T+it)|^{2k}dt\ll c^kk^{4k}e^{-\kappa_0\frac{\log T}{G(T)}}+c^kk^k(\log G(T))^k \tag{2.2}$$

and

$$\mathbb{E}[|\log L(\sigma_T,\mathbb{X})|^{2k}]\ll c^kk^k(\log G(T))^k. \tag{2.3}$$

由定理 2.2 取 $k=\log\log\ T$，容易推出以下推论，这一推论将在第 3 节中用到。

推论 2.3。给定常数 $A_1>0$，存在常数 $A_2>0$ ，使得

$$\frac{1}{T}\text{meas}\{t\in[T,2T]:|\log L(\sigma_T+it)|\ge A_2\log\log T\}\ll(\log T)^{-A_1}$$

and

$$\mathbb{P}(|\log L(\sigma_T,\mathbb{X})|\ge A_2\log\log T)\ll(\log T)^{-A_1}.$$

我们在第2.1节给出引理，然后在第2.2节证明定理 2.1 和 2.2

2.1. 引理。我们调整了 $[16, \text{第 } 5]$ 章中关于 $\log L$ 的估计。首先，我们重述 [16,引理 5.1]，不附证明。

Lemma 2.4. 设 $3 \le X \le T^{\kappa-\kappa'}$，其中 $0 < \kappa' < \kappa$，并设 $\nu \ge 0$。那么我们有 e

$$\sum_{\substack{\beta>\sigma \\ T\le\gamma\le 2T}} (\beta-\sigma)^\nu X^{\beta-\sigma} = O\big(T^{1-\kappa(\sigma-\frac{1}{2})}(\log T)^{1-\nu}(c\nu)^\nu\big)$$

对于 $\frac{1}{2} \le \sigma \le 1$，以及某个 $c > 0$，其中 $\beta + i\gamma$ 表示 $L(s)$ 的一个零点。

定义

$$\sigma_{x,t} := \frac{1}{2} + 2\max\left\{\beta - \frac{1}{2}, \frac{2}{\log x}\right\}$$

对于 $t \in [T, 2T]$，其中最大值取遍满足 $|t-\gamma| < x^{3(\beta-\frac{1}{2})\log x}$ 且 $\beta \ge \frac{1}{2}$ 的 $L(s)$ 的所有零点 $\beta + i\gamma$。那么下面的引理对应于 $[16, \text{引理 } 5.2]$。

引理 2.5。令 $\nu \ge 0$、$x = T^{\varepsilon/k}$、$3 \le x^3X^2 \le T^{\kappa-\kappa'}$ 对于 $0 < \kappa' < \kappa$。然后

$$\int_{\substack{\sigma_{x,t}>\sigma \\ T\le t\le 2T}} (\sigma_{x,t}-\sigma)^\nu X^{\sigma_{x,t}-\sigma} dt \ll \frac{(c\nu)^\nu k}{(\log T)^\nu} T^{1-\kappa(\sigma-\frac{1}{2})} x^{\frac{3}{2}(\sigma-\frac{1}{2})}$$

对于 $\frac{1}{2} + \frac{4}{\text{对数 } x} \le \sigma \le 1$ 和

$$\int_{\substack{\sigma_{x,t}>\sigma \\ T\le t\le 2T}} (\sigma_{x,t}-\sigma)^\nu X^{\sigma_{x,t}-\sigma} dt \ll \frac{(c\nu)^\nu k}{(\log T)^\nu} T^{1-\kappa(\sigma-\frac{1}{2})} + T\frac{c^{k+\nu}k^\nu}{(\log T)^\nu}$$

对于 $\frac{1}{2} \le \sigma \le \frac{1}{2} + \frac{4}{\log x}$。

证明。定义两个集合

$$S_1 = \left\{t \in [T, 2T] : \sigma_{x,t} > \max\left(\sigma, \frac{1}{2} + \frac{4}{\log x}\right)\right\},$$
$$S_2 = \left\{t \in [T, 2T] : \sigma_{x,t} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\log x} > \sigma\right\}.$$

由于 $\sigma_{x,\ t} \ge \frac{1}{2} + \frac{4}{\text{对数 } x}$，我们看到

$$\int_{\substack{\sigma_{x,t}>\sigma \\ T\le t\le 2T}} (\sigma_{x,t}-\sigma)^\nu X^{\sigma_{x,t}-\sigma} dt = \int_{S_1} (\sigma_{x,t}-\sigma)^\nu X^{\sigma_{x,t}-\sigma} dt + \int_{S_2} (\sigma_{x,t}-\sigma)^\nu X^{\sigma_{x,t}-\sigma} dt.$$

对于 $t \in S_1$，根据$\sigma_{x,\ t}$和 $\sigma_{x,\ t} > \frac{1}{2} + {}^{4}\!/_{\text{对数 } x}$，存在一个零点 $\beta + i\gamma$使得 $\sigma_{x,\ t} = 2\beta - \frac{1}{2}$，$\beta - \frac{1}{2} > {}^{2}\!/_{\text{对数 } x}$以及 $|t - \gamma| \leq \frac{x^{3(\beta-\frac{1}{2})}}{\text{对数 } x}$。因此，我们有

$$\begin{aligned}\int_{S_1} (\sigma_{x,t} - \sigma)^\nu X^{\sigma_{x,t}-\sigma} dt &\leq \sum_{\substack{\beta > \frac{1}{2}(\sigma+\frac{1}{2}) \\ T/2 \leq \gamma \leq 3T}} \int_{\gamma - \frac{x^{3(\beta-\frac{1}{2})}}{\log x}}^{\gamma + \frac{x^{3(\beta-\frac{1}{2})}}{\log x}} \left(2\beta - \frac{1}{2} - \sigma\right)^\nu X^{2\beta-\frac{1}{2}-\sigma} dt \\ &\leq \frac{2^{1+\nu} x^{\frac{3}{2}(\sigma-\frac{1}{2})}}{\log x} \sum_{\substack{\beta > \frac{1}{2}(\sigma+\frac{1}{2}) \\ T/2 \leq \gamma \leq 3T}} \left(\beta - \frac{1}{2}\left(\sigma + \frac{1}{2}\right)\right)^\nu (x^3 X^2)^{\beta - \frac{1}{2}(\sigma+\frac{1}{2})}.\end{aligned}$$

由引理 2.4，以上为

$$\ll \frac{(c\nu)^\nu k}{(\log T)^\nu} T^{1-\kappa(\sigma-\frac{1}{2})} x^{\frac{3}{2}(\sigma-\frac{1}{2})} \tag{2.4}$$

对于某个 $c > 0$。

我们看到，$S_2 = \emptyset$对于$\sigma \geq \frac{1}{2} + {}^{4}\!/_{\text{对数 } x}$。如果$\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{1}{2} + {}^{4}\!/_{\text{对数 } x}$，那么

$$\int_{S_2} (\sigma_{x,t} - \sigma)^\nu X^{\sigma_{x,t}-\sigma} dt \leq T \left(\frac{4}{\log x}\right)^\nu X^{\frac{4}{\log x}} \leq T \frac{c^{k+\nu} k^\nu}{(\log T)^\nu}$$

对于某个 $c > 0$。

□

接下来我们考虑 [16, 引理 5.3]，并注意到其中的条件 (ii) 在我们的情形下不成立。为了将其证明调整到我们的情形，需要关于 β_L的若干不等式。由假设 A1 和 A6 可得

$$\beta_L(p^r) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{d} \alpha_i(p)^r. \tag{2.5}$$

由（2.5）和假设 A1 可以容易地推出：

$$|\beta_L(p^r)| \leq \frac{d}{r} p^{r\eta} \quad \text{for } r \geq 1, \tag{2.6}$$

$$|\beta_L(p^r)| \leq \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{d} |\alpha_i(p)|^r \leq \frac{p^{(r-2)\eta}}{r} \sum_{i=1}^{d} |\alpha_i(p)|^2 \quad \text{for } r \geq 2 \tag{2.7}$$

and

$$|\beta_L(p)|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{d} |\alpha_i(p)|\right)^2 \leq d \sum_{i=1}^{d} |\alpha_i(p)|^2. \tag{2.8}$$

为方便起见，我们通过规定：若 n 不是素数的幂，则令 $\beta_L(n) = 0$，来扩展 β_L。于是可得

$$\log L(s) = \sum_n \frac{\beta_L(n)}{n^s}.$$

定义

$$\lambda_t := \lambda(\sigma, x, t) := \max\{\sigma_{x,t}, \sigma\}$$

对于 $\sigma \in [\frac{1}{2}, 1]$，那么我们有以下引理。

引理 2.6. 设 k 和 m 为正整数，且 $k \le m \le 16k$。设 $x = T^{\frac{\varepsilon}{k}}$，并假设 $\frac{\varepsilon}{k} < \frac{\kappa}{3}$ 和 $0 < \varepsilon \le \frac{1}{48}$。则存在常数 $c > 0$，使得

$$\int_T^{2T} \left| \sum_n \frac{\beta_L(n) g_x(n)}{n^{\lambda_t + it}} \right|^{2m} dt \ll T c^k k^m \left(\min\{\log\log x, \log \frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}}\} \right)^m$$

and

$$\int_T^{2T} \left| \sum_n \frac{\beta_L(n) g_x(n) \log n}{n^{\lambda_t + it}} \right|^{2m} dt \ll T c^k k^m \left(\min\{\log x, \frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}}\} \right)^{2m}$$

对于 $\frac{1}{2} \le \sigma \le 1$。

证明。对于非负整数 ℓ，我们可以看到，

$$\sum_n \frac{\beta_L(n) g_x(n) (\log n)^\ell}{n^{\lambda_t + it}} = \sum_n \frac{\beta_L(n) g_x(n) (\log n)^\ell}{n^{\sigma + it}} + \sum_n \frac{\beta_L(n) g_x(n) (\log n)^\ell}{n^{it}} (n^{-\lambda_t} - n^{-\sigma}).$$

我们将右侧的第一个求和拆分为

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{\beta_L(n) g_x(n) (\log n)^\ell}{n^{\sigma + it}} =& \sum_p \frac{\beta_L(p) g_x(p) (\log p)^\ell}{p^{\sigma + it}} + \sum_p \frac{\beta_L(p^2) g_x(p^2) (2\log p)^\ell}{p^{2\sigma + 2it}} \\ &+ \sum_p \sum_{r \ge 3} \frac{\beta_L(p^r) g_x(p^r) (r \log p)^\ell}{p^{r\sigma + irt}}. \end{aligned}$$

由（2.7）和假设 A4 可得

$$\begin{aligned} \left| \sum_p \sum_{r \ge 3} \frac{\beta_L(p^r) g_x(p^r) (r\log p)^\ell}{p^{r\sigma + irt}} \right| &\le \sum_p \sum_{3 \le r \le \frac{3\log x}{\log p}} \frac{p^{(r-2)\eta} \sum_{i=1}^d |\alpha_i(p)|^2 (r \log p)^\ell}{r p^{r\sigma}} \\ &\ll \sum_p \frac{\sum_{i=1}^d |\alpha_i(p)|^2 (\log p)^\ell}{p^{\frac{3}{2} - \eta}} \ll 1. \end{aligned}$$

由 [16, 引理 3.3]可得

$$\int_T^{2T} \left| \sum_p \frac{\beta_L(p) g_x(p) (\log p)^\ell}{p^{\sigma + it}} \right|^{2m} dt \ll T m! \left(\sum_p \frac{|\beta_L(p) g_x(p)|^2 (\log p)^{2\ell}}{p^{2\sigma}} \right)^m$$

$$\int_T^{2T} \left| \sum_p \frac{\beta_L(p^2) g_x(p^2) (\log p)^\ell}{p^{2\sigma + 2it}} \right|^{2m} dt \ll T m! \left(\sum_p \frac{|\beta_L(p^2) g_x(p^2)|^2 (\log p)^{2\ell}}{p^{4\sigma}} \right)^m$$

前提是 $x^{3m} \ll T$，这对 $0 < \varepsilon \le \frac{1}{48}$ 成立。根据假设 A6，我们有

$$\sum_p \frac{|\beta_L(p) g_x(p)|^2 (\log p)^{2\ell}}{p^{2\sigma}} \le \sum_{p \le x^3} \frac{|\beta_L(p)|^2 (\log p)^{2\ell}}{p} \ll \begin{cases} \log\log x & \text{if } \ell = 0, \\ (\log x)^{2\ell} & \text{if } \ell \ge 1 \end{cases}$$

对于 $\frac{1}{2} \le \sigma \le \frac{1}{2} + \frac{4}{\log x}$,

$$\sum_p \frac{|\beta_L(p) g_x(p)|^2 (\log p)^{2\ell}}{p^{2\sigma}} \le \sum_p \frac{|\beta_L(p)|^2 (\log p)^{2\ell}}{p^{2\sigma}} \ll \int_2^\infty u^{-2\sigma} (\log u)^{2\ell-1} du$$
$$\ll \begin{cases} \log \frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}} & \text{if } \ell = 0, \\ \frac{1}{(\sigma - \frac{1}{2})^{2\ell}} & \text{if } \ell \ge 1 \end{cases}$$

对于 $\frac{1}{2} + \frac{4}{\log x} \le \sigma \le 1$。由 (2.7) 和假设 A4 可得

$$\sum_p \frac{|\beta_L(p^2) g_x(p^2)|^2 (\log p)^{2\ell}}{p^{4\sigma}} \ll \sum_p \frac{\sum_{i=1}^d |\alpha_i(p)|^2 (\log p)^{2\ell}}{p^{2-2\eta}} \ll 1$$

对于 $\sigma \ge \frac{1}{2}$。由于

$$\left| \sum_n \frac{\beta_L(n) g_x(n) (\log n)^\ell}{n^{\sigma+it}} \right|^{2m}$$
$$\le 3^m \left(\left| \sum_p \frac{\beta_L(p) g_x(p) (\log p)^\ell}{p^{\sigma+it}} \right|^{2m} + \left| \sum_p \frac{\beta_L(p^2) g_x(p^2) (2\log p)^\ell}{p^{2\sigma+2it}} \right|^{2m} + c^m \right)$$

对于某个 $c > 0$，通过汇总上述方程，我们得到

$$\int_T^{2T} \left| \sum_n \frac{\beta_L(n) g_x(n) (\log n)^\ell}{n^{\sigma+it}} \right|^{2m} dt$$
$$\ll \begin{cases} T c^k k^m \left(\min\{\log\log x, \log \frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}}\} \right)^m & \text{if } \ell = 0, \\ T c^k k^m \left(\min\{\log x, \frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}}\} \right)^{2\ell m} & \text{if } \ell \ge 1 \end{cases} \tag{2.9}$$

对于某个常数 $c > 0$，且对于 $\frac{1}{2} \le \sigma \le 1$。

接下来我们估计

$$\int_T^{2T} \left| \sum_n \frac{\beta_L(n) g_x(n) (\log n)^\ell}{n^{it}} (n^{-\lambda_t} - n^{-\sigma}) \right|^{2m} dt.$$

根据 [16, 第 67] 页中的方程，上述积分有界于

$$\ll \left(\int_T^{2T} (\lambda_t - \sigma)^{4m} X_1^{4m(\lambda_t - \sigma)} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\sigma^\infty X_1^{\sigma - v} dv \right)^{2m - \frac{1}{2}}$$
$$\times \left(\int_\sigma^\infty X_1^{\sigma - v} \int_T^{2T} \left| \sum_n \frac{\beta_L(n) g_x(n) (\log n)^{\ell+1} \log(X_1 n)}{n^{v+it}} \right|^{4m} dt dv \right)^{\frac{1}{2}}$$

其中 $X_1 = T^{\frac{\varepsilon_1}{m}}$，对某个 $\varepsilon_1 > 0$ 成立。令 $\nu = 4m$ 和 $X = X_1^{4m} = T^{4\varepsilon_1}$ 为引理 2.5 中的量。容易验证，引理 2.5 中的假设可由以下假设推出

引理 2.6。因此，存在 $c>0$ 使得

$$\int_T^{2T}(\lambda_t-\sigma)^{4m}X_1^{4m(\lambda_t-\sigma)}dt=\int_T^{2T}(\lambda_t-\sigma)^{4m}X_1^{4m(\lambda_t-\sigma)}dt\ll c^k k^{4m}T^{1-\frac{\kappa}{2}(\sigma-\frac12)}(\log T)^{-4m}$$

对 $\frac12\le\sigma\le1$。由 (2.9) 可得

$$\begin{aligned}&\int_\sigma^\infty X_1^{\sigma-v}\int_T^{2T}\left|\sum_n\frac{\beta_L(n)g_x(n)(\log n)^{\ell+1}\log(X_1n)}{n^{v+it}}\right|^{4m}dtdv\\&\ll Tc^kk^{2m}\left(\frac{\log T}{k}\right)^{2m(2\ell+3)-1}\left(\min\{\log x,\frac{1}{\sigma-\frac12}\}\right)^{2m}.\end{aligned}$$

因此，结合上述结果可得

$$\begin{aligned}(2.10)\quad&\int_T^{2T}\left|\sum_n\frac{\beta_L(n)g_x(n)(\log n)^{\ell}}{n^{it}}(n^{-\lambda_t}-n^{-\sigma})\right|^{2m}dt\\&\ll c^kk^{2m-2m\ell}T^{1-\frac{\kappa}{4}(\sigma-\frac12)}(\log T)^{2m\ell-m}\left(\min\{\log x,\frac{1}{\sigma-\frac12}\}\right)^{m}\end{aligned}$$

对 $\frac12\le\sigma\le1$。引理由 (2.9) 和 (2.10) 得出。 □

下面的引理类似于 [16, 引理 5.4]。 [7, 引理 8]的证明针对数域上的 Hecke L-函数，但对我们的 L-函数也适用。因此，我们陈述该引理而不作证明。

引理 2.7. 设 $t\in[T,2T]$, $\frac12\le\sigma\le1$ 且 $t\ne\mathrm{Im}(\rho)$，其中 ρ 是 $L(s)$ 的任意零点。则有

$$\begin{aligned}\log L(s)=&\sum_n\frac{\beta_L(n)g_x(n)}{n^{\lambda_t+it}}+\tilde L(s)\\&+O\left(\left(\frac{x^{\frac14-\frac12\lambda_t}}{\log x}+(\lambda_t-\sigma)\right)\left(\left|\sum_n\frac{\beta_L(n)g_x(n)\log n}{n^{\sigma_{x,t}+it}}\right|+\log T\right)\right),\end{aligned}$$

其中

$$\tilde L(s)=\sum_\rho\int_\sigma^{\lambda_t}\frac{u-\lambda_t}{(u+it-\rho)(\lambda_t+it-\rho)}du.$$

以下引理可由与[16,引理 5 的证明5], 相同的论证推导出来，因此我们不加证明地陈述如下。

引理 2.8。

$$|\mathrm{Im}(\tilde L(s))|\ll(\lambda_t-\sigma)\left(\left|\sum_n\frac{\beta_L(n)g_x(n)\log n}{n^{\lambda_t+it}}\right|+\log T\right),$$

$$|\mathrm{Re}(\tilde L(s))|\ll(\lambda_t-\sigma)\big(1+(\lambda_t-\sigma)\log x+\log^+\frac{1}{\eta_t\log x}\big)\left(\left|\sum_n\frac{\beta_L(n)g_x(n)\log n}{n^{\lambda_t+it}}\right|+\log T\right),$$

其中 $\log^+ w := \max\{\log\ w, 0\}$ 且 $\eta_t = \min|t-\gamma|$，其中最小值取遍满足 $\beta \geq \frac{1}{2}$ 的 $L(s)$ 的所有零点 $\beta + i\gamma$。此外，我们有

$$\int_T^{2T} \left(\log^+ \frac{1}{\eta_t \log x}\right)^{2k} dt \ll T(ck)^{2k}.$$

2.2. 定理 2.1 和 2.2 的证明。首先，我们要找出$2k$阶矩的上界

$$\int_T^{2T} \left|\log L(\sigma_T + it) - \sum_n \frac{\beta_L(n) g_x(n)}{n^{\sigma_T+it}}\right|^{2k} dt.$$

令引理 2.6 中的 $\sigma = \frac{1}{2}$、$\ell = 1$ 和 $k = m$，则我们得到

$$\int_T^{2T} \left|\sum_n \frac{\beta_L(n) g_x(n) \log n}{n^{\sigma_{x,t}+it}}\right|^{2k} dt \ll c^k k^k T(\log x)^{2k}. \tag{2.11}$$

由引理 2.7 和 2.8 以及 (2.11)，我们有

(2.12)

$$\begin{aligned}
&\int_T^{2T} \left|\log L(\sigma_T + it) - \sum_n \frac{\beta_L(n) g_x(n)}{n^{\sigma_T+it}}\right|^{2k} dt \\
&\ll c^k \int_T^{2T} \left|\sum_n \frac{\beta_L(n) g_x(n)}{n^{\lambda_t+it}} - \sum_n \frac{\beta_L(n) g_x(n)}{n^{\sigma_T+it}}\right|^{2k} dt \\
&+ c^k \int_T^{2T} (\lambda_t - \sigma_T)^{2k} \left(1 + (\lambda_t - \sigma_T)\log x + \log^+ \frac{1}{\eta_t \log x}\right)^{2k} \left|\sum_n \frac{\beta_L(n) g_x(n) \log n}{n^{\lambda_t+it}}\right|^{2k} dt \\
&+ c^k (\log T)^{2k} \int_T^{2T} (\lambda_t - \sigma_T)^{2k} \big(1 + (\lambda_t - \sigma_T)\log x + \log^+ \frac{1}{\eta_t \log x}\big)^{2k} dt \\
&+ c^k k^{2k} T e^{-\varepsilon \frac{\log T}{G(T)}}
\end{aligned}$$

对于某个 $c > 0$。接下来需要估计右侧的积分。

由于 $x = T^{\frac{\varepsilon}{k}}$ 和 $k \leq \frac{\varepsilon}{4}$（$\log\log\ T$）^{2},，我们可知。

$$\sigma_T - \frac{1}{2} = \frac{1}{G(T)} \geq \frac{(\log\log T)^2}{\log T} \geq \frac{4}{\log x}.$$

由 (2.10) 可得

$$\int_T^{2T} \left|\sum_n \frac{\beta_L(n) g_x(n)}{n^{\lambda_t+it}} - \sum_n \frac{\beta_L(n) g_x(n)}{n^{\sigma_T+it}}\right|^{2k} dt \ll c^k k^{2k} T e^{-\frac{\kappa}{4}\frac{\log T}{G(T)}} \frac{G(T)^k}{(\log T)^k} \tag{2.13}$$

对于某个 $c > 0$。由引理 2.5 和 2.8，我们有

$$\int_T^{2T} (\lambda_t - \sigma)^{2m} dt \ll \frac{c^k m^{2m}}{(\log T)^{2m}} T e^{-(\kappa - \frac{3\varepsilon}{2k})\frac{\log T}{G(T)}}$$

and

$$\begin{aligned}&\int_T^{2T}(\lambda_t-\sigma)^{2m}\bigg(\log^+\frac{1}{\eta_t\log x}\bigg)^{2m}dt\\&\quad\le\bigg(\int_T^{2T}(\lambda_t-\sigma)^{4m}dt\bigg)^{\frac12}\bigg(\int_T^{2T}\bigg(\log^+\frac{1}{\eta_t\log x}\bigg)^{4m}dt\bigg)^{\frac12}\\&\quad\ll\frac{c^km^{4m}}{(\log T)^{2m}}Te^{-(\frac{\kappa}{2}-\frac{3\varepsilon}{4k})\frac{\log T}{G(T)}}\end{aligned}$$

对于 $k\le m\le 4k$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_T^{2T}(\lambda_t-\sigma_T)^{2m}\big(1+(\lambda_t-\sigma_T)\log x+\log^+\frac{1}{\eta_t\log x}\big)^{2m}dt\\&\quad\ll\frac{c^km^{4m}}{(\log T)^{2m}}Te^{-(\frac{\kappa}{2}-\frac{3\varepsilon}{4k})\frac{\log T}{G(T)}}\end{aligned}\tag{2.14}$$

对于 $k\le m\le 2k$。由引理 2.6、柯西-施瓦茨不等式以及上述不等式可得

(2.15)

$$\begin{aligned}&\int_T^{2T}(\lambda_t-\sigma_T)^{2k}\bigg(1+(\lambda_t-\sigma_T)\log x+\log^+\frac{1}{\eta_t\log x}\bigg)^{2k}\bigg|\sum_n\frac{\beta_L(n)g_x(n)\log n}{n^{\lambda_t+it}}\bigg|^{2k}dt\\&\quad\ll\frac{c^kk^{5k}G(T)^{2k}}{(\log T)^{2k}}Te^{-(\frac{\kappa}{4}-\frac{3\varepsilon}{8k})\frac{\log T}{G(T)}}.\end{aligned}$$

因此，由 (2.12) – (2.15)，存在 $\kappa_0>0$ 使得

$$\int_T^{2T}\bigg|\log L(\sigma_T+it)-\sum_n\frac{\beta_L(n)g_x(n)}{n^{\sigma_T+it}}\bigg|^{2k}dt\ll c^kk^{4k}Te^{-\kappa_0\frac{\log T}{G(T)}}.\tag{2.16}$$

令 $k=1$ 取 (2.16) 中的值，则可知

$$\int_T^{2T}\bigg|\log L(\sigma_T+it)-\sum_n\frac{\beta_L(n)g_x(n)}{n^{\sigma_T+it}}\bigg|^{2}dt\ll Te^{-\kappa_0\frac{\log T}{G(T)}}.\tag{2.17}$$

这里，$x=T^\varepsilon$ 和 $0<\varepsilon<\min\{\frac{1}{48},\frac{\kappa}{3}\}$。令 $e^{\frac{G}{(T)^2}}\le Y\le x$，则有

$$\int_T^{2T}\bigg|\sum_{n>Y}\frac{\beta_L(n)g_x(n)}{n^{\sigma_T+it}}\bigg|^{2}dt\ll T\sum_{n>Y}\frac{|\beta_L(n)|^2}{n^{2\sigma_T}}\ll T\frac{Y^{1-2\sigma_T}}{(2\sigma_T-1)\log Y}\tag{2.18}$$

由 [4, 引理 4.1]。因此，由 (2.17) 和 (2.18) 可得定理 2.1。

接下来我们证明定理 2.2。由 (2.9) 和 (2.16) 可知，(2.2) 成立。(2.3) 的证明与引理 2.6 类似，但比引理 2.6 的证明更简单。由于

$$\log L(\sigma_T,\mathbb{X})=\sum_p\frac{\beta_L(p)\mathbb{X}(p)}{p^{\sigma_T}}+\sum_p\frac{\beta_L(p^2)\mathbb{X}(p^2)}{p^{2\sigma_T}}+O(1),$$

由 [16, 引理 3.3]可得

$$\mathbb{E}[|\log L(\sigma_T,\mathbb{X})|^{2k}] \leq c^k\bigg(k!\bigg(\sum_p \frac{|\beta_L(p)|^2}{p^{2\sigma_T}}\bigg)^k + k!\bigg(\sum_p \frac{|\beta_L(p^2)|^2}{p^{4\sigma_T}}\bigg)^k + 1\bigg)$$

对某个 $c>0$。由 (2.7) 和假设 A4 可得

$$\sum_p \frac{|\beta_L(p^2)|^2}{p^{4\sigma_T}} \ll \sum_p \frac{\sum_{i=1}^d |\alpha_i(p)|^2}{p^{2-2\eta}} \ll 1$$

根据假设 A6，我们有

$$\sum_p \frac{|\beta_L(p)|^2}{p^{2\sigma_T}} \ll \int_2^\infty \frac{du}{u^{1+\frac{2}{G(T)}}\log u} \ll \log G(T).$$

因此，我们有

$$\mathbb{E}[|\log L(\sigma_T,\mathbb{X})|^{2k}] \ll c^k k!(\log G(T))^k$$

对于某个 $c>0$。

3. Discrepancy

本节将证明满足 (2.1) 的 $G(T)$ 的定理 1.2。首先，我们需要推广 [4, 命题 5.1]。定义 Φ_T 和 Φ_T^{rand} 的傅里叶变换为

$$\widehat{\Phi}_T(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \int_{\mathbb{R}^{2J}} e^{2\pi i(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{v})} d\Phi_T(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

and

$$\widehat{\Phi}_T^{\mathrm{rand}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \int_{\mathbb{R}^{2J}} e^{2\pi i(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{v})} d\Phi_T^{\mathrm{rand}}(\mathbf{u},\mathbf{v}),$$

其中，$\mathbf{x}$ 是 $=(x_1,\dots,x_J)$ 中的向量，$\mathbf{y}$、$\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$ 也类似；且 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{u} := \sum_{j\leq J} x_j u_j$ 表示点积。于是得到以下命题。

命题 3.1. 假设 (2.1)。给定常数 $A_4>0$，存在常数 $A_5>0$使得

$$\widehat{\Phi}_T(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \widehat{\Phi}_T^{\mathrm{rand}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + O\bigg(\frac{1}{(\log T)^{A_4}}\bigg)$$

for $\max_{j\leq J}\{|x_j|,|y_j|\} \leq \frac{\sqrt{\log T}}{A_5\sqrt{G(T)}\log\log T}$.

证明。根据定义可得

$$\widehat{\Phi}_T(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{T}\int_T^{2T} \exp\bigg[2\pi i\sum_{j\leq J}\big(x_j\log|L_j(\sigma_T+it)| + y_j\arg L_j(\sigma_T+it)\big)\bigg]dt,$$

$$\widehat{\Phi}_T^{\mathrm{rand}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbb{E}\bigg[\exp\bigg[2\pi i\sum_{j\leq J}\big(x_j\log|L_j(\sigma_T,X)| + y_j\arg L_j(\sigma_T,\mathbb{X})\big)\bigg]\bigg].$$

由于不等式

$$|e^{ix}-e^{iy}|^2=4\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)\leq|x-y|^2$$

成立 对于任意 x、$y\in\mathbb{R}$，根据柯西-施瓦茨不等式和定理 2.1 wi th

$$\log Y=A_6G(T)\log\log T$$

我们有

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}_T(\mathbf{x},\mathbf{y})-\frac{1}{T}\int_T^{2T}\exp\left[2\pi i\sum_{j\leq J}\left(x_j\mathrm{Re}(R_{j,Y}(\sigma_T+it))+y_j\mathrm{Im}(R_{j,Y}(\sigma_T+it))\right)\right]dt\\ =O\bigg(\frac{1}{T}\int_T^{2T}\sum_{j\leq J}(|x_j|+|y_j|)|\log L_j(\sigma_T+it)-R_{j,Y}(\sigma_T+it)|dt\bigg)\\ =O\bigg(\sum_{j\leq J}(|x_j|+|y_j|)\bigg(\frac{1}{T}\int_T^{2T}|\log L_j(\sigma_T+it)-R_{j,Y}(\sigma_T+it)|^2dt\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg)\\ =O\bigg(\frac{M}{(\log T)^{A_6}}\bigg)\end{aligned}$$

对所有 $|x_j|$、$|y_j|\leq M$。令

$$N=\left[\frac{\log T}{10A_6G(T)\log\log T}\right],$$

那么由泰勒定理和 [4,引理 4.5] 可得

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}_T(\mathbf{x},\mathbf{y})-\sum_{n=0}^{2N-1}\frac{(2\pi i)^n}{n!T}\int_T^{2T}\bigg(\sum_{j\leq J}\left(x_j\mathrm{Re}(R_{j,Y}(\sigma_T+it))+y_j\mathrm{Im}(R_{j,Y}(\sigma_T+it))\right)\bigg)^n dt\\ =O\bigg(\frac{c^NM^{2N}}{(2N)!}\frac{1}{T}\int_T^{2T}\sum_{j\leq J}\left|R_{j,Y}(\sigma_T+it)\right|^{2N}dt+\frac{M}{(\log T)^{A_6}}\bigg)\\ =O\bigg(\bigg(\frac{cM^2\log\log T}{N}\bigg)^N+\frac{M}{(\log T)^{A_6}}\bigg)\end{aligned}$$

对某个 $c>0$。令

$$M=\frac{\sqrt{\log T}}{A_5\sqrt{G(T)\log\log T}}$$

其中常数为 $A_5\geq\sqrt{10cA_6}e^{5A_6}$，则有

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}_T(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{n=0}^{2N-1}\frac{(2\pi i)^n}{n!T}\int_T^{2T}\bigg(\sum_{j\leq J}\left(x_j\mathrm{Re}(R_{j,Y}(\sigma_T+it))+y_j\mathrm{Im}(R_{j,Y}(\sigma_T+it))\right)\bigg)^n dt\\ +O\bigg(\frac{1}{(\log T)^{A_6-\frac{1}{2}}}\bigg).\end{aligned}$$

沿用证明 [4, 命题 5.1] 后半部分的方法，可以得出该命题成立。

□

接下来我们需要引入 Beurling-Selberg 函数。定义

$$F_{[a,b],\Delta}(z)=\frac{1}{2}(H(\Delta(z-a))-K(\Delta(z-a))+H(\Delta(b-z))-K(\Delta(b-z)))$$

对于 $z\in\mathbb{C}$ 和 $\Delta>0$，其中

$$H(z)=\frac{\sin^2(\pi z)}{\pi^2}\bigg(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(n)}{(z-n)^2}+\frac{2}{z}\bigg)\quad\text{and}\quad K(z)=\frac{\sin^2(\pi z)}{(\pi z)^2}.$$

然后我们将 [6,第 7] 节中的一些结果总结为一个引理。

引理 3.2. 对所有 $x\in\mathbb{R}$，都有 $|F_{[a,b],\Delta}(x)|\le 1$ 且

$$0\le\mathbf{1}_{[a,b]}(x)-F_{[a,b],\Delta}(x)\le K(\Delta(x-a))+K(\Delta(b-x)).$$

此外，傅里叶变换 $\widehat{F}_{[a,b],\Delta}$ 满足

$$\widehat{F}_{[a,b],\Delta}=\begin{cases}\widehat{\mathbf{1}}_{[a,b]}(y)+O(\Delta^{-1}) & \text{if } |y|\le\Delta,\\ 0 & \text{if } |y|\ge\Delta.\end{cases}$$

我们准备证明满足 (2.1) 的 $G(T)$ 的定理 1.2。根据推论 2.3，存在一个常数 $A_3>0$，使得

$$\frac{1}{T}\operatorname{meas}\{t\in[T,2T]:\mathbf{L}(\sigma_T+it)\notin I_T\}\ll\frac{1}{(\log T)^{10}},$$
$$\mathbb{P}\{\mathbf{L}(\sigma_T,\mathbb{X})\notin I_T\}\ll\frac{1}{(\log T)^{10}},$$

其中

$$I_T:=[-A_3\log\log T,A_3\log\log T]^{2J}.$$

然后我们看到,

$$\Phi_T(\mathcal{R})=\Phi_T(\mathcal{R}\cap I_T)+O\bigg(\frac{1}{(\log T)^{10}}\bigg),$$
$$\Phi_T^{\mathrm{rand}}(\mathcal{R})=\Phi_T^{\mathrm{rand}}(\mathcal{R}\cap I_T)+O\bigg(\frac{1}{(\log T)^{10}}\bigg)$$

对任意 $\mathcal{R}\in\mathbb{R}^{2J}$。因此，我们有

$$\mathbf{D}(\sigma_T)=\sup_{\mathcal{R}\subset I_T}|\Phi_T(\mathcal{R})-\Phi_T^{\mathrm{rand}}(\mathcal{R})|+O\bigg(\frac{1}{(\log T)^{10}}\bigg),\tag{3.1}$$

其中，$\mathcal{R}\subset I_T$ 遍历 $\mathbb{R}^{2J}$ 的所有矩形盒，其边平行于坐标轴。由（3.1）可知，只需证明

$$\Phi_T(\mathcal{R})-\Phi_T^{\mathrm{rand}}(\mathcal{R})=O(M^{-1})\tag{3.2}$$

for

$$\mathcal{R} = \prod_{j=1}^{J} I_{1,j} \times \prod_{j=1}^{J} I_{2,j} \subset I_T,$$

其中，$I_{1,\ j} = [a_j, b_j]$ 且 $I_{2,\ j} = [c_j, d_j]$，对于 $j = 1, \ \ldots, J$。

根据定义可知

$$\Phi_T(\mathcal{R}) = \frac{1}{T}\int_T^{2T} \prod_{j=1}^{J} \mathbf{1}_{I_{1,j}}(\log|L_j(\sigma_T + it)|)\mathbf{1}_{I_{2,j}}(\arg L_j(\sigma_T + it))dt,$$

$$\Phi_T^{\mathrm{rand}}(\mathcal{R}) = \mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{J} \mathbf{1}_{I_{1,j}}(\log|L_j(\sigma_T, \mathbb{X})|)\mathbf{1}_{I_{2,j}}(\arg L_j(\sigma_T, \mathbb{X}))\Big].$$

由引理 3.2 和 $\Delta = M$，我们有

(3.3)

$$\Phi_T(\mathcal{R}) = \frac{1}{T}\int_T^{2T} \prod_{j=1}^{J} F_{I_{1,j},M}(\log|L_j(\sigma_T + it)|)F_{I_{2,j},M}(\arg L_j(\sigma_T + it))dt + O(M^{-1}),$$

$$\Phi_T^{\mathrm{rand}}(\mathcal{R}) = \mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{J} F_{I_{1,j},M}(\log|L_j(\sigma_T, \mathbb{X})|)F_{I_{2,j},M}(\arg L_j(\sigma_T, \mathbb{X}))\Big] + O(M^{-1}).$$

为确认上述 O 项，需要类似于以下的不等式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{T}\int_T^{2T} K(M(\log|L_1(\sigma_T + it)| - \alpha))dt\\ &\qquad = \frac{1}{M}\int_{-M}^{M}\Big(1 - \frac{|u|}{M}\Big)e^{-2\pi i\alpha u}\widehat{\Phi}_T(u, 0, \ldots, 0)du \ll \frac{1}{M},\end{aligned}$$

这由傅里叶反演、命题 3.1, [4, 引理 7.1]以及

$$\hat{K}(x) = \max(0, 1 - |x|).$$

由傅里叶反演、引理 3.2 和命题 3.1 可得

(3.4)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{T}\int_T^{2T} \prod_{j=1}^{J} F_{I_{1,j},M}(\log|L_j(\sigma_T + it)|)F_{I_{2,j},M}(\arg L_j(\sigma_T + it))dt\\ &= \int_{\mathbb{R}^{2J}}\Big(\prod_{j=1}^{J} \widehat{F}_{I_{1,j},M}(x_j)\widehat{F}_{I_{2,j},M}(y_j)\Big)\widehat{\Phi}_T(-\mathbf{x}, -\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y}\\ &= \int_{\substack{|x_j|,|y_j|\le M\\ j=1,\ldots,J}}\Big(\prod_{j=1}^{J} \widehat{F}_{I_{1,j},M}(x_j)\widehat{F}_{I_{2,j},M}(y_j)\Big)\widehat{\Phi}_T^{\mathrm{rand}}(-\mathbf{x}, -\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y} + O\Big(\frac{(M\log\log T)^{2J}}{(\log T)^{A_4}}\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{J} F_{I_{1,j},M}(\log|L_j(\sigma_T, \mathbb{X})|)F_{I_{2,j},M}(\arg L_j(\sigma_T, \mathbb{X}))\Big] + O\Big(\frac{(M\log\log T)^{2J}}{(\log T)^{A_4}}\Big).\end{aligned}$$

这里，我们还用到了这一点：

$$|\hat{F}_{[a,b],M}(y)| \le |\hat{\mathbf{1}}_{[a,b]}(y)| + O(M^{-1}) \ll \log\log T$$

对于 $|y| \le M$ 和 $|b-a| \ll \log\log T$。我们选择 A_4 足够大，使得

$$\frac{(M\log\log T)^{2J}}{(\log T)^{A_4}} \le \frac{1}{M},$$

因此，由 (3.3) 和 (3.4) 可得 (3.2) 成立。这就完成了定理 1.2 的证明。

Acknowledgements

本研究得到由韩国政府（MSIP）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目（编号：2019R1F1A1050795）的支持。

References

[1] J. Ha 和 Y.Lee，《黎曼ζ函数临界线附近的 a-值》，《数学分析及其应用杂志》464，（2018），838–863。[2] G.Harman 和 K.Matsumoto，《黎曼ζ函数值分布的差异估计，IV》，《伦敦数学会杂志》（2）50（1994），第1期，17–24。[3] D. Hejhal，《关于欧拉乘积与多元高斯分布》，《巴黎科学院院刊》，I辑337（2003），223–226。[4] Y.Lamzouri和 Y.Lee，《临界线附近线性组合的 L-函数的零点个数》，即将发表于《数学分析杂志》。预印本见 arXiv:2010.10490。[5] Y. Lamzouri、S.Lester 和 M. Radziwi ll，《黎曼ζ函数分布的差异界及其应用》，《数学分析杂志》139（2019），第2期，453–494。[6] Y. Lamzouri、S. Lester 和M.Radziwi l l，《黎曼ζ函数的有效普遍性定理》，《赫尔维蒂数学评论》93（2018），第4期，709–736。[7] Y.Lee，《Hecke L-函数的普遍性定理》，《数学杂志》271（2012），893–909。[8] Y.Lee，《临界线附近塞尔伯格中心极限定理的渐近展开》，《数论杂志》236（2022），323–333。[9] Y. Lee，《临界线附近 L-函数的塞尔伯格中心极限定理》。预印本见 arXiv:2301.01925。[10] K.Matsumoto，《黎曼ζ函数值分布的差异估计，I》，《算术学报》48（1987），167–190。[11] K.Matsumoto，《黎曼ζ函数值分布的差异估计，II》，《数论与组合学》，日本，1984。（世界科技出版公司，新加坡，1985）265–278。[12] K.Matsumoto，《黎曼ζ函数值分布的差异估计，III》，《算术学报》50（1988），315–337。[13] A.Selberg，《黎曼ζ函数理论的贡献》，Arch.Math.Naturvid. 48（1946），第5期，89–155。[14] A.Selberg，《对狄利克雷 L-函数理论的贡献》，《挪威奥斯陆科学院文书》I. 3（1946），1–62。[15] A. Selberg，《关于一类狄利克雷级数的新旧猜想与结果》，Bombieri，E.（编）等，《阿马尔菲解析数论会议论文集》，会议于1989年9月25日至29日在意大利阿马尔菲的马约里举行。萨莱诺：萨莱诺大学，367–385（1992）=论文集，第II卷，47–63，施普林格，1991。[16] K.M. Tsang，《黎曼ζ函数值的分布》，ProQuest LLC，美国密歇根州安娜堡，1984年，普林斯顿大学博士学位论文。

Department of Mathematics, Research Institute of Basic Sciences, Incheon National University, 119 Academy-ro, Yeonsu-gu, Incheon, 22012, Korea电子邮箱：leeyb@inu.ac.kr, leeyb131@gmail.com