arXiv:2304.03436v1 [econ.GN] 7 Apr 2023

杠杆动态与财富信念分布*

Bikramaditya Datta† Rajiv Sethi‡

2023年4月10日

摘要

经济中的总借款规模和借贷条件，取决于财富在对未来持有异质信念的潜在债权人之间如何分布。随着不确定性逐渐消除，这种分布会随时间演变：如果贷款全额偿还，财富便向乐观者倾斜；如果发生广泛违约，则向悲观者倾斜。我们在一个包含两种资产——风险债券和无风险现金——的经济模型中刻画这一过程。在每个时期内，给定按信念类型划分的既有财富分布，借款规模和借贷条件内生决定。在良好状态之后，总借款和债务面值都会上升，利率则会下降。在没有噪声的情况下，财富会趋向于与决定状态实现的客观概率存在系统性差异的信念，其中风险厌恶程度越高，乐观程度也越高。在存在噪声时，经济会经历若干表现强劲的时期，其间穿插着危机和停滞时期。

*谨以此文缅怀 Peter Flaschel，感谢他给予我们的指导与善意。我们感谢 Mausumi Das、E. Somanathan、两位匿名审稿人，以及德里经济学院研讨会的与会者，他们对早期版本提出了宝贵意见。

†印度理工学院坎普尔分校经济科学系
‡哥伦比亚大学巴纳德学院经济学系及圣菲研究所。

1 引言

债务在市场经济中发挥着多重且相互关联的作用——为支出提供资金、加剧经济对负向冲击的脆弱性、扩大投资者可选择的资产范围，并导致财富分布随时间发生变化。在债权人中，对未来状况最为乐观的人承担更多风险；如果事实证明他们的乐观有其道理，他们相较于更悲观的人便会更加富有。由此产生的财富分布变化——向信念更乐观的人倾斜——会影响放贷规模和借贷条件。它可能以自我强化的方式发挥作用，从而扩大并延长经济繁荣。同样，经济状况恶化会使财富分布转向那些起初更为悲观、因而选择安全投资的人。这一过程同样可能自我强化，并导致经济陷入停滞或表现不佳。

本文探讨放贷规模和借贷条件如何随时间演变，以及财富如何分布于乐观程度各异的个人之间。我们将此称为财富信念分布。我们的出发点是假设个人拥有异质先验信念，因此对未来经济状况各持己见。即使风险偏好相同，这也会导致投资组合选择存在差异。任何给定时期的财富信念分布决定了可持续的放贷总规模和债务价格。进而，这会影响正向和负向冲击发生的可能性。冲击实现后，如果贷款得到全额偿还，财富信念分布就会向乐观者一侧移动；如果发生违约，则会向悲观者一侧移动。因此，经济随时间的变化可以视为财富信念分布的随机演变，而放贷规模、借贷条件和违约概率则都由内生理论决定。

在任一时期，给定继承而来的财富信念分布，投资者可分为三类：只投资于风险债券的乐观者、只选择无风险现金的悲观者，以及选择两者组合的中间信念类型。存在两种可能的结果：良好状态下，所有贷款均全额偿还；而在不良状态下，则会发生部分违约。我们证明，良好状态之后，放贷规模会扩大——借款金额和到期应偿还金额都会增加。债券价格也会上涨，因此利率下降；并且，在给定信念的条件下，投资组合会转向减少债券配置。负面冲击则会产生截然相反的影响：放贷规模收缩，债券价格下跌；并且，在给定信念的条件下，投资组合会转向增加债券配置。在这一过程中，投资者的投资组合选择、财富信念分布、借款规模与借贷条件，以及违约可能性都会随时间演变。

该系统呈现出一些有趣的长期特性。当偏好为风险中性（或更一般地说，风险厌恶程度不足）时，长期财富分布会集中于相对于良好状态客观概率而言过度悲观的信念上。当偏好具有高度风险厌恶（相对风险厌恶系数大于 1）时，则会出现相反的情况。在这种情况下，信念会收敛到比良好状态客观概率更乐观的水平。对这些或许令人意外的发现，一种直观解释是：要使长期财富最大化，信念准确的个体必须像具有对数效用一样进行投资。当偏好偏离这一点时，过度乐观可以抵消过度的风险厌恶，而过度悲观则可以平衡过度的风险承担。

当违约的客观概率本身取决于借款规模和借贷条件，且这一过程中存在一些噪声时，经济会呈现出放贷量高、利率低、违约概率低的时期，但这些时期会被危机和停滞时期打断。

我们的分析区分了信念准确性与信念盈利能力。正如 De Long 等人（1990）所指出的，如果偏离信念准确性能够促使人们承担更多风险，那么从长远来看，这种偏离可能带来丰厚收益，因为金融市场会对风险给予回报。在我们的情形中，过度乐观或过度悲观哪一种比准确判断更有利可图，取决于偏好与财富增长最大化所需偏好之间的关系。具体而言，当信念准确的投资者使对数财富的期望值最大化时，长期财富最大化得以实现（Kelly，1956）。当偏好偏离这一状态时，过度悲观可以弥补过度冒险，而过度乐观则可以弥补风险承受意愿不足。

在我们的模型中，有利可图的信念（即使并不准确）会随着时间推移在总体中的占比增加，因为财富会不成比例地流向持有这类信念的主体。这一机制此前已由 Sethi（1996年）进行探讨，并且在形式上等价于这样一类学习模型：个体采用过去已被证明能够带来丰厚收益的预测规则（Brock 和 Hommes，1997年）。这可以与从数据中学习进行对比，即像 Blume 和 Easley（1982年）、Marcet 和 Sargent（1989年）以及 Evans 和 Honkapohja（2001年）所开创的相关文献那样，将预期与实际结果进行比较。[1] 在我们的模型中，这种从数据中学习会导致主体采纳更加准确的信念，但从长期来看却会侵蚀其财富。

另一种学习方法基于模仿性传染，如 Weidlich 和 Haag 所述。

[1]参见 Alchian（1950年）、Friedman（1953年）、Cootner（1964年）和 Fama（1965年）关于这一思想的不同表述：持有错误信念的投资者相较于作出更准确判断的投资者会蒙受损失，并最终在竞争压力下消失。Sandroni（2000年）、Blume 和 Easley（2006年）、Kets 等人（2014年）以及 Dindo 和 Massari（2020年）指出了市场选择假说不成立的条件。

（1983年）、Lux（1995年）、Franke（2014年）和 Flaschel 等人（2018年）。虽然我们不考虑这种学习机制，但我们推测，将其纳入模型会影响收敛速度以及高杠杆状态与低杠杆状态之间发生转变的可能性，而不会实质性地影响我们模型的定性特征。

将信贷视为经济波动驱动力的观点在经济学中由来已久，至少可追溯至 Hawtrey（1919）和 Lavington（1925）。杠杆在推动经济扩张、为周期性危机埋下伏笔方面所发挥的作用，是海曼·明斯基（1975年、1982年、1986年）著作中的核心主题；明斯基认为，他的研究延伸了凯恩斯（1936）的思想。[2]2008—2009年全球金融危机之后，人们重新关注这些机制的作用（Admati 和 Hellwig，2013 ）。由此产生的部分文献采用了异质先验信念框架（ Geanakoplos，2010 ；Fostel 和 Geanakoplos，2008）。[3] 本文的方法直接建立在 Che 和 Sethi（2014）的基础上，不同之处在于：每一时期的借款总额设定为在给定财富信念分布的条件下所能筹集的最大金额，而非外生给定。该模型嵌入一系列时期之中，因此可以考察杠杆和财富分布的演变。与 Geanakoplos（2010）一样，模型显示，繁荣时期杠杆较高、资产价格上涨，而危机时期杠杆较低、资产价格下跌。

关于杠杆动态与财富信念分布的两种截然不同的观点*关于资本主义经济体如何产生周期性危机，存在两种截然不同的观点。一种观点源自维克塞尔、弗里希和斯卢茨基，认为经济从根本上是稳定的，但会受到不可预测的冲击，这些冲击会导致逐渐减弱的传播效应。另一种观点则认为，即使没有冲击，经济本质上也是不稳定的，而非线性效应会使轨迹保持有界。Zarnowitz（1985年）将前者归类为外生理论，将后者归类为内生理论。[4] 本文构建的模型在方法论上接近 Aoki and Yoshikawa（2007），但无法明确归入上述任何一类。冲击对于诱发高杠杆状态与低杠杆状态之间的转变十分重要，但正反馈效应会导致经济可能大幅且持续地偏离稳态增长。

[2]已有不少研究尝试对明斯基对这一主题较为非正式的论述中隐含的动态过程进行建模，包括 Guttentag 和 Herring（1984）、Taylor 和 O’Connell（1985）、Sethi（1992，1995）、Skott（1994）、Semmler（1987）、Chiarella 等（2000）、Gatti 等（2005）、Charpe 等（2009）、Eggertsson 和克鲁格曼（2012）、Keen（2013）以及 Bhattacharya 等（2015）。综述请参见 Nikolaidi 和 Stockhammer（2017）。[3]Harrison 和 Kreps（1978）展示了放宽共同先验假设的价值，尤其是在资产价格和交易研究中。预期的测量与建模是一个活跃的研究领域；关于综述，请参见 D’Acunto 等（2023），作者在文中记录了信念中的偏差、横截面离散度以及随时间变化的波动性。[4] Gabisch 和 Lorenz（1987）将前者称为依赖冲击的理论，将后者称为独立于冲击的理论。依赖冲击的理论目前在研究主流中占主导地位，不过独立于冲击的理论历史悠久（卡尔多，1940；希克斯，1950；古德温，1951；托宾，1975；Grandmont，1985；Foley，1987）。关于独立于冲击的方法的全面综述及其进一步发展，请参见 Chiarella 等（2012，2013，2015）。

2 模型

2.1 预备知识

考虑一个以$t = 1$、2、.....为索引的无限时期序列。令B_t表示t时期的总量借款。我们只考虑期限为一个时期的贷款，通过发行Q_t债券来实现，每张债券的面值为1，价格为p_t。借款会带来随机的总量收入Y_t，其取决于总量冲击的实现结果，该冲击可能为正，也可能为负。如果贷款未能全额偿还，放贷者可以收回这笔收入。

任一时期的借款规模和借贷条件，以及已实现收入的两种可能取值，都是内生的，并取决于潜在放贷者之间的财富分布。有一组投资者对支配总不确定性的概率分布持有异质信念。类型为 θ 的投资者认为，发生正向冲击的概率为 θ。可能的信念集合有限，表示为 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2..., \theta_n\}$，其中 $0 = \theta_1 < \theta_2 <... < \theta_n = 1$。请注意， Θ 只是可能信念的集合；正如下文所示，持有极端信念（相对于客观概率分布而言）的投资者所拥有的财富份额，会随时间内生地趋近于零。

模型的一个关键特征是财富在不同信念类型之间的分布，我们称之为财富信念分布。令$W_t(\theta_i)$表示类型为 θ_i 的投资者在 t 时期的财富。那么，投资者在 t 时期持有的总财富为

$$\bar{W}_t \equiv \sum_{\theta_i \in \Theta} W_t(\theta_i).$$

令$f_t(\theta_i) = W_t(\theta_i)/\bar{W}_t$表示信念类型 θ_i 持有的总财富份额，因此财富的分布函数为

$$F_t(x) = \sum_{\theta_i \leq x} f_t(\theta_i).$$

这一分布会随时间演变，其变化取决于投资组合选择、债券价格和冲击实现，而这些因素都是内生理论的。

按每个时期的总财富对变量进行标准化会更方便。因此，将单位财富的借款定义为$b_t \equiv B_t/\bar{W}_t$，单位财富的债券发行定义为$q_t \equiv Q_t/\bar{W}_t$。令$\bar{y}_t = Y_t/W_t$表示第t期的标准化收入，它取决于冲击实现以及（标准化）借款水平b_t，具体方式将在下文说明。

在某一时期开始时给定财富分布$f_t(\theta)$ 后，变量b_t、q_t和p_t 将由内生理论决定。这将影响好状态与坏状态的概率分布，以及y_t的分布。y_t 的实现值随后决定财富分布

下一时期的$f_{t+1}(\theta)$，这一过程不断重复。因此，经济的演变可以描述为财富分布的随机序列 $\{f_t(\theta)\}_{t=1}^{\infty}$，其他所有变量均由内生理论决定。

2.2 借款规模与借贷条件

根据总量冲击的实现情况，收入结果有两种可能：高值 $h(b_t)$ 和低值 $l(b_t)$。我们假设，相对于总财富，借款数量越多，所选择的项目质量就会逐步下降，即使项目成功，其收益也会降低。也就是说，尽管在任一状态下，收入都会随着借款总额的增加而上升，但上升速度会逐渐降低。[5] 具体而言，我们假设 h 和 l 都是凹函数，其中 h 是严格凹函数（我们允许 l 为线性函数）。此外，这些函数满足 $l(b_t) \leq b_t \leq h(b_t)$；当 $b_t \in (0,1)$ 时，不等式严格成立。

借款规模受到一个上限约束，即良好状态下必须有足够的收入来全额偿还所有贷款。我们假设这一约束是绑定的：

$$q_t = h(b_t). \tag{1}$$

其理由在于，项目会为借款人带来显著的无形且不可质押收益，这促使他们只要能够获得融资，就会实施这些项目。因此，良好状态下的偿还金额会耗尽所有可用收入，而在不良状态下必然会发生（部分）违约。债券价格必须满足

$$p_t q_t = b_t \tag{2}$$

以满足该借款需求。

为了完成模型，我们需要说明债权人的行为。令 σ_{it} 表示在 t 期既定条件下，信念为 θ_i 的投资者将财富投资于债券的份额。当然，这取决于 t 期的债券价格，也取决于借款总额，因为借款总额会影响违约时的回收额。若发生正向冲击，投资组合中债券份额为 σ_{it} 的投资者将获得

$$1 - \sigma_{it} + \frac{\sigma_{it}}{p_t}$$

每单位投资财富，因为她将购买 $1/p_t$ 面值为 1 的债券，这些债券会全额偿还，其余财富则持有无风险且无利息的现金。有条件地

[5] 这一假设确保了每个时期内均衡的唯一性，并使我们能够聚焦于系统随时间的演变。总量投资文献中的这一假设相当标准，至少可追溯到凯恩斯（1936）关于资本边际效率的论述，但它排除了通过网络效应及其他来源产生的规模报酬递增。我们确实在第5节讨论了杠杆对良好状态发生概率的正反馈效应。

受到负向冲击时，每张债券支付 $l(b_t)/q_t$，因此每单位投资财富对应的收益将为

$$1 - \sigma_{it} + \frac{\sigma_{it}}{p_t}\frac{l(b_t)}{q_t}.$$

我们假设债权人根据满足恒定相对风险厌恶条件的偏好，选择投资组合以最大化期望效用。也就是说，他们选择 σ_{it} 以最大化

$$\theta_i u\left(1 - \sigma_{it} + \frac{\sigma_{it}}{p_t}\right) + (1-\theta_i)u\left(1 - \sigma_{it} + \frac{\sigma_{it}}{p_t}\frac{l(b_t)}{q_t}\right), \tag{3}$$

其中

$$u(w) = \frac{w^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

对于某个风险厌恶参数 $\gamma \neq 1$，且当 $\gamma = 1$ 时，$u(w) = \log(w)$。由于具有此类偏好的投资组合选择不受财富影响，因此，在任何给定时期，所有持有信念 θ_i 的投资者都会选择相同的债券投资份额 σ_{it}。这使我们能够专注于不同信念类型之间的财富分布，而无需考虑持有相同信念的个体之间 的财富分布。最后一个均衡条件指出，借款总额必须等于投资者希望贷出的总额：

$$b_t = \sum_{\theta_i \in \Theta} \sigma_{it} f_t(\theta_i) \tag{4}$$

模型的最后一个要素是支配冲击实现的客观概率分布，我们允许该分布取决于借款规模。令 $\pi(b_t)$ 表示借款为 b_t 时发生正向冲击的概率。请注意，该系统具有自我指涉性，因为真实分布可能取决于财富在不同主观信念类型之间的分布方式。

给定时期 t开始时的财富分布 $f_t(\theta)$，条件（**1–4**）共同决定 b_t、q_t、p_t 的取值以及投资组合份额 σ_{it}。借款规模进而决定正向冲击的概率 $\pi(b_t)$。冲击的实现会改变财富信念分布：正向冲击使这一分布向投资了债券的乐观者倾斜，而负向冲击则使其向选择安全资产的悲观者倾斜。这决定了下一时期的财富信念分布，随后这一过程不断重复。

3 均衡与动态

在常相对风险厌恶偏好的范围内，风险中性对应于 $\gamma = 0$，而对数效用对应于$\gamma = 1$。我们将在分析中重点考察这两种情形，但也会给出其他偏好参数下的数值结果。

3.1 风险中性

在风险中性偏好下，对于任意给定的时期t，所有信念类型都会选择将资金全部投资于债券或全部持有现金，但阈值信念类型可能例外，它可能¯对两者无差异。定义 θ_t 为临界信念类型，使得

$$\bar{\theta}_t = \min\{\theta \in \Theta \mid 1 - F_t(\theta) < b_t\}. \tag{5}$$

也就是说，若要满足资金需求b_t，就必须诱使临界信念类型——最悲观的投资者——进行放贷；所有比其更乐观者的财富总和不足以满足这一需求。在均衡中，持有这一信念的投资者会将全部或部分财富用于投资，而更乐观的投资者会将全部财富用于投资，更悲观的投资者则会把财富留作现金。

假设现金不赚取利息，只有在以下条件成立时，临界信念类型才会在t 时投资债券

$$\bar{\theta} + (1 - \bar{\theta})\frac{l(b_t)}{q_t} \geq p_t.$$

这是因为p_t 购买的债券在良好状态下支付一个单位，而在发生违约（部分违约）时，在不良状态下支付$l(b_t)/q_t$。利用（1–2），上式可写为：

$$\bar{\theta}\frac{h(b_t)}{b_t} + (1 - \bar{\theta})\frac{l(b_t)}{b_t} \geq 1. \tag{6}$$

如果上述不等式严格成立，投资者会用全部财富购买债券。如果该条件取等号，临界信念类型将无差异，因此可以将部分财富保留为现金。

给定时期 t开始时的财富分布 $f_t(\theta)$，借款规模和借贷条件以及边际信念类型均可唯一确定。

命题1. 给定任意财富信念分布 $f_t(\theta)$，$\bar{\theta}_t$、b_t、q_t 和 p_t 的值均可唯一确定。

唯一的均衡借贷水平 b_t 决定正向冲击的客观概率，而实际发生的冲击则生成后续信念分布。正向冲击会使财富分布向发放贷款者倾斜，而负向冲击则会使财富分布向未发放贷款者倾斜。这是因为在任何非零借贷水平下，$l(b) < b < h(b)$。因此，正向冲击意味着 $F_{t+1}(\theta) \leq F_t(\theta)$，而负向冲击意味着 $F_{t+1}(\theta) \geq F_t(\theta)$。

此外，如果正向冲击后放贷规模发生变化，那么放贷规模会上升，借贷条件对放贷者变得更加不利，而更乐观的信念类型将成为边际类型。负向冲击的影响与此类似（方向相反）：

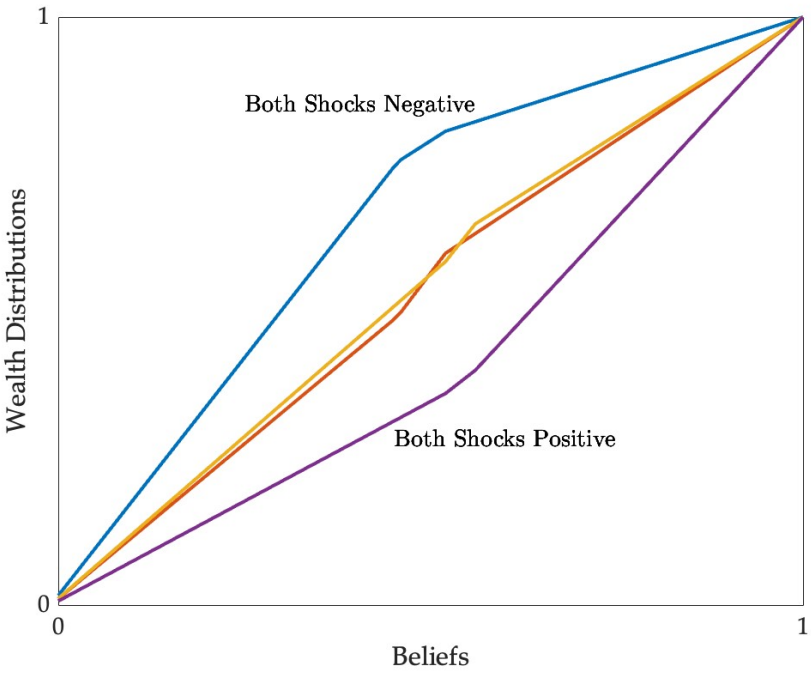


图1：两个时期后可能出现的财富分布

命题2. 如果 $y_t = h(b_t)$，则 $b_{t+1} \geq b_t, q_{t+1} \geq q_t, p_{t+1} \geq p_t$, 且 $\bar{\theta}_{t+1} \geq \bar{\theta}_t$。如果 $y_t = l(b_t)$，则这些不等式反向成立。

一连串正向冲击会使财富信念分布向乐观者倾斜，从而让借款人能够以更有利的借贷条件增加借款。也就是说，尽管借款额不断上升，贷款利率却在下降。

举例来说，考虑一个数值示例。假设$h(b) = \sqrt{b}$ 且$l(b) = b/2$。可能的信念集合为 $\Theta = (0, 0.01, ..., 0.99, 1)$，财富的初始信念分布为均匀分布。考虑前两个时期，此时共有四种可能路径。第一期均衡中，我们有$b = 0.4752$、$p = q = 0.6894$，以及 $\theta = 0.53$。信念为 $\theta \geq \theta$的乐观者各自购买1.4506份面值为1的债券，而其余投资者较为悲观，选择持有现金。良好状态发生后，乐观者获得全额偿付。总财富上升至1.2141，乐观者持有的财富份额上升至69.48%。坏状态发生后，出现部分违约，总财富降至0.7624，乐观者持有的财富份额降至44.40%。

第二期结束后，根据出现的冲击类型，可能会形成四种不同的财富分布。这些分布如图1所示。当两个状态都不好时，财富会向悲观者转移；而当两个状态都好时，乐观者会兴旺起来。但在另外两种中间情形下，分布函数会相交，财富分布取决于

冲击发生的确切顺序。

路径依赖之所以产生，是因为选择在第二期投资的人群会受到第一期结果的影响。当第一期冲击为正时，临界信念类型会上升，一些在第一期投资并获利的投资者会选择不在第二期投资。这是因为债券价格上涨了——尽管他们的信念没有改变，但他们在第一期价格下已接近无差异，因此在第二期价格更高时选择不投资。于是，这部分投资者因继续持有现金而避开了第二期的不利冲击。如果冲击的顺序相反，处于边际位置的投资者会在初始时期亏损，随后在第二期再次投资（因为债券价格和临界信念类型都会下降）。因此，他们的处境会比先遇到有利冲击时更差。

3.2 对数效用

现在考虑 $\gamma = 1$ 的情形，其偏好为$u(w) = \text{对数}(w)$。信念为 θ_i 的投资者随后选择 σ_{it} 以最大化

$$\theta_i \log\left(1 - \sigma_{it} + \frac{\sigma_{it}}{p_t}\right) + (1-\theta_i)\log\left(1 - \sigma_{it} + \frac{\sigma_{it}}{p_t}\frac{l(b_t)}{q_t}\right). \tag{7}$$

定义 H_t 和 L_t 如下：

$$H_t \equiv \frac{1}{p_t} - 1, \qquad L_t \equiv 1 - \frac{1}{p_t}\frac{l(b_t)}{q_t}.$$

其中，H_t 表示正向冲击发生时，每单位投资于债券的财富所获得的收益；L_t 表示负向冲击发生时，每单位投资于债券的财富所遭受的损失。二者均为正值，并取决于三元组 $(b_t、p_t、q_t)$。定义 $\theta_t^{\min}$ 和 $\theta_t^{\max}$ 如下：

$$\theta_t^{\min} \equiv \frac{L_t}{H_t + L_t}, \qquad \theta_t^{\max} \equiv \frac{H_t L_t + L_t}{H_t + L_t}.$$

可以验证，$0 < \theta_t^{\min} < \theta_t^{\max} < 1$，且最优投资组合选择满足：

$$\sigma_{it} = \begin{cases} 0 & \text{if } \theta_i \le \theta_t^{\min} \\ \frac{\theta_i H_t - (1-\theta_i)L_t}{H_t L_t} & \text{if } \theta_t^{\min} < \theta_i \le \theta_t^{\max} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{8}$$

如果以下条件成立，那么风险中性情形下得到的唯一性和比较静态结果也可推广到对数效用情形：

假设1. 函数 $h(b)$ 和 $l(b)$ 满足 $\lim_{b\downarrow 0} h(b)/b = \infty$, $\lim_{b\downarrow 0} l(b)/b < 1$, 且 $l(1) < 1 = h(1)$。

这些条件确保均衡中的借贷水平处于内点，并足以保证在对数效用情形下解的唯一性以及明确的比较静态。

命题3. 假设 $\gamma = 1$ 且假设*1*成立。那么，对于任意财富信念分布 $f_t(\theta)$，b_t、q_t和 p_t 的取值均唯一确定。若 $y_t = h(b_t)$，则 $b_{t+1} \geq b_t, q_{t+1} \geq q_t$，且 $\mathrm{p}_{t+1} \geq p_t$,。若 $y_t = l(b_t)$，则这些不等式反向成立。

这在对数效用情形下重现了命题1–2的内容；命题1–2适用于风险中性情形。下一节讨论长期动态时，我们将看到考察这种情形的重要性。

4 长期动态

暂且假设各状态的客观概率分布是外生的，不受财富分布和放贷规模的影响。也就是说，$\pi(b) = \pi^*$ 对于某个$\pi^* \in (0,1)$成立。在这种情况下，我们可以考察财富信念分布在长期内是否会收敛于准确状态，也就是说，全部财富是否都会集中于预期正确或“理性”的信念类型。

结果表明，从长期来看，财富分布会收敛到系统性不准确的信念，且风险厌恶程度与乐观程度呈正相关。图 2 展示了这一现象：图中给出了三条样本路径，分别对应不同的风险偏好，而良好状态的客观概率则外生固定为 $\pi^* = 0.8$。只有在临界情形$\gamma = 1$ （对应对数效用）下，信念才会近似收敛到准确值。风险中性偏好下，长期信念分布过度悲观（相对于良好状态的客观概率而言）。而当偏好比对数效用基准更风险厌恶时，长期信念则会过度乐观。

要理解这一现象，可以回顾 Kelly（1956）的结论：从长期来看，能使财富积累最多的投资策略对应于对数效用。相较之下，信念准确的风险中性个体在任何给定价格下，都会过度投资于债券。从长期来看，他们的财富增长速度低于信念较为悲观的风险中性个体。悲观信念抵消了风险中性所带来的过度承担风险。出于类似原因，当风险厌恶程度相对于对数效用基准过高时，乐观信念有助于抵消承担足够风险的意愿不足。

为了探究这一发现的稳健性，我们针对不同的风险厌恶参数和良好状态概率对模型进行模拟。具体而言，我们考虑 $\gamma \in \{0, 0.5、1、1.5、2\}$ 和

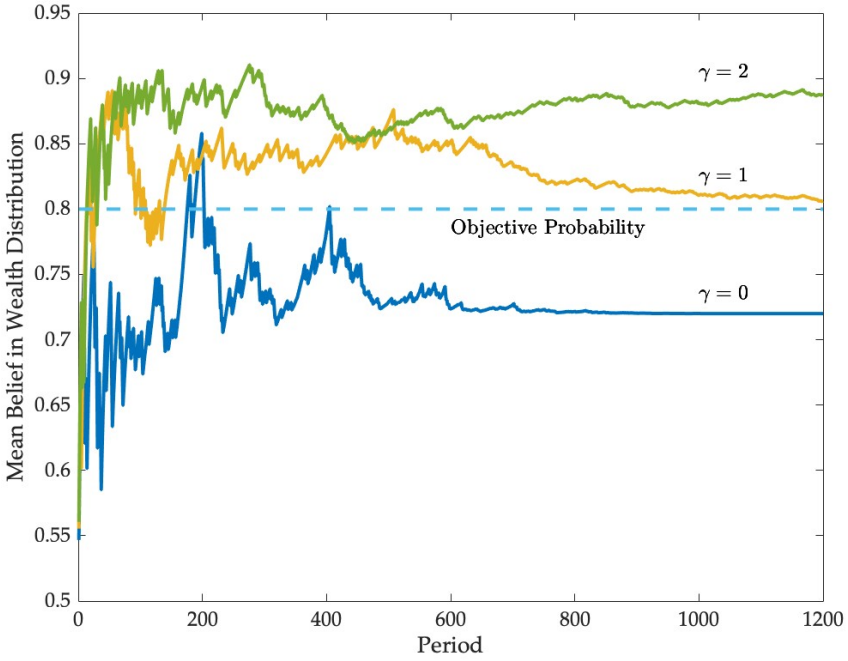


图2：不同风险厌恶程度下平均信念的演变

$\pi^* \in \{0.2、0.4、0.6、0.8\}$。经过5,000个时期后，财富信念分布的均值见表1和图3。[6] 模拟数据中显现出两种规律。首先，对于任意（外生给定的）良好状态概率，风险厌恶程度越高，长期信念就越乐观。其次，对数效用在长期内的准确度最高。

	$\pi^* = 0.2$	$\pi^* = 0.4$	$\pi^* = 0.6$	$\pi^* = 0.8$
$\gamma = 0.0$	0.16	0.26	0.47	0.71
$\gamma = 0.5$	0.18	0.36	0.55	0.76
$\gamma = 1.0$	0.20	0.41	0.61	0.81
$\gamma = 1.5$	0.22	0.45	0.67	0.85
$\gamma = 2.0$	0.24	0.50	0.72	0.88

表1： γ 和 π^*取不同值时长期的平均信念

[6]表中每个单元格都基于相同的随机数种子，因此对于任意给定的 π^*值，所用的已实现状态序列也相同。这排除了随机性对不同风险偏好之间比较的影响。模拟结果表明，不同的随机数种子会导致财富的极限信念分布不同，但表中揭示的定性特征依然保持不变。也就是说，该系统具有长期路径依赖的特征。

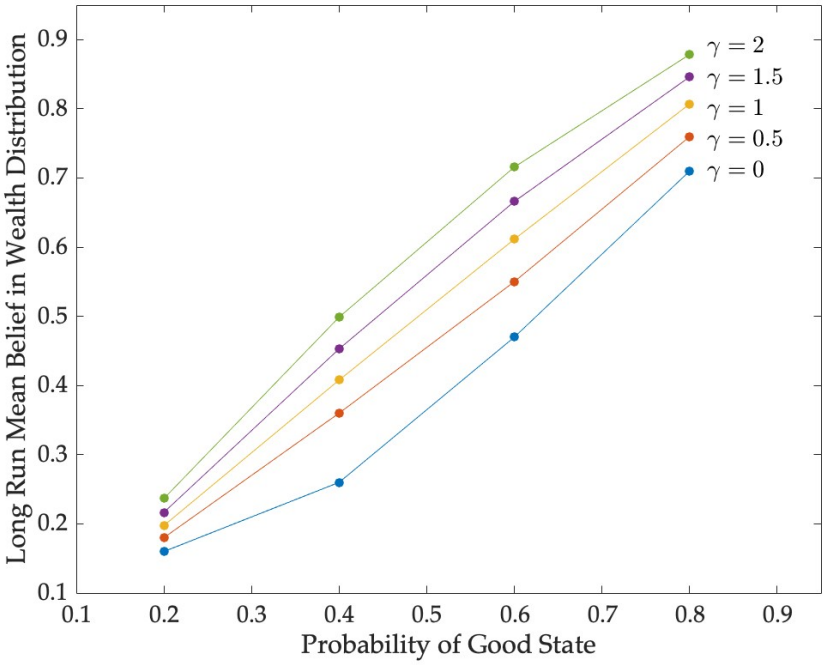


图 3： γ 和 π^*取不同值时的长期平均信念

接下来，我们放宽违约概率外生给定这一假设，并允许违约概率取决于杠杆程度。

5 内生违约概率

到目前为止，我们考察了异质信念投资者之间基于财富分布的借款规模和借贷条件，并将良好状态的客观概率视为外生给定。但经济是一个自指系统——任何状态的客观概率本身都取决于主观信念的分布。在本节中，我们允许好状态与坏状态的可能性（以及因此产生的违约概率）取决于借款规模相对于总财富的大小。也就是说，我们允许函数 $\pi(b)$ 为非退化函数。

在这种情况下，我们可以这样问：在以下意义上， θ 的哪些取值会自我实现？假设在时期t，所有财富都由信念类型 θ_i 持有。那么，该信念类型持有的债券份额 σ_{it} 将等于总体借款水平b_t，而市场出清条件（4）则是多余的。均衡值$(b_t$、p_t、$q_t)$ 由（1–2）以及最大化问题（3）的解给出。

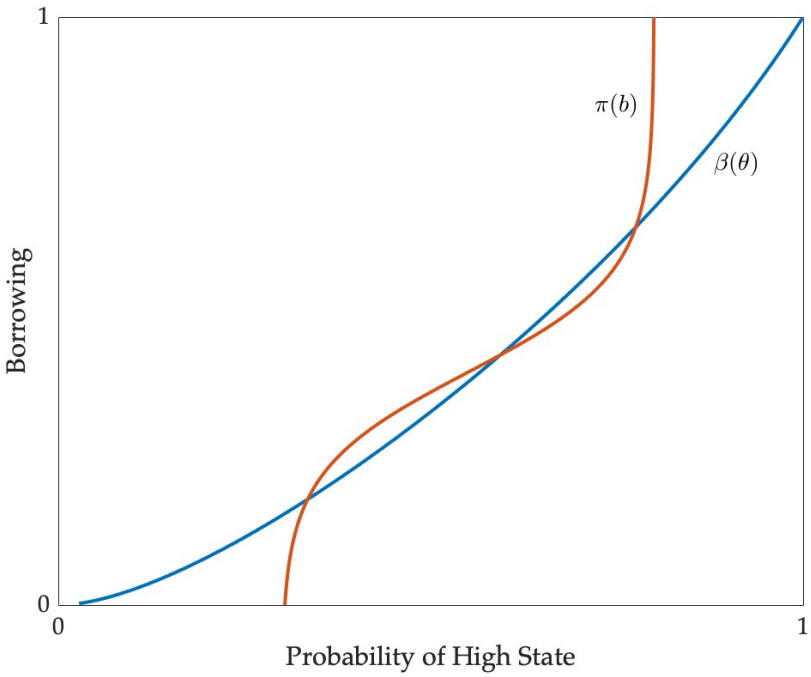


图4：给定信念时的借款，以及给定借款时全额偿还的概率

令 $\beta(\theta)$ 表示在所有财富均由信念类型θ持有时，均衡中出现的b 值。容易验证，鉴于h 和l的凹性，该函数必定递增。对于对数效用的情形，函数 $\beta(\theta)$ 可由解（8）得出。特别是，当解为内点时， $\beta(\theta)$ 是满足以下条件的唯一借款b 值。

$$\frac{\theta}{1-l(b)/b} - \frac{1-\theta}{h(b)/b-1} = b$$

该函数的一个具体情形如图4所示，其中h 和l 的设定与第3.1节中的示例相同。

图4还展示了函数 $\pi(b)$的一种可能设定，该函数表示给定借款规模时处于高状态的客观概率。[7] 如果客观概率分布是外生的，这会是一条垂直线。在图示示例中， $\pi(b)$ 是一个递增函数：借款和支出水平越高，经济活动就越活跃，从而违约的可能性越低，尽管违约仍有可能发生。[8]

图4中两条曲线的交点可以视为理性预期均衡：

[7]该图基于 $\pi(b) = 0.3 + 0.5/(1+\exp(4.75-12b))$，良好状态的概率介于(0.3,0.8)之间。[8]这种关系有多种微观基础解释，最早可追溯至Diamond（1982）；例如，Cooper and John（1988）和Aoki and Yoshikawa（2007）也讨论了其他解释。

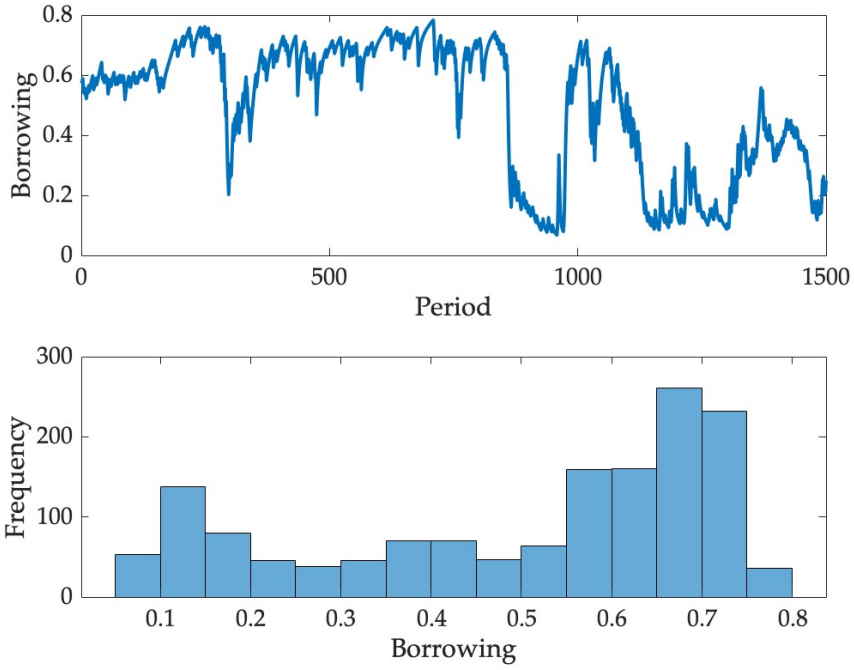


图5：杠杆动态的一个样本路径

如果所有主体都持有相应的信念，他们就会以某种水平借款，从而产生与该信念相符的客观概率。在图中所示的例子里，关于违约概率存在多种自我实现的信念。这表明经济可能在高杠杆状态与低杠杆状态之间交替。

为了探究这一猜想，我们对模型进行模拟，运行 2,500 个时期，并加入一些噪声，以确保财富分布不会简单地收敛到单一信念。具体而言，在每个时期，我们对继承而来的财富信念分布 $f_t(\theta)$ 与均匀财富信念分布取加权平均，后者的权重为 0.01。结果时间序列的最后 1500 个时期显示在图5上方的面板中。图5下方的面板显示了模拟时间序列最后 1,500 个时期内杠杆的分布。可以看到，经济在低杠杆、高名义利率（低债券价格）且违约可能性较高的状态中停留了相当长的时期。在这些时期，信念的财富分布集中于悲观者。连续的正向冲击能够使经济转向更有利的体制，此时借款较多、名义利率较低、违约概率较低，财富则集中于乐观者。这些体制之间的转变是内生且不规则发生的。

6 结论

我们探讨了一个相对简单的模型，其中个体对决定总量结果的二元状态具有异质先验信念。动态变化的关键驱动因素是财富信念分布，它决定了均衡中的借款规模和借贷条件。随着不确定性逐渐消除，这一信念分布本身也会随之演变：若贷款得到全额偿还，则会转向有利于乐观者；若发生违约，则会转向有利于悲观者。具有这些特征的经济会经历这样一条发展轨迹：在高杠杆、低违约概率的时期之间，穿插着停滞时期。

这项研究还可以从多个方向加以拓展。例如，我们没有考虑学习。个体可以通过两种方式学习：观察数据，或观察他人。在这个模型中，那些试图从数据中学习的人，长期来看确实能够形成准确的信念，但这并无利可图，因为持有这类信念的人，其相对财富最终会随时间推移而不断减少。如果人们通过采用成功的信念和行为向他人学习，那么由此形成的财富动态将与本文所描述的非常相似。

我们还只考虑了单期期贷款，值得进一步考察期限不同的债务、股权融资，以及针对不同期限的信念。这样便可以在考察杠杆的同时，也分析流动性。

鉴于本文分析具有抽象性质，我们没有提出明确的政策建议。但一个重要的政策问题是，财政和货币当局是否存在某些工具，能够使停滞的经济转向经济活动水平更高的状态。传统政策工具与财富信念分布之间似乎没有明显联系，不过，在大规模违约发生时进行干预，可能会产生影响。

我们的分析允许存在异质信念，但尚未探讨异质风险偏好的影响。另一种方法则可以反过来，假设风险偏好具有异质性，但信念相同。在这种情况下，我们讨论的将是不同偏好类型（而非信念类型）之间的财富分布。更一般地，我们可以同时允许信念和偏好存在异质性，并考察具有一组多维特征的各类主体之间的财富分布。这似乎是一个很有前景的推广方向，我们将其留待未来研究。

附录

命题*1*的证明。 为清晰起见，我们省略时间下标，因为时间下标对于时期内分析不起作用。对于每个 $\theta_i \in \Theta$，定义一个借贷水平 α_i，使信念类型i 在持有现金和债券之间无差异。根据（6），可通过求解下式得到该水平

$$\theta_i \frac{h(\alpha_i)}{\alpha_i} + (1-\theta_i)\frac{l(\alpha_i)}{\alpha_i} = 1.$$

由于l 是凹的，且h 是严格凹的，因此解是唯一的，并且满足 $0 = \alpha_1 < ... < \alpha_n = 1$。定义 $\omega_i = 1 - F(\theta_i) + f(\theta_i)$ 为持有财富的信念类型中，至少与 θ_i同样乐观的信念类型所占的财富份额。于是我们有 $1 = \omega_1 > ... > \omega_n = f(\theta_n)$。由于 $\alpha_1 < \omega_1$ 且 $\alpha_n > \omega_n$，必定存在某种信念类型 θ_i，使得 $\alpha_i < \omega_i$ 且 $\alpha_{i+1} \geq \omega_{i+1}$。

我们考虑两种情况。

若 $\alpha_i \leq \omega_{i+1}$，则存在唯一的均衡$b = \omega_{i+1}$，在该均衡中，信念类型 θ_{i+1}、.....、 θ_n 将全部投资于债券，而其余类型则全部持有现金。尽管类型 θ_i 在此均衡中可能无差异，但如果持有信念 θ_i 的类型中哪怕只有一小部分将资金投资于债券，该类型就会严格偏好持有现金。

若 $\alpha_i > \omega_{i+1}$，则存在唯一均衡 $b = \omega_{i+1} + s_i f(\theta_i)$，在该均衡中，信念类型 θ_{i+1}、.....、 θ_n 将全部投资于债券，而类型 θ_i 也会投资其财富份额$s_i \in (0,1)$，其余类型则持有现金。临界类型无差异，其余类型则严格偏好投资或不投资。

¯因此，借贷规模b 和临界类型 θ 由财富的信念分布决定。由式（1）可确定债券发行规模，由式（2）可确定债券价格。 □

命题*2*的证明。 我们先证明正向冲击的情形，负向冲击的论证类似。与命题1的证明相同，定义 α_i 为根据式（6），类型 θ_i在借款与放贷之间无差异时的借贷水平；定义 ω_i 为根据分布$f_t(\theta)$，类型 θ_i 及所有比其更乐观的类型所持有的财富份额。此外，定义 ω_i' 为根据分布$f_{t+1}(\theta)$，类型 θ_i 及所有比其更乐观的类型所持有的财富份额。正向冲击后，对所有$i > 1$， $\omega_i' > \omega_i$。回顾（命题1的证明）：满足 $\alpha_i \leq \omega_{i+1}$ 的类型在时期t不投资。由于 $\alpha_i \leq \omega_{i+1}$ 意味着正向冲击后 $\alpha_i \leq \omega_{i+1}'$，这类类型在时期$t+1$也不会投资。¯ ¯因此 $\theta_{t+1} \geq \theta_t$。

接下来考虑放贷规模。反设在正向冲击之后，$b_{t+1} < b_t$。那么，根据（6），在t 时无差异的任何类型，在$t+1$时都会严格倾向于放贷，而所有原本严格倾向于放贷的类型将继续放贷。鉴于.....的占比

这些类型的总财富增加了，我们必有 $b_{t+1} \geq b_t$，这与假设矛盾。因此$b_{t+1} \geq b_t$。这立即意味着 $h(b_{t+1}) \geq h(b_t)$，因此由 (1) 得$q_{t+1} \geq q_t$。又由 (2) 得$p_{t+1} = b_{t+1}/h(b_{t+1})$，而$h$ 的凹性意味着$p_{t+1} \geq p_t$。 □

命题*3*的证明。我们将$b_t - \sum_{\theta_i} \sigma_{it} f_t(\theta_i)$ 视为b_t 的函数，并证明存在唯一的b_t 使得

$$b_t - \sum_{\theta_i \in \Theta} \sigma_{it} f_t(\theta_i) = 0,$$

满足市场出清条件（4）。这证明了b_t的唯一性。由$q_t = h(b_t)$可得q_t 的唯一性，而$p_t = b_t/h(b_t)$唯一确定了p_t。

利用（1）和（2），我们可以将信念类型为 θ 的投资者的投资组合选择最优解改写为关于b_t 的如下形式:

$$\sigma_{it} = \begin{cases} 0 & \text{if } \theta \leq \theta_t^{\min,b} \\ \frac{\theta}{L_t^b} - \frac{1-\theta}{H_t^b} & \text{if } \theta_t^{\min,b} < \theta_i \leq \theta_t^{\max,b} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases},$$

其中

$$L_t^b \equiv 1 - \frac{l(b_t)}{b_t},\ H_t^b \equiv \frac{h(b_t)}{b_t} - 1,$$

and

$$\theta_t^{\min,b} \equiv \frac{L_t^b}{L_t^b + H_t^b},\ \theta_t^{\max,b} \equiv \frac{H_t^b L_t^b + L_t^b}{H_t^b + L_t^b}.$$

注意， σ_{it} 是b_t的连续函数。我们还观察到， $\theta^{\min,b}\mathrm{t}$和 $\theta^{\max,b}\mathrm{t}$是$\mathrm{b}_t$ 的严格递增函数，而 $\theta/\mathrm{L}_t^b - (1-\theta)/\mathrm{H}_t^b$是$\mathrm{b}_t$的严格递减函数。此外，对于$\mathrm{b}_t \in (0,1)$， $0 < \theta^{\min,b}\mathrm{t} < \theta^{\max,b}\mathrm{t} < 1$。这表明 σ_{it} 是b_t的递减函数。在假设1下，当$\mathrm{b}_t = 1$时，我们有 $\theta^{\min,b}\mathrm{t} = 1$，因此对所有 θ 均有 $\sigma_{it} = 0$，从而$\mathrm{b}_t - \sum_{\theta_i} \mathrm{f}_t(\theta_i)\sigma_{it} = 1 > 0$。当$\mathrm{b}_t \downarrow 0$时，我们有 $\theta^{\min,b}\mathrm{t} \downarrow 0$，且 $\theta^{\max,b}\mathrm{t} = 1 - \lim^{b\downarrow 0}\mathrm{l(b)/b} < 1$。因此，存在某个 θ，使得当$\mathrm{b}_t \downarrow 0$时 $\sigma_{it} = 1$。由此，对于$\mathrm{b}_t \downarrow 0$， $\mathrm{b}_t - \sum_{\theta_i} \mathrm{f}_t(\theta_i)\sigma_{it}$ 为负。由于 σ_{it} 是b_t的连续函数，$\mathrm{b}_t - \sum_{\theta_i} \mathrm{f}_t(\theta_i)\sigma_{it}$ 也是b_t的连续函数。此外，对于$\mathrm{b}_t \in (0,1)$，$\mathrm{b}_t - \sum_{\theta_i} \mathrm{f}_t(\theta_i)\sigma_{it}$ 是b_t 的严格递增函数。这表明存在唯一的b_t 使得$\mathrm{b}_t - \sum_{\theta_i} \mathrm{f}_t(\theta_i)\sigma_{it} = 0$。

接下来，我们证明正向冲击下的比较静态结果；负向冲击的论证类似。注意， σ_{it} 是 θ的弱递增函数，因此，对正向冲击发生可能性持有更高信念的投资者，会将其财富中更高（或相同）比例投资于债券。因此，正向冲击会导致$F_{t+1}(\theta) \leq F_t(\theta)$，也就是说，投资较多者的相对财富份额增加了。反设$b_{t+1} < b_t$

在正向冲击之后。注意，在市场出清条件中，贷款供给是不同投资者所投资财富份额的加权平均值，权重等于各投资者在总财富中的份额。正向冲击使总财富份额向投资较多者转移。由于 σ_{it} 是 b的弱递减函数，因此每个人都（弱）倾向于贷出更多。由此必有$b_{t+1} \geq b_t$，这就产生了矛盾。因此$b_{t+1} \geq b_t$。这立即意味着$h(b_{t+1}) \geq h(b_t)$，进而由（1）得$q_{t+1} \geq q_t$。又由（2）可知$p_{t+1} = b_{t+1}/h(b_{t+1})$，而$h$ 的凹性意味着$p_{t+1} \geq p_t$。

□

参考文献

Anat Admati 和 Martin Hellwig。《银行家的新衣》。普林斯顿大学出版社，2013年。Armen A. Alchian。不确定性、演化与经济理论。《政治经济学杂志》，58 (3):211–221，1950年。Masanao Aoki 和 Hiroshi Yoshikawa。《重构宏观经济学：统计物理学与组合随机过程视角》。剑桥大学出版社，2007年。Sudipto Bhattacharya、Charles AE Goodhart、Dimitrios P Tsomocos 和 Alexandros P Var- doulakis。对明斯基金融不稳定假说的重新审视。《货币、信贷与银行杂志》，47(5):931–973，2015年。Lawrence Blume 和 David Easley。如果你这么聪明，为什么不富有？完全市场与不完全市场中的信念选择。《《计量经济学》》，74(4):929–966，2006年。Lawrence E Blume 和 David Easley。学习理性。《经济理论杂志》，26(2): 340–351，1982年。William A Brock 和 Cars H Hommes。通往随机性的理性路径。《《计量经济学》》，65(5):1059– 1095，1997年。Matthieu Charpe、Peter Flaschel、Christian Proa˜no 和 Willi Semmler。过度消费、信贷配给与救助性货币政策：明斯基视角。《欧洲经济学与经济政策杂志：干预》，6(2):247–270，2009年。Yeon-Koo Che 和 Rajiv Sethi。信贷市场投机与资本成本。《美国经济学杂志：微观经济学》，6(4):1–34，2014年。Carl Chiarella、Peter Flaschel、Gangolf Groh 和 Willi Semmler。《非均衡、增长与劳动力市场动态：宏观视角》。施普林格科学与商业媒体，2000年。Carl Chiarella、Peter Flaschel 和 Willi Semmler。《重构凯恩斯主义宏观经济学第一卷：局部视角》。劳特利奇出版社，2012 年。Carl Chiarella、Peter Flaschel 和 Willi Semmler。《重构凯恩斯主义宏观经济学第二卷：综合方法》。劳特利奇出版社，2013年。Carl Chiarella、Peter Flaschel 和 Willi Semmler。《重构凯恩斯主义宏观经济学第三卷：宏观经济活动、银行业与金融市场》。劳特利奇出版社，2015年。Russell Cooper 和 Andrew John。凯恩斯主义模型中的协调失灵协调。《经济学季刊》，103(3):441–463，1988年。

Paul H. Cootner。《股票市场价格的随机性》。麻省理工学院出版社，1964年。Francesco D’ Acunto、Ulrike Malmendier 和 Michael Weber。数据告诉我们什么关于通胀预期？载于 R¨ udiger Bachmann、Giorgio Topa 和 Wilbert van der Klaauw 编，《经济预期手册》，第 133–161页。爱思唯尔出版社，2023年。J Bradford De Long、Andrei Shleifer、Lawrence H Summers 和 Robert J Waldmann。金融市场中的噪声交易者风险。《政治经济学杂志》，98(4):703–738，1990年。Peter A Diamond。搜索均衡中的总需求管理。《政治经济学杂志》，90(5):881–894，1982年。Pietro Dindo 和 Filippo Massari。动态经济中的群体智慧。《理论经济学》，15(4):1627–1668，2020年。Gauti B Eggertsson 和 Paul Krugman。债务、去杠杆化与流动性陷阱：Fisher-Minsky-Koo 方法。《经济学季刊》，127(3):1469–1513，2012年。George W Evans 和 Seppo Honkapohja。《宏观经济学中的学习与预期》。普林斯顿大学出版社，2001年。Eugene F. Fama。股票市场价格的行为。《商业杂志》，38(1):34–105，1965年。Peter Flaschel、Matthieu Charpe、Giorgos Galanis、Christian R Proa˜no 和 Roberto Veneziani。具有内生总情绪动态的宏观经济与股票市场互动。《经济动态与控制杂志》，91:237–256，2018年。Duncan K Foley。资本主义经济中的流动性—利润率周期。《《经济行为与组织杂志》》，8(3):363–376，1987年。Ana Fostel 和 John Geanakoplos。杠杆周期与焦虑型经济。《美国经济评论》，98(4):1211–44，2008年。Reiner Franke。总情绪动态：一种典型建模方法及其令人愉悦的非线性特征。《《结构变化与经济动态》》，31:64–72，2014年。Milton Friedman。《实证经济学论文集》。芝加哥大学出版社，1953年。G¨unter Gabisch 和 Hans-Walter Lorenz。《商业周期理论：方法与概念综述》。施普林格出版社，1987年。Domenico Delli Gatti、Corrado Di Guilmi、Edoardo Gaffeo、Gianfranco Giulioni、Mauro Gallegati 和 Antonio Palestrini。研究商业波动的新方法：异质性互动主体、标度律与金融脆弱性。《《经济行为与组织杂志》》，56(4): 489–512，2005年。

John Geanakoplos. 杠杆周期。*NBER*宏观经济学年刊，24(1):1–66，2010年。Richard M Goodwin. 非线性加速器与商业周期的持续性。《计量经济学》，第1–17页，1951年。Jean-Michel Grandmont. 关于内生竞争性经济周期。《计量经济学》，第995–1045页，1985年。Jack Guttentag and Richard Herring. 信贷配给与金融失序。《金融学杂志》，39(5):1359–1382，1984年。J Michael Harrison and David M Kreps. 异质性预期下股票市场中的投机性投资者行为。《经济学季刊》，92(2):323–336，1978年。Ralph G Hawtrey.《货币与信用》。Longmans, Green and Co., 1919年。John R Hicks.《对贸易周期理论的贡献》Clarendon Press，1950年。Nicholas Kaldor. 贸易周期模型。《经济学杂志》，第78–92页，1940年。Steve Keen. 大缓和与大衰退的明斯基货币模型。《经济行为与组织杂志》，86:221–235，2013年。John Larry Kelly. 信息率的新解释。《贝尔系统技术杂志》，35(4):917–926，1956年。Willemien Kets, David M Pennock, Rajiv Sethi, and Nisarg Shah. 投注策略、市场选择与群体智慧。载于第二十八届*AAAI*人工智能会议，2014年。约翰·梅纳德·凯恩斯。《就业、利息和货币通论》。Harcourt, Brace，1936年。Frederick Lavington.《贸易周期：商业活动节奏性变化成因论述》。PS King，1925年。Thomas Lux. 羊群行为、泡沫与崩盘。《经济学杂志》，105(431):881–896，1995年。Albert Marcet and Thomas J Sargent. 自我指涉线性随机模型中最小二乘学习机制的收敛。《经济理论杂志》，48(2):337–368，1989年。Hyman P Minsky. 约翰·梅纳德·凯恩斯。哥伦比亚大学出版社，1975年。Hyman P Minsky.《“它”还会再次发生吗？》《不稳定与金融论文集》。M.E. Sharpe，1982年。

Hyman P Minsky. 稳定不稳定的经济。耶鲁大学出版社，1986年。Maria Nikolaidi and Engelbert Stockhammer. 明斯基模型：结构化综述。《经济调查杂志》，31(5):1304–1331，2017年。Alvaro Sandroni. 市场是否偏好能够准确预测的主体？《计量经济学》，68(6):1303–1341，2000年。Willi Semmler. 带有金融扰动的宏观经济极限环。《经济行为与组织杂志》，8(3):469–495，1987年。Rajiv Sethi. 学习动态与金融不稳定假说。《经济学杂志》，56(1):39–70，1992年。Rajiv Sethi. 金融实践的演化动力学。《城市经济学》，46(3):246–277，1995年。Rajiv Sethi. 投机市场中的内生制度转换。《结构变化与经济动态》，7(1):99–118，1996年。Peter Skott. 关于系统性金融脆弱性的建模。载于Amitava Dutt编，《分析政治经济学新方向》。爱德华·埃尔加出版社，1994年。Lance Taylor and Stephen A O'Connell. 一场明斯基危机。《经济学季刊》，100（增刊）:871–885，1985年。James Tobin. 经济衰退与经济萧条的凯恩斯主义模型。《美国经济评论》，65(2):195–202，1975年。Wolfgang Weidlich and G¨unter Haag.《定量社会学的概念与模型：相互作用人群的动力学》。施普林格出版社，1983年。Victor Zarnowitz. 历史视角下关于商业周期的近期研究：理论与证据综述。《经济文献杂志》，23(2):523–580，1985年。