arXiv:2304.03455v1 [math.GN] 7 Apr 2023

超空间的拟度量化性

CHUAN LIU 和 FUCAI LIN

Abstract. 设空间 X，令 $(CL(X)\ \tau_V)$、$(CL(X)\ \tau_{locfin})$ 和 $(CL(X)\ \tau_F)$ 分别表示 X 上所有非空闭子集构成的集合 $CL(X)$，它们分别赋予 Vietoris 拓扑、局部有限拓扑和 Fell 拓扑。我们证明，$(CL(X)\ \tau_V)$ 拟可度量，当且仅当 X 是可分度量空间，且 X 的所有非孤立点构成的集合是紧致的；$(CL(X)\ \tau_{locfin})$ 拟可度量或可对称化，当且仅当 X 可度量，且 X 的所有非孤立点构成的集合是紧致的；$(CL(X)\ \tau_F)$ 拟可度量，当且仅当 X 是半紧且可度量的。作为应用，我们对 [13] 中的一个猜想给出了否定答案。

1. 引言与预备知识

函数 $d\colon X\times X\to\mathbb{R}^+$ 称为集合 X 上的度量，如果对于每个 $x,y,z\in X$，(i) $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；(ii) $d(x,y)=d(y,x)$；(iii) $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$。

若函数 d 满足（i'）、（ii）（分别为（i）、（iii）），则称其为对称函数（或拟度量），其中（i'）：若 $d(x,y)=0$，则 $x=y$。若存在与 $\mathscr{F}$ 相容的拟度量（即所有 ε-邻域构成该拓扑的一个基），则称拓扑空间（$X,\mathscr{F}$）为拟可度量空间。若空间 X 上存在满足以下条件的对称函数 d，则称其为可对称化空间：当且仅当对于每个 $x\in U$，都存在 $\epsilon>0$ 使得 $B(x,\epsilon)\subset U$ 时，$U\subset X$才是开集；其中 $B(x,\epsilon)=\{y\in X\colon\ d(x,y)<\epsilon\}$。

粗略地说，拟度量空间就像缺少对称性的度量空间。拟度量在拓扑理论、数学分析、概率论和理论计算机科学中有许多应用，例如可见 [2, 5, 6, 10, 16]。在 [13], 中，我们给出如下猜想 1：

猜想 1 [12]：设 X 是一个空间。那么 $(CL(X)\ \tau_V)$ 是拟可度量的，当且仅当 $X=C\oplus D$，其中 X 是一个紧致度量空间，D 是一个可数离散空间。

本文对上述猜想 1 给出了否定回答，见定理 2.6。此外，[13] 中的作者证明了 $(CL(X)\ \tau_V)$ 可对称化，当且仅当X 是紧可度量的。然而，这对于拟可度量性并不成立。本文主要给出超空间拟度量化的一些刻画。给定一个拓扑空间 X，我们将其超空间定义为以下集合：

$CL(X)=\{A\subset X\colon\ A$ 在 $X\}$中是非空闭集，$\mathcal{K}$
$(X)\ =\{K\subset X\colon\ K$ 是非空紧致集$\}$,

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：54B20；次要分类号：54E35、54E45。
Key words and phrases. 拟可度量空间；超空间；可度量空间；γ-空间；半紧。第二作者得到福建省自然科学基金重点项目（编号：2020J02043）和国家自然科学基金（编号：11571158）的资助。

$\mathcal{F}_n(X) = \{A \subset X : \ 1 \leq |A| \leq n\}$、 $n \in \mathbb{N}$ 和
$\mathcal{F}(X) = \{A \subset X : \ A \neq \emptyset$ 且 A 为有限集$\}$.
显然，我们有 $\mathcal{F}_n(X) \subset \mathcal{F}(X) \subset \mathcal{K}(X) \subset CL(X)$ 和 $\mathcal{F}(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(X)$。
若 $\mathcal{U}$ 是空间 X 的一个非空子集族，令

$$\mathcal{U}^- = \{A \in CL(X) : A \cap U \neq \emptyset, U \in \mathcal{U}\}$$

and

$$\mathcal{U}^+ = \{A \in CL(X) : A \subset \bigcup \mathcal{U}\};$$

特别地，若 $\mathcal{U} = \{U\}$，则分别用 U^- 和 U^+ 表示 $\mathcal{U}^-$ 和 $\mathcal{U}^+$。对于空间 X 的任意开子集 U_1，.....，U_k，令

$$\langle U_1, ..., U_k \rangle = \{H \in CL(X) : H \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i \text{ and } H \cap U_j \neq \emptyset, 1 \leq j \leq k\}.$$

我们赋予 $CL(X)$ 由以下集合生成的 Vietoris 拓扑：

$$\{\langle U_1, \ldots, U_k \rangle : U_1, \ldots, U_k \text{ are open subsets of } X, k \in \mathbb{N}\}.$$

我们在 $CL(X)$ 上赋予 Fell 拓扑，该拓扑定义为由以下两个族生成的拓扑基：

$$\{U^- : U \text{ is any non-empty open in } X\}$$

and

$$\{(K^c)^+ : K \text{ is a compact subset of } X, K \neq X\}.$$

$CL(X)$ 上的局部有限拓扑 τ_{locfin} 具有由形如 V^+ 和 $\mathcal{U}^-$ 的所有子集组成的子基，其中 V 遍历 X 的所有开子集，而 $\mathcal{U}$ 遍历 X 的所有局部有限开子集族。我们分别用 $(CL(X)\ \tau_V)$、$(CL(X)\ \tau_F)$ 和 $(CL(X)^{\tau_{locfin}})$ 表示带有 Vietoris 拓扑、Fell 拓扑和局部有限拓扑的超空间 $CL(X)$。对于任意 T_2 空间 X，众所周知，在分别带有 Vietoris 拓扑、Fell 拓扑和局部有限拓扑的超空间中，$F_1(X)$ 与 X 同胚，因此我们认为所有超空间都含有 X 的一个闭副本。

设 $I(X) = \{x \in X : \ x$ 是 $X\}$ 的一个孤立点，$NI(X) = X \setminus I(X)$；则 $X = I(X) \cup NI(X)$。除非另有明确说明，本文中的所有拓扑空间均假定为 T_2。令 $\mathbb{N}$ 表示所有正整数构成的集合，ω 表示第一个无限序数。对于未定义的记号和术语，读者可参阅 [8], [9] 和 [14]。

2. MAIN RESULTS

本节将给出空间 X 的一些刻画，使得 $(CL(X)\ \tau_V)$、$(CL(X)\ \tau_F)$ 和 $(CL(X)^{\tau_{locfin}})$ 分别是拟度量。首先，我们给出一些引理和定义。

引理 2.1. [12,引理 2.3] 设 K 是拓扑空间 X 的一个紧子集，且$\{U_i : i \leq k\}$ 是 K的一个开覆盖。则对每个 $i \leq k$，存在 X 的一个紧子集K_i，使得当且仅当 $U_i \cap K \neq \emptyset$时，$K_i \subset U_i$、$K = \bigcup_{i \leq k} K_i$ 和 $K_i \neq \emptyset$。

引理 2.2. ([9,定理 10.2]) 空间 X 是拟可度量的，当且仅当存在函数 $g : \omega \times X \to \tau$，使得 (i) 对每个 $x \in X$，$\{g(n, x) : n \in \omega\}$ 是 x 处的一个基；(ii) 对每个 $x \in X$ 和 $n \in \mathbb{N}$，$y \in g(n + 1, x) \Rightarrow g(n + 1, y) \subset g(n, x)$。

引理 2.3。 [14, 引理 2.3。1] $\langle U_1$、.....、$U_n \rangle \subset \langle V_1$、.....、$V_m \rangle$ 当且仅当 $\bigcup_{j=1}^{n} U_j \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j$，并且对于每个 V_i，存在 U_k 使得 $U_k \subset V_i$。

引理 2.4。设 X 为可数紧空间，若（CL（X） τ_V）的每个闭可数紧子集都是一个 G_δ-集，则 X 是紧可度量的。

证明。由于 $\mathcal{F}_1(X)$ 与 X 同胚，因此 $\mathcal{F}_1(X)$ 是 $(CL(X)\ \tau_V)$ 的闭可数紧子集，故它是 $(CL(X)\ \tau_V)$ 中的一个 G_δ-集。根据[12, 引理 2.5], 的证明，我们得出 X 有一个 G_δ-对角线，因此由 [9, 定理 2.14]可知， X 是紧可度量的。□

注 2.5。设 X 为可数紧空间；由 [15, 定理 1.2]，可知，$(CL(X)\ \tau_V) = (CL(X)^{\tau_{locfin}})$。因此，若每个闭可数紧的 $(CL(X)^{\tau_{locfin}})$ 都是一个 G_δ-集，则 X 是紧可度量的。

若存在一个函数 $g\colon \omega \times X \to \tau$ 满足以下条件，则空间 (X,τ) 是一个 γ-空间：(i) 对每个 $x \in X$，$\{g(n,x)\colon n \in \omega\}$ 是 x 处的一个基；(ii) 对每个 $n \in \omega$ 和 $x \in X$，存在 $m \in \omega$，使得 $y \in g(m,x)$ 蕴含 $g(m,y) \subset g(n,x)$。

回顾一下，空间 X 是一个 D_1-空间 [1] ，如果 X 的每个闭子集都有一个可数局部基。

现在我们可以证明本文的主要定理之一。

定理 2.6. 对于空间 X，以下陈述等价。

(1) $(CL(X)\ \tau_V)$ 是拟可度量的；(2) $(CL(X)\ \tau_V)$ 是一个 γ-空间；(3) $(CL(X)\ \tau_V)$ 的每个闭可数紧子集都有一个可数基；(4) X 是可分、可度量的，且 $NI(X)$ 是紧致的。

证明. 蕴含 (1)⇒ (2) 是显然的。由 [9, 推论 10.8 (ii)、定理 10.6(iii)], 可得蕴含 (2) ⇒ (3)。我们只需证明 (3) ⇒(4) 以及 (4) ⇒(1)。

(3) ⇒ (4)。由于 $(CL(X)\ \tau_V)$ 是第一可数的，因此由 X 可知其是可分的且为一个 D_1- 空间 [13, 定理 5.15]。于是，根据 [7, 定理 1], , (X) 是可数紧的，因而 $NI(X)$ 由引理 2.4 可知是紧致且可度量的。故由 [7, 定理 7], X 是可分且可度量的。

(4) ⇒ (1). 设 (X,d) 是一个可分度量空间，且 $NI(X)$ 紧致。如果 X 是紧可度量的，则由 [11, 定理 3.3] 可知，$(CL(X)\ \tau_V)$ 是紧可度量的，因此它是拟可度量的。现在假设 X 不是紧致的。于是，根据归纳法，我们可以构造 $\{\mathcal{G}_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ 的有限开覆盖序列以及 $\{\mathcal{K}_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ 的有限紧致覆盖序列，使得 $NI(X)$ 和 $NI(X)$ 满足以下 (a)-(c) 条件。

(a) 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，族 $\mathcal{G}_n = \{B(x_{n,i}, 1/2^{q_n})\colon i \le l_n\}$ 是 $NI(X)$ 的覆盖，其中 l_n 是 $\mathbb{N}$ 的有限子集，$\{x_{n,i}\colon i \le l_n\} \subset NI(X)$ 且 $q_n < q_{n+1}$;

(b) 对于每个 $n \in \mathbb{N}$， $\mathcal{G}_{n+1}$ 中的每个元素都包含于 $\mathcal{G}_n$ 的某个元素中，而 $\mathcal{G}_n$ 的每个元素都包含 $\mathcal{G}_{n+1}$ 的某个元素。

(c)对于每个 $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K}_n = \{K_i(n)\colon\ i \le l_n\}$ 使得 $K_i(n) \subset B(x_{n,i}, 1/2^{q_n})$ 对每个$i \le l_n$ 且 $NI(X) = \bigcup\{K_i(n)\colon\ i \le l_n\}$，其中每个 $K_i(n)$ 都是紧致的。

事实上，族 $\{B(x,1/2)\colon x \in NI(X)\}$ 是 $NI(X)$ 的一个开覆盖；由于$NI(X)$是紧致的，不失一般性，我们可以假设每个 $B(x,1/2) \neq X$，于是存在 $NI(X)$ 的一个极小有限子集 $\{x_{1,i}\colon i \le l_1\}$ ，使得 $\mathcal{G}_1 = \{B(x_{1,i},1/2)\colon i \le l_1\}$ 是 $NI(X)$ 的一个有限覆盖。此外，令 $q_1 = 1$。由引理 2.1，存在 $NI(X)$ 的一个有限覆盖 $\mathcal{K}_1 = \{K_i(1)\colon i \le l_1\}$ ，它由$NI(X)$ 的紧子集构成，且满足 $K_i(1) \subset B(x_{1,i},1/2^{q_1})$，以及 $NI(X) = \bigcup\{K_i(1)\colon i \le l_1\}$。假设 $\mathcal{G}_n = \{B(x_{n,i},1/2^{q_n})\colon i \le l_n\}$ 和 $\mathcal{K}_n = \{K_i(n)\colon i \le l_n\}$ 已构造，其中

l_n、 $q_n \in \mathbb{N}$和 $x_{n,\ i} \in NI(X)$ 对每个 $i \leq l_n$都成立，且 $NI(X) = \bigcup_{i \leq l_n} K_i(n)$。令 q_{n+1}为满足 $q_{n+1} > q_n$ 且.....的最小自然数

$$1/2^{q_{n+1}} \leq d(K_i(n), X \setminus B(x_{n,i}, 1/2^{q_n}))/4$$

对所有 $i \leq l_n$。任取 $i \leq l_n$。则 $\{B(x, 1/2^{q_{n+1}}) : x \in K_i(n)\}$ 是 $K_i(n)$ 的一个开覆盖，并且对每个 $x \in K_i(n)$， $B(x, 1/2^{q_{n+1}}) \subset B(x_{n,i}, 1/2^{q_n})$，因此存在 $\{B(x, 1/2^{q_{n+1}}) : x \in K_i(n)\}$ 中 $K_i(n)$ 的一个极小有限子覆盖 $\mathcal{B}'_{n+1,i}$。现在令 $\mathcal{G}_{n+1} = \bigcup\{\mathcal{B}'_{n+1,i} : i \leq l_n\}$。由引理 2.1，存在有限紧子集 $\{K_i(n+1) : i \leq l_{n+1}\}$，使得 $K_i(n+1) \subset B(x_{n+1,i}, 1/2^{q_n+1})$，且 $NI(X) = \bigcup\{K_i(n+1) : i \leq l_{n+1}\}$。随后可直接验证， $\{\mathcal{G}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 和 $\{\mathcal{K}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 满足 (a)-(c)。

现在，对于闭子集 $K \subset NI(X)$，令

$$\mathcal{G}'_n(K) = \{B(x_{n,i}, 1/2^{q_n}) \in \mathcal{G}_n : B(x_{n,i}, 1/2^{q_n}) \cap K \neq \emptyset\};$$

然后 $\mathcal{G}'_n(K)$ 是 K 的开覆盖。显然， $\{\mathcal{G}'_n(K) : n \in \mathbb{N}\}$ 满足上述 (1)-(2)。对于每个 $n \in \mathbb{N}$和闭子集 $K \subset NI(X)$，我们记 $\mathcal{G}'_n(K) = \{U_{n,m}(K) : m \leq r_{n,K}\}$，其中 $r_{n,K} \in \mathbb{N}$。此外，对于 $NI(X)$ 中满足 $K \subset L$的任意闭子集 K 和 L，我们有 $\mathcal{G}'_n(K) \subset \mathcal{G}'_n(L)$。首先，我们证明以下断言成立。

断言：对于任意紧子集 K和 L在 $NI(X)$中，如果对于某个$n \in \mathbb{N}$有 $K \subset \bigcup \mathcal{G}'_{n+1}(L)$，那么，对于任意$m \leq r_{n+1,K}$，我们有$U_{n+1,m}(K) \subset U_{n,j}(L)$，对于某个$U_{n,j}(L) \in \mathcal{G}'_n(L)$。

由于$U_{n+1,m}(K) \cap K \neq \emptyset$和 $K \subset \bigcup \mathcal{G}'_{n+1}(L)$，我们有$U_{n+1,m}(K) \cap U_{n+1,m'}(L) \neq \emptyset$对某些$m' \leq r_{n+1,L}$成立；于是$U_{n+1,m'}(L) \in \mathcal{B}'_{n+1,i}$，并且由我们的构造显然可知，对某个 $i \in \mathbb{N}$， $U_{n+1,m'}(L) \cap K_i(n) \neq \emptyset$。在构造中任取满足 $K_i(n) \subset U_{n,j}(L)$ 的$U_{n,j}(L) \in \mathcal{G}'_n(L)$。固定任意的$y \in U_{n+1,m}(K)$；则对任意 $x \in K_i(n) \cap U_{n+1,m'}(L)$，有 $d(K_i(n), y) \leq d(x, y)$。任取$x' \in U_{n+1,m}(K) \cap U_{n+1,m'}(L)$；则$d(K_i(n), y) \leq d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y) < (1/2^{q_{n+1}} + 1/2^{q_{n+1}}) \times 2 \leq 4 \times d(K_i(n), X \setminus U_{n,j}(L))/4 = d(K_i(n), X \setminus U_{n,j}(L))$，因此$y \in U_{n,j}(L)$。因此，我们有$U_{n+1,m}(K) \subset U_{n,j}(L)$。断言的证明至此完成。

由于 $X = I(X) \cup NI(X)$ 是可分且可度量的，因此 $I(X)$是一个可数集。因此令 $I(X) = D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$。此外，对于 X 的任意闭子集A，存在 D 的子集 $D_1(A)$以及 $NI(X)$ 的一个闭子集 $K(A)$，使得$A = D_1(A) \cup K(A)$。接下来我们定义一个 g-函数 $G(n, A)$，其满足引理 2.2。我们考虑以下两种情形。

情形 1： $X = D \oplus NI(X)$，其中 D 是可数离散子空间，且 $NI(X)$ 是紧可度量空间。不失一般性，我们可以假设 $d(D, NI(X)) = 1$。任取 X 的闭子集 A。我们如下定义 $G(k, A)$（$1'$）-（$3'$）：

($1'$) 如果 $D_1(A) = \emptyset$，则令

$$G(k, A) = \langle U_{k,1}(K(A)), ..., U_{k,r_{k,K(A)}}(K(A))\rangle.$$

($2'$) 若 $D_1(A)$ 是有限集，则令 $D_1(A) = \{d_{n_i(A)} : i \leq r(A)\} \neq \emptyset$，其中每个$n_i(A) \in \mathbb{N}$且 $r(A) \in \mathbb{N}$；现在令

$$G(k, A) = \langle \{d_{n_1(A)}\}, ..., \{d_{n_{r(A)}(A)}\}, U_{k,1}(K(A)), ..., U_{k,r_{k,K(A)}}(K(A))\rangle$$

当 $K \neq \emptyset$时，并令

$$G(k, A) = \langle \{d_{n_1(A)}\}, ..., \{d_{n_{r(A)}(A)}\}\rangle$$

当 $K = \emptyset$时。

(3′) 若 $D_1(A)$ 是一个无限集，则令 $D_1(A)=\{d_{n_j(A)}:\ j\in\mathbb{N}\}$ 使得 $\{n_j(A):j\in\mathbb{N}\}$ 是 $\mathbb{N}$ 的一个无限子序列，且 $n_i(A)<n_j(A)$（若 $i<j$）；现在令

$$G(k,A)=\langle\{d_{n_1(A)}\},...,\{d_{n_k(A)}\},D_1(A),U_{k,1}(K(A)),...,U_{k,r_{k,K(A)}}(K(A))\rangle$$

当 $K\neq\emptyset$ 时，并令

$$G(k,A)=\langle\{d_{n_1(A)}\},...,\{d_{n_{r(A)}(A)}\}\rangle$$

当 $K=\emptyset$ 时。

我们证明 $G(n,A)$ 满足引理 2.2 中的 (i) 和 (ii)。证明分为以下几种情形。

子情形 1.1: $D_1(A)$ 是无限的，且 $K(A)\neq\emptyset$。

首先，我们证明 $G(n,A)$ 满足 (i)。对每个 $n\in\mathbb{N}$，令 $D_{1n}(A)=\{d_{n_i}(A):\ i\leq n\}$。设 $\langle V_1,...,V_l\rangle$ 是 $(CL(X)\ \tau_V)$ 中 A 的一个邻域；则每个 V_i 要么包含某个 $d_{n_i}(A)$，要么 $V_i\cap K(A)\neq\emptyset$。由于 $K(A)\subset\bigcup\{V_i:\ V_i\cap K(A)\neq\emptyset\}$，我们将 $\{V_i:V_i\cap K(A)\neq\emptyset\}=\{V_{i_j}:\ j\leq p\}$ 改写为，其中 $p\in\mathbb{N}$ 和 $p\leq l$。由引理 2.1，对每个 $j\leq p$，存在一个非空紧致子集 $K_j(A)\subset V_{i_j}$，使得 $\bigcup\{K_j(A):\ j\leq p\}=K(A)$。对每个满足 $V_j\cap K(A)=\emptyset$ 的 $j\leq l$，令 $m_j=\min\{n_i:\ d_{n_i}\in V_j\}$。任取满足 $1/2^n<\min\{d(K_j(A)\ X\setminus V_{i_j})/2:\ j\leq p\}$ 且 $n>\max\{m_j:\ j\leq l,V_j\cap K(A)=\emptyset\}$ 的 $n\in\mathbb{N}$；则 $G(n,A)\subset\langle V_1,...,V_l\rangle$。事实上，对每个 $j\leq p$，若 $B(x,1/2^n)\cap K_j(A)\neq\emptyset$，则 $B(x,1/2^n)\subset V_{i_j}$；由于 $\mathcal{G}'_n(K(A))=\bigcup_{j\leq p}\mathcal{G}'_n(K_j(A))$，可知 $\mathcal{G}'_n(K(A))$ 中的每个元素$U_{n,m}(K(A))$ 都包含于某个 V_{i_j} 中，而每个 V_{i_j} 都包含 $\mathcal{G}'_n(K(A))$ 中的某个元素$U_{n,m}(K(A))$。于是容易看出

$$D_1(A)\cup(\bigcup\{U_{n,m}(K(A)):m\leq r_{n,K(A)}\})\subset\bigcup\{V_i:i\leq l\}$$

且每个 V_i 都包含某个 $d_{n_i\ (A)}$ 或 $U_{n,\ m}(K(A))$。因此，由引理 2.3，$G(n,A)\subset\langle V_1,...,V_l\rangle$。因此，$\{G(n,A):\ n\in\mathbb{N}\}$ 是 $(CL(X)\ \tau_V)$ 中 A 的局部基。

现在，我们证明 $G(n,A)$ 满足 (ii)。任取 $B=D_1(B)\cup K(B)\in G(n+1,A)$。我们证明 $G(n+1,B)\subset G(n,A)$。显然，对于每个 $m\leq r_{n+1,K(A)}$，有 $D_1(B)\subset D_1(A)$、$K(B)\subset\bigcup\mathcal{G}'_{n+1}(K(A))$，且 $U_{n+1,m}(K(A))\cap K(B)\neq\emptyset$。因此 $\mathcal{G}'_{n+1}(K(A))\subset\mathcal{G}'_{n+1}(K(B))$。由断言可知，对于任意 $m\leq r_{n+1,K(B)}$，存在某个 $U_{n,j}(K(A))\in\mathcal{G}'_n(K(A))$，使得 $U_{n+1,m}(K(B))\subset U_{n,j}(K(A))$。接下来

$$\bigcup\mathcal{G}'_{n+1}(K(B))\subset\bigcup\mathcal{G}'_n(K(A)).$$

此外，由于 $\mathcal{G}'_n(K(A))$ 的每个元素都包含 $\mathcal{G}'_{n+1}(K(A))$ 的某个元素，并且$\mathcal{G}'_{n+1}(K(A))\subset\mathcal{G}'_{n+1}(K(B))$，我们得出 $\mathcal{G}'_n(K(A))$的每个元素都包含 $\mathcal{G}'_{n+1}(K(B))$的某个元素。现在，根据引理 2.3 和 $D_{1(n+1)}\subset B$，我们有 $G(n+1,B)\subset G(n,A)$。

以下两种情况的证明与子情形 1.1 类似，因此省略其证明。

子情形 1.2: D_1 是有限的，且 $D_1(A)\neq\emptyset$, $K(A)\neq\emptyset$。

子情形 1.3: $D_1(A)=\emptyset$ 或 $K(A)=\emptyset$.

情形 2: $X=D\cup NI(X)$，满足 D 是一个可数离散子空间，并且 $NI(X)$ 的任意开邻域都不是紧致的。

然后，我们可以选取一个可数且递减的局部基 $\{U_n:\ n\in\mathbb{N}\}$，它属于 X 中的 $NI(X)$，并满足对于每个 $n\in\mathbb{N}$，都有 $U_1=X$, $|(U_n\setminus U_{n+1})\cap D|=\omega$。对于每个 $n\in\mathbb{N}$，令$D_n=(U_n\setminus U_{n+1})\cap D$，并将其枚举为 $\{a_{n,j}:\ j\in\mathbb{N}\}$。我们将 $D=\{a_m$ 重写为 $m\in\mathbb{N}\}$，使得对于每个 $m\in\mathbb{N}$，都有 $a_m=a_{i,\ j}$，其中每个 $m=(i+j-1)(i+j-2)/2+j$,

$i, j \in \mathbb{N}$。此外，对于每个 n，令 $d(X \setminus U_n, NI(X)) = s_n > 0$；则对于任意 $i < j$，都有 $s_i > s_j$。

设 A 是 X的任意闭子集，$A = D_1(A) \cup K(A)$，其中 $K(A) \subset NI(X)$紧致，且 $D_1(A)$= $\{a_{n_k} : k \leq r(A)\} \subset D$ 对于某个 $r(A) \in \mathbb{N}$ 或 $D_1(A) = \{a_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \subset D$，其中 $n_k < n_{k+1}$ 对于每个 k。

对于任意 m，令

$$p_m = \max\{i : a_{n_k} = a_{i,j}, k \leq m\}$$

and

$$q(m) = \min\{j : 1/2^{q_j} < s_{p_m}\}.$$

然后 $\mathcal{G}'_{q(m)}(K(A)) = \{U_{q(m),1}(K(A)) ..., U_{q(m),r_{q(m),K(A)}}(K(A))\}$。我们如下定义 $G(k, A)$ （$1''$）- （$2''$）：

(1″) 若 $D_1(A)$ 是有限的，则置

$$G(k, A) = \langle U_{q(k),1}(K(A)), ..., U_{q(k),r_{q(k),K(A)}}(K(A))\rangle$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 如果 $D_1(A) = \emptyset$；放入

$$G(k, A) = \langle \{a_{n_1}\}, ..., \{a_{n_{r(A)}}\}, U_{q(k),1}(K(A)), ..., U_{q(k),r_{q(k),K(A)}}(K(A))\rangle$$

若 $D_1(A) \neq \emptyset$ 且 $K(A) \neq \emptyset$；则置

$$G(k, A) = \langle \{a_{n_1}\}, ..., \{a_{n_{r(A)}}\}\rangle$$

若 $K(A) = \emptyset$。

(2″) 若 $D_1(A)$ 是无限集，则置

$$G(k, A) = \langle \{a_{n_1}\}, ..., \{a_{n_k}\}, D_1(A), U_{q(k),1}(K(A)), ..., U_{q(k),r_{q(k),K(A)}}(K(A))\rangle$$

若 $K(A) \neq \emptyset$，并置

$$G(k, A) = \langle \{a_{n_1(A)}\}, ..., \{a_{n_{r(A)}(A)}\}\rangle$$

若 $K(A) = \emptyset$。

我们证明，在 $D_1(A)$ 为无限集且 $K(A) \neq \emptyset$ 的情形下，$G(m, A)$ 满足 (i) 和 (ii)。其他情形的证明与情形 1 类似。

令 $\langle V_1, ..., V_l\rangle$ 为 A 的任意开邻域。设

$$k' = \max\{\min\{j : a_{n_j} \in V_i, V_i \cap D_1(A) \neq \emptyset\} : i \leq l\}$$

（注意：若 $V_i \cap D(A) = \emptyset$，则 $\min\{j : a_{n_j} \in V_i, V_i \cap D' \neq \emptyset\} = 0$）。显然，$K(A) \subset \bigcup\{V_i : V_i \cap K(A) \neq \emptyset\}$，并且我们可以将 $\{V_i : V_i \cap K(A) \neq \emptyset\}$ 枚举为 $\{V_{i_j} : j \leq l'\}$。由引理 2.1，存在一族紧子集 $\{K_j : j \leq l'\}$，使得 $K(A) = \bigcup\{K_j : j \leq l'\}$，且对每个 $j \leq l'$ 都有 $K_j \subset V_{i_j}$。令 k'' 为满足 $1/2^{k''} < \min\{d(K_j, X \setminus V_{i_j})/2, j \leq l'\}$ 的最小自然数。令 $k = \max\{k', k''\}$；那么每个 V_i 要么包含 $\mathcal{G}'_{q(k)}(K(A)) = \{U_{q(k),j}(K(A)) : j \leq r_{q(k),K(A)}\}$ 中的某个元素，要么对某个 $i \leq k$ 有 a_{n_i}；并且 $\mathcal{G}'_{q(p_k)}(K(A))$ 的每个元素都包含于某个 V_i 中。由引理 2.3，容易看出

$$G(k, A) = \langle \{a_{n_1}\}, ..., \{a_{n_k}\}, D_1(A), U_{q(k),1}, ..., U_{q(k),r_{q(k),K(A)}}\rangle \subset \langle V_1, ..., V_l\rangle.$$

因此，$\{G(k, A) : k \in \mathbb{N}\}$ 是 A的局部基。

现在，我们证明 $G(k, A)$ 满足 (ii)。任取 $B \in G(k + 1, A)$；则 $B = D_1(B) \cup K(B)$。显然，$\{a_{n_i} : i \leq k+1\} \subset D_1(B)$ 且 $K(B)$ 是 $NI(X)$ 的紧子集。对于任意 $U \in \mathcal{G}'_{q(k+1)}(K(A))$，$U \cap K(B) \neq \emptyset$，于是 $\mathcal{G}'_{q(k+1)}(K(A)) \subset \mathcal{G}'_{q(k+1)}(K(B))$。类似于子情形 1.2 的证明，我们可以证明 $G(k + 1, B) \subset G(k, A)$。

□

由定理 2.6 可知，猜想 1 不成立。此外，在 [13]然而，以下两个问题对我们来说仍是未知的。

问题 2.7. 如果 X 是拟可度量的，那么 $(\mathcal{K}(X)\ \tau_V)$ 是否拟可度量?

设 $F_C(X) = \{S:\ S$是 $X, |S| = \omega\}$ 的收敛序列（具有极限点）。

问题 2.8. 如果 X 是拟可度量的，那么 $(F_C(X)\ \tau_V)$ 是拟可度量的吗?

以下命题部分回答了问题 2.8。

命题2.9.如果 X 是拟可度量的，那么 $(\mathcal{F}(X)\ \tau_V)$ 是拟可度量的。

证明。设(X, d)是一个拟可度量空间，其拟度量为 d，并且令 $B(x, n) =\{y:$ 对于任意 $x \in X$ 和每个 $n \in \mathbb{N},\ d(x, y) < 1/2^n\}$。对于任意 $A = \{x_1, ..., x_k\} \in \mathcal{F}(X)$，定义 $G(n, A)$ 如下:

$$G(n, A) = \langle B(x_1, n), ..., B(x_k, n)\rangle.$$

我们证明 $\{G(n, A):\ k \in \mathbb{N}\}$ 满足引理 2.2 中的 (i) 和 (ii)。

首先，我们证明 $\{G(n, A):\ k \in \mathbb{N}\}$ 满足(i)。设 $\langle U_1, ..., U_m\rangle$ 是 A 的一个开邻域。由于 $A \subset \bigcup_{j\le m} U_j$和 $A \cap U_j \neq \emptyset\ (j \le m)$，我们可以选取一个有限族的开子集 $\{V_i:\ i \le k\}$ 满足以下条件 (1)-(4):

(1) 对每个 $i \le k$, $x_i \in V_i$; (2) 对任意互异的 $i, j \le k$, $V_i \cap V_j = \emptyset$; (3) $\bigcup_{i\le k} V_i \subset \bigcup_{j\le m} U_j$; (4) 每个 U_j 都包含某个 V_i。

取 $n' \in \mathbb{N}$，使得对每个 $i \le k,\ B(x_i, n') \subset V_i$。由引理 2.3，得

$$G(n', A) = \langle B(x_1, n'), ..., B(x_k, n')\rangle \subset \langle V_1, ..., V_k\rangle \subset \langle U_1, ..., U_m\rangle.$$

最后，我们证明 $\{G(n, A):\ k \in \mathbb{N}\}$ 满足 (ii)。若 $B \in G(n + 1, A)$，则令 $B = \{y_1, ..., y_l\}$。对任意 $j \le l$，存在某个 $i_j \le k$，使得 $y_j \in B(x_{i_j}, n + 1)$，因此$B(y_j, n+1) \subset B(x_{i_j}, n)$。由于 $B \in G(n+1, A)$，每个 $B(x_i, n)$ 都包含某个 $B(y_j, n+1)$。因此，由引理 2.3 可得 $G(n+1, B) = \langle B(y_1, n+1) ..., B(y_l, n+1)\rangle \subset\langle B(x_1, n) ..., B(x_k, n)\rangle = G(n, A)$。□

接下来，我们证明本文的第二个主要定理。首先，给出一个命题。

Pr命题 2.10. 对于空间 X，$(\mathcal{K}(X)\ \tau_V)$ 同胚于 $(\mathcal{K}(X)^{\tau_{locfin}}$).

证明。已知 $\tau_V \subset \tau_{locfin}$。任取 $K \in \mathcal{K}(X)$。若 $K \in \mathcal{U}^- \cap \mathcal{U}^+$，其中 $\mathcal{U}$ 是一个由开子集构成的局部有限族，则 K 与 $\mathcal{U}$ 中的每个元素都相交，因此 $\mathcal{U}$ 必为有限集，这意味着 $\mathcal{U}^- \cap \mathcal{U}^+ \in \tau_V$，故 $\tau_{locfin} \subset \tau_V$。□

注 2.11. 若 X 是一个 T_1-空间，则由命题 2.10 可知 X 同胚于 $(\mathcal{F}_1(X)^{\tau_{locfin}})$。

定理 2.12. 对于空间 X，以下陈述等价。

(1) $(CL(X)^{\tau_{locfin}})$ 是可度量的; (2) $(CL(X)^{\tau_{locfin}})$ 是可对称化的; (3) X 是可度量的，且 $NI(X)$ 是紧致的。

证明。由 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然可得。根据 [4, 定理 2.3], , 我们有 (3) $\Rightarrow$ (1)。现在只需证明 (2) $\Rightarrow$ (3)。

(2) $\Rightarrow$ (3)。根据命题 2.10, X 是可对称化的。固定 $x \in X$。显然, 我们有$\{x\} \in Cl(\{\overline{V}: V$ 是 x 在 $X\}$中的一个开邻域); 由于$(CL(X)^{\tau_{locfin}}$具有可数紧致性, 存在一个可数子族 $\{V_n: n \in \mathbb{N}\} \subset \{V: V$ 是 x 在 $X\}$ 中的一个开邻域, 使得 $\{x\} \in Cl(\{\overline{V_n}: n \in \mathbb{N}\})$。我们断言, $\{V_n: n \in \mathbb{N}\}$是 x的一个可数局部基。事实上, 任取 x 在 X中的开邻域 U , 由于U^+是 $\{x\}$在$(CL(X)^{\tau_{locfin}}$中的一个开邻域, 且 $\{x\} \in Cl(\{\overline{V_n}: n \in \mathbb{N}\})$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得$V_n \subset \overline{V_n} \in U^+$, 这意味着 $V_n \subset U$。因此, 根据定理 9.6], X是一个半可度量空间 [9, 。接下来, 只需证明 X 是一个 D_1-空间。事实上, 由于 X 是一个 D_1-空间, 根据定理 1] 的 [7, , 可知 $NI(X)$是可数紧的。由 X的半可度量性, 根据定理 9.8] 的 [9, , X 是半可分层的, 进而根据定理 5.11、定理 2.14]的 [9, , $NI(X)$是可度量的。因此, 根据定理 7]的 [7,, X 是可度量的。

任取 $A \in CL(X)$。由于 $(CL(X)^{\tau_{locfin}})$ 是可对称化的, 我们可以假设 $\{\mathcal{W}_n: n \in \mathbb{N}\}$ 是 A 处 $(CL(X)^{\tau_{locfin}})$ 的一个可数弱基; 于是对每个 $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup \mathcal{W}_n$ 都是 A 在 X 中的一个序列邻域。事实上, 对于任意满足 $x_k \to x \in A$ 属于 X 的序列 $\{x_k: k \in \mathbb{N}\}$, 有 $A \cup \{x_k\} \to A$ 属于 $(CL(X)^{\tau_{locfin}})$, 因此存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\{A \cup \{x_k\}: k \geq m\} \subset \mathcal{W}_n$, 从而 $\{x_k: k \geq m\} \subset \bigcup \mathcal{W}_n$。因此, {int($\bigcup \mathcal{U}_n$): $n \in \mathbb{N}\}$ 是 A 的一个可数基。因此 X 是一个 D_1-空间。□

定理 2.13。对于空间 X, $(CL(X)^{\tau_{locfin}})$ 是第一可数的, 当且仅当 X 是一个 D_1-空间, 且 $NI(X)$ 是遗传可分的。

证明。假设 $(CL(X)^{\tau_{locfin}})$ 是第一可数的, 则由定理 2.12 的 (2)$\Rightarrow$ (4) 的证明可知, X 是一个 D_1-空间, 因此 $NI(X)$ 是可数紧的 [7,定理 1]。令 A为 $NI(X)$ 的一个闭子集, 并令 $\{\mathcal{U}_n^- \cap \mathcal{U}_n^+: n \in \mathbb{N}\}$ 为 A的一个可数基, 其中每个 $\mathcal{U}_n$ 都是局部有限的。由于 $\mathcal{U}_n$ 的每个元素都与 A 相交, 且 A 是可数紧的, 所以每个 $\mathcal{U}_n$ 都是有限集。因此, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 令 $\mathcal{U}_n = \{U_{n,i}: i \leq m_n\}$ 。任取 $x_{n,i} \in A \cap U_{n,i}$, 其中 $n \in \mathbb{N}, i \leq m_n$ 任意, 然后令 $E = \{x_{n,i}: n \in \mathbb{N}, i \leq m_n\}$。不难证明, E 是 A的一个可数稠密子集。因此, $NI(X)$ 是遗传可分的。

设 X 是一个 D_1-空间, 且 $NI(X)$是遗传可分的。任取 $A \in CL(X)$。设 $\{U_n: n \in \mathbb{N}\}$ 是 $C = A \cap NI(X)$的一个可数严格递减基, 满足$U_1 = X$; 并设对于 $n \in \mathbb{N}$, $E_n = (U_n \setminus U_{n+1}) \cap (A \cap I(X))$; 那么每个 E_n 在 X 中都是离散的, 且 $A \cap I(X) = \bigcup_n E_n$。显然, $I(X) \cap A = \bigcup_n (A \cap E_n)$, 并且每个 E_n 都是可数的, 因此我们将每个 E_n 枚举为 $\{x(n, \alpha(n)): \alpha(n) \in \Gamma_n\}$, 其中每个 $|\Gamma_n| \leq \omega$。设$D = \{d_i: i \in \mathbb{N}\}$是 C的一个可数稠密子集, 并设对于每个 $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}_i$ 是 d_i 的一个可数基。那么 $\mathcal{V} = \bigcup_n \mathcal{V}_n$ 是一个可数族。对于任意 n、$m \in \mathbb{N}$ 和 $\{W_1, ..., W_r\} \in \mathcal{V}^{<\omega}$, 令

$$\mathcal{V}_{n,m,\{W_1,...,W_r\}} = \{\{x(i, \alpha(i))\}: \alpha(i) \in \Gamma_i, i \leq n, \} \cup \{U_m, A \cap I(X)\} \cup \{W_1, ..., W_r\}.$$

然后令

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{V}^+_{n,m,\{W_1,...,W_r\}} \cap \mathcal{V}^-_{n,m,\{W_1,...,W_r\}}: n, m \in \mathbb{N} \text{ and } \{W_1, ..., W_r\} \in \mathcal{V}^{<\omega}\}.$$

显然, 由开子集 $\mathcal{V}_{n,m,\{W_1,...,W_r\}}$ 构成的每个族都是局部有限的。

断言: $\mathcal{B}$ 是 A的局部基。

设 $\mathcal{P}^- \cap \mathcal{P}^+$ 是 $(CL(X)^{\tau_{locfin}})$ 中 A 的任意开邻域, 其中 $\mathcal{P}$ 是由开子集构成的局部有限族。由于 C 是可数紧的, 存在 $\mathcal{P}$ 的有限子族 $\mathcal{P}' = \{P_i: i \leq k\}$, 使得 $\mathcal{P}'$ 中的每个元素都与 C 相交, $C \subset \bigcup_{i \leq k} P_i$

并且对于任意 $P \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$，存在 $m_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $U_{m_0} \subset \bigcup_{i \le k} P_i$。对于每个 $i \le k$， P_i 都包含某个 d_{n_i}，于是选取 $W_i \in \mathcal{V}_{n_i}$ 使得 $d_{n_i} \in W_i \subset P_i$，然后$\{W_1, ..., W_k\} \in \mathcal{V}^{<\omega}$。由于 $A \in \mathcal{P}^- \cap \mathcal{P}^+$ 且对任意 $P \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$ 都有 $P \cap C = \emptyset$，因此每个 $P \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$ 都与某个 E_n 相交。事实上，我们断言存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得每个$P \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$ 都与某个 E_i 相交，其中某个 $i \le n_0$ 满足相应条件。反设不存在这样的对象，则存在一个可数族 $\{P_l : l \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$，使得对每个 $l \in \mathbb{N}$ 都有 $E_{n_l} \cap P_l \neq \emptyset$。对每个 $l \in \mathbb{N}$ 任取一个 $x_l \in E_{n_l} \cap P_l$；则 $\{x_l : l \in \mathbb{N}\}$ 有一个聚点，因为 $x_l \in U_{n_l}$。另一方面，对每个 $l \in \mathbb{N}$ 都有 $x_l \in P_l$，并且 $\{P_l : l \in \mathbb{N}\}$ 是局部有限的，因此 $\{x_l : l \in \mathbb{N}\}$ 是离散的，这就导致矛盾。于是 $A \in \mathcal{V}^+_{n_0, m_0, \{W_1, ..., W_r\}} \cap \mathcal{V}^-_{n_0, m_0, \{W_1, ..., W_r\}} \subset \mathcal{P}^- \cap \mathcal{P}^+$ 由[15, 引理 1.1]。□

由定理 2.12、2.13、 [7, 定理 7] 以及引理 2.4 的注记，可容易验证以下推论。

推论 2.14. 对于空间 X，以下陈述等价。

(1) $(CL(X)^{\tau_{locfin}})$ 是可度量的；(2) $(CL(X)^{\tau_{locfin}})$ 有一个点可数基；(3) $(CL(X)^{\tau_{locfin}})$ 是拟可度量的；(4) $(CL(X)^{\tau_{locfin}})$ 的每个闭可数紧子集都有可数基；(5) X 是可度量的，且 $NI(X)$ 是紧致的。

若对任意满足 $U \cap A \neq \emptyset$ 的开子集 U，都存在一个 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $B \cap A \neq \emptyset$ 且 $B \cap A \subset U$，则称开子集族 $\mathcal{B}$ 为 X 的子集 A 的外部 π-基。

命题 2.15. 对于空间 X，$(CL(X)^{\tau_{locfin}})$ 具有点-G_δ-性质，当且仅当 X 是完美的，并且 X 的每个闭子集都有一个 σ- 局部有限的外部 π- 基。

证明。必要性。固定 $A \in CL(X)$；于是 $\{A\} = \cap_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{U}_n^- \cap \mathcal{U}_n^+)$，其中每个 $\mathcal{U}_n$ 都是由 X 的开子集构成的局部有限族。设 $U_n = \bigcup \mathcal{U}_n$，则不难证明 $A = \cap_{n \in \mathbb{N}} U_n$，因此 X 是完美的。设 $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$。那么 $\mathcal{U}$ 是 A 的一个 σ- 局部有限外部 π- 基。事实上，设 X 的一个开子集 V 满足$V \cap A \neq \emptyset$、 $C = A \setminus V$、 $C \neq A$。若对于 $U \in \mathcal{U}$， $U \cap A$ 不包含于 V，则 $U \cap C \neq \emptyset$，因为 $A \cap U \neq \emptyset$。于是对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\{C\} \in \mathcal{U}_n^- \cap \mathcal{U}_n^+$，这构成矛盾。因此 $\mathcal{U}$ 是一个外部 π- 基。

充分性。固定 $A \in CL(X)$，并令 $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ 为一个 σ-局部有限的外部π-基，其中 $\mathcal{U}_n = \{U_\alpha : \alpha \in \Gamma_n\}$。由于 X 是完美的，存在一个可数开族 $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$，使得 $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$。令 $\mathcal{U}_n \cap V_n = \{U_\alpha \cap V_n : U_\alpha \in \mathcal{U}_n\}$ 且$\mathcal{W}_n = (\mathcal{U}_n \cap V_n)^- \cap V^+$。于是 $\{A\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n$。事实上，显然对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\{A\} \in \mathcal{W}_n$。对于任意 $\{B\} \neq \{A\}$，我们证明 $\{B\} \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n$。事实上，若 $\in B \setminus A \neq \emptyset$，任取 $y \in B \setminus A$；则存在 n_0 使得 $y \notin V_{n_0}$，进而 $\{B\} \notin \mathcal{W}_{n_0}$。若 $B \subset A$，则 $(X \setminus B) \cap A \neq \emptyset$。因此存在 $U \in \mathcal{U}_{n'}$，使得对某些 n'、$\{B\} \notin \mathcal{W}_{n'}$ 有 $U \cap A \subset X \setminus B$。于是 $\{A\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n$。

如果 X 具有可数网络，则称 X 为空间。

□

命题 2.16. $(CL(X)^{\tau_{locfin}})$是空间，当且仅当 X 是紧可度量的。

证明。如果 X 是紧的、可度量的，则$(CL(X)^{\tau_{locfin}})$是紧的、可度量的，因此它是空间。

如果 $(CL(X)^{\tau_{locfin}})$ 是宇宙空间，那么 X 是宇宙空间。我们断言 X 是可数紧的；否则，X 含有一个闭的可数离散子集 $D \subset X$。对于任意 $\{A\} \in (CL(D)^{\tau_{locfin}})$， $\{A\}$ 在 $(CL(D)^{\tau_{locfin}})$ 中是开集；然而 $|(CL(X)^{\tau_{locfin}})| = 2^\omega$，于是

它不是宇宙空间，这就产生了矛盾。因此 X 是可数紧的，所以 X 是紧可度量的，因为宇宙空间具有一个 G_δ-对角线，而具有 G_δ-对角线的可数紧空间是紧可度量的，见定理 2.14]。□

最后，我们证明本文的第三个主要定理。

定理 2.17. 对于空间 X，以下陈述等价。

(1) ($CL(X)$ τ_F) 是可度量的；(2) ($CL(X)$ τ_F) 是拟可度量的；(3) ($\mathcal{K}(X)$ τ_F) 是拟可度量的；(4) ($\mathcal{F}(X)$ τ_F) 是拟可度量的；(5) ($\mathcal{F}_2(X)$ τ_F) 是拟可度量的；(6) X 是半紧且可度量的。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) 这些蕴含关系显然。由 [3, 定理 5.1.5],可得 (6) $\Rightarrow$ (1)。我们只需证明 (5) $\Rightarrow$(6)。

由于 $\mathcal{F}_2(X)$ 是拟可度量的，因此 X 是第一可数的。任取 $z \in X$。首先，我们证明 X 在 z处局部紧。任取 $x \in X \setminus \{z\}$，并令$\{U_n^- \cap (K_n^c)^+ \cap \mathcal{F}_2(X) : n \in \mathbb{N}\}$ 为 $\{x\}$的一个可数基，其中每个 U_n 都是 X 中 x 的一个开邻域，且每个 K_n 在 X中都是紧致的。对于任意紧子集$K \subset X \setminus \{x\}$，集合 $(K^c)^+ \cap \mathcal{F}_2(X)$ 是 $\mathcal{F}_2(X)$ 中 $\{x\}$ 的一个开邻域，因此存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $U_n^- \cap (K_n^c)^+ \cap \mathcal{F}_2(X) \subset (K^c)^+ \cap \mathcal{F}_2(X)$。若 $K \setminus K_n \neq \emptyset$，则任取 $y \in K \setminus K_n$。显然，$\{x, y\} \in U_n^- \cap (K_n^c)^+ \cap \mathcal{F}_2(X)$；然而，$\{x, y\} \notin (K^c)^+$，这与假设矛盾。因此，$K \subset K_n$。于是 $X \setminus \{x\}$ 是半紧的，且 X 是σ-紧的。因此，由 [8, 3.4.E], 可知 $X \setminus \{x\}$ 是局部紧的，并且 X 在 z处局部紧。因此 X 是局部紧的。设 U 是 x 的一个开邻域，且 $\overline{U}$紧；接下来证明，对于 X的任意紧子集 L，集合 L 可由 $\{\overline{U}, K_n : n \in \mathbb{N}\}$ 的一个有限子族覆盖。事实上，若 $L \subset X \setminus \{x\}$，则 L 包含于 $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$的一个有限子族的并中；若 $x \in L$，则 $L \setminus U \subset X \setminus \{x\}$ 是紧致的，可由 $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$的一个有限子族 $\mathcal{K}'$ 覆盖，因此 $L \subset U \cup (\bigcup \mathcal{K}')$。$X$ 是半紧的。

注意，拟可度量空间是一个 γ-空间，因此由 [9, 推论 10.8(ii)] 可知，X 是局部可度量的，故由于 X 是 Lindel¨of，X 是可度量的。□

References

[1] C.E. Aull，闭集可数性公理，Indag. Math.，28(1966)，311–316。[2] J. Blanck，度量空间的域表示，Ann. Pure Appl. Logic，83(1997)，225–247。[3] G. Beer，闭集与闭凸集上的拓扑，Kluwer，Dordrecht，1993。[4] G. Beer，C. Himmelberg，K. Prikry 和 S. Van Vleck，2^X上的局部有限拓扑，美国数学会会刊，101(1987)，168–172。[5] V. Brattka，递归拟度量空间，Theoret. Comput. Sci.，305(1-3)(2003)，17–42。[6] S. Cobzas，非对称赋范空间中的泛函分析，Springer Science & Business Media，2012。[7] M. Dai 和 C. Liu，D_1空间及其可度量化，North. Math. J.，11(2)(1995)，215–220。[8] R. Engelking，一般拓扑学，PWN，Warzawa，1989。[9] G. Gruenhage，广义度量空间，《集合论拓扑学手册》，North-Holland，Amsterdam，1984，423–501。[10] P. Hitzler，A.K. Seda，计算逻辑中关于不动点的一些问题：拟度量、多值映射与 Knaster-Tarski 定理，Topol. Proc.，24(1999)，223–250。[11] L. Hol

2003, a,

4 2 351 360

J. Pelant，L. Zsilinszky，可展超空间是可度量的，Appl. Gen. Topol.，( )，–。[12] C. Liu，F. Lin，具有可数闭子集特征的超空间，Topol. Appl.，2023，108461。

[13] C. Liu，F. Lin，关于带 Vietoris 拓扑的闭集超空间的注记，马来西亚数学科学学会通报，(2022) 45，1955–1974。[14] E. Michael，子集空间上的拓扑，美国数学会汇刊，71(1951)，91–138。[15] S. Naimpally 和 P. Sharma，有限一致性与局部有限超空间拓扑，美国数学会会刊，103(2)(1988)，641–646。[16] S. Romaguera，P. Tirado，复杂度概率拟度量空间，数学分析与应用杂志，376(2)(2011)，732–740。

(Chuan Liu)Department of Mathematics, Ohio University Zanesville Campus, Zanesville, OH 43701, USA*Email address*: liuc1@ohio.edu

(Fucai Lin): School of mathematics and statistics Minnan Normal University Zhangzhou , , , 363000 P. R. China
Email address: linfucai@mnnu.edu.cn；linfucai2008@aliyun.com