arXiv:2304.03457v1 [math.GN] 7 Apr 2023

稠密伪紧空间与稠密连通空间的刻画

FUCAI LIN 和 QIYUN WU

Abstract. 假设 $\mathcal{P}$ 是空间 X的一种拓扑性质，那么如果 X的每个稠密子集都具有性质 $\mathcal{P}$，我们就称 X 是$dense$-$\mathcal{P}$。本文主要讨论空间 X的稠密子集，并证明：

(1) 如果 X 是 Tychonoff 空间，那么 X 是稠密伪紧，当且仅当 X 上每个连续实值函数 f 的值域有限；当且仅当 X 有限；当且仅当 X 遗传伪紧；

(2) X 是稠密连通的，当且仅当对于 X的任意非空开子集 U，$\overline{U}=X$；

(3) X 是稠密超连通的，当且仅当对于点 $x\in X$，$\{x\}\cup(X\setminus\overline{\{x\}})$ 中的 x 的唯一开邻域是 $\overline{\{x\}}=X$ 或 $\{x\}\cup(X\setminus\overline{\{x\}})$；当且仅当对于 X中的任意两点 x 和 y，$x\in\overline{\{y\}}$ 或 $y\in\overline{\{x\}}$。

此外，我们给出了拓扑群（分别为旁拓扑群、准拓扑群） G为 G 稠密连通的刻画。

1. Introduction and terminology

稠密子集在拓扑空间理论的研究中发挥着重要作用，参见[1, 11]。1975年，R. Levy和R.H. McDowell [13] 引入了稠密可分的概念，即空间的每个稠密子集都是可分的；随后，1976年，J.H. Weston和J. Shilleto[17] 研究了拓扑空间中稠密子集的基数。1989年，I. Juh´asz和S. Shelah [12] 证明，紧Hausdorff空间 X 的 π权等于其所有稠密子集的稠密度的上确界 X。最近，A. Dow和I. Juh´asz [8] 证明了，紧空间的每个稠密子集都能被至多可数个紧子集覆盖，当且仅当它具有可数 π权；在 [14], 中，作者系统地讨论了稠密可分空间。根据稠密可分的定义，我们可以定义以下概念。

设 X 是一个空间， $\mathcal{P}$ 是 X的一个拓扑性质。若 X 的每个稠密子集都具有性质 $\mathcal{P}$，则称 X 为稠密-$\mathcal{P}$；若 X 存在一个稠密子集D，使得 D 具有性质 $\mathcal{P}$，则称 X 为一稠密-$\mathcal{P}$；若 X 存在一个真稠密子集 D，使得 D 具有性质 $\mathcal{P}$，则称 X 为真一稠密-$\mathcal{P}$。显然，每个真一稠密-$\mathcal{P}$都是一稠密-$\mathcal{P}$，但反之不成立。若对 X中的每个点 x 及其任意邻域 U，都存在 x 的一个邻域 V，使得 $V\subset U$ 且 V 是稠密-$\mathcal{P}$，则称 X 为局部稠密-$\mathcal{P}$；若对 X 中的每个点 x 及其任意邻域 U，都存在 x 的一个邻域 V，使得 $V\subset U$ 且 V 是一稠密-$\mathcal{P}$，则称 X 为局部一稠密-$\mathcal{P}$；若对 X 中的每个点 x 及其任意邻域 U，都存在 x 的一个邻域 V，使得 $V\subset U$ 且 V 是真一稠密-$\mathcal{P}$，则称 X 为局部真一稠密-$\mathcal{P}$。

设 G 是一个半拓扑群， $\mathcal{P}$ 是 G的一种拓扑性质。若 G 的每个稠密子群都具有性质 $\mathcal{P}$，则称 G 具有稠密子群-$\mathcal{P}$；若存在 G 的一个稠密子群 H，使得 H 具有性质 $\mathcal{P}$，则称 G 具有单稠密子群-$\mathcal{P}$；若存在 G 的一个真稠密子群 H，使得H 具有性质 $\mathcal{P}$，则称 G 具有真单稠密子群-$\mathcal{P}$。显然，具有非平凡稠密子群的每个稠密子群-$\mathcal{P}$ 都是

2000 *Mathematics Subject Classification.* 22A05, 54B05, 54C30, 54D05, 54H11。*Key words and phrases.* 稠密伪紧；稠密连通；稠密子群连通；稠密-超连通；稠密子集。第一作者获得福建省自然科学基金重点项目（编号：2020J02043）、国家自然科学基金（编号：11571158）、气象大数据—数字福建研究所和福建省数据科学与统计重点实验室的资助。

真单稠密子群-$\mathcal{P}$，且每个真单稠密子群-$\mathcal{P}$ 都是单稠密子群-$\mathcal{P}$，但反过来不成立。

众所周知，伪紧性和连通性是两个非常重要的拓扑概念，已应用于数学的许多领域。因此，探讨稠密伪紧空间和稠密连通空间具有重要意义。

半拓扑群 G 是一个群 G，带有一种拓扑，使得从 $G\times G$到 G 的乘积映射分别连续。拟拓扑群 G 是一个群 G，带有一种拓扑，使得 G 是一个半拓扑群，且将任意 x^{-1} 与 $x\in G$ 关联起来的、从 G 到其自身的逆映射连续。旁拓扑群 G 是一个群 G，带有一种拓扑，使得从 $G\times G$到 G 的乘积映射联合连续。拓扑群 G 是一个群G，带有一种（豪斯多夫）拓扑，使得 G 是一个旁拓扑群，且将任意 x^{-1} 与 $x\in G$ 关联起来的、从G 到其自身的逆映射连续。

本文组织如下。第 2 节主要讨论稠密-$\mathcal{P}$-性质的一些性质。

第 3 节专门研究稠密伪紧空间。我们证明，对于一个 Tychonoff 空间 X，它是稠密伪紧的，当且仅当每个定义在 X 上的连续实值函数 f 的值域是有限的；当且仅当 X 是有限的；当且仅当 X 是遗传伪紧的。

第 4 节讨论稠密连通空间的一些性质。我们证明，X 是稠密连通的，当且仅当对于 X 的任意非空开子集 U，$\overline{U}=X$。此外，我们证明，拓扑群 G 是稠密连通的，当且仅当 G 是平凡拓扑群；旁拓扑群 G 是稠密连通的，当且仅当对于 e 的任意两个非空开邻域 U 和 V，$UV^{-1}=G$；拟拓扑群 G 是稠密连通的，当且仅当对于 e 的任意两个非空开邻域 U 和 V，$UV=G$。

在第 5 节中，我们主要证明：X 是稠密超连通的，当且仅当对于任意点 $x\in X$，$\overline{\{x\}}=X$ 或 $\{x\}\cup(X\setminus\overline{\{x\}})$ 是 $\{x\}\cup(X\setminus\overline{\{x\}})$ 中 x 的唯一开邻域；当且仅当对于 X 中任意两点 x 和 y，$x\in\overline{\{y\}}$ 或 $y\in\overline{\{x\}}$。

分别用 $\mathbb{R}$、$\mathbb{N}$、I 和 ω 表示实数集、正整数、闭单位区间和全体非负整数。设 $\mathbb{T}$ 是带有通常拓扑的单位圆。对于未定义的符号和术语，读者可参阅 [1] 和 [11]。

2. SOME PROPERTIES OF DENSE-$\mathcal{P}$-PROPERTY

本节主要讨论稠密-$\mathcal{P}$ 空间的一些拓扑性质。特别地，我们给出 $\mathcal{P}$ 的一些拓扑性质，使得如果 $\mathcal{P}$ 是稠密-$\mathcal{P}$，那么 $\mathcal{P}$ 是一个遗传 $\mathcal{P}$ 性质。显然，遗传 $\mathcal{P}$ 性质是稠密-$\mathcal{P}$ 的，但反之不成立。事实上，我们有以下显然的定理。

定理2.1. 设 $\mathcal{P}$ 是一个具有闭遗传性的拓扑性质。如果空间 X 是稠密-$\mathcal{P}$，那么 X 具有遗传 $\mathcal{P}$-性质。

证明。任取 X 的任意子空间 Y。那么 $X\setminus\overline{Y}$ 的 $D=Y\cup$ 在 X 中稠密，因此 D 具有 $\mathcal{P}$ 性质。由于 Y 在 D 中是闭的，根据我们的假设可知 Y 具有 $\mathcal{P}$ 性质。因此，X 是遗传的 $\mathcal{P}$。□

注2.2. 众所周知，正规性、仿紧性、Lindel¨of 性质、可数紧性、强仿紧性、可数仿紧性、弱仿紧性、序列紧、实紧、完全正规性、k-空间都是闭遗传的，因此，如果一个空间的每个稠密子集都具有这些拓扑性质之一，那么该性质必定是遗传的。

命题2.3. 如果 X 是稠密-$\mathcal{P}$，那么每个稠密子空间也都是稠密-$\mathcal{P}$。

命题2.4。如果 X 是稠密-$\mathcal{P}$ 的，且 $\mathcal{P}$ 是开闭遗传的，那么每个开子空间都是稠密-$\mathcal{P}$的。

证明。任取 U X 的一个开子集以及 U的一个稠密子集 D。则 $D\cup(X\setminus\overline{U})$在 X中稠密。由于 X 是稠密-$\mathcal{P}$，由命题2.3可知，$D\cup(X\setminus\overline{U})$具有稠密-$\mathcal{P}$。显然，

D 是 $D \cup (X \setminus \overline{U})$中的既开又闭子集，因此 D 具有 $\mathcal{P}$-性质。因此，每个开子空间都是稠密-$\mathcal{P}$。□

设 X、Y是两个空间， $f\colon X \to Y$是一个映射。若对于 X的每个非空开子集U， $f(U)$在 Y中的内部非空（分别地， $f(U)$在 Y中是开集），则称 f 为几乎开（分别地，开）映射。下面的命题显然成立。

命题 2.5. 设 $f\colon X \to Y$是一个几乎开映射，且 X 具有稠密-$\mathcal{P}$。若拓扑性质 $\mathcal{P}$ 在几乎开映射下保持，则 Y 是稠密-$\mathcal{P}$。

例 2.6. 存在一个一稠密紧空间 X，使得 X 不是真一稠密伪紧。

证明。令 X 为无限离散空间 D 的一点紧化。显然， X 是紧空间。然而，任何真稠密子集都不是伪紧的。□

3. DENSE SUBSETS OF PSEUDOCOMPACT SPACES

在本节中，我们将证明每个稠密伪紧空间都是有限的，因此它是真一稠密伪紧和单稠密伪紧，但反之不成立，见注释 3.10；此外，每个真单稠密伪紧都是单稠密伪紧，但反之不成立，见注释 3.10。

显然，我们有以下命题。

命题 3.1. 每个单稠密伪紧空间都是伪紧的。

为了证明本节的主要定理，我们需要一个引理。

引理 3.2. 空间 X 是稠密伪紧的，当且仅当 X 的每个开子空间都是稠密伪紧的。

证明. 充分性显然。现在只需证明必要性。任取开子空间U和 X的任意稠密子集 D，其中 U。于是 $Y = D \cup (X \setminus \overline{U})$在 X中稠密，因此 Y是伪紧的。由于 $U \cap Y = D$ 和 U 在 X中是开集，可知 D 在Y中既开又闭，因此 D 是伪紧的。因此， U 是稠密伪紧的。□

现在我们可以给出稠密伪紧空间的一个刻画；事实上，它是一个有限空间。

定理 3.3. 设 X 是一个 Tychonoff 空间。则下列命题等价：

(1) X 是稠密伪紧的；(2) 每个连续实值函数 f 在 X 上的值域都是有限的；(3) X 是有限的；(4) X 是遗传伪紧的。

证明。显然，只需证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 和 (2) $\Rightarrow$ (3)。

(1) $\Rightarrow$ (2)。反之，存在一个从 X 到 $\mathbb{R}$的连续实值函数 h，使得 $h(X)$ 是 $\mathbb{R}$的一个无限子集。由于 X 是伪紧的， $h(X)$ 在 $\mathbb{R}$中有界，因此存在一个极限点 $r \in h(X)$。不失一般性，设存在一个序列 $\{r_n\colon n \in \mathbb{N}\}$，使得 $r_n < r$，且当 $n \to \infty$时 $r_n \to r$。令 $A = h^{-1}(r)$ 且 $U = X \setminus A$。于是 U 是 X中的开集。由于 X 是稠密伪紧的，由引理 3.2 可知 U 是稠密伪紧的。设 $g\colon h(X) \setminus \{r\} \to \mathbb{R}$ 为一个函数，使得对每个 $x \in (\frac{r}{2}, \frac{3r}{2})$， $g(x) = \tan(\frac{2x-r}{2r}\pi) \cap (h(X) \setminus \{r\})$，并且对任意 $(h(X) \setminus \{r\}) \setminus (\frac{r}{2}, \frac{3r}{2})$， $g(x) = 0$。于是 $g(x)$ 是一个无界连续函数。令 $h_1 = h|_U$ 且 $h_2 = g \circ h_1$。则 h_2 是一个从 U 到 $\mathbb{R}$的无界连续函数，这与 U 的伪紧性矛盾。

(2) $\Rightarrow$ (3). 假设 X 是无限的。那么显然， X 不连通。接下来，我们将通过归纳法构造一个连续实值函数 f，定义在 X 上，使得 f 的值域是无限的，由此导出矛盾。事实上，由于 X 不连通，存在两个

不相交的开子集 U_0 和 V_0，使得 $U_0 \cup V_0 = X$ 和 U_0 是无限的。假设我们已定义开子集 U_i 和 V_i（$i \leq n$），且满足以下条件：

(1) $U_0 \cup V_0 = X$ 和 U_0 是无限的；(2) 对每个 $1 \leq i \leq n$，都有 $U_i \cup V_i = U_{i-1}$；(3) 对每个 $i \leq n$，$U_i \cap V_i = \emptyset$ 和 U_i 是无限的.

显然，在 U_n 上的每个连续实值函数的值域都是有限的，因此U_n 不是连通的，进而存在两个不相交的开子集 U_{n+1} 和 V_{n+1}，使得$U_{n+1} \cup V_{n+1} = U_n$ 和 U_{n+1} 是无限的。令 $A = X \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$。现在有两个开子集序列 $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 和 $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ 满足上述条件 (1)–(3)。接下来，我们定义一个实值连续函数 $f : X \to \mathbb{R}$，定义在 X 上如下：对每个 $x \in X$，若 $x \in A$，则$f(x) = 0$；否则，存在唯一的 $i \in \mathbb{N}$使得 $x \in V_i$，于是 $f(x) = \frac{1}{i+1}$。显然，f是连续的，且 f 的值域是无限的。

因此，X 是有限。 □

推论 3.4. 如果 X 是具有 $|X| > 1$ 的稠密伪紧空间，那么 X 不连通.

根据定理 3.3，我们有如下推论。

推论 3.5. 如果 X 是局部稠密伪紧的，那么 X 是离散空间。

然而，以下问题对我们来说仍然未知。

问题3.6。设 G 是一个稠密子群伪紧拓扑群。 G 是有限的吗?

接下来，我们对问题 3.6 给出一些部分解答。

命题 3.7. 设 G 是一个可分无限群。那么 G 不是稠密子群伪紧的。

证明。假设 G 是稠密子群伪紧的。由于 G 可分，因此存在 G 的一个可数稠密子群 H；根据我们的假设，H 是伪紧的。因此 H 是紧的。然而，每个基数至少为 $\mathfrak{c}$ 的紧无限群.....这就产生了矛盾。□

空间 X 的稠密度 $d(X)$，定义为对 X 的每个稠密子集 A，形如 $|A|$ 的最小基数。

Co推论 3.8. 如果 G 是稠密子群伪紧的，那么 G 要么是有限的，要么 $d(G) > \omega$.

设 (X, τ)是一个拓扑空间。由 τ确定的 P-空间拓扑是 X上的最小拓扑 $P\tau$，使得 $\tau \subset P\tau$，并且 $(X, P\tau)$ 的每个 G_δ-子集都是 $P\tau$-开集。带有 $P\tau$ 拓扑的集合 X 记为 PX。

由 [7, 定理 2.9]，可知，以下命题成立。

命题 3.9. 设 G 是一个伪紧拓扑群。当且仅当 G 的每个稠密子群 H 在 PG中稠密时，G 是稠密子群-伪紧的。

注 3.10. 真单稠密子群伪紧群这一类已得到广泛研究，见 [4, 5, 10]；特别地，由 [6, 定理 1.1] 可知，每个权不可数的伪紧阿贝尔群 G 都有一个真稠密伪紧子群，因此 G 是真单稠密子群伪紧的。显然，每个可度量的无限伪紧群 G 都是单稠密子群伪紧的（因此也是单稠密伪紧的），但它不是真单稠密伪紧的，故 G 不是真单稠密子群伪紧的。此外，由 [6, 定理 1.1] 可知，每个可分、非可度量的伪紧拓扑群 G 都是真单稠密子群伪紧的（因此也是真单稠密伪紧的，但根据定理 3.3，它不是稠密伪紧的），例如 $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$。然而，$G$ 不是稠密子群伪紧的；否则，就存在一个可数的伪紧稠密子群 H，这意味着 H 是紧的，矛盾。

4. DENSE SUBSETS OF CONNECTED SPACES

本节中，我们将对问题 4.3 给出一些部分解答。事实上，我们证明，对于任意非平凡拓扑群 G， G都不是稠密连通的，见推论 4.6。此外，我们还刻画了满足 G 稠密连通的拓扑群（分别为旁拓扑群、准拓扑群） G 。

下述命题显然成立。

命题 4.1. 每个一稠密连通空间都是连通的。

此外，显然每个稠密连通半拓扑群都是稠密子群连通的。不过，下面的问题很有趣。

问题 4.2. 每个稠密子群连通的拓扑群都是稠密连通的吗?

问题 4.3. [1, 未解决问题 1.4.3] 是否存在一个无限（阿贝尔、布尔）拓扑群 G ，使得 G 是稠密子群连通的?

显然， $\mathbb{T}$ 是一稠密连通的，但它不是真一稠密连通的。在 [16], 中，作者证明了每个紧连通阿贝尔群 G ，除 $\mathbb{T}$ 外，只要 $w(G) < \mathfrak{c}$ 或 $w(G)^{\aleph_0} = w(G)$，就包含一个稠密真连通子群，因此 G 是真一稠密子群连通的，其中 $w(G)$ 是 G的权；此外，在 [15], 中，作者证明存在一个 $\mathbb{R}^2$的真一稠密连通子群 G ，因此 $\mathbb{R}^2$ 是真一稠密子群连通的，但不是稠密子群连通的。

对于阿贝尔 G，如果对于每个整数 $m \geq 1$， $|mG| = 1$或 $|mG| \geq \mathfrak{c}$，我们就称 G 为 M-群。根据 [9, 推论 1.10], ，可得以下命题。

命题 4.4. 设 G 是一个稠密子群连通的阿贝尔群。那么， G 的每个稠密子群 H 都是 M-群。

下面的定理 4.5 对问题 4.3 给出了部分回答。首先，我们给出一个概念。

没有不相交开集的空间称为超连通空间。显然，超连通空间的每个稠密子空间都是超连通的，因此，空间是超连通的，当且仅当它是稠密超连通的。

定理 4.5. 设 X 是一个空间。那么，以下陈述等价:

(1) X 是稠密连通的；(2) 对任意非空开子集 U ，$\overline{U} = X$ ；(3) X 是超连通的。(4) X 是稠密超连通的。

证明。只需证明 (1) $\Rightarrow$ (2)、(2) $\Rightarrow$ (3) 以及 (3) $\Rightarrow$ (1)。

(1) $\Rightarrow$ (2)。设 X 是稠密连通的。取 X的任意非空开子集 U 。则$D = U \cup (X \setminus \overline{U})$ 在 X中稠密，因此根据我们的假设， D 是稠密连通的。此外， U是 D中的非空开闭集，因此 $X \setminus \overline{U} = \emptyset$ ，因为 D 是连通的。于是 $\overline{U} = X$。

(2) $\Rightarrow$ (3)。设 $\overline{W} = X$ 对 X的任意非空开子集 W 成立。任取 X的非空开子集 U和 V。假设 $U \cap V = \emptyset$，则 $U \cap \overline{V} = \emptyset$，这与我们的假设$\overline{V} = X$ 矛盾。

(3) $\Rightarrow$ (1)。设 X 是超连通的。则对于 X的任意非空开子集 U和 V，有 $U \cap V \neq \emptyset$ 。取 X 的任意稠密子集 D 。我们断言 D 是连通的。反之，存在 D 的两个真开子集 U_1 和 V_1，使得 $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ 且 $U_1 \cup V_1 = D$。于是存在 X 中的两个开子集 U 和 V，使得 $U_1 = U \cap D$ 且 $V_1 = V \cap D$。根据我们的假设， $U \cap V$是 X中的非空开子集，因此 $U \cap V \cap D \neq \emptyset$，因为 D 在 X中稠密。于是 $U_1 \cap V_1 = (U \cap D) \cap (V \cap D) = U \cap V \cap D \neq \emptyset$，矛盾。□

The 以下推论表明，稠密连通拓扑群是一个不可分空间 e.

推论 4.6. 设 G 是一个拓扑群。那么 G 是稠密连通的，当且仅当 G 是一个平凡拓扑群。

证明. 只需证明必要性。假设 G 是稠密连通的。假设 G 不是平凡的，那么存在 U 的一个真开邻域 e，因此我们可以找到 V 的一个对称开邻域 e，使得 $V^2 \subset U$，这是由联合连续性和逆映射的连续性所致。容易看出 $\overline{V} \subset U$。然而，由定理 4.5 可知 $\overline{V} = G$，因此 $U = G$，这就产生了矛盾。□

推论 4.7. 设 X 是一个满足 $|X| > 1$ 的稠密连通空间，则 X 不是豪斯多夫的。

由定理 4.5，我们得到以下三个命题。

命题 4.8. 如果 X 是 Y 的稠密连通子空间，那么满足 $X \subset Z \subset \overline{X}$ 的任意子集 Z 都是稠密连通的。

命题 4.9. 如果 X 是稠密连通的，那么每个开子空间都是稠密连通的。

命题 4.10. 设 τ 和 σ 是集合 X 上的两个拓扑，满足 $\tau \subset \sigma$。如果 (X, σ) 是稠密连通的，那么 (X, τ) 是稠密连通的。

下面的例子表明，存在一个 T_1-紧的稠密连通空间。

例 4.11. 设 X 是一个赋予有限补拓扑的无限可数集。那么 X 是一个稠密连通、紧且为 T_1-空间。

然而，在旁拓扑群这一类中，情况大不相同，见例 4.14。事实上，我们还有以下两个定理。

定理 4.12. 旁拓扑群 G 是稠密连通的，当且仅当对于 e的任意两个非空开邻域 U 和 V，$UV^{-1} = G$。

证明. 假设 G 是稠密连通的，并假设 $\mathcal{N}(e)$ 是 e的所有开邻域构成的族。任取 e的两个非空开邻域 U 和 V。容易看出 $\overline{U} = \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e)} UW^{-1}$，因此 $\overline{U} \subset UV^{-1}$。由定理 4.5 的 (2)，可得 $\overline{U} = G$，故$UV^{-1} = G$。

反之，假设对于任意的非空开邻域 U 和 V，有 $UV^{-1} = G$。由定理 4.5，只需证明对于任意非空开子集 W，有 $\overline{W} = G$。任取一点 $w \in W$，并令 $O = w^{-1}W$。那么 O 是 e 的开邻域，因此根据我们的假设，$\overline{O} = \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e)} OW^{-1} = G$，也就是说，$\overline{O} = G$。因此，$G = w\overline{O} = w\overline{w^{-1}W} = \overline{ww^{-1}W} = \overline{W}$。

□

根据 [1，命题 1.4.5]，，通过与定理 4.12 类似的证明，可以得到以下定理。

定理 4.13. 拟拓扑群 G 是稠密连通的，当且仅当对于任意的非空开邻域 U 和 V，有 $UV = G$。

例 4.14. 存在一个无限、 T_1 且非不可分辨的旁拓扑群 G，使得 G 是稠密连通的。

证明。事实上，设 $G = (\mathbb{R}, +)$ 配备一种拓扑，其基为如下族

$$\tau = \{x + [y, +\infty) | x, y \in \mathbb{R}\}.$$

于是(G, τ)是一个 T_1 且无限的非离散旁拓扑群。根据定理 4.12， G 是稠密连通的。□

例4.15。存在一个无限的、 T_1 且非平凡的拟拓扑群 G，使得 G 是稠密连通的。

证明。令 $G = (\mathbb{Z}, +)$ 赋予一个拓扑，其基为如下族

$$\tau = \{x + \{y : y \in \mathbb{Z}, |y| \geq n\} : x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}.$$

那么 (G, τ) 是一个无限的、 T_1 且非平凡拓扑的拟拓扑群。根据定理 4.13， G 是稠密连通的。□

注记 4.16。此外，由命题 4.10 可知，存在一个无限的、 T_0 且稠密连通的旁拓扑群 G，它不是 T_1。事实上，令 $G=(\mathbb{R},+)$ 配备以下拓扑

$$\delta=\{x+[0,+\infty)|x\in\mathbb{R}\}.$$

显然，(G,δ) 是一个 T_0 且无限的非平凡旁拓扑群，但它不是 T_1。由于$\delta\subset\tau$，其中 τ是例 4.14 中的拓扑，由命题 4.10 可知，(G,δ) 是稠密连通的。

如果空间 X 的任意两个非空开子集 U 和 V 的交集 $\overline{U}\cap\overline{V}$都是无限集，则称其为 Brown [2] 。显然，每个稠密连通的无限空间都是 Brown 空间。然而，存在一个 Brown 空间 X，使得 X 不是稠密连通的。事实上，存在一个可数的 Hausdorff Brown 空间 X，见 [3]; 因此，由推论 4.7 可知， X 不是稠密连通的。

下面的命题表明，稠密连通性在连续满射下保持不变。

命题 4.17。设 $f\colon X\to Y$是一个连续满射。若 X 是稠密连通的，则 Y也是稠密连通的。

证明。根据定理 4.5，只需证明对于 Y 的任意非空开子集 U，$\overline{U}=Y$。取 Y 的任意非空开子集 U; 则 $f^{-1}(U)$ 在 X 中是开集，因此 $f^{-1}(U)=X$，因为 X 是稠密连通的。由 f 的连续性可知，$X=f^{-1}(U)\subset f^{-1}(\overline{U})$，从而 $Y=f(X)\subset f(f^{-1}(\overline{U}))$，即 $\overline{U}=Y$。因此， Y 是稠密连通的。□

接下来我们讨论稠密连通性的一些性质。

命题 4.18。设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一个空间族。那么， $\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$ 是稠密连通的，当且仅当每个 X_α 都是稠密连通的。

证明。根据命题 4.17，必要性显然。现在证明充分性。根据定理 4.5，只需证明对于 $\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$ 的任意非空开子集 U， $\overline{U}=\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$。固定 $\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$ 的任意非空开子集 U ；则存在一个基本开子集 $B=\Pi_{\alpha\in F}U_\alpha\times\Pi_{\alpha\in I\setminus F}X_\alpha$，使得 $B\subset U$，其中 F 是 I 的有限子集，且每个 U_α 都是 X_α 的非空子集。由定理 4.5 可知 $\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha=\Pi_{\alpha\in F}\overline{U_\alpha}\times\Pi_{\alpha\in I\setminus F}X_\alpha\subset\overline{B}\subset\overline{U}$，因此 $\overline{U}=\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$。□

命题 4.19. 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是空间 X的一个稠密连通子空间族。若对于 X的任意非空开子集 U，每个 $\alpha\in I$都满足 $U\cap(\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha)=\emptyset$ 或 $U\cap X_\alpha\neq\emptyset$，则 $\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha$ 是稠密连通的。

证明. 设 $Y=\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha$。由定理 4.5，只需证明对于 Y的任意非空开子集 W， $\overline{W}\cap Y=Y$。任取 Y的一个非空开子集 W。于是存在 X 的一个开子集 U，使得 $W=U\cap Y$。根据我们的假设及 $W\subset Y$，每个 $\alpha\in I$都满足$U\cap X_\alpha\neq\emptyset$，因此 $X_\alpha\subset(\overline{U\cap X_\alpha})\cap Y$，因为每个 $\alpha\in I$都是稠密连通的。由此可得

$$Y=\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha\subset\bigcup_{\alpha\in I}(\overline{U\cap X_\alpha}\cap Y)\subset\overline{U\cap Y}\cap Y=\overline{W}\cap Y$$

□

命题 4.20。设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是空间 X的一个稠密连通开子空间族。若对于任意两个不同的 α、$\beta\in I$，都有 $X_\alpha\cap X_\beta\neq\emptyset$，则 $\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha$ 是稠密连通的。

证明。令 $Y=\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha$。显然， Y 在 X 中是开集。根据定理 4.5，只需证明对于 Y 的任意非空开子集 W，$\overline{W}\cap Y=Y$。取 Y 的任意非空开子集W。则 W 在 X 中是开集。由我们的假设和 $W\subset Y$，存在某个$\alpha_0\in I$ 使得 $W\cap X_{\alpha_0}\neq\emptyset$，因此 $X_{\alpha_0}\subset(\overline{W\cap X_{\alpha_0}})\cap Y$，因为 X_{α_0} 是稠密连通的。因此，对于每个 $\alpha\in I$，

我们有 $\emptyset \neq X_\alpha \cap X_{\alpha_0} \subset (\overline{W \cap X_{\alpha_0}}) \cap Y$；由于 $X_\alpha \cap X_{\alpha_0}$ 是 X_α 的非空开子集，因此

$$X_\alpha \subset (\overline{X_\alpha \cap X_{\alpha_0}}) \cap Y \subset (\overline{W \cap X_{\alpha_0}}) \cap Y \subset \overline{W} \cap Y.$$

因此， $Y = \overline{W} \cap Y$。 □

最后，我们讨论局部稠密连通空间。根据定理4.5，每个稠密连通空间都是局部稠密连通的；此外，还存在不是连通空间的局部稠密连通空间，例如，至少含有两个点的离散空间。

设 X 是一个空间，且 $x \in X$。那么，包含点 x 的极大稠密连通子集称为点 x 的稠密连通分支；我们将 x 的稠密连通分支记为 $DC(x)$。

命题4.21.设 X 是一个局部稠密连通空间。那么每个 $DC(x)$ 都是开集和闭集。

证明。任取 $x \in X$。令

$$\mathcal{U} = \{U : x \in U \text{ and } U \text{ is an open dense-connected subset in } X\}$$

并置 $W = \bigcup \mathcal{U}$。由于 X 是局部稠密连通的， W 是一个非空开集。由命题 4.20可知， W 是稠密连通的。我们断言 W 是闭集。否则，存在$w \in \overline{W} \setminus W$。由于 X 是局部稠密连通的，存在 w 的开稠密连通邻域 O，于是 $O \cap W \neq \emptyset$。由命题 4.20， $O \cup W$ 是稠密连通的，因此 $O \cup W \subset W$，这就矛盾了。于是容易看出， W 是 x的稠密连通分支。□

由命题 4.20 和 4.21，可得以下命题。

命题 4.22。设 X 是一个局部稠密连通空间。对于任意两个稠密连通分支 $DC(x)$ 和 $DC(y)$，我们有 $DC(x) = DC(y)$ 或 $DC(x) \cap DC(y) = \emptyset$。

由命题 4.9 和命题 4.21，容易验证以下结果成立。

命题 4.23。空间 X 是局部稠密连通的，当且仅当 X 的所有开子空间的稠密连通分支都是开集。

由命题 4.23，以下定理成立。

定理 4.24。空间 X 是局部稠密连通的，当且仅当 X 是一个稠密连通空间族的拓扑和。

以下命题 4.25 容易验证。

命题 4.25。局部稠密连通性是开映射的不变性。

然而，以下问题对我们而言仍未解决。

问题 4.26。局部稠密连通性是商映射的不变性吗?

根据命题4.25，我们可以通过与命题 4.18 类似的证明证明以下命题。

命题 4.27. 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是一个空间族。那么 $\Pi_{\alpha \in I} X_\alpha$ 是局部稠密连通的，当且仅当存在一个有限的 $F \subset I$，使得对于每个 $\alpha \in F$， X_α 都是局部稠密连通的，并且对于每个 $\alpha \in I \setminus F$， X_α 都是稠密连通的。

问题4.28。每个局部紧连通群 G 具有不可数权，是否都是真一稠密子群连通的?

定理 4.29.如果 G 是一个连通的、拟紧阿贝尔群，且具有 $\omega < w(G) \leq \mathfrak{c}$，那么 G是真一稠密子群连通。

证明。由 [7, 定理4.3], 可知，存在 G的一个真一稠密伪紧子群 H；由 [7, 推论2.3], 可得， H 是连通的。□

5. DENSE SUBSETS OF PATHWISE CONNECTED SPACES AND ULTRACONNECTED SPACES

本节主要讨论路径连通空间和超连通空间的稠密子集，并给出稠密超连通空间的一些刻画。首先，我们考虑以下问题。

问题 5.1. 如何刻画空间 X，使得 X 是（局部）稠密路径连通的?

现在我们给出问题 5.1 的一些部分答案。

命题 5.2. 设 X 具有有限补拓扑。那么 X 不是稠密路径连通的。

证明. 若 X 是有限的，则结论显然。假设 X 是无限的，则存在一个可数无限子集 Y，它在 X 中稠密。显然， Y 不是路径连通的。因此， X 不是稠密路径连通的。□

以下两个结果显然成立。

命题 5.3. 设 X 是一个赋有有限补拓扑的不可数集合。那么 X 是真一稠密路径连通的。

引理 5.4. 设 (X,τ) 是一个路径连通空间。若 δ 是 X 上满足 $\delta\subset\tau$ 的一个拓扑，则 (X,δ) 也是路径连通的。

命题 5.5. 若 X 是 T_1 且稠密路径连通的，则 X 不可分 .

证明。假设 X 是可分的，则存在一个可数无限子集 Y，其在X中稠密。于是， Y 是路径连通的。然而，例 4.11 表明，可数无限空间的任意有限补拓扑（即最粗的 T_1-拓扑）都不是路径连通的，这根据引理 5.4 导致矛盾。□

下面这个问题的答案很有意思。

问题5.6.是否存在一个 T_1-空间 X 使得 X 是稠密路径连通的?

下面的定理 5.9 部分回答了问题 5.6。

设 X 是一个空间， x 和 y 是 X 中两个不同的点。若存在一点 $z\in\{x,y\}$，使得对于 X 中 z 的每个开邻域 U， $\{x,y\}\subset U$，则称 x 和 y 为非 T_1 点。此外，称 X 为非分离点空间。以下两个引理显然成立。

引理 5.7. 设 X 是一个空间， X 中的 x 和 y 是两个不同的点。若 x 和 y 不是 T_1-点，则映射 $f\colon \mathbb{I}\to X$，定义为 $f([0,1))=\{x,y\}\setminus\{z\}$ 和 $f(1)=z$，是一个连续映射。

引理 5.8. 若 X 是一个非分离点空间，则 X 的每个子空间都是非分离点子空间。

由引理 5.7 和引理 5.8 可容易验证，下述定理成立。

定理 5.9. 若 X 是一个非分离点空间，则 X 是稠密路径连通的。

推论 5.10. 若 G 是一个非-T_1 半拓扑群，则 G 是稠密路径连通的 .

注 5.11. (i) 显然，每个稠密路径连通空间都是真一稠密路径连通的，而每个真一稠密路径连通空间都是一稠密路径连通的，但反之不成立。显然，例 4.11 是一个稠密连通空间，但它不是路径连通的；事实上，它不是一稠密路径连通的。

(ii) 每个路径连通空间都是一稠密路径连通的。在 [9], 中，一稠密路径连通这一概念称为稠密路径连通，它在研究 [9], 中发挥着重要作用；他们证明了每个无限指数的阿贝尔 M-群都存在一种一稠密路径连通且局部单稠密路径连通的群拓扑。

(iii) 由于每个路径连通空间都是连通的，因此由推论 4.7 可知，每个稠密路径连通空间都不是豪斯多夫空间。

(iv) 显然，每个非平凡离散空间都是局部稠密路径连通的，但不是稠密路径连通的；由定理 4.5 可知，每个稠密路径连通空间都是局部稠密路径连通的。此外，通过类似于定理 4.24 的证明，我们可以证明，空间 X 是局部稠密路径连通的，当且仅当 X 是稠密路径连通空间的拓扑和。

最后，我们给出空间 X 使得 X 稠密超连通的一个刻画。如果一个空间 X 没有 X的不相交闭子集，则称其为超连通空间。显然，每个超连通空间都是连通的。

定理 5.12。设 X 是一个空间。则以下陈述等价:

(1) X 是稠密超连通；(2) 对于点 $x \in X$，我们有$\overline{\{x\}} = X$ 或 $\{x\} \cup (X \setminus \overline{\{x\}})$ 是 x 在 $\{x\} \cup (X \setminus \overline{\{x\}})$中的唯一开邻域；(3) 对于 X中的任意两点 x 和 y，我们有 $x \in \overline{\{y\}}$ 或 $y \in \overline{\{x\}}$。

证明。(3) $\Rightarrow$ (1)。显然。我们只需证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 和 (2) $\Rightarrow$ (3)。

(1) $\Rightarrow$ (2)。假设 X 是稠密超连通的。任取一点 $x \in X$。假设 $\overline{\{x\}} \neq X$，则 $X \setminus \overline{\{x\}}$ 是 X 中的非空开集。令 $Y = \{x\} \cup (X \setminus \overline{\{x\}})$。于是 Y 在 X 中稠密，因此 Y 是超连通的，且 $\{x\}$ 在 Y 中是闭的。假设存在 Y 中包含 x 的一个开邻域 U，使得 $U \neq Y$，则 $Y \setminus U$ 是 Y 中的非空闭集，并且 $(Y \setminus U) \cap \{x\} = \emptyset$，这与假设矛盾。因此，$\{x\} \cup (X \setminus \overline{\{x\}})$ 是 $\{x\} \cup (X \setminus \overline{\{x\}})$ 中 x 的唯一开邻域。

(2) $\Rightarrow$ (3)。任取 X 中的两点 x 和 y。现在假设 $x \notin \overline{\{y\}}$ 和 $y \notin \overline{\{x\}}$。因此，由假设可知，$\{x\} \cup (X \setminus \overline{\{x\}})$ 和 $\{y\} \cup (X \setminus \overline{\{y\}})$ 分别是 $\{x\} \cup (X \setminus \overline{\{x\}})$ 和 $\{y\} \cup (X \setminus \overline{\{y\}})$ 中 x 和 y 的唯一开邻域。于是 $y \in \{x\} \cup (X \setminus \overline{\{x\}})$ 和 $x \in \{y\} \cup (X \setminus \overline{\{y\}})$，因此容易验证 $x \in \overline{\{y\}}$ 和 $y \in \overline{\{x\}}$，这与假设矛盾。□

推论 5.13. 设 G 是一个拟拓扑群。那么 G 是稠密超连通的，当且仅当 G 是一个平凡空间。

证明. 充分性显然。假设 G 是稠密超连通的，由定理 5.12 的 (3) 可知，对于 X 中任意两点 x 和 y，有 $x \in \overline{\{y\}}$ 或 $y \in \overline{\{x\}}$。由于 G 是一个拟拓扑群，对于任意 x、$y \in G$，有 $y \in \overline{\{x\}}$，即 $\overline{\{x\}} = G$。因此，G 是一个平凡空间。□

根据定理 5.12，注记 4.16 中的空间 G 是一个稠密超连通的旁拓扑群；显然 G 不是一个平凡空间。再次根据定理 5.12，下面的例 H 是超连通的，但不是稠密超连通的。

例 5.14. 设 $H = \mathbb{R}$ 赋予由以下邻域基生成的拓扑 τ：对每个 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$，邻域具有形式 $[x, +\infty)$；对每个 $x \in \{0, 1\}$，邻域具有形式 $\{x\} \cup [n, +\infty)$ $n \in \mathbb{N}$。显然，H是超连通的，但不是稠密超连通的，因为 $0 \notin \overline{\{1\}}$ 且 $1 \notin \{0\}$。

下面的例子表明，稠密超连通性不具有有限乘积性。

例 5.15. 存在一个稠密超连通旁拓扑群 G，使得 G^2 不是稠密超连通的。

证明。令 G 为注记 4.16 中的旁拓扑群。显然，根据定理 5.12，G 是稠密超连通的。然而，G^2 不是稠密超连通的，因为 $\{(0,0)\} \notin \{(0,1)\}$ 且 $\{(0,1)\} \notin \{(1, 0)\}$，因此再次根据定理 5.12，$G^2$ 不是稠密超连通的。□

References

[1] A. Arhangel'skiĭ, M. Tkachenko, *Topological groups and related structures*, Atlantis Press, Paris; World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2008.[2]T. Banakh, Y. StelmakhT, 强刚性可数（半）豪斯多夫空间的例子，arXiv:2211.12579v4.[3] M. Brown, 一个可数的连通豪斯多夫空间，Bull. Amer. Math. Soc., 59 (1953), 367. [4] W.W. Comfort, L.C. Robertson, 紧阿贝尔群拓扑的真伪紧扩张，Proc. Amer. Mathe. Soc., 86(1)(1982), 173–178. [5] W.W. Comfort, L.C. Robertson, 某些全有界群类中的极端现象，Disser- tationes Math. (Rozprawy Mat.), 272 1988 1 42 ( ), – W.W. Comfort, J. Van Mill J, 极端伪紧阿贝尔群是紧可度量[6]的，Proc. Amer. Math. Soc., 135(12)(2007), 4039–4044. [7] W.W. Comfort, J. van Mill, 关于连通伪紧阿贝尔群，Topol. Appl., 33(1)(1989), 21–45. [8] A. Dow, I. Juh´asz, *Dense k-separable compacta are densely separable*, Topol. Appl., 283(2020) 107351. [9] D. Dikranjan, D. Shakhmatov, 马尔可夫关于连通群拓扑问题的完整解答，Adv. Math., 286(2016), 286–307. [10] D. Dikranjan, 干预拓扑群稠密子群的温和、慷慨巨人，Topol. Appl., 259(2019), 6–27. [11] R. Engelking, *General Topology*, PWN, Warzawa, 1989. [12] I. Juh´asz, S. Shelah, $\pi(X) = \delta(X)$ *for compact* X, Topol. Appl., 32(1989) 289–294. [13] R. Levy, R.H. McDowell, *Dense subsets of* βX, Proc. Amer. Math. Soc., 50(1)(1975) 426–430. [14] F. Lin, Q.Y. Wu, C. Liu, 稠密可分群及其在 d-独立性中的应用，arXiv:2211.14588v3. [15] R. Maehara, 关于一个连通的稠密真子群，其在 $\mathbb{R}^2$ 中的补集是连通的，Proc. Amer. Math. Soc., 1986, 97(3)(1986), 556–558. [16] H.J. Wilcox, 紧群的稠密子群, Proc. Amer. Math. Soc., 28(2)(1971), 578–580. [17] J.H. Weston, J. Shilleto, *Cardinalities of dense sets*, Topol. Appl., 6(1976) 227–240.

(Fucai Lin): School of mathematics and statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, P. R. China

Email address: linfucai@mnnu.edu.cn; linfucai2008@aliyun.com

(Qiyun Wu): School of mathematics and statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, P. R. China

Email address: 904993706@qq.com