一类量子冯·诺依曼架构

Dong-Sheng Wang*中国科学院理论物理重点实验室，中国科学院理论物理研究所，中国科学院，北京 *100190*，中国(日期：2023年4月10日)

在这项工作中，我们提出了一系列通用量子计算模型，构成一类量子冯·诺依曼架构，包含存储器、控制、中央处理器、互联网以及输入和输出等模块化单元。该系列包含三代模型，其特点由动态量子资源理论刻画；同时，它还规避了有关量子编程与控制的不可能性定理。除具备通用性外，这类架构还满足系统与算法设计中的其他理想工程要求，例如模块化和可编程性，因此为构建通用量子计算机提供了一种独特途径。

arXiv:2304.03460v1 [quant-ph] 7 Apr 2023

现代计算机是一种复杂的物理系统，由存储器、控制、中央处理器、互联网以及输入和输出设备等模块化单元组成。这种信息处理系统通常称为冯·诺依曼架构。与电路模型和图灵机等其他计算模型相比，它尤其适合实现模块化、可编程性和自动化，同时也具备通用性。它还为算法设计带来很大优势，例如，可以将已存储的算法作为输入，供高层算法使用，从而设计出新的算法。

过去几十年中，以电路模型为主要基础的量子中央处理器和量子通信已取得成功 [1]，这对建立量子信息科学至关重要。构建量子存储器 [2] 和控制单元 [3] 则更具挑战性，不过近期进展表明这些问题仍可得到解决 [4–8]。尤其是，最近有人提出了量子冯·诺依曼架构（QvN）的原型 [7, 8]。与此同时，人们尝试系统地统一各种通用量子计算模型 [9, 10]，，而资源理论框架 [10] 被证明有助于对它们进行分类。在本研究中，我们建立了三种 QvN 模型，构成一个体系；每种模型都具有鲜明特点，适用于不同的实际场景。

如图 1 所示，若与经典情形进行比较，就能更好地理解 QvN 的主要功能。量子原理有两项：信道-状态对偶性 [11]和海森堡不确定性原理。前者促使我们将信道的对偶态（即 Choi态）用作存储的量子程序，也促使我们使用纠缠比特进行通信 [12]，；而后者刻画了量子相干性 [13]，它在 QvN 的各个组成部分中发挥着不同作用。全面描述 QvN 超出了本文的范围，但其基本图景是：在量子控制单元的协同作用下，可以从量子存储单元中读取量子程序并将其写入其中，也可以借助量子互联网上传和下载量子程序。量子测量在输入、输出以及计算过程中都发挥着作用。

对计算模型更严谨的刻画基于量子资源理论 [14]，，该理论能够捕捉空间和时间等方面的约束。我们采用通用资源的层级来定义一系列计算模型，至少包含三代 [10]。将有限维Choi态集合视为程序后，我们建立了QvN的三代模型，如表I所总结。这构成了预期的演化系列（“*e*-系列”）[10]，，并且确实可以看到程序资源从局域到非局域的层级

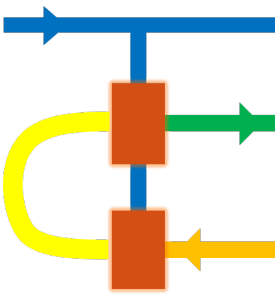


图 1. 量子冯·诺依曼架构功能示意图。其组成单元包括程序、控制、中央处理器、输入和输出，分别以黄色、蓝色、红色、橙色和绿色表示。此外，还需要量子互联网来传输量子数据。

* wds@itp.ac.cn

	QvN-I		QvN-II		QvN-III
$\mathcal{F}$	EBC	$\supset$	SEPC	$\supset$	PROC
$\mathcal{O}$	SC	$\supset$	随机局域操作与经典通信	$\supset$	S1O
$\mathcal{U}$	存储器	$\prec$	双存储器	$\prec$	非局域存储器

表I. 量子冯·诺依曼架构（QvN）系列及其资源理论刻画：自由集 $\mathcal{F}$、自由操作 $\mathcal{O}$以及通用资源集$\mathcal{U}$。缩写如下：EBC 指纠缠破坏信道，SC 指保持纠缠破坏性质的超信道；SEPC 指双部分可分信道，SLOCC 指保持该性质的随机局域操作与经典通信；PROC 指局部信道的张量积，S1O 指保持该性质的随机单局部操作。关系“a $\prec$ b”表示资源b 比a更强大。

结构。还应注意的是，这里我们主要依赖量子程序的资源理论。也可以分别针对量子控制和通信任务定义资源理论。

量子演化由完全正且保迹（CPTP）映射描述，也称为通道 [1]。对于有限维希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 及其状态集合 $\mathcal{D}(\mathcal{H})$，任意量子通道 $\mathcal{E}: \mathcal{D}(\mathcal{H}) \to \mathcal{D}(\mathcal{H})$ 都可以表示为其对偶态$\omega_{\mathcal{E}} := \mathcal{E} \otimes \mathbb{1}(\omega)$，通常称为与 ω : $= |\omega\rangle\langle\omega|$, 和 $|\omega\rangle := \sum_i |ii\rangle/\sqrt{\mathrm{d}}$相关的 Choi态 [11],, 其中 $\mathrm{d} = \dim(\mathcal{H})$。状态 $|\omega\rangle$ 是一个贝尔态，也称为纠缠比特。Choi态是双部态，我们将第一（第二）部分称为“头部”（“尾部”）。给定一个程序 $\omega_{\mathcal{E}}$，初始输入态 ρ 通过二元测量$\{\sqrt{\rho^t}, \sqrt{\mathbb{1} - \rho^t}\}$写入尾部；对于可观测量 $\mathcal{A}$，其期望值 $\mathrm{tr}(\mathcal{A}\mathcal{E}(\rho))$形式的最终输出可从头部 [7]读取。这使得我们能够在通常的电路模型中模拟任意量子算法，而该模型要求先制备输入 [8]。

除了通过测量进行输入和输出外，还可以进行程序转换和组合。通过所谓的超信道 [15], ，可以将程序 $\omega_{\mathcal{E}}$ 转换为另一个程序 $\omega_{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{S}}(\omega_{\mathcal{E}})$；通常，这可以通过附加纠缠比特，然后执行可分离酉操作并进行测量来实现 [8]; 即，$\hat{\mathcal{S}}(\omega_{\mathcal{E}}) = \mathrm{tr}_e \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}(\omega_{\mathcal{E}} \otimes \omega)$，其中$\mathrm{tr}_e$表示对纠缠比特头部取迹，并在其尾部投影到 $|0\rangle\langle 0|$，而酉算子 $\mathcal{V}$ $(\mathcal{U})$ 作用于头部（尾部）线路。因此，超信道$\hat{\mathcal{S}}$ 还可以进一步存储为Choi态$\omega_{\hat{\mathcal{S}}}$，再由另一个超信道作用于其上，从而得到所谓的高阶操作 [16]。

两个程序的组合依赖于一种广义化的量子隐形传态 [12]。从对称性的角度来看，标准隐形传态具有 $Z_d \times Z_d$ 对称性，其射影表示由量子比特 Pauli 算符构成。通过将非平凡的 Pauli 副产物归为一组，可以将这种对称性扩展至$SU(d)$ [7]。这使得任意酉程序 $\{|\omega_{U_i}\rangle\}_{i\in\mathcal{I}}$都能确定性地组合，形成$|\omega_{\prod_i U_i}\rangle$。

现在我们研究QvN的资源理论表述。通用资源理论由四个集合定义：自由态集合 $\mathcal{F}$、自由操作集合 $\mathcal{O}$、资源态集合 $\mathcal{R}$以及通用资源集合$\mathcal{U} \subset \mathcal{R}$ [10]。我们将在下文看到，QvN家族中的各代依赖于不同形式的程序及其上的操作。为简便起见，我们假设采用经典控制，并聚焦于对程序进行的操作。

对于称为 QvN-I 的第一代，我们不要求空间 $\mathcal{H}$ 具有明确的结构，也不对信道施加任何约束（例如局域性或能量方面的约束）。程序 $\omega_{\mathcal{E}}$ 的主要特征是纠缠比特 ω 中所含的纠缠。因此，我们将具有以下形式的纠缠破坏（EB）信道集合视为自由集合：$\mathcal{E}_{\mathrm{EB}}(\rho) = \sum_i \mathrm{tr}(F_i\rho)\sigma_i$，其中 $\{F_i\}$ 是正算子值测度（POVM），每个 σ_i 都是一个态 [17]。这意味着输入数据 ρ 被替换为 σ_i，只有概率 $\mathrm{tr}(F_i\rho)$ 依赖于 ρ。$\mathcal{E}_{\mathrm{EB}}$ 的对偶态是可分的，因此，将保持 Choi 态形式的超信道认定为自由操作集合 $\mathcal{O}$ 是自然的。例如，对尾部系统实施的局部操作必须是幺正保持的，因为尾部的局部态是完全混合态。

现在，所有不破坏纠缠的信道都是资源，而通用集合 $\mathcal{U}$ 是与纠缠比特具有相同纠缠的酉程序ω。这与量子存储器的资源理论 [18, 19]类似。对于 QvN-I，程序的组合可视为免费，而通过超信道转换程序则会消耗纠缠比特。此外，确定免费设置下的计算能力更为重要。我们发现，其能力至少与经典计算机相当，即能够模拟任意经典算法，因此也能够描述经典冯·诺依曼架构，例如。

随机算法可以用随机过程 $\vec{p} \mapsto \vec{q} = S\vec{p}$ 来描述，该过程对应于随机矩阵 S，并可通过正算子值测度 $\{F_i\}$ 实现，其中$S_{ij} = \langle j|F_i|j\rangle$，这是纠缠破坏信道的一种特殊类型。经典冯·诺依曼架构对比特和 p比特的操作，例如复制、读取和写入，都可以通过以下方式模拟：

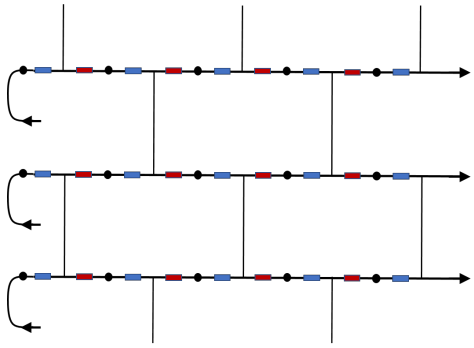


图 2. QvN-II 中电路的示意图。每个量子比特的演化定义一个局域部分，纠缠门（竖线）则作为通用资源。任意两个程序之间的连接通过标准（蓝色方框）或 $SU(2)$ 协变的量子隐形传态实现组合。黑点表示一个量子比特门。

纠缠破坏信道。在纠缠破坏信道输出的状态中也可能存在量子相干性；然而，由于纠缠被破坏，这种相干性无法传播。与经典情形相比是否存在优势，留待进一步探讨（参见文献 [20]）。

将量子程序的资源理论与基于电路模型定义的振幅族 [10] 的相干性或纠缠资源理论进行比较，颇有启发性。在 QvN-I 中，纠缠比特 ω 作为程序用于传播量子相干性，而相干性本身（存在于非对角态 [13] 中）则由测量或幺正演化产生。因此，量子程序（或存储器）与作为通用资源的相干性有所不同。相对于具有局域性约束的双可分态定义的纠缠，其通用资源也是纠缠比特 ω。下文将看到，实际上，纠缠比特的动力学类比物是纠缠双体信道，这由此引出了 QvN-II 模型。

对于双体系统 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$，如果其双体信道$\mathcal{E}_{AB}$的 Choi态 $\omega_{\mathcal{E}_{AB}}$在$A|B$ 划分下是可分的，则该信道是可分的。以可分 Choi态 $\omega_{\mathcal{E}_{AB}}$作为自由集合 $\mathcal{F}$，以保持该集合不变的随机局域操作与经典通信（SLOCC）作为自由操作 $\mathcal{O}$，并将纠缠双体信道作为资源，可以直接建立资源理论。例如，受控非门（CNOT）是纠缠性的，并且对于双量子比特系统，其纠缠达到最大值。这启发了我们对 QvN-II 的构想。对于量子比特，我们将所有局部等价于 CNOT 的酉门集合确定为 $\mathcal{U}$。其基本构件是程序 ω_{H}、ω_{T} 和 ω_{CNOT}，分别对应哈达玛门 H、T $= Z^{1/4}$ 以及泡利Z 门，从而形成通用门集合 {H、T、CNOT} [1]。它们的组合可以实现任意量子算法。

如图 2 所示，QvN-II 中的计算是一个带尾部的电路，输入位于尾部，输出位于头部，组合位于中间。一次组合是在尾部导线和头部导线上执行的量子隐形传态。若在受控非门之前组合一个量子比特门 H 或 T，则需要标准量子隐形传态，因为 Pauli 副产物可以穿过受控非门；而若在受控非门之后组合一个量子比特门，则需要如本例所示的$SU(2)$ 协变量子隐形传态，因为只有在完整的 $SU(2)$ 对称性可用时，Pauli 副产物才能穿过。显然，所有 Pauli 副产物都会被移至电路末端，因此可以进行校正。其成本与电路的时空体积成正比，即电路中基本门的总数。

这种模型看起来像基于测量的量子计算，但二者存在关键差异。在基于量子隐形传态的方案中，[21], 门不会预先以其 Choi态的形式存储。受控非门存储在簇态中 [22], ，但量子比特门则由在旋转基底下进行的单量子比特测量实现。更根本的区别在于，QvN-II 中的信息流深度为一，见图 3(a)。经过模块化副产物后，组合充当纠缠比特，即一个用于传播信息的恒等门。这带来一个关键特

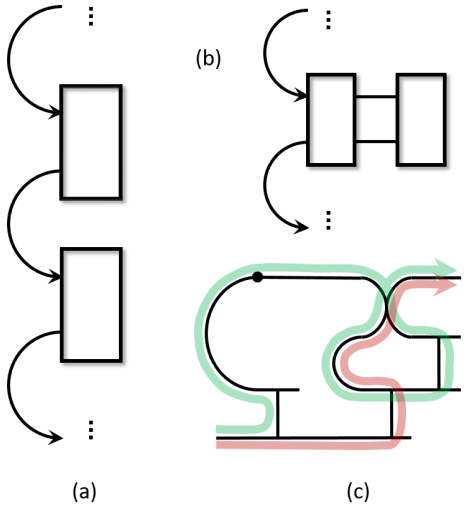


图 3。（a）QvN-II 中的信息流。每个方框表示一次组合。（b）可切换性的示意图。（c）一个可切换程序，包含“开启”路径（绿色）和“关闭”路径（红色）。竖线表示受控非门，或等效的 CZ 门。黑点表示量子比特程序，黑色交叉导线表示 SWAP 门。该方案也适用于受控非门程序。

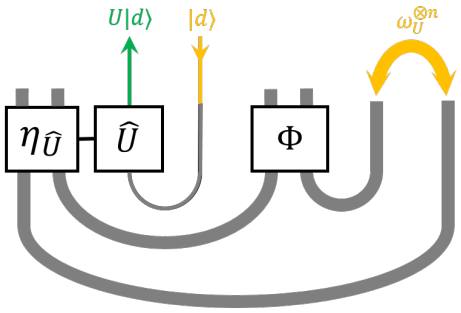


图 4。QvN-III 模型示意图。粗线表示多个纠缠比特，$\eta_{\hat{U}}$ 其中带有对 $\hat{U}$ 的控制表示协变正算子值测度，Φ 表示用于制备广义正弦态的电路。灰色部分构成程序 ω_{cov}。注意，为方便起见，我们旋转了图示。

性：我们将这种尾随电路的特征称为门的“可切换性”（图 (b)）。具体而言，一个纠缠比特连接到程序的头部，形成一个“头部三极管”。如图 (c) 所示，需要在特定导线上施加一个受控非门，这是组合中的第一步。由此可以通过完成两条信息流路径中的一条来开启或关闭一个门（并用受控非门擦除另一条路径）。这种可切换性使得电路运行过程中能够纠正错误的门，也带来了电路可编程性方面的新可能。

现在我们继续构造 QvN-III 模型。我们将考虑多方或非局域程序，这反过来要求更加严格的自由设置。事实证明，文献 [6] 中的模型是一个合适的起点。对于作用于 2n 个量子比特上的广义正弦态 $|\Phi\rangle$，输出 $U|d\rangle$ 可按精度 $\epsilon \sim {}^{1}\,n^{2}$ 由 $\int d\,\hat{U}(\hat{U} \otimes |\eta_{\hat{U}}\rangle\langle\eta_{\hat{U}}|)|d\rangle|p_U\rangle$ 近似，其中协变正算子值测度由状态 $|\eta_{\hat{U}}\rangle$ 构成，$d\,\hat{U}$ 是群 SU(d) 上的 Haar 测度，程序态为 $|p_U\rangle = (U^{\otimes n} \otimes \mathbb{1})|\Phi\rangle$。值得注意的是，该方案对于学习或估计同样具有最优性，也可以视为一种协变编码 [23]。具体而言，设 $|f\rangle = U|d\rangle$ 和 $|f\rangle \mapsto |d\rangle|p_U\rangle$ 为等距编码，则显然该编码具有 SU(d) 协变性，而正算子值测度实现了解码。这里的一个新颖特征是，协变性实现了盲计算，这有别于上述另外两个模型，并促成了下面的构造。

如图 4 所示，我们使用非局域程序 ω_{cov} 存储整个方案，可将其视为超信道。解码过程由其电路存储，其中正算子值测度 $\{\eta_{\hat{U}}\}$ 根据 Naimark 扩张通过投影测量实现，而状态 $|\Phi\rangle$ 则由其制备电路存储。程序 $|\omega_U\rangle^{\otimes n}$ 和数据 $|d\rangle$ 均通过测量注入。现在，每个量子比特都是一个局部子系统，因此显然，自由集 $\mathcal{F}$ 由横向操作构成，包括读写测量；自由操作 $\mathcal{O}$ 是局域的，无需明显的经典通信；而作为通用资源 $\mathcal{U}$ 的程序 ω_{cov} 使准精确通用性 [24] 成为可能。当输入、输出和程序分别由不同参与方持有时，它能盲目地实现 $U|d\rangle$。利用组合技术，还可以将几个盲程序 $\{|p_{U_i}\rangle\}$ 组合起来。

因此，我们利用资源理论框架建立了 QvN 家族，如表 I 所示。它们的通用资源包括由纠缠比特定义的量子存储器、由受控非门定义的双部存储器，以及来自协变编程的非局域存储器。我们还可以看到其自由设置的子集层级：从能够高效模拟任意经典算法的最大集合，到局域双部可分信道，再到只能生成乘积态的单局域信道。值得注意的是，这一家族还可能包含其他成员；通过同时考虑量子控制和量子通信的资源理论，QvN 的资源理论刻画还可以更加完整。

总而言之，我们展示了如何利用动态量子资源理论建立 QvN。在 QvN 框架中，仍有待探究的是 QvN 能否助力量子信息领域的其他研究。例如，一项直接应用是算法设计 [9]。一些近期的量子算法，例如奇异值变换 [25]，量子学习 [26]，可以描述为超信道，因此能够将其加速恰当地归因于量子存储器资源。借助高保真多量子比特门 [27–29]，尤其可以在当前量子计算机上实现 QvN 原型。还可以通过实验研究 QvN 的独特特征，例如门的可切换性和新型尾随电路。

谨此感谢与 G. Chiribella、Y.-D. Wu、Y. Yang、S. Luo 和 D. Yang 的讨论。本研究获得中国国家自然科学基金资助，项目编号为 12047503 和 12105343。

[1] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang，《量子计算与量子信息》。英国剑桥：剑桥大学出版社，2000年。[2] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang，“可编程量子门阵列”，《物理评论快报》，第 79 卷，第 321–324 页，1997年7月。[3] M. Araujo、A. Feix、F. Costa 和 C. Brukner，“量子电路无法控制未知操作”，《新物理学杂志》，第 16 卷，文章编号 093026，2014年。[4]Z. Gavorova、M. Seidel 和 Y. Touati，“实现受控未知酉变换的拓扑障碍”，2020年。arXiv 预印本 arXiv:2011.10031。[5]A. Vanrietvelde 和 G. Chiribella，“利用保持扇区的量子信道实现量子过程的通用控制”，《量子信息与计算》，第 21 卷，第 15–16 期，第 1320–1352 页，2021年。[6] Y. Yang、R. Renner 和 G. Chiribella，“酉门的最优通用编程”，《物理评论快报》，第 125 卷，文章编号 210501，2020年11月。[7] D.-S. Wang，“Choi态、基于对称性的量子门隐形传态与存储程序量子计算”，《物理评论 *A*》，第 101 卷，文章编号 052311，2020年5月。[8] D.-S. Wang，“量子冯·诺依曼架构的原型”，《理论物理通讯》，第 74 卷，文章编号 095103，2022年。[9]D.-S. Wang，“通用量子计算模型的比较研究：迈向物理统一”，《量子工程》，第 2 卷，文章编号 85，2021年。[10] D.-S. Wang，“量子计算的通用资源”，2023年。arXiv 预印本 arXiv:2303.03715。[11] M.-D. Choi，“复矩阵上的完全正线性映射”，《线性代数及其应用》，第 10 卷，第 10 期，第 285–290 页，1975年。[12] C. H. Bennett、G. Brassard、C. Cr´epeau、R. Jozsa、A. Peres 和 W. K. Wootters，“通过经典信道与爱因斯坦-波多尔斯基-罗森信道传送未知量子态”，《物理评论快报》，第 70 卷，第 1895–1899 页，1993年3月。[13] A. Streltsov、G. Adesso 和 M. B. Plenio，“专题综述：作为资源的量子相干性”，《现代物理评论》，第 89 卷，文章编号 041003，2017年10月。[14] E. Chitambar 和 G. Gour，“量子资源理论”，《现代物理评论》，第 91 卷，文章编号 025001，2019年4月。[15] G. Chiribella、G. M. D’Ariano 和 P. Perinotti，“量子操作的变换：量子超映射”，《欧洲物理快报》，第 83 卷，文章编号 30004，2008年。[16] G. Chiribella、G. M. D’Ariano 和 P. Perinotti，“量子网络的理论框架”，《物理评论 *A*》，第 80 卷，文章编号 022339，2009年8月。[17] M. Horodecki、P. Shor 和 M. B. Ruskai，“纠缠破坏信道”，数学物理评论，第15卷，第629–641页，2003年。[18] D. Rosset、F. Buscemi 和 Y.-C. Liang，“量子存储器的资源理论及其在最少假设下的忠实验证”，《物理评论*X*》，第8卷，第021033页，2018年5月。[19] L. Li、M. J. W. Hall 和 H. M. Wiseman，“量子非马尔可夫性的概念：一个层级”，《物理报告》，第759卷，第1–51页，2018年。[20]M. Hayashi，量子信息理论：数学基础，第*2*版。施普林格，2017年。[21]D. Gottesman 和 I. L. Chuang，“利用传态和单量子比特操作展示通用量子计算的可行性”，《自然》，第402卷，第6760期，第390–393页，1999年。[22] R. Raussendorf 和 H. J. Briegel，“单向量子计算机”，《物理评论快报》，第86卷，第5188–5191页，2001年5月。[23]Y. Yang、Y. Mo、J. M. Renes、G. Chiribella 和 M. P. Woods，“通过有界参考系实现最优通用量子纠错”，《物理评论研究》，第4卷，第023107页，2022年5月。[24] D.-S. Wang、Y.-J. Wang、N. Cao、B. Zeng 和 R. Laflamme，“准精确容错量子计算与价键固体码理论”，《新物理学杂志》，第24卷，第023019页，2022年。[25] J. M. Martyn、Z. M. Rossi、A. K. Tan 和 I. L. Chuang，“量子算法的大统一”，*PRX Quantum*，第2卷，第040203页，2021年12月。[26]H.-Y. Huang、R. Kueng 和 J. Preskill，“机器学习中量子优势的信息论界限”，《物理评论快报》，第126卷，第190505页，2021年5月。[27] H. Levine、A. Keesling、G. Semeghini、A. Omran、T. T. Wang、S. Ebadi、H. Bernien、M. Greiner、V. Vuleti´c、H. Pichler 和 M. D. Lukin，“利用中性原子并行实现高保真多量子比特门”，《物理评论快报》，第123卷，第170503页，2019年10月。[28] M. Khazali 和 K. Mølmer，“通过在里德堡原子和超导电路的相互作用激发态流形中进行绝热演化实现快速多量子比特门”，《物理评论*X*》，第10卷，第021054页，2020年6月。[29] Y. Kim、A. Morvan、L. B. Nguyen、R. K. Naik、C. J¨unger、L. Chen、J. M. Kreikebaum、D. I. Santiago 和 I. Siddiqi，“固定频率超导量子比特的高保真三量子比特 iToffoli 门”，《自然物理学》，第18卷，第783页，2022年。