arXiv:2304.03470v2 [math.OC] 6 Jun 2023

反射前向-后向随机微分方程随机控制问题的随机验证定理*

Lu Liu† Xinlei Hu‡ Qingmeng Wei§

2023年6月7日

摘要

本文研究了反射前向—后向随机微分方程随机控制问题的随机验证定理。我们在经典解和黏性解框架下开展研究，给出了验证控制为最优控制的充分条件。我们还根据相关带障碍项的Hamilton-Jacobi-Bellman方程的经典解和黏性解，构造了反馈最优控制律。最后，我们将理论结果应用于两个具体例子：一个对应经典解情形，另一个对应黏性解情形。

关键词。随机验证定理；反射前向-后向随机微分方程；经典解；黏性解；带障碍的HJB方程；反馈控制律。

AMS数学学科分类。93E20；35D40；49K45

1 引言

Bellman 于 20 世纪 50 年代初提出的动态规划方法，是求解最优控制问题的有力工具之一。该方法的核心思想是研究一族初始时刻和状态各不相同的最优控制问题，并通过相应的Hamilton-Jacobi-Bellman 方程（简称 HJB 方程）建立它们之间的关系。该方法已广泛应用于确定性和随机控制问题，参见 Fleming、Rishel [8], Yong、Zhou [17] 及其中所引文献。随着 Pardoux、Peng [13], 首次提出的非线性后向随机微分方程（简称 BSDEs）的发展，一系列相关的随机控制问题应运而生。动态规划原理（简称 DPP）也不例外，迅速发展并已广泛应用于这些控制问题，参见 [1, 11, 12, 14, 16], 等文献。研究表明，这些不同随机控制问题的值函数是相应偏微分方程（简称 PDEs）的解。然而，大多数文献都忽略了如何从偏微分方程的解构造最优控制，而这实际上正是随机验证定理所要解决的问题。随机验证定理给出了借助偏微分方程的解验证控制为最优控制的充分条件，

*本工作得到中国国家自然科学基金（编号：11971099）和吉林省杰出青年人才基金（编号：20230101365JC）的资助。

†数学与统计学院，东北师范大学，中国长春130024；电子邮箱： liulu@nenu.edu.cn

‡东北师范大学数学与统计学院，中国长春 130024；邮箱：hux1302@nenu.edu.cn§通讯作者。东北师范大学数学与统计学院，中国长春 130024；邮箱： weiqm100@nenu.edu.cn

因此十分重要且不可或缺，尤其是在工程监理、数值计算和算法设计中。

当偏微分方程的解是经典解（即足够光滑）时，获得验证定理相对容易；控制问题可参见 [8, 17] ，博弈问题可参见 [15] 。然而，偏微分方程很难存在经典解，因此我们不得不求助于弱解。正如前文提及的有关动态规划原理的参考文献所示，大多数理论框架都涉及一种弱解，即黏性解。Crandall、Lions [5], 最初针对一阶哈密顿-雅可比方程引入了黏性解，随后 Crandall等人 [6]将其发展至二阶偏微分方程。在黏性解框架下，Zhou等人 [19], 、Gozzi等人 [9, 10] 研究了经典随机控制问题的随机验证定理；Zhang [18] 则得到了随机递归控制问题的随机验证定理。最近，Chen、L¨u [4] 无需足够的光滑性，直接从值函数的动态规划原理出发，为无限维随机控制系统建立了随机验证定理。

本文将聚焦于一类反射型前向后向随机微分方程（简称 FBSDEs）的随机控制问题。反射倒向随机微分方程最早由 El Karoui等人引入 [7] 并在许多方面得到广泛发展，包括动态规划原理。通过建立控制问题或博弈问题的动态规划原理，参考文献 [1, 2, 16] 表明，值函数是带障碍项的相关Hamilton–Jacobi–Bellman 方程或哈密顿-雅可比-贝尔曼-伊萨克斯方程的黏性解。本文旨在研究反射型前向后向随机微分方程的随机控制问题的验证定理，并从带障碍项的Hamilton–Jacobi–Bellman 方程中构造反馈最优控制律。研究将在经典解和黏性解的框架内开展。

首先，我们给出带障碍的HJB方程存在经典解时控制为最优控制的充分条件。BSDE（其中 $W(\cdot, X^{t,x;u}(\cdot))$ 满足相应条件）与成本泛函对应的反射型反向随机微分方程之间无法进行比较。因此，我们采用反射型反向随机微分方程的惩罚序列，将问题转化为应用反向随机微分方程的比较定理，并进一步完成证明。

对于黏性解情形，由于缺乏足够的光滑性，采用二阶抛物型上微分和下微分的概念来提供光滑检验函数。不同于经典解情形，还需要具备带障碍项的哈密顿-雅可比-贝尔曼方程的黏性解的一些额外性质。第一是黏性解关于(t, x)的联合利普希茨连续性，第二是黏性解关于 x的半凹性。这一要求略显严格。然而，幸运的是， [3] 中的研究使这两个性质成为可能。此外，本文给出两个例子，说明所得验证定理为构造最优控制，或检验给定的可容许控制是否为最优控制，提供了一种方法。

本文的结构如下。我们在第2节中 formulates 控制问题并回顾一些已知结果。第3节讨论经典解框架下的随机验证定理。在第4节中，我们对黏性解情形进行详细研究，并构造反馈最优控制律。最后，将理论结果应用于两个可计算的例子中。一个属于经典解情形，另一个属于黏性解情形。

2 预备知识

设$(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 是一个完备滤过概率空间，在其上定义了一个 d 维标准布朗运动 $B(\cdot)$，且 $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是将所有 $\mathbb{P}$-零集增广后的自然滤过。设 $T > 0$为给定的终端时刻。对于任意 $t \in [0, T]$、 $k \geqslant 2$ 以及欧几里得空间 $\mathbb{R}^n (n \geqslant 1)$，我们引入

以下空间，

$$L^k_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbb{R}^n) := \Big\{\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n \mid \xi \text{ is } \mathcal{F}_t\text{-measurable}, \mathbb{E}|\xi|^k < \infty\Big\}; \qquad \mathscr{D} = [0,T] \times L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbb{R}^n);$$

$$\mathcal{S}^k_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^n) := \Big\{\varphi : \Omega \times [t,T] \to \mathbb{R}^n \mid \varphi(\cdot) \text{ is } \mathbb{F}\text{-adapted, continuous, and } \mathbb{E}\Big[\sup_{r\in[t,T]} |\varphi(r)|^k\Big] < \infty\Big\};$$

$$L^k_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^n) := \Big\{\varphi : \Omega \times [t,T] \to \mathbb{R}^n \mid \varphi(\cdot) \text{ 是 } \mathbb{F}\text{-渐进可测的，且 } \mathbb{E}\Big(\int_t^T |\varphi(r)|^2 dr\Big)^{\frac{k}{2}} < \infty\Big\}; \mathcal{A}^2_c(t,T;\mathbb{R}) :$$

$$= \Big\{\varphi : \Omega \times [t,T] \to \mathbb{R} \mid \varphi(\cdot) \text{ 是 } \mathbb{F}\text{-适应的、连续且递增的，} \varphi(t) = 0, \mathbb{E}|\varphi(T)|^2 < \infty\Big\}; C^{1,2}([t,T]\times\mathbb{R}^n) :$$

$$= \Big\{w : [t,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid w(\cdot,\cdot) \text{ 是连续的，} w_r(\cdot,\cdot)\ w_x(\cdot,\cdot)\ w_{xx}(\cdot,\cdot) \text{ 存在，且}$$

$$\text{are also continuous}\Big\}.$$

现在我们来表述随机控制问题。对于任意 $t \in [0,T]$，记 $\mathcal{U}_{t,\ T}$ 为 $[t,T]$ 上所有可容许控制的集合，即

$$\mathcal{U}_{t,T} := \Big\{u : [t,T]\times\Omega \to U \mid u(\cdot) \text{ is } \mathbb{F}\text{-progressively measurable}\Big\},$$

其中 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 是非空紧集。

对于任意 $(t,\xi) \in \mathscr{D}$ 和 $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{t,\ T}$，考虑以下受控随机微分方程（简称 SDE），

$$\begin{cases} dX(s) = b\big(s, X(s), u(s)\big)ds + \sigma\big(s, X(s), u(s)\big)dB(s), \quad s \in [t,T], \\ X(t) = \xi, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $u(\cdot)$ 是控制过程，$X(\cdot)$ 是受控状态过程，且系数 nts

$$b : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times U \to \mathbb{R}^n, \quad \sigma : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times U \to \mathbb{R}^{n\times d},$$

满足

(H1). (i). 对每个固定的 $x \in \mathbb{R}^n$, $b(\cdot,x,\cdot)$, $\sigma(\cdot,x,\cdot)$ 关于 $(r,u) \in [0,T]\times U$ 连续；**(ii).** 存在某个常数 $C > 0$ 使得，对任意 $(r,u) \in [0,T]\times U$, $x, x' \in$ $\mathbb{R}^n$,

$$|b(r,x,u) - b(r,x',u)| + |\sigma(r,x,u) - \sigma(r,x',u)| \leqslant C|x - x'|.$$

显然，在(H1) 下，对于任意 $k \geqslant 2$, $\xi \in L^k_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbb{R}^n)$，(2.1)存在唯一的 $\mathbb{F}$-适应解 $X(\cdot) \equiv X^{t,\xi;u}(\cdot) \in \mathcal{S}^k_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^n)$。并且对于任意 $t \in [0,T]$, $\xi,\xi' \in L^k_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant h \leqslant T-t$，存在一些常数 $C > 0$ 使得以下估计成立，P-几乎处处，

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_t\Big[\sup_{r\in[t,T]} |X^{t,\xi;u}(r)|^k\Big] \leqslant C(1+|\xi|^k), \\ &\mathbb{E}_t\Big[\sup_{r\in[t,t+h]} |X^{t,\xi;u}(r) - \xi|^k\Big] \leqslant Ch(1+|\xi|^k), \\ &\mathbb{E}_t\Big[\sup_{r\in[t,T]} |X^{t,\xi;u}(r) - X^{t,\xi';u}(r)|^k\Big] \leqslant C|\xi-\xi'|^k, \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $\mathbb{E}_t[\cdot] := \mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$ 为简便起见。(2.2) 的详细内容可参见 [17]。

对于任意 $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$，我们称 $(u(\cdot)\ X^{t,x;u}(\cdot)) \in \mathcal{U}_{t,T}\times\mathcal{S}^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^n)$ 为可容许对，称 $X^{t,x;u}(\cdot)$ 为可容许状态过程。

接下来，为了引入成本泛函，对于任意的 $(t,\xi) \in \mathscr{D}$ 和$u(\cdot)\in\mathcal{U}_{t,\ T}$，我们考虑以下反射倒向随机微分方程】【。

$$
(2.3)\quad \begin{cases} \text{(i)}.\ (Y(\cdot),Z(\cdot),K(\cdot)) \in \mathcal{S}^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}) \times L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^d) \times \mathcal{A}^2_c(t,T;\mathbb{R}); \\ \text{(ii)}.\ Y(s) = \Phi\big(X(T)\big) + \displaystyle\int_s^T f\big(r,X(r),Y(r),Z(r),u(r)\big)dr - \big(K(T)-K(s)\big) - \int_s^T Z(r)dB(r),\ s\in[t,T]; \\ \text{(iii)}.\ Y(s) \leqslant h\big(s,X(s)\big),\ \text{a.e. } s\in[t,T]; \\ \text{(iv)}.\ \displaystyle\int_t^T \Big(h\big(s,X(s)\big) - Y(s)\Big)dK(s) = 0, \end{cases}
$$

其中 $X(\cdot)$ 满足 (2.1)，驱动项 $f\colon [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times U\to\mathbb{R}$、终端条件 $\Phi\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 和障碍项 $h\colon [0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 均假设满足

(H2). (i). 对每个 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, $f(\cdot,x,y,z,\cdot)$ 关于 (r,u) 连续，$\in [0,T]\times\mathbb{R}^n$, $h(\cdot,x)$ 关于 $t\in[0,T]$ 连续;

(ii). 存在一些常数 $C>0$，使得对于任意 $(r,u) \in [0,T]\times U$, x, $x'\in\mathbb{R}^n$, y, $y'\in\mathbb{R}$, z,$z'\in\mathbb{R}^d$,

$$
\begin{aligned} &|f(r,x,y,z,u) - f(r,x',y',z',u)| \leqslant C\big(|x-x'| + |y-y'| + |z-z'|\big), \\ &|\Phi(x)-\Phi(x')| \leqslant C|x-x'|, \qquad |h(r,x)-h(r,x')| \leqslant C|x-x'|; \end{aligned}
$$

(iii). 对任意 $x\in\mathbb{R}^n$, $\Phi(x) \leqslant h(T,x)$。

根据反射型 BSDE 理论 ([7, 2])，(H1) 和 (H2) 保证，对于任意 $(t,\xi) \in \mathscr{D}$,$u(\cdot)\in\mathcal{U}_{t,\ T}$，存在唯一的三元组 $(Y(\cdot)\ Z(\cdot)\ K(\cdot)) \equiv (Y^{t,\ \xi;\ u}(\cdot)\ Z^{t,\ \xi;u}(\cdot)\ K^{t,\ \xi;u}(\cdot)$ 满足 (2.3)。现在，对于任意初始对 $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$ 以及可容许控制 $u(\cdot)\in\mathcal{U}_{t,\ T}$，我们可以定义

$$
(2.4)\qquad J(t,x;u(\cdot)) := Y^{t,x;u}(t),
$$

它是我们控制问题的成本泛函。注意，对于 $(t,\xi) \in \mathscr{D}$ 以及 $u(\cdot)\in\mathcal{U}_{t,\ T}$，我们也有$J(t,\xi;\ u(\cdot)) = J(t,x;\ u(\cdot))|_{x=\xi} = Y^{t,\ \xi;\ u}(t)$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立，参见 [1, 2, 16]。

基于上述准备，我们现在可以将控制问题表述如下：问题（RC）对于任意 $x\in\mathbb{R}^n$，
求 $\bar{u}(\cdot)\in\mathcal{U}_{0,\ T}$ 使得

$$
(2.5)\qquad J(0,x;\bar{u}(\cdot)) = \operatorname*{essinf}_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{0,T}} J(0,x;u(\cdot)).
$$

满足 (2.5) 的 $\bar{u}(\cdot)$ 称为问题（RC）的最优控制，相应的 $\bar{X}(\cdot) = X^{0,\ x;\bar{u}}(\cdot)$ 是最优状态过程。

为求得最优控制，我们需要研究由不同初始对 $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$ 参数化的以下控制问题族。

问题（RC）$_{t,\ x}$ 对于任意 $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$，求 $\bar{u}(\cdot)\in\mathcal{U}_{t,\ T}$使得

$$
(2.6)\qquad J(t,x;\bar{u}(\cdot)) = \operatorname*{essinf}_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{t,T}} J(t,x;u(\cdot)) := V(t,x).
$$

上述满足 (2.6) 的 $\bar{u}(\cdot)$ 称为问题（RC）$_{t,\ x}$的最优控制，相应的$\bar{X}(\cdot) = X^{t,\ x;\bar{u}}(\cdot)$ 是最优状态过程。我们称 $(\bar{X}(\cdot)\ \bar{u}(\cdot))$ 为问题（RC）$_{t,\ x}$的最优对，并称 $V\colon [0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为问题（RC）$_{t,\ x}$的值函数。

根据 [1, 2, 16], 值函数 $V(\cdot,\cdot)$具有以下性质。

引理 2.1. 在 (H1)和 (H2) 下， $V(\cdot,\cdot)$ 是确定性的、Lipschitz连续的，并且关于$x \in \mathbb{R}^n$具有线性增长，在 $t \in [0,T]$上是$\frac{1}{2}$-H¨older连续的。

此外，值函数 $V(\cdot,\cdot)$ 在某种意义下可以求解以下带障碍的HJB方程，

$$
\begin{cases}
\max\left\{W(t,x)-h(t,x), -\dfrac{\partial}{\partial t}W(t,x) - \inf\limits_{u\in U}\mathbb{H}\big(t,x,W(t,x),W_x(t,x),W_{xx}(t,x),u\big)\right\}=0, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n, \\
W(T,x)=\Phi(x), \quad x\in\mathbb{R}^n,
\end{cases} \tag{2.7}
$$

其中

$$
\begin{cases}
\mathbb{H}(r,x,y,p,P,u) := \operatorname{tr}\left[a(r,x,u)P\right] + p.b(r,x,u) + f\big(r,x,y,p.\sigma(r,x,u),u\big), \\
a(r,x,u) := \dfrac{1}{2}\sigma(r,x,u)\sigma(r,x,u)^\top, \quad (r,x,y,p,P,u)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^n\times U.
\end{cases} \tag{2.8}
$$

这里， $\mathbb{S}^n$ 是所有 $n\times n$ 对称矩阵的集合。具体而言，

引理 2.2. 在 (H1) 和 (H2) 下， $V(\cdot,\cdot)$ 是带障碍的HJB方程 (2.7) 的唯一黏性解（在 $C_p([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ 中唯一），其中 $C_p([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ 是由$[0,T]\times\mathbb{R}^n$ 上的具有多项式增长的连续实值函数构成的空间。

上述两个结果都是经典结论，因此我们不再重复细节，相关内容可参见 [3, 16]，包括黏性解的定义。

在结束本节之前，我们先介绍以下可容许反馈控制律的定义，后文将会用到。

定义 2.1. 可测映射 $\Pi: [t,T]\times\mathbb{R}^n \to U$称为可容许反馈控制律，如果对任意 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$， 下列

$$
\begin{cases}
dX^{t,x;\Pi}(s) = b\big(r, X^{t,x;\Pi}(r), \Pi(r, X^{t,x;\Pi}(r))\big)dr + \sigma\big(r, X^{t,x;\Pi}(r), \Pi(r, X^{t,x;\Pi}(r))\big)dB(r), \ s\in[t,T], \\
X^{t,x;\Pi}(t) = x,
\end{cases} \tag{2.9}
$$

and

$$
\begin{cases}
\text{(i). } (Y^{t,x;\Pi}(\cdot), Z^{t,x;\Pi}(\cdot), K^{t,x;\Pi}(\cdot)) \in \mathcal{S}^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R})\times L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^d)\times\mathcal{A}^2_c(t,T;\mathbb{R}); \\
\text{(ii). } Y^{t,x;\Pi}(s) = \Phi\big(X^{t,x;\Pi}(T)\big) + \displaystyle\int_s^T f\big(r, X^{t,x;\Pi}(r), Y^{t,x;\Pi}(r), Z^{t,x;\Pi}(r), \Pi(r, X^{t,x;\Pi}(r))\big)dr \\
\qquad\qquad -\big(K^{t,x;\Pi}(T) - K^{t,x;\Pi}(s)\big) - \displaystyle\int_s^T Z^{t,x;\Pi}_r dB(r), \quad s\in[t,T]; \\
\text{(iii). } Y^{t,x;\Pi}(s) \leqslant h\big(s, X^{t,x;\Pi}(s)\big), \ a.e. \ s\in[t,T]; \\
\text{(iv). } \displaystyle\int_t^T \Big(h\big(r, X^{t,x;\Pi}(r)\big) - Y^{t,x;\Pi}(r)\Big)dK^{t,x;\Pi}(r) = 0,
\end{cases} \tag{2.10}
$$

存在 唯一的适应解 $X^{t,x;\Pi}(\cdot)$ 和 $(Y^{t,x;\Pi}(\cdot)\ Z^{t,x;\Pi}(\cdot)\ K^{t,x;\Pi}(\cdot))$，分别 .

请注意，可容许反馈控制律$\Pi(\cdot,X^{t,\ x;\Pi}(\cdot))$所得到的$\Pi(\cdot,\cdot)$仍然是我们的可容许控制，即$\Pi(\cdot,X^{t,\ x;\Pi}(\cdot))\in\mathcal{U}_{t,T}$。

3 随机验证定理：经典解

在本节中，我们尝试根据带障碍的HJB方程（2.7）的经典解，构造问题（RC）$_{t,\ x}$ 的最优控制。为此，我们将控制变量 u 下系数 b、 σ和 f 的连续性条件加强如下，

(H3). 对于每个 $(r,x,y,z) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, $b(r,x,\cdot)$, $\sigma(r,x,\cdot)$, $f(r,x,y,z,\cdot)$ 关于 $u\in U$ 是Lipschitz连续的。

进一步，用 $\mathcal{L}$ 表示具有以下性质的可测映射类 $_{\Pi}$: $[0,T]\times\mathbb{R}^n\to U$,

$$\begin{cases}\text{(i). for every fixed } x\in\mathbb{R}^n, u(\cdot,x) \text{ is continuous in } r\in[0,T];\\ \text{(ii). there exists some constant } C>0 \text{ such that, for any } r\in[0,T], x,x'\in\mathbb{R}^n,\\ \qquad |u(r,x)-u(r,x')|\leqslant C|x-x'|.\end{cases}$$

注意，在 (H1)-(H3) 条件下，$_{\Pi}(\cdot,\cdot)\in\mathcal{L}$ 是可容许反馈控制律。p

对于任意的（r, x, y, p, P）$\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^n$，我们引入映射 ψ: $[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^n\to U$，使得

$$\psi(r,x,y,p,P)\in\operatorname{argmin}\mathbb{H}(r,x,y,p,P,\cdot)\equiv\Big\{\bar{u}\in U\mid\mathbb{H}(r,x,y,p,P,\bar{u})=\min_{u\in U}\mathbb{H}(r,x,y,p,P,u)\Big\}.$$

现在给出第一个主要结果。

定理 3.1. 假设 (H1)-(H3)。设 $W(\cdot,\cdot)\in C^{1,\ 2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ 是带障碍的HJB方程 (2.7) 的经典解。那么

(i). 对任意 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$和 $u(\cdot)\in\mathcal{U}_{t,\ T}$，有 $W(t,x)\leqslant J(t,x;\ u(\cdot))$; (ii).
对任意 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$，定义 $\bar{}_{\Pi}$: $[t,T]\times\mathbb{R}^n\to U$如下

$$\bar{}_{\Pi}(s,y)=\psi(s,y,W(s,y),W_x(s,y),W_{xx}(s,y)),\quad (s,y)\in[t,T]\times\mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

若 $\bar{\Pi}(\cdot,\cdot)\in\mathcal{L}$，则 $\bar{}_{\Pi}\big(\cdot,X^{t,\ x;\bar{}_{\Pi}}(\cdot)\big)$ 是问题（RC）$_{t,\ x}$的最优控制，其中 $X^{t,\ x;\bar{}_{\Pi}}(\cdot)$ 满足 (2.9)，且 $^{\bar{}}{}_{\Pi}(\cdot,\cdot)$。在这种情况下， $W(\cdot,\cdot)$ 确实是值函数 $V(\cdot,\cdot)$，即，

$$W(t,x)=J\big(t,x;\bar{}_{\Pi}(\cdot,X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(\cdot))\big)=V(t,x),\quad (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n.$$

证明。(i)。对于任意 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, $u(\cdot)\in\mathcal{U}_{t,T}$，对 $W(\cdot,X^{t,x;u}(\cdot))$ 应用伊藤公式，并利用 (2.8)，我们得到

$$\begin{aligned}W\big(s,X^{t,x;u}(s)\big)&=\Phi\big(X^{t,x;u}(T)\big)-\int_s^T W_x\big(r,X^{t,x;u}(r)\big).\sigma\big(r,X^{t,x;u}(r),u(r)\big)dB(r)\\&+\int_s^T\Big[f\big(r,X^{t,x;u}(r),W\big(r,X^{t,x;u}(r)\big),W_x\big(r,X^{t,x;u}(r)\big).\sigma(r,X^{t,x;u}(r),u(r)),u(r)\big)-\frac{\partial}{\partial r}W\big(r,X^{t,x;u}(r)\big)\\&\quad-\mathbb{H}\big(r,X^{t,x;u}(r),W\big(r,X^{t,x;u}(r)\big),W_x\big(r,X^{t,x;u}(r)\big),W_{xx}(r,X^{t,x;u}(r)\big),u(r)\big)\Big]dr,\quad s\in[t,T].\end{aligned} \tag{3.2}$$

On 另一方面，对于任意 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}^*$，我们考虑以下反向随机微分方程。 ,

$$\begin{aligned}{}^nY^{t,x;u}(s)&=\Phi\big(X^{t,x;u}(T)\big)+\int_s^T f\big(r,X^{t,x;u}(r),{}^nY^{t,x;u}(r),{}^nZ^{t,x;u}(r),u(r)\big)dr\\&\quad-n\int_s^T\Big({}^nY^{t,x;u}(r)-h(r,X^{t,x;u}(r))\Big)^+dr-\int_s^T{}^nZ^{t,x;u}(r)dB(r),\quad s\in[t,T].\end{aligned} \tag{3.3}$$

By 由 $W(\cdot,\cdot)$ 是 (2.7) 的经典解这一事实，我们得到以下两种情况 s,

情形（a）。在任意点 $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$ where $(W-h)(t,x) = 0$,

$$-\frac{\partial}{\partial t}W(t,x) - \inf_{u\in U}\mathbb{H}\big(t,x,W(t,x),W_x(t,x),W_{xx}(t,x),u\big) \leqslant 0;$$

情形（b）。在任意点 $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$ where $(W-h)(t,x) < 0$,

$$-\frac{\partial}{\partial t}W(t,x) - \inf_{u\in U}\mathbb{H}\big(t,x,W(t,x),W_x(t,x),W_{xx}(t,x),u\big) = 0.$$

无论是（a）还是（b），对于任意 $r\in[t,T]$ 和 $u(\cdot)\in\mathcal{U}_{t,\ T}$, $n\in\mathbb{N}^*$，我们有

$$\begin{aligned}
&f\big(r,X^{t,x;u}(r),W\big(r,X^{t,x;u}(r)\big),W_x\big(r,X^{t,x;u}(r)\big).\sigma(r,X^{t,x;u}(r),u(r)),u(r)\big) - \frac{\partial}{\partial r}W\big(r,X^{t,x;u}(r)\big)\\
&-\mathbb{H}\big(r,X^{t,x;u}(r),W\big(r,X^{t,x;u}(r)\big),W_x\big(r,X^{t,x;u}(r)\big),W_{xx}(r,X^{t,x;u}(r)\big),u(r)\big)\\
&\leqslant f\big(r,X^{t,x;u}(r),W\big(r,X^{t,x;u}(r)\big),W_x\big(r,X^{t,x;u}(r)\big).\sigma(r,X^{t,x;u}(r),u(r)),u(r)\big) - \frac{\partial}{\partial r}W\big(r,X^{t,x;u}(r)\big)\\
&\quad - \inf_{u\in U}\mathbb{H}\big(r,X^{t,x;u}(r),W\big(r,X^{t,x;u}(r)\big),W_x\big(r,X^{t,x;u}(r)\big),W_{xx}(r,X^{t,x;u}(r)\big),u\big)\\
&\leqslant f\big(r,X^{t,x;u}(r),W\big(r,X^{t,x;u}(r)\big),W_x\big(r,X^{t,x;u}(r)\big).\sigma(r,X^{t,x;u}(r),u(r)),u(r)\big)\\
&\quad -n\Big(W\big(r,X^{t,x;u}(r)\big) - h\big(r,X^{t,x;u}(r)\big)\Big)^+.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

因此 ，利用反向随机微分方程的比较定理处理 (3.2) 和 (3.3)，对所有 $n\in\mathbb{N}^*$，我们得到

$$W\big(s,X^{t,x;u}(s)\big) \leqslant {}^nY^{t,x;u}(s), \quad s\in[t,T], \quad \mathbb{P}\text{-a.s.} \tag{3.5}$$

此外，根据证明反射型反向随机微分方程适定性的惩罚方法（参见[7, 1]），我们知道，当 $n\to\infty$, ${}^nY^{t,\ x;\ u}(s)\downarrow Y^{t,\ x;\ u}(s)$ $s\in[t,T]$, $\mathbb{P}$-几乎处处成立，其中 $Y^{t,\ x;\ u}(\cdot)$ 是反射倒向随机微分方程 (2.3) 解的第一个分量。因此，在 (3.5) 中令 $n\to\infty$,

$$W\big(s,X^{t,x;u}(s)\big) \leqslant Y^{t,x;u}(s), \quad s\in[t,T], \quad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

尤其是，当 $s=t$,

$$W(t,x) \leqslant Y^{t,x;u}(t) = J\big(t,x;u(\cdot)\big), \quad \text{for any } u(\cdot)\in\mathcal{U}_{t,T}. \tag{3.6}$$

(ii).令 $X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(\cdot)$和 $(Y^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(\cdot)\ Z^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(\cdot)\ K^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(\cdot))$ 分别为将(3.1) 中引入的 $\bar{}_{\Pi}(\cdot,\cdot)$ 替换 $\cdot,\cdot$ 中的 $_{\Pi}(\cdot,\cdot)$ 后，随机微分方程(2.9) 和反射倒向随机微分方程 (2.10) 的解。在情形（a）中，对于 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$ 使得 $W(t,x) = h(t,x)$，结合反射倒向随机微分方程 (2.10) 中的障碍条件，我们得到

$$W(t,x) = h(t,x) \geqslant Y^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(t) = J\big(t,x;\bar{}_{\Pi}(\cdot,X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(\cdot))\big), \quad (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n.$$

在情形（b）中，将伊藤公式应用于 $W(\cdot,X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(\cdot))$ 上，我们有

$$\begin{aligned}
&W\big(s,X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(s)\big) = \Phi\big(X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(T)\big) - \int_s^T W_x\big(r,X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(r)\big).\sigma\big(r,X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(r),\bar{}_{\Pi}(r,X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(r))\big)dB(r)\\
&+\int_s^T\Big\{f\big(r,X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(r),W\big(r,X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(r)\big),W_x\big(r,X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(r)\big).\sigma\big(r,X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(r),\bar{}_{\Pi}(r,X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(r))\big),\bar{}_{\Pi}(r,X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(r))\big)\\
&-\frac{\partial}{\partial r}W\big(r,X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(r)\big) - \mathbb{H}\big(r,X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(r),W\big(r,X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(r)\big),W_x\big(r,X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(r)\big),W_{xx}\big(r,X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(r)\big),\bar{}_{\Pi}(r,X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(r))\big)\Big\}dr.
\end{aligned}$$

注意到(3.1)和情形（b）使(3.4)中的“6”变为“=”。按照(i)中的步骤以及倒向随机微分方程解的唯一性，对于所有 $n\in\mathbb{N}^*$，我们得到

$$W\big(s,X^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(s)\big) = {}^nY^{t,x;\bar{}_{\Pi}}(s), \quad s\in[t,T], \quad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

类似于(i)，令 $n \to \infty$ 和 $s = t$，我们有 $W(t,x) = Y^{t,x;\bar{\Pi}}(t)$。

最后，结合 (3.6)，对于任意 $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$，我们得到

$$W(t,x) = J\big(t,x;\bar{\Pi}(\cdot, X^{t,x;\bar{\Pi}}(\cdot))\big) = \operatorname*{essinf}_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{t,T}} J\big(t,x;u(\cdot)\big) = V(t,x).$$

也就是说，HJB 方程（2.7）的经典解 $W(\cdot,\cdot)$ 确实是问题（RC）$_{t,x}$ 的值函数 $V(\cdot,\cdot)$，而 $\bar{\Pi}(\cdot, X^{t,x;\bar{\Pi}}(\cdot))$ 是问题（RC）$_{t,x}$ 的最优控制。

∎

注 3.1. 正如我们在定理 3.1 的证明中看到的，在 $\bar{\Pi}(\cdot,\cdot)$ 下，状态方程 (2.9) 和反射倒向随机微分方程 (2.10) 的解的存在性和唯一性是必要的，因此附加条件 $\bar{\Pi}(\cdot,\cdot) \in \mathcal{L}$ 是必要的。

4 随机验证定理：黏性解

本节中，我们在黏性解框架下研究问题（RC）的随机验证定理。众所周知，黏性解并不具备足够的光滑性，因此我们无法像定理 3.1 的证明中那样直接计算其导数。在这一框架下，有必要引入一些新的工具。首先是二阶抛物型上微分和下微分的概念（参见 [17]）。

定义 4.1. 令 $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ 和 $w \in C([0,T] \times \mathbb{R}^n)$，$w$ 在 (t,x) 处的二阶抛物型上超微分定义为

$$\begin{aligned} D^{1,2,+}_{t,x} w(t,x) := \Big\{ (q,p,P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n \Big| \varlimsup_{s\to t, y\to x} \frac{1}{|s-t| + |y-x|^2} \big[w(s,y) - w(t,x) \\ - q(s-t) - \langle p, y-x \rangle - \frac{1}{2}(y-x)^\top P (y-x) \big] \leqslant 0 \Big\}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

且 w 在 (t,x) 处的二阶抛物下微分定义为

$$\begin{aligned} D^{1,2,-}_{t,x} w(t,x) := \Big\{ (q,p,P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n \Big| \varliminf_{s\to t, y\to x} \frac{1}{|s-t| + |y-x|^2} \big[w(s,y) - w(t,x) \\ - q(s-t) - \langle p, y-x \rangle - \frac{1}{2}(y-x)^\top P (y-x) \big] \geqslant 0 \Big\}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

二阶右抛物型上微分 $D^{1,2,+}_{t+} w(t,x)$ 和 下微分 $D^{1,2,-}_{t+} w(t,x)$ 也可以通过分别将 (4.1) 和 (4.2) 中的 $s \to t$ 修改为 $s \to t^+$ 来定义。

引理 4.1. 设定 $w \in C([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ 和 $(t_0,x_0) \in [0,T)\times\mathbb{R}^n$。那么，(i). $(q,p,P) \in D^{1,2,+}_{t+} w(t_0,x_0)$ 当且仅当存在函数 $\varphi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$，使得对于任意 $(t,x) \in [t_0,T] \times \mathbb{R}^n$，$(t,x) \neq (t_0,x_0)$，$\varphi(t,x) > w(t,x)$，并且

$$\big(\varphi(t_0,x_0), \varphi_t(t_0,x_0), \varphi_x(t_0,x_0), \varphi_{xx}(t_0,x_0)\big) = \big(w(t_0,x_0), q, p, P\big).$$

(ii). $(q,p,P) \in D^{1,2,-}_{t+} w(t_0,x_0)$ 当且仅当存在函数 $\varphi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$，使得对于任意 $(t,x) \in [t_0,T] \times \mathbb{R}^n$、$(t,x) \neq (t_0,x_0)$、$\varphi(t,x) < w(t,x)$，以及

$$\big(\varphi(t_0,x_0), \varphi_t(t_0,x_0), \varphi_x(t_0,x_0), \varphi_{xx}(t_0,x_0)\big) = \big(w(t_0,x_0), q, p, P\big).$$

此外，若对于某个 $k \geqslant 1$，$(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$，

$$|w(t,x)| \leqslant C(1 + |x|^k), \tag{4.3}$$

then 我们可以选择 φ，使得 φ、φ_t、φ_x、φ_{xx} 也能在不同常数下满足 (4.3) C.

上述结果的详细内容可见 [17, 19, 9]。它将为我们提供光滑检验函数，以替代黏性解，从而计算验证定理证明中的导数。

以下两个结果引自 [17, 9, 4]。

引理 4.2. 假设 (H1)，令 $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$ 为固定值，并令 $u(\cdot)\in\mathcal{U}_{t,T}$, $X^{t,x;u}(\cdot)$ 为 (2.1) 对应的状态过程。通过定义以下过程

$$\psi_1(r) := b(r, X^{t,x;u}(r), u(r)), \quad \psi_2(r) := \sigma\sigma^\top(r, X^{t,x;u}(r), u(r)), \quad r\in[t,T],$$

可得

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_s^{s+h}\mathbb{E}|\psi_i(r)-\psi_i(s)|dr = 0,\ \text{a.e.},\ s\in[t,T],\ i=1,2. \tag{4.4}$$

引理 4.3. 令 $g\in C([0,T])$，并通过设定 $g(t) = \begin{cases} g & t\in[0,T]. \\ (\quad 0 \quad t<0)\,(\,)g\ T \quad t>T \quad (\,) \end{cases}$ 将 g 扩展到 $(-\infty, +\infty)$。假设对于所有 $\delta\in(0,T)$，均存在函数 $\rho(\cdot)\in L^1(0,T-\delta;\mathbb{R})$ 及某个 $h_0>0$，使得

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h}\leqslant\rho(t),\ \text{a.e.},\ t\in[0,T-\delta),\ h\leqslant h_0, \tag{4.5}$$

那么，

$$g(\beta)-g(\alpha)\leqslant\int_\alpha^\beta \varlimsup_{h\to 0^+}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}dt, \qquad 0\leqslant\alpha<\beta\leqslant T-\delta.$$

4.1 主定理

在介绍主要结果之前，我们引入以下两个条件。

(D1)。对于所有 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $\delta\in(0,T)$，任意 t、$t'\in[0,T-\delta]$、$|\phi(t,x)-\phi(t',x)|\leqslant C_{1,\delta}(1+|x|)|t-t'|$，其中$C_{1,\delta}>0$ 是一个取决于 δ 的常数;

(D2). 对于所有 $\delta\in(0,T)$，$\phi(t,\cdot)$是 $C_{2,\delta}$-半凹的，关于 $t\in[0,T-\delta]$一致，即存在某个常数$C_{2,\delta}>0$，使得 $\phi(t,\cdot)-C_{2,\delta}|\cdot|^2$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是凹的。

以下　以下是在黏性解框架下的随机验证定理　.

定理 4.1.设 $W(\cdot,\cdot)\in C_p([0,T]\times\mathbb{R}^n)$是带障碍的HJB方程(2.7)的黏性解，并满足条件（D1）和（D2）。对于 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$，令 $(\bar{u}(\cdot)\ X^{t,x;\bar{u}}(\cdot))$ 为可容许对，且 $(Y^{t,x;\bar{u}}(\cdot)\ Z^{t,x;\bar{u}}(\cdot)\ K^{t,x;\bar{u}}(\cdot))$ 在控制过程 $\bar{u}(\cdot)\in\mathcal{U}_{t,T}$ 下满足反射倒向随机微分方程 (2.3)。假设存在一个 $\left(\bar{q},\bar{p},\bar{P}\right)\in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R})\times L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^n)\times L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{S}^n)$ 的三元组，使得

$$\begin{cases} \text{(i)}.\ \left(\bar{q}(s),\bar{p}(s),\bar{P}(s)\right)\in D^{1,2,+}_{t+,x}W\left(s,X^{t,x;\bar{u}}(s)\right),\ \text{a.e. } s\in[t,T],\ \mathbb{P}\text{-a.s.}; \\ \text{(ii)}.\ \bar{p}(s).\sigma\left(s,X^{t,x;\bar{u}}(s),\bar{u}(s)\right)=Z^{t,x;\bar{u}}(s),\ \text{a.e. } s\in[t,T],\ \mathbb{P}\text{-a.s.}; \\ \text{(iii)}.\ \mathbb{E}\int_t^T\left[\bar{q}(s)+\mathbb{H}\left(s,X^{t,x;\bar{u}}(s),Y^{t,x;\bar{u}}(s),\bar{p}(s),\bar{P}(s),\bar{u}(s)\right)\right]ds\leqslant 0. \end{cases}$$

那么，$\bar{u}(\cdot)$ 是问题（RC）$_{t,\ x}$ 的最优控制。

证明。首先，根据（2.7）的黏性解的唯一性（参见引理 2.2），我们知道，对于任意 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$ and $u(\cdot)\in\mathcal{U}_{t,\ T}$

$$W(t,x)=V(t,x)\leqslant J\left(t,x;u(\cdot)\right). \tag{4.6}$$

如果我们固定某个满足条件 (i) 的点 $t_0 \in [t,T]$，并且

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\mathbb{E}\big|b\big(r,X^{t,x;\bar u}(r),\bar u(r)\big)-b\big(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0),\bar u(t_0)\big)\big|dr=0,\\&\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\mathbb{E}\big|\sigma\sigma^\top\big(r,X^{t,x;\bar u}(r),\bar u(r)\big)-\sigma\sigma^\top\big(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0),\bar u(t_0)\big)\big|dr=0,\end{aligned}\tag{4.7}$$

于是，由条件 (i) 和引理 4.2 可知，这类点的集合 t_0 在 $[t,T]$ 中具有满测度。

给定 $\mathcal{F}_{t_0}^t:=\sigma\{B(r):\ t\leqslant r\leqslant t_0\}$，并用 $\mathcal{F}$ 中所有 $\mathbb{P}$-零测集对其进行扩充，我们固定 $\omega_0\in\Omega$，使得正则条件概率 $\mathbb{P}(\cdot\mid\mathcal{F}_{t_0}^t)(\omega_0)$ 在 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}(\cdot\mid\mathcal{F}_{t_0}^t)(\omega_0))$ 上使得 $X^{t,x;\bar u}(t_0)$、$\bar q(t_0)$、$\bar p(t_0)$、$\bar P(t_0)$ 几乎必然是确定性常数，分别等于 $X^{t,x;\bar u}(t_0,\omega_0)$，$\bar q(t_0,\omega_0)$，$\bar p(t_0,\omega_0)$，$\bar P(t_0,\omega_0)$。注意，在这个概率空间中，布朗运动 B 仍是标准布朗运动，尽管现在 $B(t_0)=B(t_0,\omega_0)$ 几乎必然成立。现在，该空间配备了一个新的滤子 $\{\mathcal{F}_s^{t_0}\}_{t_0\leqslant s\leqslant T}$，控制过程 $\bar u(\cdot)$ 适应于这个新滤子。对于 ω_0，过程 $X^{t,x;\bar u}(\cdot)$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},[t_0,T]$ 上方程 (2.1) 的一个解，$\mathbb{P}(\cdot\mid\mathcal{F}_{t_0}^t)(\omega_0))$，初始条件为 $X^{t,x;\bar u}(t_0)=X^{t,x;\bar u}(t_0,\omega_0)$。

根据 (i) 和引理4.1-(i)，我们知道存在一个函数 $\bar\varphi(\cdot,\cdot)\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$，使得，$W-\bar\varphi$在 $[t_0,T]\times\mathbb{R}^n$ 上于 $(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0))$处取得严格最大值，且

$$\begin{aligned}&\Big(\bar\varphi\big(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0)\big),\bar\varphi_t\big(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0)\big),\bar\varphi_x\big(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0)\big),\bar\varphi_{xx}\big(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0)\big)\Big)\\&=\Big(W\big(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0,\omega_0)\big),\bar q(t_0,\omega_0),\bar p(t_0,\omega_0),\bar P(t_0,\omega_0)\Big).\end{aligned}\tag{4.8}$$

引理 2.1 中 $W(\cdot,\cdot)$ 的线性增长意味着 $\bar\varphi$, $\bar\varphi_t$, $\bar\varphi_x$, $\bar\varphi_{xx}$ 在 x 中也具有线性增长，即，

$$|\bar\varphi(t,x)|+|\bar\varphi_t(t,x)|+|\bar\varphi_x(t,x)|+|\bar\varphi_{xx}(t,x)|\leqslant C(1+|x|),\quad(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n.\tag{4.9}$$

注意，在空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}(\cdot\mid\mathcal{F}_{t_0}^t)(\omega_0))$，$\bar\varphi$ 是当(t_0,ω_0) 固定时的确定性函数。对于任意 $h>0$，在 $[t_0,t_0+h]$ 上对 $\bar\varphi\big(\cdot,X^{t,x;\bar u}(\cdot)\big)$ 应用伊藤公式，我们有

$$\begin{aligned}&\bar\varphi\big(t_0+h,X^{t,x;\bar u}(t_0+h)\big)-\bar\varphi\big(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0)\big)\\&=\int_{t_0}^{t_0+h}\Big[\bar\varphi_t\big(r,X^{t,x;\bar u}(r)\big)+\big\langle\bar\varphi_x\big(r,X^{t,x;\bar u}(r)\big),b\big(r,X^{t,x;\bar u}(r),\bar u(r)\big)\big\rangle\\&\qquad\qquad+\mathrm{tr}\,\big(a(r,X^{t,x;\bar u}(r),\bar u(r))\bar\varphi_{xx}(r,X^{t,x;\bar u}(r))\big)\Big]dr\\&\quad+\int_{t_0}^{t_0+h}\big\langle\bar\varphi_x\big(r,X^{t,x;\bar u}(r)\big),\sigma\big(r,X^{t,x;\bar u}(r),\bar u(r)\big)\big\rangle dB(r).\end{aligned}$$

注意，条件 (H1)、$X^{t,x;\bar u}(\cdot)$ 的正则性性质 (2.2)，以及满足 (4.9) 的 $\bar\varphi$ 的选择，意味着上述等式中的所有积分都有意义。

取条件期望 $\mathbb{E}_{t,t_0}[\cdot]:=\mathbb{E}\big[\cdot\mid\mathcal{F}_{t_0}^t(\omega_0)\big](\omega_0)$，可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\mathbb{E}_{t,t_0}\Big[W\big(t_0+h,X^{t,x;\bar u}(t_0+h)\big)-W\big(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0)\big)\Big]\\&\leqslant\frac{1}{h}\mathbb{E}_{t,t_0}\Big[\bar\varphi\big(t_0+h,X^{t,x;\bar u}(t_0+h)\big)-\bar\varphi\big(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0)\big)\Big]\\&=\frac{1}{h}\mathbb{E}_{t,t_0}\Big[\int_{t_0}^{t_0+h}\Big(\bar\varphi_t\big(r,X^{t,x;\bar u}(r)\big)+\big\langle\bar\varphi_x\big(r,X^{t,x;\bar u}(r)\big),b\big(r,X^{t,x;\bar u}(r),\bar u(r)\big)\big\rangle\\&\qquad\qquad+\mathrm{tr}\,\big(a(r,X^{t,x;\bar u}(r),\bar u(r))\bar\varphi_{xx}(r,X^{t,x;\bar u}(r))\big)\Big)dr\Big].\end{aligned}$$

令 $h \to 0^+$，并应用（4.7）、（4.8），我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\varlimsup_{h\to 0^+}\mathbb{E}_{t,t_0}\Big[W\big(t_0+h,X^{t,x;\bar u}(t_0+h)\big)-W\big(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0)\big)\Big]\\
&\leqslant \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\mathbb{E}_{t,t_0}\Big[\int_{t_0}^{t_0+h}\Big(\bar\varphi_t\big(r,X^{t,x;\bar u}(r)\big)+\big\langle\bar\varphi_x\big(r,X^{t,x;\bar u}(r)\big),b\big(r,X^{t,x;\bar u}(r),\bar u(r)\big)\big\rangle\\
&\qquad\qquad +\mathrm{tr}\,\big(a(r,X^{t,x;\bar u}(r),\bar u(r))\bar\varphi_{xx}(r,X^{t,x;\bar u}(r))\big)\Big)dr\Big]\\
&=\bar\varphi_t\big(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0)\big)+\big\langle\bar\varphi_x\big(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0)\big),b\big(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0),\bar u(t_0)\big)\big\rangle\\
&\quad+\mathrm{tr}\,\big(a(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0),\bar u(t_0))\bar\varphi_{xx}(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0))\big)\\
&=\bar q(t_0)+\big\langle\bar p(t_0),b\big(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0),\bar u(t_0)\big)\big\rangle+\mathrm{tr}\,\big(a\big(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0),\bar u(t_0)\big)\bar P(t_0)\big).
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

上述极限过程（第一个“=”）与 [9], 中的过程类似，因此为避免重复，我们将其省略。

接下来，我们断言，对于所有 $\delta\in(0,T)$以及先前位于 $[t,T-\delta)$ 中的 t_0，对于任意满足 $t_0+h\leqslant T-\delta$的 $h>0$，

$$
\begin{aligned}
&\text{(a).}\ \ \frac{1}{h}\mathbb{E}_{t,t_0}\Big[W\big(t_0+h,X^{t,x;\bar u}(t_0+h)\big)-W\big(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0)\big)\Big]\leqslant C(1+|x|^2),\\
&\text{(b).}\ \ \frac{1}{h}\mathbb{E}\Big[W\big(t_0+h,X^{t,x;\bar u}(t_0+h)\big)-W\big(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0)\big)\Big]\leqslant C(1+|x|^2).
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

事实上，由 (D1)、(D2) 以及 $(\bar q(t_0)\ \bar p(t_0)\ \bar P(t_0))\in D^{1,\ \ 2+,\ \ ,\ \ x}_{t+}W(t_0,X^{t,\ \ x;\bar u}_{\ \ t})$，我们知道，对于所有 $\delta\in(0,T)$，对于任意 $h\in(0,T-t_0-\delta]$,

$$
W\big(t_0+h,X^{t,x;\bar u}(t_0+h)\big)-W\big(t_0,X^{t,x;\bar u}(t_0)\big)\leqslant \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III},
\tag{4.12}
$$

with

$$
\begin{cases}
\mathrm{I}:=C_{1,\delta}\big(1+|X^{t,x;\bar u}(t_0+h)|\big)h, & C_{1,\delta}\text{ is the one in }\mathbf{(D1)}\ ;\\
\mathrm{II}:=\big\langle\bar p(t_0),X^{t,x;\bar u}(t_0+h)-X^{t,x;\bar u}(t_0)\big\rangle,\\
\mathrm{III}:=C_{2,\delta}|X^{t,x;\bar u}(t_0+h)-X^{t,x;\bar u}(t_0)|^2, & C_{2,\delta}\text{ comes from }(\mathbf{D2}).
\end{cases}
$$

利用（4.9），我们有 $|\bar q(t_0)|+|\bar p(t_0)|+|\bar P(t_0)|\leqslant C(1+|X^{t,x;\bar u}(t_0)|)$。此外，结合估计（2.2），我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{t,t_0}\big[\mathrm{I}\big]\leqslant C_{1,\delta}h+C_{1,\delta}h\Big(\mathbb{E}_{t,t_0}\Big[\sup_{r\in[t_0,t_0+h]}|X^{t,x;\bar u}(r)|^2\Big]\Big)^{\frac12}\leqslant Ch(1+|x|^2)^{\frac12},\\
&\mathbb{E}_{t,t_0}\big[\mathrm{II}\big]\leqslant\mathbb{E}_{t,t_0}\Big[\big\langle\bar p(t_0),\int_{t_0}^{t_0+h}b\big(r,X^{t,x;\bar u}(r),\bar u(r)\big)dr\big\rangle\Big]\\
&\qquad\leqslant\Big(\mathbb{E}_{t,t_0}\big[|\bar p(t_0)|^2\big]\Big)^{\frac12}\Big(\mathbb{E}_{t,t_0}\Big[\big(\int_{t_0}^{t_0+h}b\big(r,X^{t,x;\bar u}(r),\bar u(r)\big)dr\big)^2\Big]\Big)^{\frac12}\\
&\qquad\leqslant Ch\Big(1+\mathbb{E}_{t,t_0}\Big[\sup_{r\in[t_0,t_0+h]}|X^{t,x;\bar u}(r)|^2\Big]\Big)\leqslant Ch(1+|x|^2),
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{t,t_0}\big[\mathrm{III}\big]=C_{2,\delta}\mathbb{E}_{t,t_0}\big[|X^{t,x;\bar u}(t_0+h)-X^{t,x;\bar u}(t_0)|^2\big]\\
&\leqslant 2C_{2,\delta}\mathbb{E}_{t,t_0}\Big[\Big(\int_{t_0}^{t_0+h}b\big(r,X^{t,x;\bar u}(r),\bar u(r)\big)dr\Big)^2\Big]+2C_{2,\delta}\mathbb{E}_{t,t_0}\Big[\Big(\int_{t_0}^{t_0+h}\sigma\big(r,X^{t,x;\bar u}(r),\bar u(r)\big)dB(r)\Big)^2\Big]\\
&\leqslant Ch\Big(1+\mathbb{E}_{t,t_0}\Big[\sup_{r\in[t_0,t_0+h]}|X^{t,x;\bar u}(r)|^2\Big]\Big)\leqslant Ch(1+|x|^2).
\end{aligned}
$$

因此，

$$\frac{1}{h}\mathbb{E}_{t,t_0}\Big[W\big(t_0+h,X^{t,x;\bar{u}}(t_0+h)\big)-W\big(t_0,X^{t,x;\bar{u}}(t_0)\big)\Big]\leqslant\frac{1}{h}\mathbb{E}_{t,t_0}\Big[\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}\Big]\leqslant C(1+|x|^2).$$

以上所有常数 C 可以彼此不同，且不依赖于 t_0。此外，对上述不等式两边取期望，可得 (4.11)-(b)。

对 (4.10) 两边取期望，并应用法图引理（需要 (4.11)-(a)），可得

$$\begin{aligned}
&\varlimsup_{h\to0^+}\frac{1}{h}\mathbb{E}\Big[W\big(t_0+h,X^{t,x;\bar{u}}(t_0+h)\big)-W\big(t_0,X^{t,x;\bar{u}}(t_0)\big)\Big]\\
&=\varlimsup_{h\to0^+}\frac{1}{h}\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}_{t,t_0}\big[W\big(t_0+h,X^{t,x;\bar{u}}(t_0+h)\big)-W\big(t_0,X^{t,x;\bar{u}}(t_0)\big)\big]\Big]\\
&\leqslant\mathbb{E}\Big[\varlimsup_{h\to0^+}\frac{1}{h}\mathbb{E}_{t,t_0}\big[W\big(t_0+h,X^{t,x;\bar{u}}(t_0+h)\big)-W\big(t_0,X^{t,x;\bar{u}}(t_0)\big)\big]\Big]\\
&\leqslant\bar{q}(t_0)+\big\langle\bar{p}(t_0),b\big(t_0,X^{t,x;\bar{u}}(t_0),\bar{u}(t_0)\big)\big\rangle+\mathrm{tr}\,\big(a(t_0,X^{t,x;\bar{u}}(t_0),\bar{u}(t_0))\bar{P}(t_0)\big).
\end{aligned}$$

由于这类点 t_0 在 $[t,T-\delta]$中构成一个满测度集，应用引理 4.3（需要 (4.11)-(b)），对于任意 $u(\cdot)\in\mathcal{U}_{t,\,T}$，有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[W\big(T-\delta,X^{t,x;\bar{u}}(T-\delta)\big)-W(t,x)\big]\\
&\leqslant\int_t^{T-\delta}\mathbb{E}\Big[\bar{q}(s)+\big\langle\bar{p}(s),b\big(s,X^{t,x;\bar{u}}(s),\bar{u}(s)\big)\big\rangle+\mathrm{tr}\,\big(a(s,X^{t,x;\bar{u}}(s),\bar{u}(s))\bar{P}(s)\big)\Big]ds.
\end{aligned}$$

根据勒贝格控制收敛定理以及 $W(\cdot,\cdot)$ 和 $X^{t,\,x;\bar{u}}(\cdot)$ 的连续性，将 $\delta\to0$ 代入上式，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[W\big(T,X^{t,x;\bar{u}}(T)\big)-W(t,x)\big]=\mathbb{E}\big[\Phi\big(X^{t,x;\bar{u}}(T)\big)-W(t,x)\big]\\
&\leqslant\int_t^T\mathbb{E}\Big[\bar{q}(s)+\big\langle\bar{p}(s),b\big(s,X^{t,x;\bar{u}}(s),\bar{u}(s)\big)\big\rangle+\mathrm{tr}\,\big(a(s,X^{t,x;\bar{u}}(s),\bar{u}(s))\bar{P}(s)\big)\Big]ds\\
&\leqslant-\mathbb{E}\Big[\int_t^T f\big(s,X^{t,x;\bar{u}}(s),Y^{t,x;\bar{u}}(s),\bar{p}(s).\sigma(s,X^{t,x;\bar{u}}(s),\bar{u}(s)),\bar{u}(s)\big)ds\Big]\\
&\leqslant-\mathbb{E}\Big[\int_t^T f\big(s,X^{t,x;\bar{u}}(s),Y^{t,x;\bar{u}}(s),Z^{t,x;\bar{u}}(s),\bar{u}(s)\big)ds-K^{t,x;\bar{u}}(T)\Big],
\end{aligned}$$

其中我们用到了　条件 (ii)、(iii) 和 $K^{t,\,x;\bar{u}}(\cdot)\in\mathcal{A}_c^2(t,T;\mathbb{R}^n)$。也就是说，对于任意 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$，

$$W(t,x)\geqslant\mathbb{E}\Big[\Phi\big(X^{t,x;\bar{u}}(T)\big)+\int_t^T f\big(s,X^{t,x;\bar{u}}(s),Y^{t,x;\bar{u}}(s),Z^{t,x;\bar{u}}(s),\bar{u}(s)\big)ds-K^{t,x;\bar{u}}(T)\Big]=J\big(t,x;\bar{u}(\cdot)\big).$$

结合（4.6），我们得到 $W(t,x)=V(t,x)=J\big(t,x;\bar{u}(\cdot)\big)$，这意味着 $\bar{u}(\cdot)$ 是问题（RC）$_{t,\,x}$ 的最优控制。

∎

注意，为了得到问题（RC）的随机验证定理，(2.7) 的黏性解需要满足附加条件（D1）和（D2）。我们想说明这是可行的，尽管有些限制。现在，我们给出确保 (2.7) 的黏性解满足条件（D1）和（D2）的条件如下。

(A1). (i) 函数 $b(\cdot,x,u)$、$\sigma(\cdot,x,u)$、$f(\cdot,x,y,z,u)$、$h(\cdot,x)$ 关于 $t\in[0,T]$ 满足利普希茨条件，且关于 $(x,u)\in\mathbb{R}^n\times U$ 一致；

(ii) 函数 b、σ、f、Φ、h 有界。

(A2). (i) $f(t,x,y,z,u)$ 关于 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ 半凹，且关于 $(t,u) \in [0,T] \times U$ 一致；$\Phi(x)$ 关于 $x \in \mathbb{R}^n$ 半凹；

(ii) $b(t,x,u)$ 和 $\sigma(t,x,u)$ 关于 $x \in \mathbb{R}^n$ 可微，且相应的一阶偏导数关于 (t,x,u) 连续，关于 x Lipschitz连续，并且一致于 $(t,u) \in [0,T] \times U$。(A3). $f(t,x,y,z,u) = f(t,x,y,u)$ 与 z 无关，且 h 关于 $x \in \mathbb{R}^n$ 半凹。(A4). $h(t,x) = h \in \mathbb{R}, (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$.

Fr由 [3]，中的定理 1.1、注 1.3 和定理 3.1 可得以下两个结果。

引理 4.4。在 (H1)、(H2) 和 (A1) 条件下，由 (2.6) 定义的值函数 $V(\cdot,\cdot)$ 关于 (t,x) 联合利普希茨连续 $\in [0,T-\delta] \times \mathbb{R}^n$，对所有 $\delta \in (0,T)$ 均成立；也就是说，存在 $C_{1,\delta} > 0$，使得对任意 (t,x)、(t',x') $\in [0,T-\delta] \times \mathbb{R}^n$,

$$|V(t,x) - V(t',x')| \leqslant C_{1,\delta}(|t-t'| + |x-x'|).$$

引理 4.5. 假设 (H1)、(H2) 和 (A1)、(A2) 成立，并且 (A3) 或 (A4) 成立。那么，对于所有$\delta \in (0,T)$，存在某个 $C_{2,\ \delta} > 0$ 使得由 (2.6) 定义的值函数 $V(\cdot,\cdot)$ 是 $C_{2,\ \delta}$-半凹的，即 $V(t,\cdot) - C_{2,\ \delta}|\cdot|^2$ 关于 $t \in [0,T]$ 一致地为凹函数。

结合引理 2.2 与上述两个引理，我们知道，当 $W(\cdot,\cdot)$ 取为问题（RC）的值函数 $V(\cdot,\cdot)_{t,\ x}$ 且 (H1)、(H2)、(A1)、(A2) 以及 (A3) 或 (A4) 成立时，(D1)、(D2) 可以得到满足。因此，定理 4.1 中的假设 (D1) 和 (D2) 是合理的。

4.2 反馈最优控制

在本小节中，我们将从带障碍项的 Hamilton–Jacobi–Bellman 方程 (2.7) 的黏性解构造问题（RC）的反馈最优控制。

引理 4.6. 假设 (H1) 和 (H2) 成立。则 (2.6) 中的值函数 $V(\cdot,\cdot)$ 是唯一满足引理 2.1 及以下条件的函数：对任意 $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} \max\left\{V(t,x) - h(t,x), -q - \inf\limits_{u\in U} \mathbb{H}(t,x,V(t,x),p,P,u)\right\} \leqslant 0, \quad \forall (q,p,P) \in D^{1,2,+}_{t+,x} V(t,x); \\ \max\left\{V(t,x) - h(t,x), -q - \inf\limits_{u\in U} \mathbb{H}(t,x,V(t,x),p,P,u)\right\} \geqslant 0, \quad \forall (q,p,P) \in D^{1,2,-}_{t+,x} V(t,x); \\ V(T,x) = \Phi(x). \end{cases} \tag{4.13}$$

证明. 由引理 2.2 可知，值函数 $V(\cdot,\cdot) \in C_p([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ 是 (2.7) 的唯一黏性解。由引理 4.1-(i)，对任意 $(q,p,P) \in D^{1,\ 2+,,x}_{t+} V(t,x)$，我们可以找到一个函数 $\varphi \in C^{1,\ 2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$，使得对任意 $(s,y) \in [t,T] \times \mathbb{R}^n$，$(s,y) \neq (t,x)$，$\varphi(s,y) > V(s,y)$，并且

$$\big(\varphi(t,x), \varphi_t(t,x), \varphi_x(t,x), \varphi_{xx}(t,x)\big) = \big(V(t,x), q, p, P\big).$$

然后，按照 [16, 2] 中的步骤（其中仅使用时间上的右极限），对于上述测试函数 φ，我们有

$$\max\left\{V(t,x) - h(t,x), -\varphi_t(t,x) - \inf_{u\in U} \mathbb{H}(t,x,V(t,x),\varphi_x(t,x),\varphi_{xx}(t,x),u)\right\} \leqslant 0,$$

这导致 了 (4.13) 中的第一个不等式。(4.13) 中第二个不等式的证明细节类似。

此外，唯一性源于 (2.7) 的黏性解的唯一性以及 $D^{1,\ 2+,,x}_{t+} V(t,x) \subseteq D^{1,\ 2+,,x}_{t+} V(t,x)$，$D^{1,2,t-}_{x} V(t,x) \subseteq D^{1,2,t+-}_{,x} V(t,x)$。

∎

定理 4.2。假设 (H1)-(H3)。设满足 (D1)、(D2)的 $W \in C_p([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ 是 (2.7) 的黏性解。那么，对于每个 $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$,

$$\inf_{(q,p,P,u)\in D^{1,2,+}_{t+,x} W(t,x)\times U} \Big[q + \mathbb{H}(t,x,W(t,x),p,P,u)\Big] \geqslant W(t,x) - h(t,x). \tag{4.14}$$

此外，如果 $\alpha(\cdot\cdot) \in \mathcal{L}$ $t\ x\ \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$, , $\mathbb{d}$, $\in$,) 和对于所有 (,) , $\mathbb{d}\mathbb{b}\mathbb{b}$ 都是满足 (, $\mathbb{b}\mathbb{b}$) $,,t+\ ^{+}{}_{,x}\ W$(,) 的可测函数，并且

$$\begin{cases} \text{(i). } \mathbb{E}\displaystyle\int_t^T \Big[\mathbb{d}(s, X^{t,x;\alpha}(s)) + \mathbb{H}\big(s, X^{t,x;\alpha}(s), Y^{t,x;\alpha}(s), \Theta(s, X^{t,x;\alpha}(s)), \alpha(s, X^{t,x;\alpha}(s))\big)\Big] ds \leqslant 0, \\ \text{(ii). } \mathbb{b}(s, X^{t,x;\alpha}(s)).\sigma\big(s, X^{t,x;\alpha}(s), \alpha(s, X^{t,x;\alpha}(s))\big) = Z^{t,x;\alpha}(s),\ \text{a.e.. } s\in[t,T],\ P\text{-a.s.}, \end{cases} \tag{4.15}$$

其中， $X^{t,x;\alpha}(\cdot)$、$(Y^{t,x;\alpha}(\cdot)\ Z^{t,x;\alpha}(\cdot)\ K^{t,x;\alpha}(\cdot))$分别满足（2.9）和（2.10），且$\mathrm{u}(\cdot, X^{t,x;\alpha}(\cdot)) \in \mathcal{U}_{t,T}$，以及 $\Theta(\cdot, X^{t,x;u}(\cdot)) = \big(\mathrm{p}(\cdot, X^{t,x;u}(\cdot)),\ \mathrm{P}(\cdot, X^{t,x;u}(\cdot))\big)$. 那么，$\mathrm{u}(\cdot,\cdot)$是问题（RC）$_{t,x}$的最优反馈控制律。

证明。步骤 1：根据Hamilton–Jacobi–Bellman 方程(2.7) 的黏性解的唯一性以及引理 4.6，对于任意 $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$，$(q,p,P) \in D^{1,\ 2+}_{t+,,x}\ W(t,x)$，我们有

$$W(t,x) \leqslant h(t,x) \text{ and } -q - \inf_{u\in U} \mathbb{H}(t,x,W(t,x),p,P,u) \leqslant 0,$$

那么，对于任意的 $u \in U$,

$$q + \mathbb{H}(t,x,W(t,x),p,P,u) \geqslant q + \inf_{u\in U} \mathbb{H}(t,x,W(t,x),p,P,u) \geqslant W(t,x) - h(t,x),$$

即，(4.14)成立。

步骤 2：对于任意的 $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$，反馈控制律$_{\alpha}(\cdot,\cdot)$ 以及 (2.9)的解 $X^{t,x;\alpha}(\cdot)$，我们设

$$\bar{u}(s) := {}_{\alpha}(s, X^{t,x;\alpha}(s)),\ \bar{q}(s) := {}_{\mathbb{d}}(s, X^{t,x;\alpha}(s)),\ \bar{p}(s) := {}_{\mathbb{b}}(s, X^{t,x;\alpha}(s)),\ \bar{P}(s) := {}_{\mathbb{b}}(s, X^{t,x;u_\alpha}_s),\ s\in[t,T].$$

由式 (4.15) 可知，$\bar{u}(\cdot)$、$X^{t,\ x;\alpha}(\cdot)$、$(Y^{t,\ x;\ \alpha}(\cdot)\ Z^{t,\ x;\alpha}(\cdot)\ K^{t,\ x;\alpha}(\cdot))$ 以及上述的 $(\bar{q},\bar{p},\bar{P})$ 满足定理 4.1 中的 (i) 、 (ii) 和 (iii)，因此 $\bar{u}(\cdot)$ 是最优控制，即 $_{\alpha}(\cdot,\cdot)$ 是最优反馈控制律。

∎

最后，我们来看看寻找最优反馈控制律的过程。根据定理 4.2，我们可以通过最小化得到最优反馈控制律的候选者。

$$q + \mathbb{H}(t,x,W(t,x),p,P,u)$$

关于 $D^{1,\ 2+,\ ,\ x}\ W(t,x) \times U$，使得（4.14）成立。此外，要确保候选控制是真正的最优反馈控制律，还需要完成三件事。首先，需要获得 $D^{1,\ 2+,\ ,\ x}\ W(t,x)$ 的可测选取 $_{\alpha}(\cdot,\cdot)$ 以及 ($_{\mathbb{d}}$, $_{\mathbb{b}}$, $_{\mathbb{b}}$)。其次，需要确保候选控制 $_{\alpha}(\cdot,\cdot)$ 是可容许的，也就是说，随机微分方程（2.9）和反射倒向随机微分方程（2.10）的解存在。最后，（4.15）仍有待验证。特别是，对于涉及反向随机微分方程的控制问题，（4.15）-(ii) 是必要条件。

上述三个步骤中，第一步以及第二步中关于 SDE（2.9）的相关讨论，已在 [17] 第五章第六节中完成。其余部分仍为空白，将是一项浩大的工程。我们暂且略过，希望今后的研究能取得一些成果。

5 示例

在本节中，我们给出两个具体例子，以说明所得的验证定理提供了一种构造最优控制或检验给定的可容许控制是否为最优控制的方法。为简单起见，本节中我们假设 $n = d = 1$ 。第一个例子属于经典解的框架。

例 5.1. 对于任意初始对 $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$，考虑以下受控系统，

$$\begin{cases} dX(s) = (X(s) + u(s))ds + X(s)dB(s), \quad s \in [t, T], \\ X(t) = x. \end{cases} \tag{5.1}$$

其中控制过程 $u(\cdot)$ 的取值属于 $U = [0, 1]$。对于 $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$，通过选择 $u(\cdot)$，我们将最小化以下成本泛函

$$J(t, x; u(\cdot)) := Y(t),$$

其中 $(Y(\cdot)\ Z(\cdot)\ K(\cdot))$ 是以下带上障碍的倒向随机微分方程的解，

$$\begin{cases} Y(s) = X(T) + \displaystyle\int_s^T (Y(r) + u(r))dr - (K(T) - K(s)) - \int_s^T Z(r)dB(r), \quad s \in [t, T], \\ Y(s) \leqslant X(s)e^{2T}, \quad \text{a.e. } s \in [t, T], \\ \displaystyle\int_t^T \big(X(r)e^{2T} - Y(r)\big)dK(r) = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

根据前述预备知识，上述控制问题（记为问题 $(C)_{t,\ x}$ ）显然是有意义的。

现在我们将转化为与问题 $(C)_{t,\ x}$ 相关的 Hamilton–Jacobi–Bellman 方程的障碍问题，如下所示，

$$\begin{cases} \max\Big\{W(t, x) - xe^{2T}, -\dfrac{\partial}{\partial t}W(t, x) - \inf\limits_{u\in[0,1]}\Big(\dfrac{1}{2}x^2 W_{xx}(t, x) + (x + u)W_x(t, x) + W(t, x) + u\Big)\Big\} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \\ W(T, x) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.3}$$

不难直接验证，函数 $W(t, x) = xe^{2T-2t} \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ 是方程 (5.3) 的经典解。因此，应用我们的第一个主要结果（定理 3.1），由 (3.1) 可知，$\bar{u}(\cdot) \equiv 0$ 是最优控制。在这种情况下，问题 $(C)_{t,x}$ 的最优轨迹为

$$\bar{X}(s) = X^{t,x;\bar{u}}(s) = x \exp\Big\{\frac{1}{2}(s - t) + B(s) - B(t)\Big\}, \quad s \in [t, T].$$

对于 $x_0 \in \mathbb{R}$，问题 $(C)_{0,x_0}$的最优对为 $\Big(0, x_0 \exp\Big\{\dfrac{1}{2}s + B(s)\Big\}\Big)$, $s \in [0, T]$。

接下来我们来看黏性解的情形。

例 5.2. 给定控制域 $U = [1, 2]$。对于任意初始对 $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$，考虑如下受控系统，

$$\begin{cases} dX(s) = X(s)u(s)ds + X(s)dB(s), \quad s \in [t, T], \\ X(t) = x, \end{cases} \tag{5.4}$$

以及如下反射倒向随机微分方程,

$$(5.5)\qquad \begin{cases} Y(s) = X(T) - \displaystyle\int_t^T |Y(r)|dr - (K(T) - K(s)) + \int_t^T Z(r)dB(r), \quad s \in [t,T], \\ Y(s) \leqslant h(s, X(s)), \quad \text{a.e. } s \in [t,T], \\ \displaystyle\int_t^T \big(h(r, X(r)) - Y(r)\big)dK(r) = 0, \end{cases}$$

其中障碍函数 $h(t,x) = \begin{cases} x, (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^+, 0 \quad t \ x \quad , (\ ,\ ) \in [0,T] \times (\mathbb{R}^- \cup \{0\}) \end{cases}$。显然，(5.4) 和 (5.5) 是良好-

因此，对于 $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$，我们定义成本泛函如下,

$$J(t,x;u(\cdot)) := Y(t).$$

我们的控制问题（记为问题 $(\mathbb{C})_{t,\ x}$）是通过选择 $u(\cdot) \in U$，使 $J(t,x;\ u(\cdot))$ 最小化，其值函数为 $V(\cdot,\cdot)$。

考虑以下Hamilton–Jacobi–Bellman 方程的障碍问题,

$$(5.6)\qquad \begin{cases} \max\Big\{W(t,x) - h(t,x), -\dfrac{\partial}{\partial t}W(t,x) - \inf\limits_{u\in[1,2]}\Big(\dfrac{1}{2}x^2 W_{xx}(t,x) + xuW_x(t,x) - |W(t,x)|\Big)\Big\} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}, \\ W(T,x) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

显然，以下内容

$$(5.7)\qquad W(t,x) = \begin{cases} x, & (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^+, \\ xe^{3T-3t}, & (t,x) \in [0,T] \times (\mathbb{R}^- \cup \{0\}), \end{cases}$$

在 $(t,0)$ 处不可微，对于任意 $t \in [0,T]$都是如此。根据黏性解的定义（参见 *[2, 16]*），我们可以验证(5.7) 中的 $W(\cdot,\cdot)$确实是 (5.6) 的一个黏性解。此外，$W(\cdot,\cdot) \in C_p([0,T] \times \mathbb{R})$，并满足条件（D1）和（D2）。

考虑初始对 $(t,x) = (0,0)$ 下的可容许控制 $\bar{u}(\cdot) \equiv 1$。相应的状态轨迹为 $\bar{X}(\cdot) = X^{0,\ 0;\bar{u}}(\cdot) \equiv 0$。在这种情况下,

$$D^{1,2,+}_{t+,x} W\big(s, \bar{X}(s)\big) = [0,+\infty) \times [1, e^{3T-3s}] \times [0,+\infty), \quad s \in [0,T].$$

通过取 $\big(\bar{q}(s)\ \bar{p}(s)\ \bar{P}(s)\big) = (0,1,0) \in D^{1,\ 2+,,x}_{t+} W\big(s, \bar{X}(s)\big)$, $s \in [0,T]$，很容易验证 at

$$\begin{cases} \bar{p}(s) \cdot \bar{X}(s) = 0 = \bar{Z}(s), \ s \in [0,T]; \\ \mathbb{E}\displaystyle\int_t^T \Big(\bar{q}(s) + \frac{1}{2}\big(\bar{X}(s)\big)^2 \bar{P}(s) + \bar{X}(s)\bar{p}(s) - |\bar{Y}(s)|\Big)ds \leqslant 0, \ s \in [0,T], \end{cases}$$

这实际上就是定理 4.1 中的条件 (ii) 和 (iii)。注意，在上述情形下，对于 $\bar{u}(\cdot)$，(5.5) 的解 $\bar{}(Y(\cdot)\ Z(\cdot)\ K(\cdot))$ 为 (0, 0, 0)。因此，由定理 4.1 可得 $(X(\cdot)\ \bar{u}(\cdot))$ 确实是问题 $(\mathbb{C})_{0,0}$ 的最优对。

参考文献

[1] R. Buckdahn, J.Li，具有两个反射障碍的 Isaacs方程组的概率解释，《非线性微分方程及其应用》，2009,16, 381-420。

[2] R. Buckdahn，J. Li，带反射的随机微分博弈及其相关的Isaacs 方程障碍问题，《数学物理学报（英文版）》，2011，27(4)，647-678。[3] R. Buckdahn，J.Huang和 J. Li，一般HJB方程的正则性：一种后向随机微分方程方法，《SIAM控制与优化杂志》，2012，50(3)，1466-1501。[4] L.Chen，Q. L¨u，无限维随机控制系统的随机验证定理，arXiv:2209.09576。[5] M. Crandall，Hamilton–Jacobi方程的黏性解，《美国数学学会汇刊》，1983，277，1-42。[6] M.Crandall，H. Ishii和P. Lions，二阶偏微分方程黏性解用户指南，《美国数学学会公报》，1992，27，1-67。[7] N.Karoui，K. Kapoudjian，E. Pardoux，S. Peng和M. Quenez，后向随机微分方程的反射解及其相关的偏微分方程障碍问题，《概率年刊》，1997，25，702-737。[8] W. Fleming，R. Rishel，确定性与随机最优控制，Springer-Verlag，1975。[9] F. Gozzi，A. ´Swi˛ech 和 X. Zhou，黏性解框架下随机验证定理的一个修正证明，《SIAM控制与优化杂志》，2005，43(6)，2009-2019。[10] F. Gozzi，A. ´Swi˛ech 和 X. Zhou，勘误：“黏性解框架下随机验证定理的一个修正证明”，《SIAM控制与优化杂志》，2010，48(6)，4117-4179。[11] J. Li，Q. Wei，全耦合前向后向随机微分方程的最优控制问题与 Hamilton–Jacobi–Bellman 方程的黏性解，《SIAM控制与优化杂志》，2014，52(3)，1622-1662。[12] S. Peng，广义动态规划原理与 Hamilton–Jacobi–Bellman方程，《随机过程与随机报告》，1992，38，119-134。[13] E. Pardoux，S.Peng，后向随机微分方程的适应解，《系统与控制通讯》，1990，14，55-61。[14] S.Peng，后向随机微分方程——随机最优化理论与 HJB 方程的黏性解。载于：J.Yan，S. Peng，S. Fand 和L. Wu（编），《随机分析专题》，科学出版社，1997，85-138。[15] Q. Wei，Z. Yu，时间不一致的递归零和随机微分博弈，《数学控制与相关领域》，2018，8(3&4)，1051-1079。[16] Z. Wu，Z. Yu，一类随机递归最优控制问题的动态规划原理与 Hamilton–Jacobi–Bellman 方程，《SIAM控制与优化杂志》，2008，47(5)，2616-2641。[17] J.Yong，X. Zhou，随机控制——哈密顿系统与 HJB 方程，Springer-Verlag，1999。[18] L. Zhang，黏性解的前向-后向受控系统随机验证定理，《系统与控制通讯》，2012，61，649-654。[19] X. Zhou，J. Yong 和X. Li，黏性解框架下的随机验证定理，《SIAM 控制与优化杂志》，1997，35(1)，243-253。