arXiv:2304.03474v1 [math.FA] 7 Apr 2023

基普里扬诺夫分数阶微积分的前史与传承

Maksim V. Kukushkin

莫斯科国立土木工程大学，129337，俄罗斯莫斯科；俄罗斯科学院应用数学与自动化研究所，360051，俄罗斯纳尔奇克；kukushkinmv@rambler.ru

摘要

本文部分回顾了分数阶微积分中的各种方法与途径，部分阐述了 Kipriyanov 非凡的理论，并将其与经典理论进行比较。本文着重强调了构建独立的基普里扬诺夫分数阶微积分理论的重要意义及其卓越方法，同时从半群理论的视角介绍了涉及 Kipriyanov 算子的现代成果及相应的推广。

关键词：m-增生算子的分数阶幂；半群的无穷小生成元；Kipriyanov 分数阶微分算子；严格增生算子；抽象演化方程。

数学学科分类 47B28；47A10；47B12；47B10；47B25；20M05；20M99；26A33。

1 简要历史回顾

1. Kipriyanov分数阶微积分的诞生

Ivan Alexandrovich Kipriyanov 出生于乌拉尔的车里雅宾斯克州。1945年，Kipriyanov I.A. 进入车里雅宾斯克师范学院物理数学系学习。1949年，他被录取进入苏联科学院斯捷克洛夫数学研究所研究生院，导师是 Keldysh M.V.。1954年，Kupriyanov I.A. 答辩通过了题为《二元函数的傅里叶级数求和与插值过程》的博士论文。在这项工作中，Kupriyanov I.A. 找到了一类二元函数，对于这类函数，可以完全推广 Lozinsky S.M. 的结果，即在某种意义上，一维傅里叶级数的每个收敛与求和定理，都可以推广到具有等距节点的相应三角插值过程的收敛与求和。此外，这些结果对更一般的逼近过程仍然成立。Lozinsky S. M. 教授在对该论文的评述中指出，二元函数类的选择非常成功。正如 Lozinsky S.M. 所写的，这一选择需要分析洞察力，并保证了工作的成功。Kan-torovich L.V. 教授在对论文摘要的评述中指出，在列宁格勒大学1953年11月关于函数论和泛函分析的研讨会上，阅读了 Kipriyanov I.A. 关于该

摘要的工作以及两份报告后，他对此形成了非常积极的评价。正如研讨会讨论所表明的，这项工作给其他与会者也留下了十分良好的印象。应当指出，参加该研讨会的还有 Kantorovich L.V.、Lozinsky S.M.、Natanson I.P. 等教授。在本世纪50年代末和60年代初，人们积极开展了对各种函数空间的研究；这些函数空间本身十分重要，同时在现代偏微分方程理论和概率论中也发挥着重要作用。1958年，Kipriyanov 关于分数阶导数的第一篇论文发表，其中引入了定义在立方体中的函数的分数阶偏导数概念；该概念以 Marchaud 意义下的分数阶积分和 Sobolev S.L. 意义下的整数阶导数为基础。这里应当指出，与当时通常的分数阶微积分理论相比，这一实现的方法是独特而有特色的。Kipriyanov 分数阶导数的定义建立在某个积分恒等式之上，该恒等式将其与 Marchaud 分数阶导数联系起来。文中给出了相应的积分表示，定义了两个函数空间，并证明了关于这两个空间的嵌入定理和空间完备性定理。其中一个定理在一维情形下显著补充了 Hardy 和 Littlewood 关于分数阶积分的著名定理。在1959年至1961年的下一系列工作中，Kupriyanov I.A. 研究了沿着他所引入的方向定义的分数阶导数 [12],[13],[14], [15]。1960年，Kupriyanov I.A. 发表了一篇关于分数阶微分算子的论文 [13], ，该算子是关于具有光滑系数的二阶椭圆算子的分数阶算子。值得注意的是，该算子使我们能够研究含有分数阶导数的微分方程的边值问题，其中除偏导数外还包含分数阶导数。在此，我们应暂时中断对 Kipriyanov 其他成就的介绍，转而关注有关其最重要科学贡献的具体问题——作为一门独立构建的公理化理论的分数阶微积分。

2. Riemann-Liouville 算子和 Marchaud 算子推广的分支

分数阶微积分的核心是分数阶微分这一概念。在这方面，我们应当承认，黎曼-刘维尔分数阶微分算子是这一概念的源头，并在科学中发挥着特殊作用。在这一语境下，诸如卡普托和 Marchaud 这样的算子当然值得一提；第一个对我们来说并不重要，因为它更像是黎曼 - 刘维尔算子在初始点处消失的光滑函数上的一种约化（如果我们从泛函分析的角度来考察这一问题），但第二个则完全体现了分数阶导数作为一种概念的真正数学本质，因为它可以表示为相应半群[23]的无穷小生成元。显然，采用这种方法，我们不得不处理算子理论中更为一般的概念；这样一来，对分数阶导数这一概念，即将其理解为无穷小生成元的分数幂，便在一方面得到了和谐而完整的阐释。

另一方面，为使叙述连贯，我们还应引用论文 [25] 中的一段内容。该文涉及另一种推广：若将分数阶微分黎曼-刘维尔算子视为卷积算子的导数的一种特殊情形，且该导数满足所谓的索宁条件 [57]，便可作此推广。值得指出的是，Rubin B.S. [48],[51],[50], 、Vakulov B.G. [58], 、Samko S.G. [52],[54], 、Karapetyants N.K. [10],[11]等数学家发展了对这一问题的第二种理解思路。我们还要提到，黎曼-刘维尔算子（索宁算子的特殊情形）的所谓映射定理

最初由 H. Hardy 和 Littlewood [6] 研究，如今称为带极限指标的哈代-利特尔伍德定理。然而，人们曾尝试将该定理推广到某类加权勒贝格空间；这类空间是赋有如下范数的函数空间 $\|f\|_{L_p(I,\beta,\gamma)} := \|f\|_{L_p(I,\mu)}$ $\mu(x) = \omega^{\beta,\gamma}(x) := (x-a)^{\beta}(b-x)^{\gamma}$, $\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, $I := (a,b)$。在这方面，Rubin B.S.、Karapetyants N.K. [10] 等数学家取得了进展，并研究了如下问题 I^{α}_{a+} : $L_p(I, \beta,\gamma) \longrightarrow$？然而，逆定理呢？并没有！所有这些都为采用另一种方法研究黎曼-刘维尔算子的映射性质，或更一般地，研究积分算子的映射性质，创造了条件。因此，为尝试解决一个更一般的问题（至少在特例中），我们在论文 [20]中研究作用于巴拿赫空间上的算子的映射定理，以便进一步获得适用于积分算子的预期结果。在这方面，值得注意的是以下论文 [18], [21], ，其中还提出了一种基于雅可比多项式性质的特殊技巧。基于这一方法，我们在论文 [25] 中提出了研究索宁算子 [57],的方法。该算子定义为卷积算子 ${}_sI^{\varrho}_{a+}\varphi := \varrho *_a \varphi$，其核 ϱ满足若干条件（即所谓的索宁条件）；换言之，存在一个函数 ϑ 使得 $\varrho * \vartheta = 1$。分数阶积分黎曼-刘维尔算子的核是索宁核的一个特例。其他许多例子可见于论文 [55], [49], : 第一篇概述了多种类型的核，例如贝塞尔型函数、幂-指数函数、不完全伽马函数等；第二篇的主要内容则是构造一个尽可能广泛的索宁核函数类。至此，我们可以部分地告一段落，并指出已有研究成功建立了加权勒贝格空间中索宁-阿贝尔方程可解性的判据 [25]。

不过，让我们回到对这一问题的最初理解上来，它与Kipriyanov算子的概念密切相关。

3. 半群方法与谱理论

本段讨论的思想涉及一种模型，该模型借助半群理论，为分数阶微分算子的复合提供了一种表示。例如，我们可以将二阶微分算子表示为平移半群无穷小生成元的某种变换。沿着这一思路，我们将带有分数阶积分微分复合的微分算子，在最终形式下推广为相应无穷小生成元的某种变换，并引入了m-增生算子的一类变换。随后，我们利用论文 [22],[19] 中获得的方法，研究了作用于复可分希尔伯特空间中的非自伴算子的谱性质；这些方法使我们能够得到预解式的实部与算子实部的预解式之间的渐近等价关系。借助这种方法，我们获得了相关结果，因为在许多情况下都可以建立算子实部的渐近公式（见 [2], [45]）。由此，我们根据预解式是否属于Schatten–von Neumann类进行了分类，并提出了根向量系完备性的一个充分条件。

后者方法允许最终构建一个带有分数阶 Kipriyanov积分微分算子复合的微分算子的抽象模型，其中，建模被理解为以相应半群的无穷小生成元为依据对具体微分算子进行解释。此外，我们可以考虑一种通过收缩分数阶可微函数空间的方法，该方法源自由.....所创建的类比

Kipriyanov，并进一步延伸至半群理论的推广。在本论文中，我们研究一种更一般的算子——一种在最终项中具有分数阶积分微分算子复合的微分算子，它涵盖相应的一维算子。各种类型的分数阶积分微分算子复合已由Prabhakar T.R. [43], Love E.R. [34], Erdelyi A. [4], McBride A. [39], Dimovski I.H.、KiryakovaV.S. [3], Nakhushev A.M. [41]等数学家进行研究。特别是，本论文旨在从与Kipriyanov分数阶微积分相关的特定视角，对先前获得的结果进行描述。

3. 第二项含算子函数的演化方程

建立了非自伴算子谱理论的一个方向后，我们可以将抽象理论结果视为进一步研究此类数学对象的基础，例如抽象希尔伯特空间中的分数阶演化方程的柯西问题。我们在第二项中考虑一个定义在特殊算子类上的算子函数，该算子类涵盖了 [23]中所考虑并在上一段中讨论的生成元变换，其中相应的半群被设定为 C_0 压缩半群。反过来，该变换在不同意义下归结为实数阶微分算子的线性复合，例如黎曼-刘维尔分数阶微分算子、Kipriyanov算子、黎斯势以及差分算子 [13],[23],[53]。此外，在论文 [27] 中，我们拓展了微分算子的类别，考虑了一个人工构造的正规算子，而该算子无法由Lidskii结果 [33]涵盖。应当指出的是，Kipriyanov算子在理论构造和应用中都非常有用，因为它涵盖欧几里得空间，并且可以被视为作用于n维欧几里得空间中的任意奇数阶微分算子扰动中的一项。这一事实基于Kipriyanov的绝妙思想：在n维欧几里得空间中考虑方向坐标；后一种方法与维数无关，这是一个巨大的优势，因为我们可以考虑具有不同性质的算子的复合。

涉及分数阶积分-微分构造的理论应用部分，关注那些可视为抽象问题特例的结果和问题；在此背景下，以下论文值得一提 [38],[37],[44]。同时，我们也应承认，对于某些特殊情况，抽象方法可能显得“笨拙”，因为这些情况只能通过独特的技术来处理，而这正是研究具体微分方程的专家所作出的主要贡献。这里还应补充的是，通过在物理学和工程科学中应用含Kipriyanov算子的分数阶积分-微分复合算子，抽象问题的现实意义可以得到鲜明体现。

显然，在论文 [30] 中，我们实现了拓宽分数阶积分-微分复合式类别的设想：考虑了算子函数这一概念，并将其应用于一个抽象分数阶演化方程的柯西问题，其中第二项中的算子函数不含时间变量，而第一项中的导数被设定为分数阶导数。在此，我们应当指出，就函数空间而言，算子函数会生成在相应空间中作用的各种算子。在这方面，即使幂函数也能带来有趣的结果 [27]。在存在唯一性定理的背景下，一个值得强调的重要改进是，得到了由根向量级数表示的解公式。在根向量级数不范数收敛的情况下，我们需要考虑在较弱的巴里、里斯、阿贝尔-

Lidskii 意义 [33],[1],[5]。

尽管从算子理论的角度来看，所声称的目标相当应用化，但我们承认，非自伴无界算子的根向量展开问题在本文的语境下仍然具有相关性。值得注意的是，这一问题几乎起源于上世纪前半叶 [9], [36], [33], [32],[35],[1],[56], [40],[22], [19] [23], [26]。然而，当一个算子表示为算子线性组合，且所谓的主项在对应于自伴算子的情形下是非自伴的，而这一情形已在论文 [9],[32],[35],[36],[40], [56]中得到深入研究时，我们对此特别感兴趣。在这方面，二阶微分算子与Kipriyanov算子的算子线性组合代表了一类相关模型，对于该模型，所获得的谱理论结果 [19] 为进一步的抽象推广 [22],[23]创造了先决条件。

2 抽象方法

1. 预备知识

设 C、C_i、 $i \in \mathbb{N}_0$ 为正常数。我们假设， C 的取值在不同公式及公式的不同部分中可以不同，但 C_i 的取值是确定的。用 $\mathrm{Fr}\, M$ 表示集合 $M.$ 的边界点集。在下文中，除非另有说明，我们考虑作用于可分复希尔伯特空间 $\mathfrak{H}$ 上的线性稠定算子。用 $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ 表示 $\mathfrak{H}.$ 上线性有界算子的集合。用 L 表示算子 $L.$ 的闭包。我们约定符号 $\tilde{L}^i$ 的用法如下: $= (\tilde{L})^i$，其中 i 是任意符号。分别用 D(L)、R(L)、N(L) 表示算子 L 的定义域、值域和核（或零空间）。R(L) 的亏格（余维数）以及 N(L) 的维数分别记为 def L、$\mathrm{nul}\, L$。假设 L 是作用于 $\mathfrak{H}$ 上的闭算子，且 N(L) $= 0$，定义希尔伯特空间 $\mathfrak{H}_L : = \left\{f, g \in \mathrm{D}(L),\ (f, g)_{\mathfrak{H}_L} = (Lf, Lg)_{\mathfrak{H}}\right\}.$。考虑一对复希尔伯特空间 $\mathfrak{H}$、$\mathfrak{H}_+$，记号 $\mathfrak{H}_+ \subset\subset \mathfrak{H}$ 表示 $\mathfrak{H}_+$ 作为元素集合在 $\mathfrak{H}$ 中稠密，并且由不等式 $\|f\|_{\mathfrak{H}} \leq C_0\|f\|_{\mathfrak{H}_+}$, C_0 >0, $f \in \mathfrak{H}_+$ 给出有界嵌入；此外，关于范数 $\mathfrak{H}_+$ 有界的任意集合，相对于范数 $\mathfrak{H}.$ 在 ˜ 下都是紧的。设 L 是闭算子。对于任意满足 $S = L$ 的可闭算子 S，其定义域 D(S) 称为 $L.$ 的核。用 $\mathrm{D}_0(L)$ 表示可闭算子 $L.$ 的一个核。设 P(L) 为算子 L 的预解集，且 $R_L(\zeta)$ $\zeta \in$ P(L) $[R_L := R_L(0)]$ 表示算子 $L.$ 的预解式。用 $\lambda_i(L)$ $i \in \mathbb{N}$ 表示算子 $L.$ 的特征值。设 L 是紧算子，且 N:= $(L^*L)^{1/2}$, $r(N) :=$ dim R(N)；则算子 N 的特征值称为算子 L 的奇异数（s-数），记为 $s_i(L)$ $i = 1$, 2, ..., $r(N)$。若 $r(N) < \infty$，则按定义令 $s_i = 0, i = r(N) + 1$, 2, ...。令 $\nu(L)$ 表示算子 $L.$ 的所有代数重数之和。用 $n(r)$ 表示一个函数，其值等于序列 $\{a_n\}_1^\infty$, $|a_n| \uparrow \infty$ 中落在圆 $|z| < r.$ 内的元素个数。设 A 为紧算子，用 $n_A(r)$ 表示与序列 $\{s_i^{-1}(A)\}_1^\infty.$ 相对应的计数函数 $n(r)$。令 $\mathfrak{S}_p(\mathfrak{H})$ $0 < p < \infty$ 为 Schatten-冯·诺依曼 ˜ 类， $\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ 为紧算子的集合。用 $\mathfrak{S}_\rho(\mathfrak{H})$ 表示满足 $A \in \mathfrak{S}_\rho(\mathfrak{H})$ $\Rightarrow \{A \in \mathfrak{S}_{\rho+\varepsilon}, A \overline{\in} \mathfrak{S}_{\rho-\varepsilon}, \forall \varepsilon > 0\}.$ 的算子 ˜ 所构成的类。按照 [26], ，我们将其称为收敛指数的 Schatten-冯·诺依曼类。设 L 是具有紧预解式的算子，且 $s_n(R_L) \leq C\, n^{-\mu}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \mu < \infty$；则我们用 $\mu(L)$ 表示阶。

算子 L （见 [56]）的。分别用 $\mathfrak{Re}L:=(L+L^*)/2$、 $\mathfrak{Im}L:=(L-L^*)/2i$ 表示算子 L 的实厄米分量和虚厄米分量。按照专著 [8], 中的术语，集合 $\Theta(L):=\{z\in\mathbb{C}\colon\ z=(Lf,f)_{\mathfrak{H}},\ f\in \mathsf{D}(L)\ \ \|f\|_{\mathfrak{H}}=1\}$ 称为算子 $L.$ 的数值域。若算子 L 的数值域包含于闭扇形 $\mathfrak{L}_\iota(\theta):=\{\zeta\colon\ |\arg(\zeta-\iota)|\le\theta<\pi/2\}$，则称其为扇形型算子，其中 ι 是顶点，θ 是扇形 $\mathfrak{L}_\iota(\theta)$ 的半角。若要强调 ι 与 θ 之间的对应关系，则记为 $\theta_\iota.$ 。若下列关系成立 $\mathsf{Re}(Lf,f)_{\mathfrak{H}}\ge\gamma_L\|f\|^2_{\mathfrak{H}}$, $f\in\mathsf{D}(L)$ $\gamma_L\in\mathbb{R}$，则称算子 L 下有界，其中 γ_L 称为 $L.$ 的下界。若 $\gamma_L=0.$，则称算子 L 为增生的。若 $\gamma_L>0.$，则称算子 L 为严格增生的。若下列关系成立 $(A+\zeta)^{-1}\in\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ $\|(A+\zeta)^{-1}\|\le(\mathsf{Re}\zeta)^{-1}, \mathsf{Re}\zeta>0.$，则称算子 L 为 m-增生的。若算子 Lf 稠密定义且满足下列等式 $(g,)_{\mathfrak{H}}=)f(Lg,)_{\mathfrak{H}}$ $f,g\in\mathsf{D}(L)$，则称其为对称算子。考虑定义在希尔伯特空间 $\mathfrak{H}.$ 的线性流形上的半双线性型 $s[\cdot,\cdot]$ （见 [8]）。分别令 $\mathfrak{h}=(s+s^*)/2$、 $\mathfrak{k}=(s-s^*)/2i$ 为型 s 的实分量和虚分量，其中 $s^*[u,v]=\overline{s[v,u]}$, $\mathsf{D}(s^*)=\mathsf{D}(s)$。用 $s[\cdot]$ 表示与半双线性型 $s[\cdot,\cdot].$ 对应的二次型。根据这些定义，有 $\mathfrak{h}[\cdot]=\mathsf{Re}\,s[\cdot]$, $\mathfrak{k}[\cdot]=\mathsf{Im}\ s[\cdot].$。用 $\tilde{s}$ 表示型 $s.$ 的闭包。二次型 $s[f]$, $f\in\mathsf{D}(s)$ $\|f\|_{\mathfrak{H}}=1$ 的值域称为半双线性型 s 的值域，记为 $\Theta(s)$。若型 s 的值域包含于一个扇形内，且该扇形的顶点 ι 位于实轴上、半角为 $0\le\theta<\pi/2.$，则称该型为扇形型。根据定理 2.7 [8, , 第 323] 页，存在唯一的 m-扇形算子 $T_s,T_{\mathfrak{h}}$，分别与闭扇形型 $s,\mathfrak{h}$ 相关联。算子 $T_{\mathfrak{h}}$ 称为算子 T_s 的实部，记为 $\mathsf{Re}\,T_s.$。

假设 T_t, $(0\le t<\infty)$ 是 $\mathfrak{H}$ 上的有界线性算子半群，根据定义，令

$$Af=-\lim_{t\to+0}\left(\frac{T_t-I}{t}\right)f,$$

其中，$\mathsf{D}(A)$是使得上述极限在范数意义下存在的元素集合 $\mathfrak{H}.$ 根据定义 [42, 第1] 页，算子 $-A$ 被称为半群 T_t.的无穷小生成元

令 $f_t\colon\ I\to\mathfrak{H}, t\in I:=[a,b], -\infty<a<b<\infty.$ 以下积分按照黎曼意义理解为部分和的极限

$$\sum_{i=0}^{n}f_{\xi_i}\Delta t_i\xrightarrow{\mathfrak{H}}\int\limits_I f_t dt,\ \lambda\to 0, \tag{1}$$

其中，$(a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b)$ 是对线段 I 的任意分割， $\lambda:=\max_i(t_{i+1}-t_i)$ ξ_i 是属于 $[t_i,t_{i+1}].$ 的任意点。最后一个积分存在的充分条件是连续性（见[31, 第248]页），即 $f_t\xrightarrow{\mathfrak{H}}f_{t_0}$, $t\to t_0$, $\forall t_0\in I.$。广义积分被理解为一个极限

$$\int\limits_a^b f_t dt\xrightarrow{\mathfrak{H}}\int\limits_a^c f_t dt,\ b\to c,\ c\in[-\infty,\infty]. \tag{2}$$

采用论文 [12], 中的记号，我们假设 Ω 是 n 维欧几里得空间 $\mathbb{E}^n$中的一个凸域， P 是边界 $\partial\Omega$ Q上的一个固定点，(r,e) 是 Ω 中任意一点。设 $\mathsf{d}:=\mathsf{diam}\Omega$，记 e 为一个方向从 P 指向 Q的单位向量，记$r=|P-Q|$ 为点 P和 Q之间的欧几里得距离，并使用简写记号

$T := P + \mathbf{e}t,\ t \in \mathbb{R}$. 我们考虑复值函数的勒贝格类 $L_p(\Omega)\ \ 1 \le p < \infty$ 。对于函数 $f \in L_p(\Omega)$，有

$$\int_{\Omega} |f(Q)|^p dQ = \int_{\omega} d\chi \int_{0}^{d(\mathbf{e})} |f(Q)|^p r^{n-1} dr < \infty, \tag{3}$$

其中， $d\chi$ 是单位球面曲面（单位球面属于$\mathbb{E}^n$）上的一个立体角， ω 是该球面的曲面， $d := d(\mathbf{e})$ 是从点 P 沿方向 e 在定义域 Ω 内延伸的射线线段的长度。不失一般性，我们只考虑使等式 (3) 右端的内积分存在且有限的 e 方向。众所周知，几乎所有方向都满足这一条件。我们用简写 $P \cdot Q = P^i Q_i = \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i$ 表示属于 $\mathbb{E}^n$. 的点$P = (P_1, P_2, ..., P_n)$ $Q = (Q_1, Q_2, ..., Q_n)$的内积。记 $D_i f$为函数 f 关于索引为 $1 \le i \le n$. 的坐标变量的弱偏导数。我们假设所有函数在 Ω 外均作零延拓。除非另有说明，以下均采用论文 [5], [8], [12], [13], [53]中的记号。

下面，我们表述定理 1 [23] 的条件，该定理给出了关于在 $\mathfrak{H}$.中作用的非自伴算子 L 的谱性质（按实部的阶）的描述。

(H1) 存在一个希尔伯特空间 $\mathfrak{H}_+ \subset\subset \mathfrak{H}$ 和一个线性流形 $\mathfrak{M}$ ，它在 $\mathfrak{H}_+$. 中稠密。算子 L 定义在 $\mathfrak{M}$. 上

(H2) $|(Lf, g)_{\mathfrak{H}}| \le C_1 \|f\|_{\mathfrak{H}_+} \|g\|_{\mathfrak{H}_+},\ \mathrm{Re}(Lf, f)_{\mathfrak{H}} \ge C_2 \|f\|^2_{\mathfrak{H}_+},\ f, g \in \mathfrak{M},\ C_1, C_2 > 0.$

这里需要指出，由于没有一般性结论声称算子及其伴随算子的定义域之交是稠密集，因此我们不能将论证局限于考察厄米实部，而必须引入算子实部这一概念。这就是为什么提出应对这一问题进行全面分析是相当合理的。

考虑条件 $\mathfrak{M} \subset \mathrm{D}(W^*)$，在这种情况下，算子的实厄米分量 $\mathcal{H} := \mathfrak{Re}\, W$of定义在 $\mathfrak{M}$上。事实上，$\mathcal{H}$ 是自伴且下有界的（见引理3 [22]），其中 $H = ReW.$ 因此，相应的半双线性型（将此型记为 h）也是对称且下有界的（见定理 2.6 [8, ，第 323] 页）。容易证明that $h \subset \mathfrak{h}$，但利用这一事实，我们通常不能断言 $\mathcal{H} \subset H$ （见 [8, ，第 330] 页）。我们只能得到包含关系 $\tilde{\mathcal{H}}^{1/2} \subset H^{1/2}$ （见 [8, ，第 332] 页）。注意，事实 $\tilde{\mathcal{H}} \subset H$ 可由条件 $\mathrm{D}_0(\mathfrak{h}) \subset \mathrm{D}(h)$ 得出（见推论 2.4 [8, ，第 323] 页）。然而，已证明（见定理 4 [22] 的证明），关系 H2 保证 $\mathcal{H} = H.$。注意，最后一个关系在应用中非常有用，因为在大多数具体情形下，我们都能找到算子 $\mathcal{H}.$ 的具体形式。

2. Kipriyanov算子的内在性质

在这里，我们研究一种情形 $\alpha \in (0, 1)$。假设Ω $\subset \mathbb{E}^n$ 是一个凸域，具有 n维欧几里得空间的充分光滑边界（C^3 类）。为简单起见，我们认为 Ω 是有界的，但结果可以扩展到某些类型的无界

区域。根据论文 [17], 中给出的定义，我们考虑方向分数阶积分。根据定义，令

$$(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+}f)(Q) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^r \frac{f(P+t\mathbf{e})}{(r-t)^{1-\alpha}}\left(\frac{t}{r}\right)^{n-1}dt,\ (\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}f)(Q) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_r^d \frac{f(P+t\mathbf{e})}{(t-r)^{1-\alpha}}\,dt,$$

$$f\in L_p(\Omega),\ 1\le p\le\infty.$$

这些算子的性质在论文 [17],[16]中有详细描述。类似于专著 [53] ，我们考虑左侧和右侧情形。例如， $\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+}$ 称为左侧方向分数阶积分。我们假设 $\mathfrak{I}^{0}_{0+}=I$. 然而，借助与一维情形相应且在 [53] 中给出的推理，可以很容易地证明这一事实。我们还考虑带有权因子的积分算子（见 [53, 第175]页），其定义如下的形式构造

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+}\mu f\right)(Q) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^r \frac{(\mu f)(P+t\mathbf{e})}{(r-t)^{1-\alpha}}\left(\frac{t}{r}\right)^{n-1}dt,$$

其中， μ 是一个实值函数。我们引入可由方向分数积分表示的函数类。

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+}(L_p) := \left\{u:\ u(Q)=(\mathfrak{I}^{\alpha}_{0+}g)(Q)\right\},\ \mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}(L_p)=\left\{u:\ u(Q)=(\mathfrak{I}^{\alpha}_{d-}g)(Q)\right\},\ g\in L_p(\Omega),\ 1\le p\le\infty.$$

定义以下作用于 $L_p(\Omega)$ 且依赖于参数 $\varepsilon>0.$ 的辅助算子：左侧情形

$$(\psi^{+}_{\varepsilon}f)(Q)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_0^{r-\varepsilon}\frac{f(Q)r^{n-1}-f(T)t^{n-1}}{(r-t)^{\alpha+1}r^{n-1}}dt,\ \varepsilon\le r\le d,\\ \displaystyle\frac{f(Q)}{\alpha}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}-\frac{1}{r^{\alpha}}\right),\qquad 0\le r<\varepsilon.\end{cases}\tag{4}$$

在右侧情形下

$$(\psi^{-}_{\varepsilon}f)(Q)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{r+\varepsilon}^{d}\frac{f(Q)-f(T)}{(t-r)^{\alpha+1}}dt,\ 0\le r\le d-\varepsilon,\\ \displaystyle\frac{f(Q)}{\alpha}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}-\frac{1}{(d-r)^{\alpha}}\right),\quad d-\varepsilon<r\le d.\end{cases}$$

根据专著 [53, 第181] 页的定义，我们考虑以下算子。在左侧情形中

$$(\mathfrak{D}^{\alpha}_{0+,\,\varepsilon}f)(Q)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}f(Q)r^{-\alpha}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}(\psi^{+}_{\varepsilon}f)(Q).\tag{5}$$

在右侧情形中

$$(\mathfrak{D}^{\alpha}_{d-,\,\varepsilon}f)(Q)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}f(Q)(d-r)^{-\alpha}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}(\psi^{-}_{\varepsilon}f)(Q).$$

左侧和右侧分数阶导数分别定义为以下极限。

$$\mathfrak{D}_{0+}^{\alpha}f=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(L_p)}}\mathfrak{D}_{0+,\,\varepsilon}^{\alpha}f,\ \mathfrak{D}_{d-}^{\alpha}f=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(L_p)}}\mathfrak{D}_{d-,\,\varepsilon}^{\alpha}f,\ 1\le p<\infty. \tag{6}$$

考虑论文 [13] 中由形式表达式定义的 Kipriyanov 分数阶微分算子

$$\mathfrak{D}^{\alpha}(Q)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^r\frac{[f(Q)-f(T)]}{(r-t)^{\alpha+1}}\left(\frac{t}{r}\right)^{n-1}dt+C_n^{(\alpha)}f(Q)r^{-\alpha},\ P\in\partial\Omega,$$

其中 $C_n^{(\alpha)}=(n-1)!/\Gamma(n-\alpha)$。值得注意的是，定理 2 [13] 建立了Kipriyanov算子的映射性质，此处我们以显式形式表述其内容：在假设下

$$lp\le n,\ 0<\alpha<l-\frac{n}{p}+\frac{n}{q},\ q>p, \tag{7}$$

我们有，当 $\delta>0$ 足够小时，以下不等式成立。

$$\|\mathfrak{D}^{\alpha}f\|_{L_q(\Omega)}\le\frac{K}{\delta^{\nu}}\|f\|_{L_p(\Omega)}+\delta^{1-\nu}\|f\|_{L_p^l(\Omega)},\ f\in\dot{W}_p^l(\Omega), \tag{8}$$

其中

$$\nu=\frac{n}{l}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+\frac{\alpha+\beta}{l}. \tag{9}$$

常数 K 不依赖于 δ、 f；点 $P\in\partial\Omega$； β 是任意小的固定正数。值得注意的是，引理2.5 [17] 建立了分数阶微分算子之间的联系，更准确地说，它建立了以下关系

$$(\mathfrak{D}^{\alpha}f)(Q)=\left(\mathfrak{D}_{0+}^{\alpha}f\right)(Q),\ f\in\dot{W}_p^l(\Omega),$$

是什么促使我们将其纳入 $\mathfrak{D}^{\alpha}\subset\mathfrak{D}_{0+}^{\alpha}$.

以下定理 [17] 确立了方向分数阶积分算子的映射性质。

定理1. 以下估计成立。

$$\|\mathfrak{I}_{0+}^{\alpha}u\|_{L_p(\Omega)}\le C_{\alpha,\mathrm{d}}\|u\|_{L_p(\Omega)},\ \|\mathfrak{I}_{d-}^{\alpha}u\|_{L_p(\Omega)}\le C_{\alpha,\mathrm{d}}\|u\|_{L_p(\Omega)},\ C_{\alpha,\mathrm{d}}=\mathrm{d}^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1),\ 1\le p<\infty.$$

[17] 中给出的以下所谓表示定理的证明，实现了与 RubinB.S. 发明的一维情形相对应的证明方案。作者本人的贡献在于创立了适用于Kipriyanov算子的改编版本；我们以展开形式表示它，因为它可以被视为经典分数阶微积分与 Kipriyanov I.A. 创立的理论的交集。

定理 2. 假设 $f\in L_p(\Omega)$，关于范数$L_p(\Omega)$ $1\le p<\infty$存在 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\psi_{\varepsilon}^{+}f$ 或 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\psi_{\varepsilon}^{-}f$，则分别为 $f\in\mathfrak{I}_{0+}^{\alpha}(L_p)$ 或 $f\in\mathfrak{I}_{d-}^{\alpha}(L_p)$。

证明。令 $f \in L_p(\Omega)$ 和 $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\(L_p)}} \psi_\varepsilon^+ f = \psi$. 考虑函数

$$(\varphi_\varepsilon^+ f)(Q) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ \frac{f(Q)}{r^\alpha} + \alpha(\psi_\varepsilon^+ f)(Q) \right\}.$$

考虑到(4)，我们可以很容易地证明 $\varphi_\varepsilon^+ f \in L_p(\Omega)$。显然，存在极限$\varphi_\varepsilon^+ f \to \varphi \in L_p(\Omega)$ $\varepsilon \to 0$. 考虑到定理1，如果我们证明

$$\mathfrak{I}_{0+}^\alpha \varphi_\varepsilon^+ f \xrightarrow{L_p} f,\ \varepsilon \to 0. \tag{10}$$

在 $\varepsilon \le r \le d$的情况下，我们有

$$(\mathfrak{I}_{0+}^\alpha \varphi_\varepsilon^+ f)(Q) \cdot \frac{\pi r^{n-1}}{\sin \alpha\pi} = \int\limits_\varepsilon^r \frac{f(P+y\mathbf{e})y^{n-1-\alpha}}{(r-y)^{1-\alpha}}dy + \alpha \int\limits_\varepsilon^r (r-y)^{\alpha-1}dy \int\limits_0^{y-\varepsilon} \frac{f(P+y\mathbf{e})y^{n-1} - f(T)t^{n-1}}{(y-t)^{\alpha+1}}dt +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^\alpha} \int\limits_0^\varepsilon f(P+y\mathbf{e})(r-y)^{\alpha-1}y^{n-1}dy = I.$$

通过直接计算，我们得到

$$I = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \int\limits_0^r f(P+y\mathbf{e})(r-y)^{\alpha-1}y^{n-1}dy - \alpha \int\limits_\varepsilon^r (r-y)^{\alpha-1}dy \int\limits_0^{y-\varepsilon} \frac{f(T)}{(y-t)^{\alpha+1}}t^{n-1}dt. \tag{11}$$

对第二个积分作变量替换，得到

$$\alpha \int\limits_\varepsilon^r (r-y)^{\alpha-1}dy \int\limits_0^{y-\varepsilon} \frac{f(T)}{(y-t)^{\alpha+1}}t^{n-1}dt = \alpha \int\limits_0^{r-\varepsilon} (r-y-\varepsilon)^{\alpha-1}dy \int\limits_0^{y} \frac{f(T)}{(y+\varepsilon-t)^{\alpha+1}}t^{n-1}dt =$$

$$= \alpha \int\limits_0^{r-\varepsilon} f(T)t^{n-1}dt \int\limits_t^{r-\varepsilon} \frac{(r-y-\varepsilon)^{\alpha-1}}{(y+\varepsilon-t)^{\alpha+1}}dy = \alpha \int\limits_0^{r-\varepsilon} f(T)t^{n-1}dt \int\limits_{t+\varepsilon}^r (r-y)^{\alpha-1}(y-t)^{-\alpha-1}dy. \tag{12}$$

应用公式 (13.18) [53, p.184],我们得到

$$\int\limits_{t+\varepsilon}^r (r-y)^{\alpha-1}(y-t)^{-\alpha-1}dy = \frac{1}{\alpha\varepsilon^\alpha} \cdot \frac{(r-t-\varepsilon)^\alpha}{r-t}. \tag{13}$$

组合 ning relations (11),(12),(13),使用变量 $t = r - \varepsilon\tau$ 的变换，我们得到 g et

$$(\mathfrak{I}_{0+}^\alpha \varphi_\varepsilon^+ f)(Q) \cdot \frac{\pi r^{n-1}}{\sin \alpha\pi} = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \left\{ \int\limits_0^r f(P+y\mathbf{e})(r-y)^{\alpha-1}y^{n-1}dy - \int\limits_0^{r-\varepsilon} \frac{f(T)(r-t-\varepsilon)^\alpha}{r-t}t^{n-1}dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \int\limits_0^r \frac{f(T)\left[(r-t)^\alpha - (r-t-\varepsilon)_+^\alpha\right]}{r-t}t^{n-1}dt = \int\limits_0^{r/\varepsilon} \frac{\tau^\alpha - (\tau-1)_+^\alpha}{\tau} f(P+[r-\varepsilon\tau]\mathbf{e})(r-\varepsilon\tau)^{n-1}d\tau,$$

$$\tau_+ = \begin{cases} \tau,\ \tau \geq 0; \\ 0,\ \tau < 0\,. \end{cases} \tag{14}$$

考虑辅助函数 $\mathcal{K}$，其定义见论文 [53, 第105]页。

$$\mathcal{K}(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \cdot \frac{t_+^\alpha - (t-1)_+^\alpha}{t},\ \int\limits_0^\infty \mathcal{K}(t)dt = 1;\ \mathcal{K}(t) > 0. \tag{15}$$

结合（2）、（1 ¯5) 并考虑到 f 在 Ω 外具有零延拓，我们得到 n

$$(\mathfrak{I}_{0+}^\alpha \varphi_\varepsilon^+ f)(Q) - f(Q) = \int\limits_0^\infty \mathcal{K}(t) \left\{ f(P + [r - \varepsilon t]\mathbf{e})(1 - \varepsilon t/r)_+^{n-1} - f(P + r\mathbf{e}) \right\} dt. \tag{16}$$

考虑 $0 \leq r < \varepsilon.$ 的情况。考虑到 (4)，我们得到

$$(\mathfrak{I}_{0+}^\alpha \varphi_\varepsilon^+ f)(Q) - f(Q) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi\varepsilon^\alpha} \int\limits_0^r \frac{f(T)}{(r-t)^{1-\alpha}} \left(\frac{t}{r}\right)^{n-1} dt - f(Q) =$$

$$= \frac{\sin \alpha\pi}{\pi\varepsilon^\alpha} \int\limits_0^r \frac{f(P + [r-t]\mathbf{e})}{t^{1-\alpha}} \left(\frac{r-t}{r}\right)^{n-1} dt - f(Q). \tag{17}$$

考虑这些区域

$$\Omega_\varepsilon := \{Q \in \Omega,\, d(\mathbf{e}) \geq \varepsilon\},\ \tilde{\Omega}_\varepsilon = \Omega \setminus \Omega_\varepsilon. \tag{18}$$

按照这个定义，我们可以将曲面 ω 分为两部分 ω_ε 和 $\tilde{\omega}_\varepsilon$，其中 ω_ε是 ω 的子集，使得 $d(\mathbf{e}) \geq \varepsilon$，而 $\tilde{\omega}_\varepsilon$ 是 ω 的子集，使得 $d(\mathbf{e}) < \varepsilon.$ 利用(16)、(2)，我们得到

$$\|(\mathfrak{I}_{0+}^\alpha \varphi_\varepsilon^+ f) - f\|_{L_p(\Omega)}^p = \int\limits_{\omega_\varepsilon} d\chi \int\limits_\varepsilon^d \left| \int\limits_0^\infty \mathcal{K}(t)[f(Q - \varepsilon t\mathbf{e})(1 - \varepsilon t/r)_+^{n-1} - f(Q)]dt \right|^p r^{n-1}dr +$$

$$+ \int\limits_{\omega_\varepsilon} d\chi \int\limits_0^\varepsilon \left| \frac{\sin \alpha\pi}{\pi\varepsilon^\alpha} \int\limits_0^r \frac{f(P + [r-t]\mathbf{e})}{t^{1-\alpha}} \left(\frac{r-t}{r}\right)^{n-1} dt - f(Q) \right|^p r^{n-1}dr +$$

$$+ \int\limits_{\tilde{\omega}_\varepsilon} d\chi \int\limits_0^d \left| \frac{\sin \alpha\pi}{\pi\varepsilon^\alpha} \int\limits_0^r \frac{f(P + [r-t]\mathbf{e})}{t^{1-\alpha}} \left(\frac{r-t}{r}\right)^{n-1} dt - f(Q) \right|^p r^{n-1}dr = I_1 + I_2 + I_3. \tag{19}$$

考虑 I_1，利用广义闵可夫斯基不等式，我们得到

$$I_1^{\frac{1}{p}} \leq \int\limits_0^\infty \mathcal{K}(t) \left(\int\limits_{\omega_\varepsilon} d\chi \int\limits_\varepsilon^d |f(Q - \varepsilon t\mathbf{e})(1 - \varepsilon t/r)_+^{n-1} - f(Q)|^p r^{n-1}dr \right)^{\frac{1}{p}} dt.$$

让我们定义该函数

$$h(\varepsilon,t):=\mathcal{K}(t)\left(\int\limits_{\omega_\varepsilon}d\chi\int\limits_{\varepsilon}^{d}|f(Q-\varepsilon t\mathbf{e})(1-\varepsilon t/r)_+^{n-1}-f(Q)|^p r^{n-1}dr\right)^{\frac{1}{p}}dt.$$

容易验证，下列不等式成立

$$|h(\varepsilon,t)|\le 2\mathcal{K}(t)\|f\|_{L_p(\Omega)},\ \forall\varepsilon>0; \tag{20}$$

$$|h(\varepsilon,t)|\le\left(\int\limits_{\omega_\varepsilon}d\chi\int\limits_{\varepsilon}^{d}\left|(1-\varepsilon t/r)_+^{n-1}[f(Q-\varepsilon t\mathbf{e})-f(Q)]\right|^p r^{n-1}dr\right)^{\frac{1}{p}}dt+$$

$$+\left(\int\limits_{\omega_\varepsilon}d\chi\int\limits_{0}^{d}\left|f(Q)[1-(1-\varepsilon t/r)_+^{n-1}]\right|^p r^{n-1}dr\right)^{\frac{1}{p}}dt=I_{11}+I_{12}.$$

由于属于 $L_p(\Omega)$ 的函数具有平均连续性，我们有 $\forall t>0$： $I_{11}\to 0,\ \varepsilon\to 0$. 考虑 I_{12}，并定义函数

$$h_1(\varepsilon,t,r):=|f(Q)|\cdot\left|1-(1-\varepsilon t/r)_+^{n-1}\right|.$$

显然，下列关系在 Ω 中几乎处处成立

$$\forall t>0,\ h_1(\varepsilon,t,r)\le|f(Q)|,\ h_1(\varepsilon,t,r)\to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

应用勒贝格控制收敛定理，得到 $I_{12}\to 0,\ \varepsilon\to 0$. 这意味着

$$\forall t>0,\ \lim_{\varepsilon\to 0}h(\varepsilon,t)=0. \tag{21}$$

考虑到 (20)、(21)，并再次应用勒贝格控制收敛定理，得到

$$I_1\to 0,\ \ \varepsilon\to 0.$$

考虑 I_2，利用闵可夫斯基不等式，得到

$$I_2^{\frac{1}{p}}\le\frac{\sin\alpha\pi}{\pi\varepsilon^\alpha}\left(\int\limits_{\omega_\varepsilon}d\chi\int\limits_{0}^{\varepsilon}\left|\int\limits_{0}^{r}\frac{f(Q-t\mathbf{e})}{t^{1-\alpha}}\left(\frac{r-t}{r}\right)^{n-1}dt\right|^p r^{n-1}dr\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int\limits_{\omega_\varepsilon}d\chi\int\limits_{0}^{\varepsilon}|f(Q)|^p r^{n-1}dr\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=I_{21}+I_{22}.$$

应用广义闵可夫斯基不等式，我们得到

$$I_{21}\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}=\varepsilon^{-\alpha}\left(\int\limits_{\omega_\varepsilon}d\chi\int\limits_{0}^{\varepsilon}\left|\int\limits_{0}^{r}\frac{f(Q-t\mathbf{e})}{t^{1-\alpha}}\left(\frac{r-t}{r}\right)^{n-1}dt\right|^p r^{n-1}dr\right)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\leq \varepsilon^{-\alpha}\left\{\int\limits_{\omega_\varepsilon}\left[\int\limits_0^\varepsilon t^{\alpha-1}\left(\int\limits_t^\varepsilon |f(Q-t\mathbf{e})|^p\left(\frac{r-t}{r}\right)^{(p-1)(n-1)}(r-t)^{n-1}dr\right)^{\frac{1}{p}}dt\right]^p d\chi\right\}^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \varepsilon^{-\alpha}\left\{\int\limits_{\omega_\varepsilon}\left[\int\limits_0^\varepsilon t^{\alpha-1}\left(\int\limits_t^\varepsilon |f(P+[r-t]\mathbf{e})|^p\,(r-t)^{n-1}dr\right)^{\frac{1}{p}}dt\right]^p d\chi\right\}^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \varepsilon^{-\alpha}\left\{\int\limits_{\omega_\varepsilon}\left[\int\limits_0^\varepsilon t^{\alpha-1}\left(\int\limits_0^\varepsilon |f(P+r\mathbf{e})|^p r^{n-1}dr\right)^{\frac{1}{p}}dt\right]^p d\chi\right\}^{\frac{1}{p}} = \alpha^{-1}\|f\|_{L_p(\Delta_\varepsilon)},$$

其中 $\Delta_\varepsilon := \{Q \in \Omega_\varepsilon,\, r < \varepsilon\}$. 注意，混乱 $\Delta_\varepsilon \to 0,\, \varepsilon \to 0$，因此 $I_{21}, I_{22} \to 0,\, \varepsilon \to 0$. 由此可得 $I_2 \to 0,\, \varepsilon \to 0$. 同理，我们得到 $I_3 \to 0,\, \varepsilon \to 0$. 由于我们已证明$I_1, I_2, I_3 \to 0,\, \varepsilon \to 0$，因此关系式 (10) 成立。这就完成了与左侧情形相对应的证明。与右侧情形相对应的证明完全类似。□

以下定理在 [17] 中得到证明，确立了Kipriyanov算子的严格增生性（见 [8]），这使我们有机会确立该算子的数值域，后一个概念在谱理论中发挥着重要作用。用Lip λ, $0 < \lambda \leq 1$ 表示满足赫尔德-利普希茨条件的函数集合

$$\operatorname{Lip}\lambda := \left\{\rho(Q):\ |\rho(Q)-\rho(P)| \leq Mr^\lambda,\, P, Q \in \bar{\Omega}\right\}.$$

定理 3. 假设 $\rho(Q)$ 是实值非负函数，$\rho \in \operatorname{Lip}\lambda,\, \lambda > \alpha$；则下列不等式成立。

$$\operatorname{Re}(f, \mathfrak{D}^\alpha f)_{L_2(\Omega,\rho)} \geq C_{\alpha,\rho}\|f\|^2_{L_2(\Omega,\rho)},\ f \in H_0^1(\Omega), \tag{22}$$

其中

$$C_{\alpha,\rho} = \frac{1}{2\mathrm{d}^\alpha}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{(n-1)!}{\Gamma(n-\alpha)} - \frac{\alpha M \mathrm{d}^\lambda}{2\Gamma(1-\alpha)(\lambda-\alpha)\inf\rho}\right\}.$$

此外，如果我们还知道，对于每个固定方向 e，函数 ρ 单调不增，那么

$$C_{\alpha,\rho} = \frac{1}{2\mathrm{d}^\alpha}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{(n-1)!}{\Gamma(n-\alpha)}\right\}.$$

考虑一致椭圆算子的线性组合，该算子以散度形式表示；以及分数阶积分微分算子的复合，其中分数阶微分算子被理解为关于 Kipriyanov算子的伴随算子（见[12],[13],[19]）

$$L := -\mathcal{T} + \mathfrak{I}^\sigma_{0+}\rho\,\mathfrak{D}^\alpha_{d-},\ \sigma \in [0,1),$$
$$\mathrm{D}(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

其中 $\mathcal{T} := D_j(a^{ij}D_i\cdot)$ $i, j = 1, 2, ..., n$，在关于系数的以下假设下

$$a^{ij}(Q) \in C^2(\bar{\Omega}),\ \operatorname{Re}a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \gamma_a|\xi|^2,\ \gamma_a > 0,\ \operatorname{Im}a^{ij} = 0\ (n \geq 2),\ \rho \in L_\infty(\Omega). \tag{23}$$

注意，在一维情形中，算子 $\mathfrak{I}_{0+}^{\sigma}\rho\mathfrak{D}_{d-}^{\alpha}$ 简化为加权分数阶积分微分算子复合，许多研究者对此进行了深入研究（参见引言， [53,页175]）。

2. 半群模型

下面，我们探讨一种特殊算子类，可对其应用若干谱理论定理。随后，我们用 m-增生算子构造一个微分算子的抽象模型，并将其称为 m-增生算子变换；我们找到了保证该变换属于此类的条件。作为所得抽象结果的一项应用，我们研究了在 n 维欧几里得空间的有界区域上、以终端项表示的分数阶积分-微分算子复合微分算子。核心要点之一是建立了 m-增生算子的分数幂与最广义意义下的分数阶导数之间的关系。借助这种方法，我们用无穷小生成元表示分数阶导数，并在此背景下考察 Kipriyanov算子。

我们列出关于增生算子性质及相关问题的命题。为方便读者，我们希望从恰当的角度阐述算子理论中的一些著名事实。

引理 1. A　　假设 A 是一个闭稠定算子，满足以下条件　　s

$$\|(A+\lambda)^{-1}\|_{\mathrm{R}\to\mathfrak{H}} \le \frac{1}{\lambda},\ \lambda>0, \tag{24}$$

whe使用记号R:= R($A+\lambda$)。则算子 A, A^* 是 m-增生　　$e.$

根据 [31], 中给出的定义，我们可以如下定义正算子 A 的正分数幂和负分数幂

$$A^{\alpha} := \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^{\infty}\lambda^{\alpha-1}(\lambda+A)^{-1}A\,d\lambda;\ A^{-\alpha} := \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^{\infty}\lambda^{-\alpha}(\lambda+A)^{-1}\,d\lambda,\ \alpha\in(0,1). \tag{25}$$

该定义可以在 m-增生算子上得到正确的推广，相应的论证可见于 [8]。因此，下面我们通过公式(25)定义 m-增生算子的正分数幂和负分数幂。下面的引理反映了m-增生算子的分数幂所具有的性质，这为处理无穷小生成元提供了宝贵的技术手段。

引理　2. 假设 $\alpha\in$(0, 1)，算子 J 是 m-耗散的， J^{-1} 是有界的， the　　n

$$\|J^{-\alpha}f\|_{\mathfrak{H}} \le C_{1-\alpha}\|f\|_{\mathfrak{H}},\ C_{1-\alpha}=2(1-\alpha)^{-1}\|J^{-1}\|+\alpha^{-1},\ f\in\mathfrak{H}. \tag{26}$$

考虑一个作用于 $\mathfrak{H}$ 中的 m-增生算子 J 的变换

$$Z_{G,F}^{\alpha}(J) := J^*GJ + FJ^{\alpha},\ \alpha\in[0,1), \tag{27}$$

其中，符号 G、 F表示作用于 $\mathfrak{H}$. 的算子。此外，使用关系 $L = Z_{G,F}^{\alpha}(J)$ 意味着存在算子 L. 的适当表示。以下定理为我们提供了一种描述变换 (27) 的谱性质的工具。正如下文将展示的，该定理在分数阶微积分中有重要应用，因为它允许将分数阶微分算子表示为半群的无穷小生成元的变换。

定理4.假设算子 J 是m-耗散的， J^{-1} 是紧的， G 是有界的、严格耗散的，具有下界 $\gamma_G > C_\alpha \|J^{-1}\| \cdot \|F\|$, D(G) ⊃R(J) $F \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$，其中 C_α是常数(26)。那么$Z^{\alpha}_{G,F}(J)$满足条件H1 - H2。

考虑作用于 $L_2(\Omega)$ 上、沿某一方向的平移半群，其定义如下 $T_t f(Q) = f(Q + \mathbf{e}t)$，其中 $Q \in \Omega$ $Q = P + \mathbf{e}r$. 下面，我们给出 [23] 中引理的完整证明，向读者展示一些与平移半群相关的技巧。

引理3. 半群 T_t 是一个 C_0 收缩半群。

证明. 根据平均连续性，我们得出 T_t 是一个强连续半群。利用闵可夫斯基不等式，通过以下推理可以很容易地证明这一点:

$$\left\{\int\limits_{\Omega} |f(Q+\mathbf{e}t) - f(Q)|^2 dQ\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{\int\limits_{\Omega} |f(Q+\mathbf{e}t) - f_m(Q+\mathbf{e}t)|^2 dQ\right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left\{\int\limits_{\Omega} |f(Q) - f_m(Q)|^2 dQ\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int\limits_{\Omega} |f_m(Q) - f_m(Q+\mathbf{e}t)|^2 dQ\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 < \varepsilon,$$

其中 $f \in L_2(\Omega)$ $\{f_n\}_1^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$; 选择 m 使得 I_1, 选择 $I_2 < \varepsilon/3$ 使得 t $I_3 < \varepsilon/3$. 。因此，存在这样一个正数 t_0 ，使得

$$\|T_t f - f\|_{L_2} < \varepsilon,\, t < t_0,$$

对于任意小的 $\varepsilon > 0$. ，利用所有函数在 ¯Ω 外均作零延拓这一假设，可得 $\|T_t\| \leq 1$. 因此我们得出 T_t 是一个 C_0 收缩半群（见 [42]）。 □

以下定理在 [17]中以半群 T_t. 的无穷小生成元–A 的形式表述。它是将谱理论方法应用于抽象积分-微分构造的核心要点。

定理 5。我们声称 $L = Z^{\alpha}_{G,\ F}(A)$。此外，如果 γ_a 相对于 $\|\rho\|_{L_\infty}$足够大，那么 L 满足条件 H1-H2，其中令 $\mathfrak{M} := C_0^\infty(\Omega)$，如果我们还假设 ˜ $\rho \in \mathrm{Lip}\lambda$， $\lambda > \alpha$，那么 $\mathcal{H} = H$.

以下引理的意义相当重大，因为它确立了半群 T_t 的无穷小生成元 $-A$ 的一个非常有用的性质，利用这一性质，我们可以构造出与算子 A 相对应的希尔伯特空间，更不用说确立算子 A. 的核这一附带事实了。

˜引理 4. 我们断言 $A = A_0$、N(A) $= 0$，其中 A_0 是 A 在集合 $C_0^\infty(\Omega)$ 上的限制。

在下文中，我们研究由平移半群引出的广义构造。这些构造因其与多维情形相关的应用而可能同样值得关注；同时，它们本身也是非标准构造，展示了另一类.....

假设 H1、H2 成立。

3. 进一步推广

考虑一个线性空间 $\mathbb{L}_2^n(\Omega) := \{f = (f_1, f_2, ..., f_n) \ \ f_i \in L_2(\Omega)\}$，其内积为

$$(f,g)_{\mathbb{L}_2^n} = \int_\Omega (f,g)_{\mathbb{E}^n} dQ, \ f,g \in \mathbb{L}_2^n(\Omega).$$

显然，这一对构成一个希尔伯特空间，我们仍用相同的记号 $\mathbb{L}_2^n(\Omega)$ 表示它。考虑一个半双线性型

$$t(f,g) := \sum_{i=1}^n \int_\Omega (f, \mathbf{e_i})_{\mathbb{E}^n} \overline{(g, \mathbf{e_i})}_{\mathbb{E}^n} dQ, \ f,g \in \mathbb{L}_2^n(\Omega),$$

其中，$\mathbf{e_i}$ 对应于 $P_i \in \partial\Omega \ \ i = 1、2、...、\ n$（即 $Q = P_i + \mathbf{e_i} r$）。本段所述命题的证明见 [24]。

引理 5。点 $P_i \in \partial\Omega \ \ i = 1、2、...、\ n$ 可以选取为使形式 t 生成一个内积。

考虑配备内积的预希尔伯特空间 $\mathbf{L}_2^n(\Omega) := \{f: \ f \in \mathbb{L}_2^n(\Omega)\}$

$$(f,g)_{\mathbf{L}_2^n} := \sum_{i=1}^n \int_\Omega (f, \mathbf{e_i})_{\mathbb{E}^n} \overline{(g, \mathbf{e_i})}_{\mathbb{E}^n} dQ, \ f,g \in \mathbb{L}_2^n(\Omega),$$

其中，$\mathbf{e_i}$ 对应于 $P_i \in \partial\Omega \ \ i = 1、2、...、\ n$，满足以下条件。

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & ... & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & ... & P_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ P_{n1} & P_{n2} & ... & P_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

其中 $P_i = (P_{i1}, P_{i2}, ..., P_{in})$。以下定理建立了范数等价。

定理 6。范数 $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_2^n}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_2^n}$ 等价。

考虑一个预希尔伯特空间

$$\widetilde{\mathfrak{H}}_A^n := \left\{ f,g \in C_0^\infty(\Omega), \ (f,g)_{\widetilde{\mathfrak{H}}_A^n} = \sum_{i=1}^n (A_i f, A_i g)_{L_2} \right\},$$

其中，$-A_i$ 是与点 $P_i.$ 对应的无穷小生成元。这里，我们应指出，形式 $(\cdot,\cdot)_{\widetilde{\mathfrak{H}}_A^n}$ 生成一个内积，这是因为 $\mathbf{N}(A_i) = 0, i = 1, 2, ..., n$，这一点已在引理 4 中证明。我们用 $\mathfrak{H}_A^n.$ 表示相应的希尔伯特空间。

推论 1。范数 $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}_A^n}$ 和 $\|\cdot\|_{H_0^1}$ 等价，我们有一个有界紧嵌入

$$\mathfrak{H}_A^n \subset\subset L_2(\Omega).$$

下面，我们旨在将一个算子表示为沿某一方向的平移半群的无穷小生成元的形式，以便将结果 [22], [26], [30] 应用于所建立的表示。这样，我们便得到以沿某一方向的平移半群的无穷小生成元为条件的自然条件，从而得到以 [23] 表示的所需结果。以下定理使我们能够用半群理论来表达偏微分算子的构造（选取沿该方向的平移半群），这揭示了算子 $-\mathcal{T}.$ 的数学本质。

定理 7。我们断言

$$-\mathcal{T}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}A_i^*G_iA_i, \tag{28}$$

以下关系成立

$$-\mathrm{Re}(\mathcal{T}f,f)_{L_2}\geq C\|f\|_{\mathfrak{H}_A^n};\ |(\mathcal{T}f,g)_{L_2}|\leq C\|f\|_{\mathfrak{H}_A^n}\|g\|_{\mathfrak{H}_A^n},\ f,g\in C_0^\infty(\Omega),$$

其中， G_i 是与算子 A_i.相对应的某些算子

因此，根据推论 1 和定理 7，我们可以断言，对于算子 $-\mathcal{T}.$ ，假设 H1、H2[23] 成立。给出反映算子 $-\mathcal{T}$与其由 Kipriyanov算子产生的扰动之间联系的定理 5 的类似形式是相当合理的。

定理 8。我们断言

$$L=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}A_i^*G_iA_i+FA_1^\alpha, \tag{29}$$

其中， F 是有界算子， $P_1:=P$，而 G_i 与定理 7 中的相同。此外，如果 γ_a 相对于 $\|\rho\|_{L_\infty}$足够大，则以下关系成立

$$\mathrm{Re}(Lf,f)_{L_2}\geq C\|f\|_{\mathfrak{H}_A^n};\ |(Lf,g)_{L_2}|\leq C\|f\|_{\mathfrak{H}_A^n}\|g\|_{\mathfrak{H}_A^n},\ f,g\in C_0^\infty(\Omega).$$

定理揭示了一个非凡的事实：扰动保留了属于满足假设H1,H2的类这一性质，这使得受扰算子本身从理论角度来看颇为有趣，更不用说由便利性决定的潜在应用，以及从技术角度处理多维空间中所构造的算子。

3 积分-微分构造

1. 阿贝尔-利茨基根向量级数展开

在本节中，我们提出一个在理论和应用方面都很有价值的定理。该定理基于对利茨基方法的改进，因此，遵循经典做法，我们将其分为三个可分别陈述的命题。第一个命题（定理 3[30]）阐明了级数收敛的性质，这在整个概念中具有核心意义。第二个命题（定理 3 [30]）体现了“阿贝尔-利茨基收敛”这一名称，因为它与阿贝尔意义下的级数收敛定义有关。更详细的信息可参见 Hardy G.H. 的专著 [7]。第三个命题

（定理 4 [30]）是第一个命题的一项重要应用，它基于作者注意到的恰当代数推理，使得可以在第一项中引入分数阶导数。应当指出，第二项中表示的算子函数概念此前已在论文 [27], 中实现；该文考虑了这样一种情形：函数由具有多项式正则部分的 Laurent级数表示。下面，我们将考虑一种相对更复杂的情形，它显然与 Laurent级数的无限正则部分有关，因此需要采用一种本质上不同的研究方法。

众所周知，紧算子 B 的每个特征值 μ_q, $q \in \mathbb{N}$ 都会生成一组约当链，其中包含特征向量和根向量。用 $m(q)$ 表示相应特征值的几何重数，并考虑与特征向量 e_{q_ξ}, $\xi = 1, 2, ..., m(q)$ 相应的一条约当链，我们有

$$e_{q_\xi}, e_{q_\xi+1}, ..., e_{q_\xi+k(q_\xi)}, \tag{30}$$

其中 $k(q_\xi)$ 表示约当链中元素的个数，除第一个符号外，其余符号均表示算子 $B.$ 的根向量。注意，将与某个特征值相应的约当链合并后，我们便在该特征值生成的不变子空间中得到一组约当基；此外，还可以为由合并后的约当链构成的算子 B 安排一个所谓的主向量系 $\{e_i\}_1^\infty$（见 [33]）。值得注意的是，算子 B^* 的特征值 $\bar{\mu}_q$ 会生成与 (30) 式相应的算子 B^* 的约当链。根据 [26]，我们有

$$g_{q_\xi+k(q_\xi)},\ g_{q_\xi+k(q_\xi)-1}, ..., g_{q_\xi},$$

其中，除第一个符号外，其余符号表示算子 $B^*.$ 的根向量。结合算子 B^*的若尔当链，我们可以构造一个关于算子 $B.$ 的主向量系的双正交系统 $\{g_n\}_1^\infty$。这一事实在论文 [26] 中有详细介绍。以下构造在论文 [26],[27],[28] 所创建的理论中发挥着重要作用，因此值得单独考察，记为

$$\mathcal{A}_\nu(\varphi, t)f := \sum_{q=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}} \sum_{\xi=1}^{m(q)} \sum_{i=0}^{k(q_\xi)} e_{q_\xi+i} c_{q_\xi+i}(t), \tag{31}$$

其中 $\{N_\nu\}_1^\infty$ 是一个自然数序列，

$$c_{q_\xi+i}(t) = e^{-\varphi(\lambda_q)t} \sum_{j=0}^{k(q_\xi)-i} H_j(\varphi, \lambda_q, t) c_{q_\xi+i+j},\ i = 0, 1, 2, ..., k(q_\xi), \tag{32}$$

$c_{q_\xi+i} = (f, g_{q_\xi+k-i})/(e_{q_\xi+i}, g_{q_\xi+k-i})$ $\lambda_q = 1/\mu_q$ 是与e_{q_ξ}相对应的特征数 ,

$$H_j(\varphi, z, t) := \frac{e^{\varphi(z)t}}{j!} \cdot \lim_{\zeta \to 1/z} \frac{d^j}{d\zeta^j} \left\{ e^{-\varphi(\zeta^{-1})t} \right\},\ j = 0, 1, 2, ... , .$$

有关上述 Jordan 链的更详细信息，可参见 [26]。

2. 分解定理

用 $\mathfrak{H}$ 表示抽象可分希尔伯特空间，并假设在 $\mathfrak{H}.$ 中作用的算子 W 满足假设 H1、H2。需要指出的是，选择这一算子类，既是因为它在理论上具有抽象意义，关系到非自伴算子的谱性质，也因为它有具体应用，包括涉及 Kipriyanov算子的应用。记

$$\varphi(W) := \sum_{n=l}^{k} c_n W^n, \ \ -\infty \leq l, k \leq \infty \tag{33}$$

一种称为算子函数的形式构造，其中 c_n 是对应于复变量 $\varphi.$ 的函数的系数。这里，我们应当作一番文献回顾，并提醒读者， $l = -\infty$、 $k < \infty$ 的情形已在 [28] 中讨论过。在这种情形下，假设复函数φ 可以在零点处展开为 Laurent级数，其系数 c_n 满足附加假设

$$\max_{n=0,1,\ldots,k}(|\arg c_n| + n\theta) < \pi/2, \tag{34}$$

其中 θ 是包含算子$W.$ 的数值域的扇形的半角。需要指出的是，与表示式（33）相关的问题可分为两部分： $l \geq -\infty$和 $k = 0$ ， 以及 $l = 0$和 $k \leq \infty$。因此，第一部分已在 [28], 中得到恰当研究；第二部分则在 [30], 中，在以下假设下进行了研究（这里给出一个技术性版本，扩展版本见 [30]）： 阶小于二分之一的复函数 φ 将射线 arg $z = \theta_0$映射到扇形 $\mathfrak{L}_0$（ζ） $0 < \zeta < \pi/2$ 内，条件成立。

$$\mathrm{Re}\varphi(z) > Ce^{H(\theta_0)r^\varrho}, \arg z = \theta_0, \tag{35}$$

其中，根据引理 1 [30]， $H(\theta_0)$是一个正数。鉴于上述内容，我们可以考虑这样一个函数：它由 Laurent级数表示，其主部任意，而其正则部分分别在有限情形和无限情形下满足(34)、(35)。该陈述可通过重复引理 5 [28], 中的论证予以证明，因此证明留给读者。

下面，我们考虑一个由元素函数 u 组成的希尔伯特空间： $\mathbb{R}_+ \to \mathfrak{H}$， $u: = u(t)$ $t \geq 0$。我们以广义意义理解微分和积分运算，即导数被定义为范数意义下的极限，等等（见 [26], [31]）。将这些运算结合起来，我们可以在黎曼-刘维尔意义下定义广义分数阶导数（见[27],[53]）；其形式表达式为

$$\mathfrak{D}_-^{1/\alpha} f(t) := -\frac{1}{\Gamma(1-1/\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^\infty f(t+x) x^{-1/\alpha} dx, \ \alpha \geq 1,$$

这里应注意，根据算子的定义（见 [53]），事实 $\mathfrak{D}_-^1 f(t) = -du/dt$、 $\mathfrak{D}_-^0 f(t) = f(t)$可以得到。根据表达式(33)，考虑一个柯西问题

$$\mathfrak{D}_-^{1/\alpha} u = \varphi(W)u, \ u(0) = f \in \mathrm{D}(W^n), \ n = 1, 2, \ldots k. \tag{36}$$

综上所述，结合结果 [28], [30], ，我们可以表述如下定理。

定理9. 假设条件(34)、(35)分别适用于级数(33)的有限正则部分和无限正则部分所对应的情形，则柯西问题(36)存在如下形式的解

$$u(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\mathcal{A}_{\nu}(\varphi^{\alpha},t)f,\ \sum_{\nu=0}^{\infty}\|\mathcal{A}_{\nu}(\varphi^{\alpha},t)f\|<\infty. \tag{37}$$

此外，如果算子 $\mathfrak{D}_{-}^{1-1/\alpha}\varphi(W)$ 是增生的，则现有的解是唯一的。

证明。为避免任何重复，我们不按照调用引理 5、定理 1 [28], 引理3、定理 4 [30] 的方案列出包含受限推理的完整证明。因此，详细计算留给读者。

□

进一步地，考虑一个算子函数，我们将假设条件 (34)、(35) 分别适用于该情形。现在考虑变换 (27)

$$Z_{G,F}^{\alpha}(J)=J^{*}GJ+FJ^{\alpha},\ \alpha\in[0,1),$$

假设定理 6 的条件成立，我们可以考虑一个涉及变换的柯西问题，该变换表示广义意义下的积分-微分构造。后一个问题涉及大量具体的演化方程，它们构成现代工程科学的基础。那么，让我们来思考变换生成元中的一个杰出代表——方向导数，其分数幂即为 Kipriyanov算子。考虑一个柯西问题。

$$\mathfrak{D}_{-}^{1/\alpha}u=\sum_{n=l}^{k}c_{n}L^{n}u,\ u(0)=f\in C_{0}^{\infty}(\Omega),\ n=1,2,...k, \tag{38}$$

这里我们讨论的是如下积分-微分构造，其系数足够光滑，并满足条件（23）

$$L:=-\mathcal{T}\ +\mathfrak{I}_{0+}^{\sigma}\rho\,\mathfrak{D}_{d-}^{\gamma},\ \sigma,\gamma\in[0,1).$$

因此，我们很容易看出， $\sigma=0,\gamma=0,-\infty<l,k<\infty$ 这一情形对应于整数阶积分-微分方程类，而所得结果为我们提供了解相应柯西问题（38）的方法。当然，我们可以考虑定义在集合 $C_{0}^{\infty}(\Omega)$上的算子函数的闭包；在 [29]中已证明该算子函数存在闭包。对于值域内 σ,γ 取任意值的情形，则需要采用更为特殊的技巧，这在第3.1 [27]段中已有讨论。不过，定理9对于求解第二项含有积分-微分算子的演化方程具有重要意义，更不用说与其Laurent级数的主部或正则部为无穷项的算子函数相对应的深远推广了。

4 结论

在这篇论文中，介绍了有关 Kipriyanov I.A. 成就的历史综述，并全面探讨了其独创构建的分数阶微积分理论。我们从方法和手段的角度进行了比较分析，以探讨未来的发展前景。

分数阶导数作为一种概念的推广。与 KipriyanovI.A. 创立的独特方法相反，Kipriyanov分数阶微分算子的定性性质是采用经典分数阶微积分理论的方法研究的。我们以Marchaud意义下分数阶微分算子的多维推广概念为基础，改编了此前已知的、与单变量分数阶微积分理论相关的证明技术。除了Kipriyanov I.A. 引入的此前已知的分数阶导数定义外，我们还使用了一种新的沿某一方向的多维分数阶积分定义，从而能够描述Kipriyanov 伴随算子的值域。我们讨论了若干在单变量分数阶微积分理论中具有类似形式、且此前已由作者证明的命题。特别是，我们考察了经典结果——可表示为沿该方向的分数阶方向积分的充分条件。Kipriyanov算子的严格增生性是作者的一项杰出成果，我们对此进行了考察。在上述技术的基础上，我们发展了非自伴算子的半群理论和谱理论的方法，这使我们能够将其应用于希尔伯特空间中的抽象演化方程。后者使我们有机会解决一整类与实数阶积分-微分方程相关的问题，其中，与Kipriyanov算子相联系的半群所对应的问题得到了适当研究。

参考文献

[1] Agranovich M.S. 关于具有对称主部的形式所关联算子的根向量级数。《泛函分析及其应用》，28（1994年），151–167。[2] Agranovich M.S.Lipshitz 映射域中的谱问题。《现代数学：基础方向》，39（2011年），11–35。[3] Dimovski I.H., Kiryakova V.S. 通过 Maijer G 函数研究贝塞尔型算子的变换算子、卷积和分数幂。《复分析与应用》会议论文集，瓦尔纳，1983年（1985年），45–66。[4] Erdelyi A. 广义函数的分数阶积分。J. Austral. Math. Soc.，14，第1期（1972年），30–37。[5] Gohberg I.C., Krein M.G. 希尔伯特空间中线性非自伴算子理论导论。莫斯科：Nauka，Fizmatlit，1965年。[6] Hardy G.H., Littlewood J.E. 分数阶积分的若干性质 I。《数学杂志》，27，第1期（1928年），565–606。[7] Hardy G.H. 发散级数。牛津大学出版社，Ely House，伦敦 W.，1949年。
[8] Kato T. 线性算子的扰动理论。施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约，1980年。
[9] Katsnelson V.E. 某些类别算子的特征向量系构成基的条件。《泛函分析及其应用》，1，第2期（1967年），122–132。

[10] Karapetyants N.K., Rubin B.S. 带权空间中的分数阶积分算子。（俄文）。亚美尼亚苏维埃社会主义共和国科学院学报，数学系列，19，第1期（1984年），31–43。

[11] Karapetyants N.K., Rubin B.S. 径向Riesz势在圆盘上的分数阶积分算子。《苏联科学院报告》，25，第2期（1982年），522–525。

[12] Kipriyanov I.A. 关于分数阶可微函数空间。《苏联科学院院刊》24（1960年），665–882。

[13] Kipriyanov I.A. 分数阶微分算子与椭圆算子的幂。苏联科学院院刊，131（1960年），238–241。

[14] Kipriyanov I.A. 关于方向上的分数阶导数的某些性质。大学学报：《数学》，苏联，第2期（1960年），32–40。

[15] Kipriyanov I.A. 关于分数阶可微函数空间中算子的紧嵌入。《俄罗斯数学调查》，17（1962），183–189。

[16] Kukushkin M.V. 关于 Kipriyanov 分数阶微分算子若干性质的研究。萨马拉大学学报（自然科学系列，数学），23，第2期（2017），32–43。

[17] Kukushkin M.V. 分数阶微分算子的谱性质。《微分方程电子期刊》，2018，第29期（2018），1–24。

[18] Kukushkin M.V. 通过 Jacobi级数展开研究加权 L_p 空间中的黎曼-刘维尔算子。《Axioms》，8，第2期：75（2019），1–23；https://doi.org/10.3390/axioms8020075。

[19] Kukushkin M.V. 分数阶微分算子的特征值渐近性质。《分数阶微积分与应用分析》，22，第3期（2019），658–681，arXiv:1804.10840v2 [math.FA]；DOI:10.1515/fca-2019-0037；网址：https://www.degruyter.com/view/j/fca。

[20] Kukushkin M.V. 关于Zigmund-Marczinkevich定理的一个应用。《数学札记》Nefu，27，第3期（2020），39–51；DOI：10.25587/SVFU.2020.31.27.004。

[21] Kukushkin M.V. 关于根据雅可比级数系数判断阿贝尔方程的解的光滑性。Axioms，9，第3期：81（2020），1–13；https://doi.org/10.3390/axioms9030081。

[22] Kukushkin M.V. 关于研究非自伴算子谱性质的一种方法。Abstract and Applied Analysis；Hindawi：英国伦敦，2020年（2020年）；网址：https://doi.org/10.1155/2020/1461647。[23] Kukushkin M.V.m-增生算子的抽象分数阶微积分。International Journal of Applied Mathematics，34，期号：1（2021年），DOI：10.12732/ijam.v34i1.1[24] Kukushkin M.V. 关于勒贝格空间上特殊范数等价性的注记。Axioms（2021年），10，64；网址：https://doi.org/10.3390/ axioms10020064。

[25] Kukushkin M.V. 加权勒贝格空间中索宁-阿贝尔方程的可解性。Fractal Fract.（2021年）5，77；网址：https://doi.org/10.3390/fractalfract 5030077。[26] Kukushkin M.V. 收敛指数为 Schatten-冯·诺依曼类的自然间隙法。Mathematics，10，13，2237（2022年）；https://doi.org/10.3390/math10132237。[27] Kukushkin M.V.通过间隙法研究希尔伯特空间中的演化方程。Fractal Fract.，6，（5），229（2022年）；https://doi.org/10.3390/fractalfract6050229。[28] Kukushkin M.V. 第二项含算子函数的抽象演化方程。Axioms，11，434（2022年）；网址：https://doi.org/10.3390/axioms 11090434。[29] Kukushkin M.V.关于无界非自伴算子谱定理的注记。Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.，139，2（2022年），44–63。DOI：10.26117/2079- 6641-2022-39-2-44-63。[30] Kukushkin M.V.分数阶抽象演化方程的柯西问题。Fractal Fract.，7，111（2023年）；网址：https://doi.org/10.3390/fractalfract7020111。
[31] Krasnoselskii M.A., Zabreiko P.P., Pustylnik E.I., Sobolevskii P.E.可积函数空间中的积分算子。莫斯科：Science，FIZMATLIT，1966年。[32] Krein M.G.耗散算子根向量系完备性的判据。Amer. Math. Soc. Transl. Ser.，Amer. Math. Soc.，罗得岛州普罗维登斯，26，No.2（1963年），221–229。[33] Lidskii V.B. 非自伴算子主向量级数的可和性。Tr. Mosk. Mat. Obs.，11（1962年），3–35。[34] Love E.R. 分数阶积分与导数的两条指标律。J. Austral. Math. Soc.，14，No.4（1972年），385–410。[35] Markus A.S.，Matsaev V.I. 由半双线性型生成的算子及其谱渐近。Linear operators and integral equations，Mat. Issled.，Stiintsa，基希讷乌，61（1981年），86–103。
[36] Markus A.S. 略受扰动的自伴算子的根向量展开。Soviet Math. Dokl.，3（1962年），104–108。[37] Mamchuev M.O. 通过格林函数法求解时间分数阶电报方程的主要边值问题。Fractional Calculus and Applied Analysis，20，No.1（2017年），190–211，DOI：10.1515/fca-2017-0010。[38] Mamchuev M.O. 含卡普托导数的时间分数阶电报方程边值问题。Mathematical Modelling of Natural Phenomena。特殊函数与偏微分方程分析，12，No.3（2017年），82–94，DOI：10.1051/mmnp/201712303。[39] McBride A. 关于分数阶微积分指标律的注记。J. Austral. Math. Soc.，34，No.3（1983年），356–363。
[40] Motovilov A.K., Shkalikov A.A. 自伴算子的非自伴扰动下无条件基性质的保持。Funktsional. Anal. i Prilozhen.，53，期号3（2019年），45–60（Mi faa3632）。

[41] Nakhushev A.M. 分数阶微积分及其应用。莫斯科：Fizmatlit，2003年。[42] Pazy A. 线性算子半群及其在偏微分方程中的应用。柏林-海德堡-纽约-东京，施普林格出版社（应用数学科学，第44卷），1983年。[43] Prabhakar T.R. 涉及合流超几何函数的两个奇异积分方程。剑桥哲学学会学报，66，第1期（1969年），71–89。[44]Pskhu A.V. 分数阶扩散波动方程的基本解。《消息报：数学》，73，第2期（2009年），351–392。
[45] Rozenblyum G.V., Solomyak M.Z., Shubin M.A. 微分算子的谱理论。《科学与技术成果》。《数学中的现代问题》系列。《基础方向》，64（1989年），5–242。
[46] Rubin B.S. 直线轮廓上的分数阶积分空间。亚美尼亚苏维埃社会主义共和国科学院学报，数学辑，7，第5期（1972年），373–386（俄文）。[47] Rubin B.S. 线段上的势型算子。高等学校数学学报，第6期（1973年），73–81（俄文）。[48] Rubin B.S. H¨older空间中的分数阶积分及势型算子。亚美尼亚苏维埃社会主义共和国科学院学报，数学辑，9，第4期（1974年），308–324（俄文）。[49] Rubin B.S. 有限线段上卷积算子像的嵌入定理及势型算子I。高等学校数学学报，34，第1期（1982年），53–63（俄文）。[50] Rubin B.S. 径向函数的黎斯势的一维表示、反演及某些性质。《数学札记》，34，第4期（1983年），521–533。[51] Rubin B.S. 幂权空间中具有径向密度的分数阶积分与黎斯势。亚美尼亚苏维埃社会主义共和国科学院学报，数学辑，21，第5期（1986年），488–503（俄文）。
[52] Samko S.G., Murdaev Kh.M. 分数阶微分与积分的加权齐格蒙德估计及其应用。斯捷克洛夫数学研究所学报，180（1989年），233–235。[53] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. 分数阶积分与导数：理论与应用。Gordonand Breach科学出版社：美国宾夕法尼亚州费城，1993年。[54] Samko S.G., Vakulov B.G. 单位球面上连续函数的分数阶函数空间中的等价范数。《分数阶微积分与应用分析》，4，第3期（2000年），401–433。
[55] Samko S.G. 索宁型第一类积分方程。《国际数学与数学科学杂志》；Hindawi：英国伦敦，（2003年）；https://doi.org/10.1155/S0161171203211455。[56] Shkalikov A.A. 具有离散谱的自伴算子与正规算子的扰动。《俄罗斯数学调查》，71，第5期（第431期）（2016年），113–174。

[57] Sonine N. 论阿贝尔公式的推广。《数学学报》，4（1884），171–176。

[58] Vaculov B.G., Samko N. 具有可变特征的广义 Hölder 空间中的可变阶球面分数阶积分和超奇异积分。Math. Nachr., 284, (2-3) (2011年), 355–369.