arXiv:2304.03478v1 [math.DG] 7 Apr 2023

闵可夫斯基空间中的类空子流形上的索博列夫不等式

LIANG XU

Abstract. 我们遵循 [Bre21] 中 ABP估计的方法，并将其应用于 $\mathbb{R}^n$中的类空子流形 1。随后我们得到迈克尔-西蒙型不等式。令人惊讶的是，我们的研究导出了一个不含平均曲率项的索об列夫不等式，前提是该超曲面为平均凸。

1. Introduction

本文主要研究闵可夫斯基空间中类空子流形的一类特定索博列夫不等式。对于一个类空子流形$\Sigma^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{n,\ 1}$，我们定义最大斜率如下：

$$\tau(\Sigma) = \sup\{|\nu_0(x)| : x \in \Sigma, \nu(x) \text{ is a unit normal to } \Sigma \text{ at } x\}.$$

详见定义2.1 。主要结果如下。

定理 1.1。 设 $\Sigma^n \subseteq \mathbb{R}^{n,\ 1}$ 是一个光滑、紧致的类空超曲面。假设 Σ 是平均凸的，且 f 是定义在 Σ上的任意光滑正函数。那么

$$\int_\Sigma |\nabla f| + \int_{\partial\Sigma} f \geq C_{n,\tau} \left(\int_\Sigma f^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}}, \tag{1.1}$$

其中常数$C_{n,\ \tau} = n\omega_n^{\frac{1}{n}}(n+1)^{=\frac{1}{n}}\tau^{-\frac{1}{n}}(\tau + \sqrt{\tau^2 - 1})^{-1}$。

在平均凸性的条件下，不涉及平均曲率项，据我们所知，这是新的结果；在不作平均凸性假设的情况下，类似结果仍然成立，但会涉及一个曲率项。

定理 1.2。 设 $\Sigma^n \subseteq \mathbb{R}^{n,1}$ 是一个光滑、紧致且类空的超曲面。假设 f 是定义在 Σ 上的任意光滑正函数。那么

$$\int_\Sigma \sqrt{|\nabla f|^2 + f^2\|H\|^2} + \int_{\partial\Sigma} f \geq C_{n,\tau}\left(\int_\Sigma f^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}, \tag{1.2}$$

与 $C_{n,\tau} = 2^{-1}n\omega_n^{\frac{1}{n}}(n+1)^{-\frac{1}{n}}\tau^{-\frac{1}{n}}(\tau+\sqrt{\tau^2-1})^{-1}$。

这里 $\|H\|^2 = -|H|^2 \geq 0$；详见第2节。接下来，我们为高余维子流形 $\Sigma^m \subseteq \mathbb{R}^{n,1}$ $n-m+1$建立相同的索об列夫不等式，其中 $0 < m < n$。设 ν 是 Σ的一个法向量场，且满足 $|\nu|^2 = -1$。于是可写成 $T_x^\perp\Sigma = T^{\perp,1}_x\Sigma \oplus T^{\perp,2}_x\Sigma$，其中 $T^{\perp,2}_x\Sigma = \mathrm{Span}\{\nu(x)\}$。相应地，平均曲率向量可分解为 $H^{\perp,1} + H^{\perp,2}$。

定理 1.3。 设 $\Sigma^m \subseteq \mathbb{R}^{n,1}$ 是一个光滑、紧致且类空的子流形。令 ν 为 Σ 的任意法向量场，满足 $|\nu|^2 = -1$，且 f 为定义在 Σ上的任意光滑正函数。那么

$$\int_\Sigma \sqrt{|\nabla f|^2 + f^2(|H^{\perp,1}|^2 + \|H^{\perp,2}\|^2)} + \int_{\partial\Sigma} f \geq C_{n,m,\tau}\left(\int_\Sigma f^{\frac{m}{m-1}}\right)^{\frac{m-1}{m}}, \tag{1.3}$$

其中常数为 $C_{n,m,\tau} = m2^{-\frac{n}{m}}(n+1)^{-\frac{1}{m}}\omega_n^{\frac{1}{m}}\tau^{-\frac{1}{m}}(\tau+\sqrt{\tau^2-1})^{-\frac{n}{m}}$。

在本工作结束时，我们发现，在 [TW22]中也建立了类似的结果。然而，与其中的结果相比，我们的构造为平均凸超曲面给出了一个不含曲率项的 Sobolev不等式。几何不等式的历史可能可以追溯到古希腊。经典的等周不等式断言，对于一个 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ 边界足够良好的区域，有

$$|\partial\Sigma| \geq n\omega_n^{\frac{1}{n}}|\Sigma|^{\frac{n-1}{n}}. \tag{1.4}$$

众所周知，这样的等周不等式本质上等价于 $W^{1,1}$索об列夫不等式，适用于欧几里得空间中的定义域：

$$\int_\Sigma |\nabla f| + \int_{\partial\Sigma} f \geq n\omega_n^{\frac{1}{n}}\left(\int_\Sigma f^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}. \tag{1.5}$$

人们已开展大量工作，试图将公式（1.4）或公式（1.5）推广到更一般的情形。长期以来，人们一直猜想，同一个不等式公式（1.4）在卡当–哈达玛流形 [Aub76]中成立。部分结果包括 [Wei26；BR33；Cro84；Kle92]。另请参见 [GS21] ，其中给出了近期解决这一猜想的一种尝试。还可以将公式（1.4）中的面积和体积替换为更一般的拟曲率积分。对于具有某种凸性的欧几里得空间中的超曲面，所得的等周不等式已得到证明。详情请参见 [Gua] 。

对于常曲率为 K 的二维空间形式中的区域 Σ ，有一个简洁的结果指出：

$$4\pi|\Sigma| \leq |\partial\Sigma|^2 + K|\Sigma|^2. \tag{1.6}$$

请参见 [Cho05] 及其中的参考文献。Choe 和 Gulliver 证明了同一个不等式（式（1.6））适用于具有某些拓扑约束的双曲空间中的极小曲面 [CG92b] 。Yau Σ^2 Yau $\mathbb{H}^n$Choe 和 Gulliver [CG92a75], 证明，若 [是] 中的一个区域，或是其中一个 Σ 维极小子流形， $\mathbb{H}^n$ 则它满足线性等周不等式

$$(n-1)|\Sigma| \leq |\partial\Sigma|.$$

利用庞加莱模型，在 $\mathbb{H}^n$ 中得到了真极小子流形的另一个线性不等式[MS14]。´

长期以来，人们一直猜想式（1.4）对 $\mathbb{R}^{n+1}$中的极小超曲面成立。Brendle 运用滑动法，在近期的一项工作中彻底解决了这一问题[Bre21], ，随后又将结果推广到里奇曲率非负的黎曼流形 [Bre20]。滑动法最经典的应用或许是亚历山德罗夫最大值原理。在 [Cab08]Cabr´e 首次运用滑动法，并对式（1.4）给出了简洁而优雅的证明。

我们沿用 Brendle 的方法，并将其应用于闵可夫斯基空间中的子流形，从而得到一些 Michael-Simon-Sobolev 型不等式。

致谢。 作者谨向研究教授李启瑞表示感谢，感谢他的指导以及许多富有帮助的讨论。

2. Notations and Preliminaries

设 $\mathbb{R}^{n,\,1}$ 为配备度量的闵可夫斯基空间

$$\bar{g} = -dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2.$$

$\mathbb{R}^{n+1}$ 的通常欧几里得度量记为 δ。 $\mathbb{R}^{n,1}$,$d\mu_{\bar{g}} = \sqrt{-\det\ \bar{g}}dX$的体积元就是通常的勒贝格测度。若向量 Y满足$|Y|^2 = \sigma(Y)$，则称其为单位向量，其中 $\sigma(Y)$是 Y的符号，即当 X 分别为类空、类时、类光时， $\sigma(X) = 1, -1,0$。最后，我们定义 $\|Y\| = \sqrt{\sigma(Y)}|Y|^2$。

设$(\Sigma^n, g) \hookrightarrow (\mathbb{R}^{n,1}, \bar{g})$为一个类空超曲面。我们用 x 表示 Σ中的一点，用 $X(x)$表示其在 $\mathbb{R}^{n,1}$中的对应位置向量。带有“上划线”的量均属于环境空间。于是第二基本形式定义为

$$\bar{\nabla}_Y Z = \nabla_Y Z - h(Y, Z), \quad \forall Y, Z \in \mathscr{X}(\Sigma).$$

令 $\nu(x)$ 为点 x 处 Σ 的一个法向量。显然， $\nu(x)$ 也是 $\mathbb{R}^{n,1}$ 中的一个向量。记 $\nu_\alpha(x)$ 为 $\nu(x)$ 在 $\mathbb{R}^{n,1}$ 中的第 α 个坐标，则

$$|\nu|^2 = -\nu_0^2 + \nu_1^2 + \cdots + \nu_n^2.$$

定义2.1. 对于类空子流形 $\Sigma^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{n,1}$，最大斜率定义为 $\tau(\Sigma) = \sup\{|\nu_0(x)| : x \in \Sigma, \nu(x) \in T_x^\perp\Sigma, |\nu(x)|^2 = -1\}$.

量 τ 刻画了 Σ 的“类光”程度；例如，若 $\Sigma^n \Subset \mathbb{R}^n$，则 $\tau = 1$；若 $\Sigma^n \Subset \mathbb{H}^n$，则直径唯一确定 τ。

引理 2.2. 对于环境空间上的任意函数 w， $\nabla^2 w = \bar{\nabla}^2 w - \langle h, \bar{\nabla} w\rangle_{\bar{g}}$。

证明。 我们假设 $T_x\mathbb{R}^{n,\,1}$ 由正交归一基 $\{\varepsilon_\alpha : 0 \le \alpha \le n\}$ 张成，而 $T_x\Sigma$ 由 $\{\varepsilon_i : 1 \le i \le n\}$ 张成，其中 $|\varepsilon_i|^2 = 1$， $|\varepsilon_0|^2 = -1$。于是我们计算

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}^2_{ij} w &= \partial^2_{ij} w - \langle \bar{\nabla}_{\varepsilon_i}\varepsilon_j, \bar{\nabla} w\rangle \\
&= \partial^2_{ij} w - \langle \bar{\Gamma}^k_{ij}\varepsilon_k + \bar{\Gamma}^2_{ij}\varepsilon_0, w^\ell\varepsilon_\ell + w^0\varepsilon_0\rangle \\
&= \partial^2_{ij} w - \bar{\Gamma}^k_{ij}\partial_k w + \bar{\Gamma}^0_{ij}\partial_0 w.
\end{aligned}$$

由高斯公式 $\bar{\nabla}_{\varepsilon_i}\varepsilon_j = \nabla_{\varepsilon_i}\varepsilon_j - h_{ij}\varepsilon_0$ 可知，$\bar{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}$ 且 $\bar{\Gamma}^0_{ij} = -h_{ij}$。因此

$$\bar{\nabla}^2_{ij} w = \nabla^2_{ij} w - h_{ij}\partial_0 w = \nabla^2_{ij} w + \langle h(\varepsilon_i, \varepsilon_j), \bar{\nabla} w\rangle$$

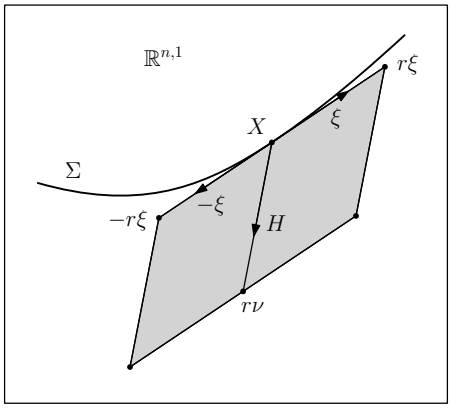


FIGURE 1. (x) 的示意图 Λ_r。

根据张量性，同一公式在任意坐标系中都成立。 □

3. PROOF OF THEOREM 1.1

S由于式（1.1）关于 f是齐次的，通过归一化，我们不妨假设 t

$$\int_{\partial\Sigma} f = n\int_{\Sigma} f^{\frac{n}{n-1}} - \int_{\Sigma} |\nabla f|. \tag{3.1}$$

设 η 为 $\partial\Sigma$ 的外向单位法向量。考虑以下偏微分方程

$$\begin{cases} \operatorname{div}(f\nabla u) = nf^{\frac{n}{n-1}} - |\nabla f|, & \text{in } \Sigma\setminus\partial\Sigma, \\ \langle \nabla u, \eta\rangle_{\bar{g}} = 1, & \text{along } \partial\Sigma. \end{cases} \tag{3.2}$$

根据我们的归一化，方程有一个解 $u \in C^{2,\alpha}$。由于 Σ 是平均凸的，我们可以假设平均曲率向量 H 要么为零，要么是指向过去的类时向量。令 ν 为指向过去的单位法向量和类时向量场。现在固定 $r > 0$。对于任意 $x \in \Sigma$，我们定义 $\mathcal{A}_r = \cap_{x\in\Sigma}\Lambda_r(x)$，其中

$$\Lambda_r(x) = \left\{p \in \mathbb{R}^{n,1} : |(p - X(x))^{\top}|^2 < r^2, -r \le \langle p - X, \|H\|^{-1}H(x)\rangle \le 0\right\}. \tag{3.3}$$

注意，当 $\|H\| = 0$ 时，记号 $\|H\|^{-1}H(x)$ 仅表示法向量 $\nu(x)$。

我们记 $p-X = s\xi+t\nu$，其中 ξ 是一个单位切向量，而 ν 是一个指向过去的单位法向量。的定义 $\Lambda_r(x)$ 意味着 $-r < s < r$， $0 \le t \le r$。因此 $\Lambda_r(x)$ 是一个如图 1 所示的平行四边形。我们继续定义

$$\mathcal{U} = \left\{(x, y) : x \in \Sigma\setminus\partial\Sigma, y \in T_x^{\perp}\Sigma, |\nabla u(x)| < 1, -1 \le \langle y, \|H\|^{-1}H(x)\rangle \le 0\right\},$$

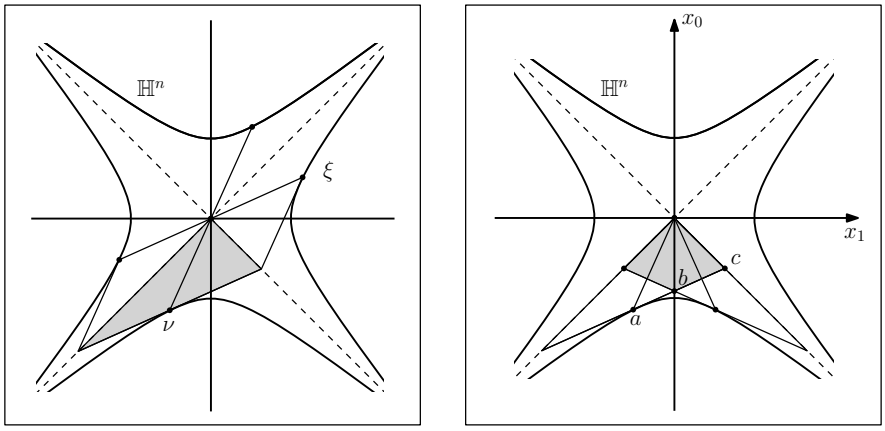


FIGURE 2. 左：将 $\Lambda(x)$吹缩 $\Lambda(x)$，得到包含 $\mathcal{C}(x)$阴影区域的 $\Lambda(x)$。右： $\mathcal{A}$ 至少包含 $\mathcal{C}$，即阴影区域。

$$\mathcal{B}_r = \left\{(x,y) \in \mathcal{U} : r\nabla^2 u(x) + r\langle h(x), y\rangle + g(x) \geq 0\right\}.$$

最后，我们取映射 Φ_r： $T^\perp\Sigma \to \mathbb{R}^{n,1}$，

$$\Phi_r(x,y) = X(x) + r(\nabla u(x) + y). \tag{3.4}$$

引理 3.1。 我们有如下渐近行为

$$\liminf_{r\to\infty} r^{-n-1}|\mathcal{A}_r| \geq \tilde{C}_{n,\tau}, \tag{3.5}$$

其中 $|\mathcal{A}_r|$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的通常勒贝格测度，且$\tilde{C}_{n,\tau} = \frac{\omega_n}{(n+1)\tau(\tau+\sqrt{\tau^2-1})^n}$。

证明。 我们将 $\mathcal{A}_r$ 按因子 r吹缩。当 $r \to \infty$时，有界区域 Σ 收缩至一个点：原点，且每个 $\Lambda_r(x)$收敛到一个 $\Lambda(x)$，其定义为

$$\tilde{\Lambda}(x) = \{\tilde{p} \in \mathbb{R}^{n,1} : |\tilde{p}^\top|^2 < 1, -1 < \langle \tilde{p}, \nu(x)\rangle < 0\},$$

其中， $\nu(x) \in -\mathbb{H}^n$ 是 Σ 在 x 处指向过去的单位法向量。示意见图 2 左图。显然，$\tilde{\Lambda}(x)$包含圆锥 $\tilde{\mathcal{C}}(x) = \{\tilde{p} \in \mathbb{R}^{n,1} : |\tilde{p}|^2 < 0, -1 < \langle \tilde{p}, \nu(x)\rangle < 0\}$。因此，$\mathcal{A} = \cap_{x\in\Sigma}\Lambda(x)$至少包含 $\mathcal{C} = \cap_{x\in\Sigma}\mathcal{C}(x)$。由于假设 $\nu(x)$具有最小高度 $-\tau$，我们可以假设 $\mathcal{C}$ 是两个圆锥的并集，如图 2 右图所示，其中点a 的零阶坐标为 $-\tau$。

˜现在我们继续计算 $\mathcal{C}$的体积。不失一般性，假设点 a， b， c位于平面 Ox_0x_1内。于是 $a=(-\tau,\ -\sqrt{\tau^2-1},\ 0,\ \cdots,\ 0)$，且切向 $\vec{ac}$ 平行于 $\xi=(\sqrt{\tau^2-1},\ \tau,\ 0,\ \cdots,\ 0)$。由此可立即得到 $b=(-\tau^{-1},\ 0,\ \underline{\cdots,\ 0})$ 和 $c=\underline{(-\tau+}\sqrt{\tau^2-1},\ \tau-\sqrt{\tau^2-1},\ 0,\ \cdots,\ 0)$。因此

$$|\tilde{\mathcal{C}}|=\omega_n(\tau-\sqrt{\tau^2-1})^n\cdot\tau^{-1}\cdot(n+1)^{-1}=\tilde{C}_{n,\tau}$$

因此 $\liminf_{r\to\infty} r^{-n-1}|\mathcal{A}_r|\geq|\tilde{\mathcal{C}}|=\tilde{C}_{n,\tau}$。 □

引理 3.2。 有 $\Phi_r(\mathcal{B}_r)\supseteq\mathcal{A}_r$。

证明。 对于任意给定的 $p\in\mathcal{A}_r$，考虑函数

$$F(x)=ru(x)+\frac{1}{2}|p-X(x)|^2,\quad x\in\Sigma.$$

由紧致性可知， F 在某个 $\bar{x}\in\Sigma$ 处取得其最小值。我们断言 $\bar{x}\notin\partial\Sigma$。否则，若 $\bar{x}\in\partial\Sigma$，则在此点有 $0\geq\langle\nabla F(\bar{x})\ \eta\rangle=r-\langle p-X(\bar{x})\ \eta\rangle.$。根据 $\mathcal{A}_r$ 的定义，我们有 $\langle p-X(\bar{x})\ \eta\rangle=\langle p-X(\bar{x})^\top,\ \eta\rangle<r$，矛盾。因此 $\bar{x}\in\Sigma\setminus\partial\Sigma$，且在该点 $\nabla F(\bar{x})=r\nabla u(\bar{x})-(p-X(\bar{x}))^\top=0$。于是我们找到 $\bar{y}\in T_{\bar{x}}^{\perp}\Sigma$，使得 $r\bar{y}=(p-X(\bar{x}))^{\perp}$。显然， $r|\nabla u(\bar{x})|=|(p-X(\bar{x}))^\top|<r$，并且 $-r\|H\|\leq r\langle\bar{y},H(\bar{x})\rangle=\langle p-X(\bar{x})\ H(\bar{x})\rangle\leq 0$。最后，由引理 2.2，

$$\begin{aligned}0\leq\nabla^2F(\bar{x})&=r\nabla^2u(\bar{x})+\bar{\nabla}^2\left(\frac{1}{2}|p-X(\bar{x})|^2\right)-\left\langle h,\bar{\nabla}\left(\frac{1}{2}|p-X(\bar{x})|^2\right)\right\rangle\\&=r\nabla^2u(\bar{x})+g(\bar{x})-\langle h,X(\bar{x})-p\rangle\\&=r\nabla^2u(\bar{x})+g(\bar{x})+r\langle\bar{y},h\rangle,\end{aligned}$$

至此证明完毕。 □

在黎曼或洛伦兹情形中，为使面积公式成立，映射的雅可比行列式应通过体积元进行修正；也就是说，

$$J(\Phi_r)=|\det(D\Phi_r)|\cdot\frac{\sqrt{-\det\bar{g}}}{\sqrt{\det g}},$$

其中 $D\Phi_r$ 是坐标映射的通常切映射。

引理 3.3. Φ_r 的不变雅可比行列式为

$$J(\Phi_r)=r^{n+1}\det\left(\nabla_i\nabla^j u(x)+\langle y,h_i^j\rangle+\delta_i^j/r\right).$$

证明。在一点 $(x,\ y)$ 处，我们选取一个正交归一基 $\{e_i, \nu\}$，其张成$T_{(x,y)}(T^{\perp}\Sigma)$，以及一个法坐标系 $\{x_i, y\}$，使得 $\frac{\partial}{\partial x_i} = e_i$，$\frac{\partial}{\partial y} = \nu$在$(x,\ y)$ 处成立。于是 $\Phi_r(x,\ y) = X + r\nabla u + ry\nu$。现在我们计算

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i}, e_j\rangle &= \langle e_i + r\bar{\nabla}_{e_i}\nabla u + ry\bar{\nabla}_{e_i}\nu, e_j\rangle = \delta_{ij} + ru_{ij} - ryh_{ij},\\
\langle \frac{\partial \Phi_r}{\partial y}, e_j\rangle &= \langle r\nu, e_j\rangle = 0,\\
\langle \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \nu\rangle &= \langle r\nu, \nu\rangle = -r.
\end{aligned}$$

注意，我们用到了如下事实：$\langle \nabla_{e_i} e_j, \nu\rangle = \langle -h_{ij}\nu, \nu\rangle = h_{ij}$且 $\langle \nabla_{e_i}\nu, e_j\rangle = -\langle \nabla_{e_i} e_j, \nu\rangle = -h_{ij}$。因此 $\det(D\Phi_r) = -r\det(ru_{ij} - ryh_{ij} + \delta_{ij})$，由此可得

$$J(\Phi_r) = r^{n+1}\det(\nabla_i\nabla^j u + \langle y, h_i^j\rangle + \delta_i^j/r).$$

由张量性可知，同一公式在任意坐标系中均成立。 □

引理 3.4。对于任意 $(x, y) \in \mathcal{B}_r$

$$\det\left(\nabla_i\nabla^j u(x) + \langle y, h_i^j\rangle + \delta_i^j/r\right) \le \left(f^{\frac{1}{n-1}} + 1/r\right)^n.$$

证明。根据定义，$\nabla^2 u + \langle y, h\rangle + g/r \ge 0$ 对于任意 $(x, y) \in \mathcal{B}_r$。因此

$$\det\left(\nabla_i\nabla^j u + \langle y, h_i^j\rangle + \delta_i^j/r\right) \le \left(\frac{\Delta u + \langle y, H\rangle}{n} + \frac{1}{r}\right)^n \le \left(\frac{\Delta u}{n} + \frac{1}{r}\right)^n.$$

另一方面，由等式（3.2）以及事实 $|\nabla u| < 1$，我们有

$$\Delta u = nf^{\frac{1}{n-1}} - f^{-1}\left(|\nabla f| + \langle \nabla f, \nabla u\rangle\right) \le nf^{\frac{1}{n-1}},$$

从而完成证明。 □

定理的证明 *1.1*。由面积/余面积公式和前面的引理可得

$$\frac{|\mathcal{A}_r|}{r^{n+1}} \le \int_{\mathcal{B}_r}\left(f^{\frac{1}{n-1}} + 1/r\right)^n dyd\mu_g \le \int_{\Sigma}\left(f^{\frac{1}{n-1}} + 1/r\right)^n d\mu_g.$$

发送 $r \to \infty$，我们推导出

$$\tilde{C}_{n,\tau} \le \int_{\Sigma} f^{\frac{n}{n-1}} d\mu_g. \tag{3.6}$$

结合这一点和公式（3.1），我们得出

$$\int_{\partial\Sigma} f + \int_{\Sigma} |\nabla f| = n\left(\int_{\Sigma} f^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{\Sigma} f^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \geq n\tilde{C}_{n,\tau}^{\frac{1}{n}} \left(\int_{\Sigma} f^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

最后，我们写作 $C_{n,\tau} = n\tilde{C}_{n,\tau}^{\frac{1}{n}} = n\omega_n^{\frac{1}{n}}(n+1)^{-\frac{1}{n}}\tau^{-\frac{1}{n}}(\tau+\sqrt{\tau^2-1})^{-1}$. □

4. Proof of Theorem 1.2

若不假设“平均凸性”，则并集 $\mathcal{A}_r = \cap_{x\in\Sigma}\Lambda_r(x)$（其中 $\Lambda_r(x)$由式（3.3）定义）可能为空。因此，我们通过 u 来构造

$$\begin{cases} \operatorname{div}(f\nabla u) = nf^{\frac{n}{n-1}} - \sqrt{|\nabla f|^2 + f^2\|H\|^2}, & \text{in } \Sigma, \\ \langle \nabla u, \eta\rangle_{\bar{g}} = 1, & \text{along } \partial\Sigma. \end{cases} \tag{4.1}$$

由于式（1.2）关于 f是齐次的，我们可以假设

$$\int_{\partial\Sigma} f = \int_{\Sigma} nf^{\frac{n}{n-1}} - \int_{\Sigma} \sqrt{|\nabla f|^2 + f^2\|H\|^2}, \tag{4.2}$$

从而 $Eq.(4.1)$ 有解。接着，我们将方程（3.3）修改为

$$\Lambda_r(x) = \left\{ p \in \mathbb{R}^{n,1} : |(p - X(x))^{\top}|^2 < \frac{r^2}{4}, -\frac{r}{2} \leq \langle p - X(x), \|H\|^{-1}H(x)\rangle \leq \frac{r}{2} \right\}$$

以及 $\mathcal{A}_r = \cap_{x\in\Sigma}\Lambda_r(x)$。因此，

$$\mathcal{U} = \left\{ (x,y) : x \in \Sigma \setminus \partial\Sigma, y \in T_x^{\perp}\Sigma, |\nabla u(x)| < \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \leq \langle y, \|H\|^{-1}H(x)\rangle \leq \frac{1}{2} \right\},$$

$$\mathcal{B}_r = \left\{ (x,y) \in \mathcal{U} : r\nabla^2 u(x) + r\langle h(x), y\rangle + g(x) \geq 0 \right\},$$

并且 $\Phi_r(x,y) = X(x) + r(\nabla u(x) + y)$ 。注意，当 $\|H\| = 0$ 时，记号 $\|H\|^{-1}H$仅表示法向量 ν。与第3节类似，我们仍有

- 包含关系 $\Phi_r(\mathcal{B}_r) \supseteq \mathcal{A}_r$；以及
- The Jacobian $J(\Phi_r) = r^{n+1}\det\left(\nabla_i\nabla^j u(x) + \langle y, h_i^j\rangle + \delta_i^j/r\right)$.

证明几乎完全相同。

引理 4.1。 我们有渐近行为

$$\liminf_{r\to\infty} r^{-n-1}|\mathcal{A}_r| \geq \tilde{C}_{n,\tau}, \tag{4.3}$$

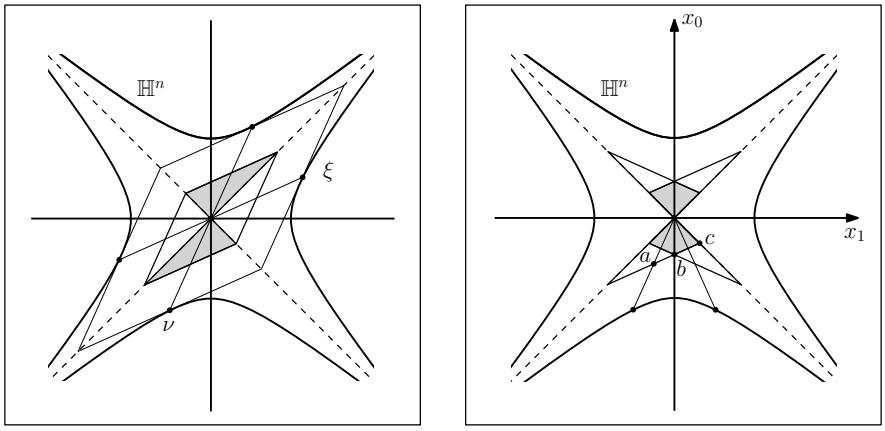


FIGURE 3. 左：每个 $\Lambda(x)$包含两个圆锥，即阴影区域；右：Λ至少包含 $\mathcal{C}$，即阴影区域。

where $\tilde{C}_{n,\tau} = 2^{-n}(n+1)^{-1}\omega_n\tau^{-1}(\tau+\sqrt{\tau^2-1})^{-n}$.

证明。该证明与引理 3.1的证明类似，但存在细微差异。由于单位法向量的最小高度为 $-\tau$，在图3 中，$a = (-\frac{\tau}{2}, -\frac{\sqrt{\tau^2-1}}{2}, 0, \cdots, 0)$。向量 $\vec{ac}$ 与 ξ 平行，$(\sqrt{\tau^2-1}, \tau, 0, \cdots, 0)$。由此我们得到 $b = (-\frac{1}{2\tau}, 0\cdots, 0)$ 和 $c = (\frac{-\tau+\sqrt{\tau^2-1}}{2}, \frac{\tau-\sqrt{\tau^2-1}}{2}, 0\cdots, 0)$。因此，$\tilde{\mathcal{C}}$的体积

$$|\tilde{\mathcal{C}}| = \omega_n \left(\frac{\tau-\sqrt{\tau^2-1}}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2\tau} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot 2 = 2^{-n}(n+1)^{-1}\omega_n\tau^{-1}(\tau+\sqrt{\tau^2-1})^{-n},$$

由此可得色综合网

$$\liminf_{r\to\infty} r^{-n-1}|\mathcal{A}_r| \geq |\tilde{\mathcal{C}}| \geq \tilde{C}_{n,\tau},$$

完成证明。 □

引理 4.2。对于任意的$(x, y) \in \mathcal{B}_r$，我们有

$$\det\left(\nabla_i\nabla^j u(x) + \langle y, h_i^j\rangle + \delta_i^j/r\right) \leq \left(f^{\frac{1}{n-1}} + 1/r\right)^n.$$

证明。根据定义，对于任意 $(x, y) \in \mathcal{B}_r$，都有 $\nabla^2 u + \langle y, h\rangle + g/r \geq 0$。因此

$$\det\left(\nabla_i\nabla^j u + \langle y, h_i^j\rangle + \delta_i^j/r\right) \leq \left(\frac{\Delta u + \langle y, H\rangle}{n} + \frac{1}{r}\right)^n.$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}\langle y, fH\rangle - \langle \nabla f, \nabla u\rangle &\leq \frac{1}{2} f\|H\| + |\nabla f||\nabla u| \leq \sqrt{|\nabla f|^2 + f^2\|H\|^2}\sqrt{|\nabla u|^2 + 1/4} \\ &\leq \sqrt{|\nabla f|^2 + f^2\|H\|^2}\sqrt{1/4 + 1/4} \leq \sqrt{|\nabla f|^2 + f^2\|H\|^2}.\end{aligned}$$

结合公式（4.1），可得

$$\Delta u + \langle y, H\rangle = n f^{\frac{1}{n-1}} - f^{-1}\left(\sqrt{|\nabla f|^2 + f^2\|H\|^2} + \langle \nabla f, \nabla u\rangle - \langle y, fH\rangle\right) \leq n f^{\frac{1}{n-1}},$$

从而得到该断言。 □

定理的证明 *1.2*。根据面积/余面积公式，我们有

$$\frac{|\mathcal{A}_r|}{r^{n+1}} \leq \int_{\mathcal{B}_r} \frac{J(\Phi_r)}{r^{n+1}} dy d\mu_g \leq \int_\Sigma \left(f^{\frac{1}{n-1}} + 1/r\right)^n d\mu_g.$$

发送 $r \to \infty$，可得 $\int_\Sigma f^{\frac{n}{n-1}} \geq \tilde{C}_{n,\tau}$。根据式（4.2），计算得

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Sigma} f + \int_\Sigma \sqrt{|\nabla f|^2 + f^2\|H\|^2} = n\int_\Sigma f^{\frac{n}{n-1}} \\ &= n\left(\int_\Sigma f^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left(\int_\Sigma f^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}} \geq n\tilde{C}_{n,\tau}^{\frac{1}{n}}\left(\int_\Sigma f^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}.\end{aligned}$$

最后我们写作 $C_{n,\tau} = n\tilde{C}_{n,\tau}^{\frac{1}{n}} = n2^{-1}(n+1)^{-\frac{1}{n}}\omega_n^{\frac{1}{n}}\tau^{-\frac{1}{n}}(\tau + \sqrt{\tau^2 - 1})^{-1}$. □

5. Proof of Theorem 1.3

我们固定这样一个截面 $\nu \in \Gamma(T^\perp\Sigma)$，其中 $|\nu|^2 = -1$；也就是说，ν 是沿着 Σ 的单位类时法向量场。在每个点 $x \in \Sigma$，我们有如下分解

$$T_x^\perp\Sigma = T_x^{\perp,1}\Sigma \oplus T_x^{\perp,2}\Sigma,$$

其中 $T_x^{\perp,2}\Sigma = \mathrm{Span}\{\nu(x)\}$。注意，$T_x^{\perp,1}\Sigma$是一个类空子空间。因此，我们将法向量写作 $y = y^{\perp,1} + y^{\perp,2}$。现在考虑的方程为

$$\begin{cases}\mathrm{div}(f\nabla u) = m f^{\frac{m}{m-1}} - \sqrt{|\nabla f|^2 + f^2(|H^{\perp,1}|^2 + \|H^{\perp,2}\|^2)}, & \Sigma\setminus\partial\Sigma, \\ \langle \nabla u, \eta\rangle = 1, & \partial\Sigma.\end{cases} \tag{5.1}$$

我们进行归一化，使得

$$\int_{\partial\Sigma} f = \int_\Sigma m f^{\frac{m}{m-1}} - \int_\Sigma \sqrt{|\nabla f|^2 + f^2(|H^{\perp,1}|^2 + \|H^{\perp,2}\|^2)} \tag{5.2}$$

偏微分方程有解。定义域和陪域为

$$\Lambda_r(x) = \left\{ p \in \mathbb{R}^{n,1} : |(p - X(x))^\top|^2 + |(p - X(x))^{\perp,1}|^2 < \frac{r^2}{4}, -\frac{r}{2} \le \langle p - X(x), \nu(x) \rangle \le \frac{r}{2} \right\},$$

$$\mathcal{A}_r = \cap_{x \in \Sigma} \Lambda_r(x),$$

$$\mathcal{U} = \left\{ (x, y) : x \in \Sigma \setminus \partial\Sigma, y \in T_x^\perp \Sigma, |\nabla u(x)|^2 + |y^{\perp,1}|^2 < \frac{1}{4}, -\frac{1}{2} \le \langle y^{\perp,2}, \nu \rangle \le \frac{1}{2} \right\},$$

$$\mathcal{B}_r = \{ (x, y) \in \mathcal{U} : r\nabla^2 u(x) + r\langle y, h(x) + g(x) \ge 0 \rangle \}.$$

最后我们取 $\Phi_r : \quad T^\perp \Sigma \to \mathbb{R}^{n,\ 1} : \quad (x, \ y) \ \mapsto X \ (x) \ + r \ (\nabla u \ (x) \ + y)$ 。如第 3 节中一样,

- 包含关系 $\Phi_r(\mathcal{B}_r) \supseteq \mathcal{A}_r$; 以及
- The Jacobian $J(\Phi_r) = r^{n+1} \det \left(\nabla_i \nabla^j u(x) + \langle y, h_i^j \rangle + \delta_i^j / r \right)$.

证明几乎完全相同。

引理 5.1. 我们有渐近行为

$$\liminf_{r \to \infty} r^{-n-1} |\mathcal{A}_r| \ge \tilde{C}_{n,\tau}, \tag{5.3}$$

where $\tilde{C}_{n,\tau} = 2^{-n}(n+1)^{-1}\omega_n \tau^{-1}(\tau + \sqrt{\tau^2 - 1})^{-n}$.

证明。 我们记 $\mathbb{R}^{n,1} = T_x\Sigma \oplus T_x^\perp \Sigma = (T_x\Sigma \oplus T^{\perp}{}_{,x}{}^{1}\Sigma) \oplus T^{\perp}{}_{,x}{}^{2}\Sigma$。如果 $p \in \Lambda_r(x)$, 那么

$$|(p - X(x))^\top|^2 + |(p - X(x))^{\perp,1}|^2 < \frac{r^2}{4} \quad \text{and} \quad |(p - X(x))^{\perp,2}|^2 \le \frac{r^2}{4}.$$

若 $\xi \in T_x\Sigma \oplus T^{\perp}{}_{,\ x}{}^{1}\Sigma$是一个单位向量, 且 $p - X = s\xi + t\nu$, 那么 $|s|, \ \nmid t| \le \frac{r}{2}$的形状与 $\Lambda_r(x)$ 和 $\mathcal{A}_r$ 将与图 3中的完全相同。因此, 结论与引理 4.1中的相同。 □

引理 5.2。 对于任意 $(x, y) \in \mathcal{B}_r$

$$\det \left(\nabla_i \nabla^j u(x) + \langle y, h_i^j \rangle + \delta_i^j / r \right) \le \left(f^{\frac{1}{m-1}} + 1/r \right)^m.$$

证明。根据算术几何平均不等式,

$$\det \left(\nabla_i \nabla^j u(x) + \langle y, h_i^j \rangle + \delta_i^j / r \right) \le \left(\frac{\Delta u + \langle y, H \rangle}{m} + \frac{1}{r} \right)^m.$$

现在由式（5.1），可得

$$\Delta u+\langle y,H\rangle=mf^{\frac{1}{m-1}}-f^{-1}(\sqrt{|\nabla f|^2+f^2(|H^{\perp,1}|^2+\|H^{\perp,2}\|^2)}+\langle\nabla f,\nabla u\rangle-\langle fH,y\rangle$$

另一方面，根据 $\mathcal{B}_r$的定义，

$$\begin{aligned}-\langle\nabla f,\nabla u\rangle+\langle fH,y\rangle&=\langle\nabla f,\nabla u\rangle+\langle fH^{\perp,1},y^{\perp,1}\rangle+\langle fH^{\perp,2},y^{\perp,2}\rangle\\&\leq|\nabla f||\nabla u|+|fH^{\perp,1}||y^{\perp,1}|+\frac{1}{2}f\|H^{\perp,2}\|\\&\leq\sqrt{|\nabla f|^2+f^2|H^{\perp,1}|^2+f^2\|H^{\perp,2}\|^2}\sqrt{|\nabla u|^2+|y^{\perp,1}|^2+\frac{1}{4}}\\&\leq\sqrt{|\nabla f|^2+f^2(|H^{\perp,1}|^2+\|H^{\perp,2}\|^2)}.\end{aligned}$$

这意味着 $\Delta u+\langle y,H\rangle\leq mf^{\frac{1}{m-1}}$，从而完成证明。 □

定理的证明 *1.3*。使用面积/余面积公式，我们有

$$\frac{|\mathcal{A}_r|}{r^{n+1}}\leq\int_\Sigma\left(f^{\frac{1}{m-1}}+1/r\right)^m.$$

取 $r\to\infty$，我们得到

$$\tilde{C}_{n,\tau}\leq\int_\Sigma f^{\frac{m}{m-1}}.$$

考虑到公式（5.2），我们推导得出

$$\begin{aligned}m\tilde{C}_{n,\tau}^{\frac{1}{m}}\left(\int_\Sigma f^{\frac{m}{m-1}}\right)^{\frac{m-1}{m}}&\leq m\left(\int_\Sigma f^{\frac{m}{m-1}}\right)^{\frac{1}{m}}\left(\int_\Sigma f^{\frac{m}{m-1}}\right)^{\frac{m-1}{m}}=m\int_\Sigma f^{\frac{m}{m-1}}\\&=\int_{\partial\Sigma}f+\int_\Sigma\sqrt{|\nabla f|^2+f^2(|H^{\perp,1}|^2+\|H^{\perp,2}\|^2)}.\end{aligned}$$

最后，我们计算 $C_{m,\ n,\ \tau}=m\tilde{C}_{n,\tau}^{\frac{1}{m}}=m2^{-\frac{n}{m}}(n+1)^{-\frac{1}{m}}\omega_n^{\frac{1}{m}}\tau^{-\frac{1}{m}}(\tau+\sqrt{\tau^2-1})^{-\frac{n}{m}}$。 □

References

[Aub76] Thierry Aubin. “等周问题与索博列夫空间”。载于：Journal of Differential Geometry 11.4（1976年），第 573–598 页。 ISSN: 1945743X.DOI: 10.4310/jdg/1214433725.[BR33] E. F. Beckenbach 和 T. Rado. “次调和函数与负曲率曲面”。载于：Transactions of the American Mathematical Society 35.3（1933年），第 662 页。 ISSN: 00029947。 DOI: 10.2307/1989854.[Bre20] Simon Brendle. “非负曲率流形中的索博列夫不等式”。2020年。arXiv: 2009.13717。 URL: http://arxiv.org/abs/2009.13717.[Bre21] Simon Brendle. “欧几里得空间中极小子流形的等周不等式”。载于：Journal of the American Mathematical Society 34.2（2021年），第 595–603 页。[CG92a] Jaigyoung Choe 和 Robert Gulliver. “空间形式中极小子流形上的等周不等式”。载于：Manuscripta Mathematica 77（1992年），第 169–189 页。[CG92b] Jaigyoung Choe 和 Robert Gulliver. “双曲空间中具有径向连通边界的极小曲面的锐等周不等式”。载于：Inventiones Mathematicae 109.1（1992年），第 495–503 页。 ISSN: 00209910. DOI: 10.1007/BF01232035.[Cab08] Xavier Cabr´e. “概率论与几何学中的椭圆型偏微分方程：对称性与解的正则性”。载于：Discrete and Continuous Dynamical Systems 20.3（2008年），第 425–457 页。 ISSN: 10780947。 DOI: 10.3934/dcds.2008.20.425.[Cho05] Jaigyoung Choe. “极小子流形的等周不等式”。载于：极小曲面的整体理论（2005年），第 325–370 页。[Cro84] Christopher B. Croke. “锐四维等周不等式”。载于：Commentarii Mathematici Helvetici 59.1（1984年），第 187–192 页。ISSN: 00102571。 DOI: 10.1007/BF02566344.[GS21] Mohammad Ghomi 和 Joel Spruck. 卡当–哈达玛流形中的全曲率与等周不等式。2021年9月23日。arXiv: 1908.09814 [math-ph]。 URL: http://arxiv.org/abs/1908.09814（访问于2022年9月15日）。

[Gua] Pengfei Guan. 曲率测度、等周型不等式与完全非线性偏微分方程。[Kle 92] Bruce Kleiner. “等周比较定理”。载于：Inventiones Mathematicae 108.1 (1992), pp. 37–47. ISSN: 00209910. DOI: 10.1007/BF02100598.[MS14] Sung Hong Min 和 Keomkyo Seo. “双曲空间中完备真极小子流形的最优等周不等式”。载于：Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik 694 (2014), pp. 203–214. ISSN: 14355345. DOI: 10.1515/crelle-2012-0119. arXiv: 1201.2732.[TW22] Chung-Jun Tsai 和 Kai-Hsiang Wang. “闵可夫斯基空间中类空子流形的一种等周型不等式”。载于：International Mathematics Research Notices 2022.1 (2022), pp. 128–139. ISSN: 1073- 7928. DOI: 10.1093/imrn/rnaa084.[Wei26] Andr´e Weil. “关于负曲率曲面”。载于：CR Acad. Sci. Paris 182.2 (1926年), pp. 1069–1071.[Yau75] Shing-Tung Yau. “紧黎曼流形的等周常数与第一特征值”。载于：Annales scientifiques de l’Ecole normale sup´erieure 8.4 (1975年), pp. 487–507. ISSN: 0012-9593. DOI: 10.24033/asens.1299.

School of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China
电子邮箱地址: liang.xu@zju.edu.cn