arXiv:2304.03485v1 [math.AT] 7 Apr 2023

球面的稳定同伦群的几何方法。去悬置定理（再探）

Petr Akhmetiev

摘要

稳定球面的稳定同伦群中的去悬置定理 Π_{2^l-2} 得到了表述和证明。这一结果是对文献 [A1]中定理的一个小幅修订。

1 引言

球面的稳定同伦群中的去悬挂问题如下。设 Π_n 为维数 n 的球的稳定同伦群，众所周知， $\Pi_n = \pi_{2n+2}(S^n)$。下面这个称为 $k+2$-去悬挂的同态是良定义的:

$$\Sigma^{k+2} : \pi_{2n-k}(S^{n-k-2}) \to \pi_{2n+2}(S^n), \quad k \geq -1.$$

使同态 Σ^{d+2} 成为满同态的 $d(n)$ 最大值是多少? 弗雷登塔尔去悬置定理断言，对于任意 $n \geq 1$，都有 $d(n) \geq -1$ 。根据关于 $n = 1$、3、7 的亚当斯霍普夫不变量定理，可得： $d(n) = 1$; 而对于 $n \neq 0$、1、3、7，可得: $d(n) \geq 2$。相反，对于 Mahowald 元素 $\eta_l \in \Pi_{2^l}$， $l \geq 3$ 可得： $d(2^l) = 4$。我们的主要结果如下:

定理 1. 去悬置定理

对于任意正整数 d ，存在一个正整数 $l_0 = l_0(d)$ ，使得球面的稳定同伦群 $\Pi_{2^l-2}, l \geq l_0$ 中的任意元素都可以进行 $d+2$ 阶去悬挂。

2 压缩定理

我们考虑一种研究球面的稳定同伦群的方法，该方法建立在庞特里亚金方法 [P] 和关于浸入的 Smale-Hirsh 定理 [H] 之上。利用所考虑的方法所得的结果此前已在 [C1], [C2] 中得到发展。通过该方法，球的稳定同伦群 Π_n 与配边群 $Imm^{fr}(n, 1)$ 自然同构，其中后者是余维 1 的斜框架浸入的配边群。该配边群的一个元素由浸入 $f\colon N^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ 表示，其中流形 N^n 是定向的。群结构由浸入的不交并良定义，而浸入的一个配边类被定义为正则配边类。

我们将配边群 $Imm^{sf}(n-1,1)$ 定义为浸入 $g\colon M^{n-1} \looparrowright \mathbb{R}^n$的等价类，其中，与 $Imm^{fr}(n-1, 1)$ 不同，流形M^{n-1} 是非定向的。

定义 2。 我们称元素 $[g] \in Imm^{sf}$（$n-1$, 1） 具有阶数为 d、 $d \leq n-1$ 的压缩，如果存在一个浸入 $g_1\colon M_1^{n-1} \looparrowright \mathbb{R}^n$，它与浸入 g是纽结的，并且其定向上同调类（此类记为 $\kappa_1 \in H^1(M_1^{n-1})$ ）可由一个映射$\kappa_1\colon M_1^{n-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ 表示，该映射的像落入标准骨架 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1-d} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$。

Let

$$\lambda : Imm^{sf}(n-1,1) \to Imm^{fr}(n,1)$$

是 Khan-Priddy转移，它是针对配边群构造的，被称为Koschorke同态。众所周知，Koschorke 同态是到 2-分量上的一个裂满同态。

压缩问题

对于任意元素 $[g] \in Imm^{sf}(n-1, 1)$，使其存在阶为 d 的压缩的最大整数 $d(n)$ 是多少?

去悬挂问题

对于任意元素 $[f] \in Imm^{fr}(n, 1)$，使其存在阶为 $d+2$ 的去悬挂的最大整数 $d(n)$ 是多少?

在亚稳定维数 $2d+1 \leq n$ 中，压缩问题等价于去悬挂问题。因此，去悬挂定理 1 是以下结果的推论。

定理 3. 压缩定理

对于任意正整数 d，存在一个正整数 $l = l(d)$，使得配边群 $Imm^{sf}(2^{l'}-3,1)$ 中的任意元素，对于$l' \geq l$，都具有 $d-1$ 阶的压缩。

3 配边群 $Imm^{sf}(n-k,k)$，$k \geq 1$及其推广

设 M^{n-k}为维数为（$n-k$）的闭流形，$n \geq k \geq 1$，φ： $M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ 为该流形浸入 $\mathbb{R}^n$ 的浸入，余维为 k，Ξ_M是浸入 φ 的斜框架，其斜框架的特征类为 κ_M 。此外，设流形 M^{n-k} 配备了以下一族1维模2上同调类:

$$A_j = \{\kappa_i\}, \quad \kappa_i \in H^1(M;\mathbb{Z}/2), \quad 0 \leq i \leq j, \quad \kappa_0 = \kappa_M. \tag{1}$$

这组上同调类由以下分类映射集合表示:

$$A_j = \{\kappa_i : M^{n-k} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty\}, \quad i = 0,1,\ldots,j, \quad \kappa_0 = \kappa_M. \tag{2}$$

定义 4. 配边群 $Imm^{sf;A}(n-k;k)$ 由三元组 (φ, Ξ_M, A_j)表示，其中:

—φ： $M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$–是一个从闭的$(n-k)$维流形到欧几里得空间的浸入，

— Ξ_M 是浸入 φ的斜框架，
—A_j 是由(2)描述的一组上同调类。
三元组的配边关系是标准的。

注

在这种情况下，$j=0$配边群 $Imm^{sf;A_j}(n-k;\ k)$ 与配边群 $Imm^{sf}(n-k;\ k)$ 重合，后者称为斜框架浸入的配边群。

一个自然同态

$$J^k_{sf;A_j} : Imm^{sf;A_j}(n-1,1) \to Imm^{sf;A_j}(n-k,k) \tag{3}$$

定义如下。设三元组 $(\varphi_0, \Xi_{M_0}, A_j(M_0))$ 表示配边群 $Imm^{sf;A_j}(n-1, 1)$ 中的一个元素。考虑如下三元组 $(\varphi, \Xi_M, A_j(M))$，其中浸入 $\varphi\colon\ M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$定义如下。流形 M^{n-k} 是流形 M_0^{n-1}中的一个子流形，该子流形的基本类表示丛 $(k-1)\kappa_{M_0}$的同调欧拉类，浸入 φ 定义为浸入 φ_0 在 M^{n-k}上的限制。浸入 φ 的斜框架 Ξ_M 通过与情形 $j=0$中相同的标准构造定义，关于上同调类的集合$A_j(M)$是集合 $A_j(M_0)$在子流形 $M^{n-k} \subset M_0^{n-1}$上的限制。

我们将定义 2 推广到配边群 $Imm^{sf;A_j}(n-k, k)$。

定义 5. 设 $[(\varphi, \Xi_M, A_j)] \in Imm^{sf;A_j}(n-k, k)$。若元素 $[(\varphi, \Xi_M, A_j)]$ 所在的配边类中存在一个三元组 (φ', Ξ'_M, A'_j)，使得二元组 (M^{n-k}, κ_0) 按定义 2 的意义容许 d 阶压缩，则称元素 $[(\varphi, \Xi_M, A_j)]$ 容许 d 阶压缩。

定义传递同态

$$r_j^! : Imm^{sf;A_j}(n-k, k) \to Imm^{sf;\hat{A}_{j-1}}(n-k, k) \tag{4}$$

关于上同调类 κ_j。

设 $x \in Imm^{sf;A_j}(n-k, k)$ 是由三元组 (φ, Ξ_M, A_j) 表示的一个元素。定义二重覆盖

$$p_j : \hat{M}^{n-k} \to M^{n-k}$$

为特征类为 $w_1(p_j) = \kappa_j \otimes \kappa_M \in H^1(M^{n-k}; \mathbb{Z}/2)$ 的正则覆盖空间。（下文用 p_j 表示 M^{n-k} 上具有特征类 $w_1(p_j)$ 的线丛，也用它表示特征类 $w_1(p_j)$ 本身。）

定义一个斜框架 $\Xi_{\hat{M}}$。考虑浸入 $\varphi : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$。将浸入 $\varphi \circ p_j$ 记作 $\hat{\varphi}$。将浸入 φ 的法丛记作 ν_M。将浸入 $\varphi \circ p_j$ 的法丛记作 $\nu_{\hat{M}}$。通过公式 $\Xi_{\hat{M}} = p_j^*(\Xi_M)$，定义浸入 $\varphi \circ p_j$的斜框架 $\Xi_{\hat{M}}$。

$\hat{}$ 通过以下公式定义上同调类 A_{j-1} 的集合：

$$\hat{A}_{j-1} = \{\hat{\kappa}_j = p_j \circ \kappa_j, \quad j = 0, \ldots, j-1\}.$$

我们将定义

$$r_j^!(x) = [(\hat{\varphi}, \Xi_{\hat{M}}, \hat{A}_{j-1})].$$

例 6。 在 $j=0$ 的情形下，传递同态(4) 由以下公式给出：

$$r_0 : Imm^{sf}(n-k,k) \to Imm^{fr}(n-k,k)$$

已在 *[A-E]*中研究了该同态的性质。

让我们考虑 (j_2-j_1) 传递同态的复合：

$$r^!_{j_1+1,\dots,j_2} : Imm^{sf;A_{j_2}}(n-k,k) \to Imm^{sf;\hat{A}_{j_1}}(n-k,k), \quad j_2 \geq j_1. \tag{5}$$

在 $j_1=0$ 的情况下，其中 $\psi=j_2$，同态 (5) 记为

$$r^!_{tot} : Imm^{sf;A_\psi}(n-k,k) \to Imm^{sf}(n-k,k). \tag{6}$$

下面我们明确描述同态 (5)。假设元素 $x \in Imm^{sf;A_{j_2}}(n-k,k)$由三元组 $(\varphi, \Xi_M, A_{j_2})$ 给出。考虑集合 A_{j_2}的最后(j_2-j_1) 个上同调类的以下子集 $\{\kappa_{j_1+1},\dots,\kappa_{j_2}\}$。定义 $2^{j_2-j_1}$–重覆盖空间 $p:\hat{}M^{n-k} \to M^{n-k}$，其由以下上同调类集合给出：

$$\{\kappa_{j_1+1}\otimes\kappa_0,\dots,\kappa_{j_2}\otimes\kappa_0\}.$$

浸入 $\hat{}\varphi : \hat{}M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ 由以下复合给出：

$$\hat{\varphi} = \varphi \circ p.$$

浸入$\hat{}\varphi$ 的法丛配备了斜框架$p^*(\Xi_M) = \Xi_{\hat{}M}$。上同调类的集合

$$\hat{A}_{j_1} = \{\hat{\kappa}_0 = \kappa_0 \circ p, \dots \hat{\kappa}_{j_1} = \kappa_{j_1} \circ p\}$$

由分类映射良好定义。

$\hat{}$ 三元组 $(\hat{}\varphi, \Xi_{\hat{}M}, A_{j_1})$ 的配边类确定元素$r^!_{j_1+1,\dots,j_2}(x)$。

命题7。 对于任意正整数 l 和 k, $2^l-2 = n > k > 0$，存在一个正整数 $\psi=\psi(k,l)$，使得总传递同态 (6)：

$$r^!_{tot} : Imm^{sf;A_\psi}(n-k,k) \to Imm^{sf}(n-k,k), \tag{7}$$

其中 A_ψ 是上同调类集合的指标，该映射平凡。

我们先从以下引理开始证明命题7。

引理8。 配边群 $Imm^{sf;A_j}(n-k,k)$ 是有限的 2-群，若$n-k>0$，或者，$n-k=0$ 且 k 为奇数。

证明引理 8

通过庞特里亚金–汤姆构造，配边群 $Imm^{sf}(n-k,k)$是稳定同伦群 $\Pi_n(P_{k-1})$，其中 $P_{k-1}=\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty}/\mathbb{R}\mathrm{P}^{k-1}$，参见例如[A-E]。根据托姆空间的标准论证，配边群 $Imm^{sf;A_j}(n-k,k)$是稳定同伦群 $\Pi_n(P_{k-1}\times\prod_{i=1}^{j}\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty}_i/(pt\times\prod_{i=1}^{j}\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty}_i))$，其中 $pt\in P_{k-1}$ 是一个标记点。空间 $(P_{k-1}\times\prod_{i=1}^{j}\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty}_i/(pt\times\prod_{i=1}^{j}\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty}_i))$是一个$(k-1)$-连通的 2-同伦型空间（除非 $n=k\equiv 0$（模 2））。引理 8 得证。

□

让我们定义以下正整数序列 s_{n-k}、.....、 s_1，其中索引从 $(n-k)$ 递减至 1：

$$s_{n-k}=ord(\Pi_{n-k}),\quad s_{n-k-1}=ord(\Pi_{n-k-1}),\quad \ldots,\quad s_1=ord(\Pi_1).$$

在这个公式中，我们用 $ord(\Pi_i)$ 表示球面的 i 阶稳定同伦群的 2-分量中元素的最大阶数的对数。接下来定义

$$\psi(i)=1+\sum_{j=i}^{n-k}s_j \tag{8}$$

并由以下公式定义所需的整数：

$$\psi=\psi(1)+\sigma, \tag{9}$$

其中， $\sigma=ord(Imm^{sf;A_{\psi(1)}}(n-k,k))$ 是协边群阶的对数，其中数 $\psi(1)$ 根据引理 8 使用公式 (8) 定义。因此，我们有 $\psi\geq\psi(1)\geq\psi(2)\geq\cdots\geq\psi(n-k)\geq 1$。

令 $x\in Imm^{sf;A_\psi}(n-k,k)$ 为由三元组 (φ,Ξ_M,A_ψ) 表示的元素。我们来考虑这个元素。

$$r^{!}_{\psi-\psi_1}(x)=(\hat{\varphi},\hat{\Xi},\hat{A}),\quad \hat{A}_{\psi_1}=\{\hat{\kappa}_{\psi_1},\ldots,\hat{\kappa}_{\psi_{n-k}},\hat{\kappa}_M\}, \tag{10}$$

以及该元素

$$r^{forg}_{\psi-\psi_1}(x)=(\varphi,\Xi,A^{forg}_{\psi_1}),\quad A^{forg}_{\psi_1}=\{\kappa_{\psi_1},\ldots,\kappa_{\psi_{n-k}},\kappa_M\}. \tag{11}$$

通过以下三元组回复元素（10）：

$$r^{!}_{\psi-\psi_1}(x)\mapsto r^{!}_{\psi-\psi_1}(x)+\sigma r^{forg}_{\psi-\psi_1}(x), \tag{12}$$

其中 σ 由式 (9) 给出。我们来证明，元素 (12) 存在一个 0 阶压缩，见定义 5。

令(φ, Ξ_M, A_ψ)、 φ: $M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$为给定的三元组。将乘积$\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty(0) \times \prod_{j=\psi_1}^{j=\psi} \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty(j)$ 记为 $X(\psi_1)$，并考虑映射

$$\lambda'_M : M^{n-k} \to X(\psi_1), \tag{13}$$

定义为由（11）给出的、对应于该子集$A_{\psi_1}^{forg} \subset A_\psi$ 中各上同调类的分类映射的直积。简记空间$X(\psi_1)$为 X 。

考虑一个自然的滤过

$$\cdots \subset X^{(n-k+1)} \subset X^{(n-k)} \subset \cdots \subset X^{(1)} \subset X. \tag{14}$$

该滤过是标准坐标滤过的直积。每个分层 $X^{(i)} \setminus X^{(i+1)}$、 $i = 1$、$\ldots n-k$都是余维为 i的开胞腔之并。每个胞腔由相应的多重指标$\mu = (m_0, m_{\psi_1} \ldots, m_\psi)$确定； $m_0 + m_{\psi_1} + \cdots + m_\psi = i$是一个分层的深度，多重指标中的每个下标都表示包含给定胞腔的相应坐标射影空间。

假设映射 λ相对于滤过（14）处于一般位置。记 $L^0 \subset M^{n-k}$ 为M^{n-k}中的一个零维子流形，它定义为滤过深度$n-k$ 的总体分层 $X^{(n-k)}$ 的原像。

^ ^ 考虑由 (10) 给出的三元组 (^$\varphi, \Xi_{\hat{}M}, A_{\psi(1)}$)。我们来证明，该三元组与一个三元组 (^$\varphi', \Xi'_{\hat{M}'}, A'_{\psi(1)}$) 边界等价，其中映射 ^$\lambda'$: ^$M'^{n-k} \to X$ 由上同调类的集合 $A_{\hat{M}'}$ 构造，并满足以下性质:

$$(\hat{\lambda}')^{-1}(X^{(n-k)}) = \emptyset. \tag{15}$$

考虑 $X^{(n-k)} \setminus X^{(n-k+1)}$ 中胞腔的任意定向集合。取丛 κ_M 的一个局部定向；该局部定向由万有丛 γ 的相应局部定向定义，其中 κ_M 是 γ 在分支 $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty(0)$ 上经由 λ 的拉回。特别地，可以讨论 X 的每个胞腔上 κ_M 的定向；固定 κ_M 覆盖的两个片层之一即可确定该定向。对于 λ 和 λ, 同时采用这一关于符号的通用约定。

我们用 $lk(\mu)$表示像$\lambda(M^{n-k})$与多重指标 μ对应的胞腔的交数。类似地，用$lk(\hat{}\mu)$表示像^λ(^M^{n-k})与给定多重指标 μ对应的胞腔的交数。显然，整数$\{lk(\hat{}\mu)\}$ 组成的集合，是由相应整数 $\{lk(\mu)\}$组成的集合乘以 $2^{\psi - \psi(1)}$得到的。

设 $A^{forg}_{\psi\ 1\ ()}$ 为 A_{ψ}的子集，由最后的 $\psi(1)$ 个上同调类组成。根据构造，群 $Imm^{sf;A_{\psi(1)}}(n-k,k)$ 的指数等于 2^{σ}。因此， 2^{σ} 个三元组 $(\varphi,-\Xi_M,$ $A^{forg}_{\psi\ 1\ ()})$ 的不交并（其中，斜框架的相反指的是具有斜框架逆局部定向的同一三元组）确定了群 $Imm^{sf;A_{\psi(1)}}(n-k,k)$ 中的平凡元素。

让我们考虑三元组 $(2^{\sigma})(\varphi,-\Xi_M,A_{\psi-\psi(1)})$。该三元组定义ˆ为 2^{σ} 个三元组 $(\varphi,-\Xi_M,A_{\psi(1)})$的不交并（注意，当 k 为偶数时，斜框架 Ξ_M 会变为具有相反整体定向的斜框架）。三元组$(2^{\sigma})(\varphi,-\Xi_M,A_{\psi-\psi(1)})$的系数集合记为 $\{lk(2^{\sigma}(-\mu))\}$。显然，$\{lk(2^{\sigma}(-\mu))\}=-2^{\sigma}\{lk(\mu)\}$。

让我们考虑三元组 $(\varphi,-\Xi_M,A^{forg}_{\psi\ 1\ ()})$ 与三元组 $(2^{\sigma})(\varphi,-\Xi_M,A^{forg}_{\psi\ 1\ ()})$ 的不交并。将这个新三元组记为 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}(\hat{}\varphi_1,\Xi_{1;\hat{}M_1},A_{1;\psi(1)})$。这个新三元组与三元组 $(\hat{}\varphi,\Xi_{\hat{}M},$ $A_{\psi(1)})$ 在配边群$Imm^{sf;A_{\psi(1)}}(k,n-k)$中表示同一个元素。通过上同调类的集合 $\hat{}\ A_{1;\psi(1)}$ 构造的映射 $\hat{}\lambda_1:\hat{}\ M^k_1\to X$是良定义的。为映射 λ_1 定义的交系数集合$\hat{}\ \hat{}$ 将记为 $lk(1;\mu)$。显然，对于任意多重指标 μ，我们有 $lk(1;\mu)$ $=0$。

三元组 $(\hat{}\varphi_1,\Xi_{1;\hat{}M_1},A_{1;\psi(1)})$ 通过E1-概变为三元组 $(\hat{}\varphi_2,\Xi_{2;\hat{}M_2},A_{2;\psi(1)})$，$\hat{}$ 其定义如下：映射 λ_2 由上同调类的集合 $A_{2;\psi(1)}$ 定义，满足条件

$$(\hat{\lambda}_2)^{-1}(X^{(n-k)})=\emptyset,$$

这与条件 (15) 类似。这给出了证明的第一步。

接下来描述证明的后续步骤。为简便起见，将三元组 $(\hat{}\varphi_2,\Xi_{2;M_2},$ $A_{2;\psi(1)})$ 记作 $(\varphi,\Xi_M,A_{\psi(1)})$。考虑由公式定义的子空间$X(\psi_2)\subset X(s)$:

$$X(\psi_2)=\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty}(0)\times\prod_{j=\psi_2}^{j=\psi}\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty}(j), \tag{16}$$

$$i_{\psi(2)}:X(\psi(2))\subset X(\psi(1))\subset X(\psi). \tag{17}$$

为简便起见，再将 $X(\psi_2)$ 记作 X。映射 $\lambda\colon M^{n-k}\to X$，借助集合$A^{forg}_{\psi\ 2}$ $()$ 的上同调类构造，满足一个条件，

$\hat{}$ 它与 (15) 类似。让我们考虑三元组 ($\hat{}\varphi, \Xi_{\hat{}M}, A_{\psi(2)}$)，其由以下元素给出

$$r^{!}_{\kappa_{\psi(1)},\ldots,\kappa_{\psi(2)-1}}(\varphi, \Xi_M, A_{\psi(1)})$$

在配边群 $Imm^{sf;A_{\psi(2)}}(n-k,k)$ 中。

我们将空间 $X(\psi(2))$ 定义为带有指标 $(0,\psi(2)\ldots,\psi)$ 的无限维射影空间的笛卡尔积，它是空间 $X(\psi_1)$ 的一个类似物：

$$X(\psi(2)) = \mathbb{RP}^{\infty}_{0} \times \prod_{j=\psi(2)}^{j=\psi} \mathbb{RP}^{\infty}(j).$$

将 $X(\psi(2))$ 简记为 X 。

空间 X 配备以下标准分层 (14)。包含映射 (17) 与分层 (14) 一致。

该集合 $\hat{}M^{n-k} \to \hat{A}_{\psi(2)}$ 的上同调类决定映射 $\hat{}X$ 的以下类似条件：

$$\hat{\lambda}^{-1}(X^{(n-k)}) = \emptyset. \tag{18}$$

我们用 $\hat{}L^1 \subset \hat{}M^{n-k}$ 表示 $\hat{}M^{n-k}$ 中由下式给出的一维子流形：

$$\hat{L}^1 = \hat{\lambda}^{-1}(X^{(n-k-1)}).$$

集合 $\hat{}A_{\psi(2)}$ 的上同调类在子流形 $\hat{}L^1$ 上的限制是平凡的。特别地，子流形 $\hat{}L^1$ 是带框架的。

流形的分支

$\hat{}L^1$ 配备了与子空间 $X^{(n-k-1)}$ 的顶胞腔相对应的多重指标集合。一个固定的多重指标确定了一个由 2^{s_1} 个一维带框流形副本组成的不交集合（可能非连通），且这些副本作为带框流形两两微分同胚。

带框边界 $\partial(\tilde{K}^2) = (\tilde{L}^1)$ 的二维带框流形 $\tilde{K}^2$ 是良定义的。这个带框流形确定了一个把手的主体，用于将三元组 ($\hat{}\varphi, \Xi_{\hat{}M}, A_{\psi(2)}$) 通过正规手术变为三元组 $\hat{}\hat{}$ ($\hat{}\varphi_1, \Xi_{1;\hat{}M_1}, A_{1;\psi(2)}$)，使得上同调类集合 $A_{1;\psi(2)}$ 确定映射

$$\hat{\lambda}_1 : \hat{M}^{n-k}_1 \to X$$

满足该条件

$$\hat{\lambda}_1^{-1}(X^{(n-k-1)}) = \emptyset. \tag{19}$$

证明的下一步类似于所考虑情形中具有一维障碍的那一步。表示障碍维数的参数 i从2变为 $n-k$。在每一步中，都考虑与条件（15）、（19）类似的条件。在证明的最后一步，我们得到一个带框架流形（$\hat{}M^{n-k}$,$\hat{}\Xi_M$），其配备了由$\hat{}$ $A_{\psi(n-k)}$ 个平凡上同调类组成的集合。由 $\psi(n-k)$个互不相交的带框架流形（$\hat{}M^{n-k}$,$\hat{}\Xi_M$）表示的带框架流形是带框边界（因此也是斜框架边界）。命题7得证。

□

我们来描述给定阶的压缩所面临的代数障碍。

引理9。 任意元素 $x \in Imm^{sf;A_j}(n-k,k)$ 存在一个阶为 i, $i \leq n-k$ 的压缩，当且仅当元素

$$J^{k'}_{sf}(x) \in Imm^{sf;A_j}(n-k',k')$$

$(i \leq n-k' \leq n-k)$ 存在一个相同阶数 i 的压缩，其中同态 $J^{k'}_{sf}(x)$ 由 (3) 给出。

推论10。 对于任意元素 $x \in Imm^{sf;A_j}(n-k,k)$，阶为 $q\,(0 \leq q \leq n-k)$ 的压缩的总障碍由元素 $J^{q}_{sf;A_j}(x) \in Imm^{sf;A_j}(q,n-q)$ 给出。

为证明引理9和推论10，我们来陈述一个辅助引理。设三元组 (φ,Ξ_M,A_j) 表示元素$x \in Imm^{sf;A_j}(n-k,k)$。进一步假设该元素存在一个阶为 $(i-1)$ 的压缩。这意味着，在其配边类中可以取三元组 (φ,Ξ_M,A_j)，使斜框架 Ξ_M 的特征类 $\kappa_M \in H^1(M^{n-k};\,\mathbb{Z}/2)$ 由以下复合给出：

$$\kappa_M : M^{n-k} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k-i} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty},$$

$i < n-k$。我们将再次用 κ_M 表示上文所述的映射 $M^{n-k} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k-i}$。

考虑由以下公式给出的流形 $Q^i \subset M^{n-k}$:

$$Q^i = \kappa_M^{-1}(pt), \quad pt \in \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k-i}. \tag{20}$$

该流形配备了自然框架 Ψ_Q，因为斜框架 Ξ_M 在子流形 $Q^i \subset M^{n-k}$ 上的限制是一个框架，记作 Ψ_Q。

此外，集合 $A_j(M)$ 的上同调类在子流形 $Q^i \subset M^{n-k}$ 上的限制，确定了 Q^i 上的上同调类集合 $A_j(Q)$。注意，集合 $A_j(Q)$ 中的类 κ_0 是平凡类。浸入 φ_Q： $Q^i \looparrowright \mathbb{R}^n$ 定义为浸入 φ 在子流形 $Q^i \subset M^{n-k}$ 上的限制。三元组 $(\varphi_Q, \Psi_Q, A_j(Q))$ 确定了元素 $J^i_{sf;A_j}(x) = y \in Imm^{sf;A_j}(i, n-i)$。

引理 *11*。元素 $x = [(\varphi, \Xi_M, A_M)] \in Imm^{sf,A_j}(n-k, k)$ 存在阶为 $(i-1)$ 的压缩，存在阶为 i的压缩，当且仅当元素 $J^i_{sf;A_j}(x) = y = [(\varphi_Q, \Xi_Q, A_j(Q))] \in Imm^{sf,A_j}(i, n-i)$ 是平凡的。

证明引理 11

在第一步，我们证明，如果 $y = 0$ ，那么 x 可以进行 i阶的压缩。让我们考虑一个余维 $(n-i)$ $(i+1)$维的斜框架流形 (P^{i+1}, Ξ_P)，其边界为 $\partial P^{i+1} = Q^i$，并配备了上同调类的集合 $A_j(P)$，使得斜框架 Ξ_P 在边界 Q^i 上的限制是一个与框架 Ψ_Q 重合的框架，并且集合 $A_j(P)$ 在边界 Q^i 上的限制与集合 $A_j(Q)$ 重合。

让我们描述将斜框架流形 (M^{n-k}, Ξ_M)通过正规手术转化为斜框架流形 (T^{n-k}, Ξ_T)。让我们构造一个带边界的流形，称为把手的本体。考虑流形 P^{i+1}，并将 P^{i+1}上的$(n-i)$–维法丛记为 ν_P。法丛 ν_P 配备了斜框架 Ξ_P，即丛映射（在每个纤维上都是同构）

$$\nu_P \to (n-i)\kappa_P \tag{21}$$

是良定义的。我们将由Whitney和 (21)中的第一个$(n-k-i)$因子张成的、位于 P 上的圆盘丛记为 U_P 。流形 U_P 是一个余维为 k 且带边界的斜框架流形，这个流形将被称为把手的本体。

把手主体的边界 ∂U_P 包含一个子流形$Q^i \times D^{n-k-i}$，它是流形 Q^i上的圆盘丛的全空间。考虑流形 M^{n-k}与单位线段 $I = [0,1]$的笛卡尔积 $M^{n-k} \times I$。流形 $Q^i \times D^{n-k-i}$ 的另一个副本嵌入子流形 $M^{n-k} \times \{1\} \subset \partial (M^{n-k} \times I)$中，它是子流形 $Q^i \times \{1\} \subset M^{n-k} \times \{1\}$的正则邻域。我们用以下公式定义流形 T^{n-k}：

$$T^{n-k} = \partial^+((M^{n-k} \times I) \cup_{Q^i \times D^{n-k-i}} U_P), \tag{22}$$

其中， ∂^+ 表示配边的“上”部，即包含主体 U_P的边界的最后一部分 $\partial U_P \setminus (Q^i \times D^{n-k-i})$的那一部分。

经过称为“圆角平滑”的标准操作后， PL–流形 T^{n-k} 变为光滑闭流形。浸入 φ_T： $T^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ （该浸入在正则同伦意义下良定义）、斜框架 Ξ_T 以及特征类 κ_T （即丛逐纤维同构 $\nu_T \to k\kappa_T$）均是良定义的。流形T^{n-k}配备了特征类集合 A_j（T），其中集合中的每个特征类都由分解（22）中两个分支所对应特征类的粘合确定。集合 A_j（T）中的类 κ_0（T）与斜框架 Ξ_T的特征类κ_T重合。三元组（φ_T， Ξ_T， A_j（T））确定了配边群 $Imm^{sf;A_j}$（$n-k$， k）中的一个元素，并且根据构造[（φ， Ξ_M， A_j）] = [（φ_T， Ξ_T， A_j（T））]。

我们来证明元素 $[(\varphi_T, \Xi_T, A_j(T))]$ 允许进行阶数为 i的压缩。我们来证明特征类 κ_T 由分类映射 κ_T： $T^{n-k} \to \mathbb{R}\mathbf{P}^{n-k-i-1} \subset \mathbb{R}\mathbf{P}^\infty$表示。取一个足够大的正整数 b，并考虑 κ_M： $M^{n-k} \to \mathbb{R}\mathbf{P}^b \subset \mathbb{R}\mathbf{P}^\infty$，使得

$$\kappa_M^{-1}(\mathbb{R}\mathbf{P}^{b-n+k+i}) = Q^i,$$

$Q^i \subset M^{n-k}$, $\mathbb{R}\mathbf{P}^{b-n+k+i} \subset \mathbb{R}\mathbf{P}^b$。

考虑映射 g： $P^{i+1} \to \mathbb{R}\mathbf{P}^{b-n+k+i}$，此映射在边界 $\partial P^{i+1} = Q^i$ 的分支上的限制与映射 $\kappa_M|_{Q^i}$ （到一点的映射）一致。考虑映射 g的“加厚”h： $U_P \to \mathbb{R}\mathbf{P}^b$，该映射 h 由映射 g 按标准方式延拓至把手 U_P 的主体而定义，所用的是 $\mathbb{R}\mathbf{P}^{b-n+k+i} \subset \mathbb{R}\mathbf{P}^b$的正则邻域中的标准坐标系。

映射 g'： $M^{n-k} \cup_{Q^i \times D^{n-k-i}} U_P \to \mathbb{R}\mathbf{P}^b$， $g'|_{U_P} = g$是良定义的，并且限制 $g'|_{T^{n-k} \subset M^{n-k} \cup U_P}$不与子流形 $\mathbb{R}\mathbf{P}^{b-n-k+i} \subset \mathbb{R}\mathbf{P}^b$相交。空间 $\mathbb{R}\mathbf{P}^b \setminus \mathbb{R}\mathbf{P}^{b-n-k+i}$ 通过一个变形收缩到其子空间 $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n-k-i-1}$，从而构造出了所需的映射 κ_T 的 i 阶压缩。我们已经证明，元素 x 具有 i 阶压缩。

让我们证明逆命题：假设元素 $x = [(\varphi, \Xi_M, A_j)]$ admits 存在一个阶为 i 的压缩，那么由方程 (20) 给出的三元组 $(\varphi_Q, \Psi_Q, A_j(Q))$，$Q^i$ 确定配边群 $Imm^{sf;A_j}(i, n-i)$ 中的平凡元素。

令（φ_W， Ξ_W， A_j（W））为一个三元组，其中 W^{n-k+1}是带边界的流形，$\partial W^{n-k+1} = M^{n-k} \cup M_1^{n-k}$；（$\varphi_W$， Ξ_W）是流形 W到 $\mathbb{R}^n \times I$中的一个斜框架浸入； A_j（W）是特征

类的集合。此外，三元组（φ_W， Ξ_W， A_j（W））确定了三元组（φ_M，Ξ_M， A_j（M））与（$\varphi_{M'}$， $\Xi_{M'}$， A_j（M'））之间的配边，其中数对（M'^{n-k}， $\kappa_{M'}$）（上同调类 $\kappa_{M'}$是斜框架 $\Xi_{M'}$的特征类，且该类包含在集合 A_j（M'）中）可进行阶数为 i的压缩，即分类映射 $\kappa_{M'} = \kappa_W|_{M'}$ 由以下复合给出:

$$\kappa_{M'} : M'^{n-k} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k-i} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty}.$$

考虑标准子流形 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{b-n-k+i} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^b$，该子流形与子流形 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k-i} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^b$ 在点 $pt \in \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k-i} \setminus \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k-i-1}$ 相交，并且与标准子流形 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k-i-1} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k-i}$ 不相交。像 $Im(\kappa_M(M^{n-k}))$ 位于子流形 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k-i} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^b$ 中，像 $Im(\kappa_{M'}(M'^{n-k}))$ 位于子流形 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k-i-1} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k-i}$ 中。

记子流形 $F^{-1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^{b-n+k+i})$ 为 P^{i+1}（假设 F 沿子流形 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{b-n+k+i} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^b$ 横截）。根据构造$\partial P^{i+1} = Q^i$。定义余维 $(n-i)$ 中的斜框架 Ξ_P 为子流形 $P^{i+1} \subset W^{n-k+1}$ 的斜框架与斜框架 Ξ_W 在子流形 $P^{i+1} \subset W^{n-k+1}$ 上的限制的直和。

Ξ_W 上的斜框架 $\partial W^{n-k+1} = Q^{n-k}$ 的限制与具有平凡特征类 κ_Q 的斜框架 Ψ_Q 一致（即，斜框架 Ψ_Q就是框架）。上同调类集合 $A_j(P)$ 在 $\partial W^{n-k+1} = Q^{n-k}$ 上的限制与集合$A_j(Q)$一致。这证明三元组 (φ_Q, Ψ_Q, A_Q) 是一个边界。引理 11 得证。

□

定理 10 **的证明**

设元素 $x \in Imm^{sf;A_j}(n-k,k)$， $x = [(\varphi, \Xi_M, A_M)]$的 $i-1$阶压缩 $i < q$ 定义良好。根据引理 11，由同一个三元组 (φ, Ξ_M, A_M) 表示的元素 $x \in Imm^{sf;A_j}(n-k,k)$的 i 阶压缩的障碍，与元素$J^{sf}_{k'}(x) \in Imm^{sf;A_j}(n-k', k')$的同阶 i 压缩的障碍一致。因此，对 i使用归纳法可知，元素 x 的 q 阶压缩的总障碍平凡，当且仅当元素$J^{sf}_{k'}(x)$的 q 阶压缩的总障碍平凡。定理 10 得证。

为证明压缩定理1，需要使用U.Koschorke构造的总障碍，该障碍用于将丛映射的同伦在丛的每个纤维上变为丛单态射（见 [K]）。

设 $\alpha \to Q^q$、 $\beta \to Q^q$ 是光滑流形 Q^q 上的一对向量丛（我们不假设流形 Q^q 是闭的） dim（α） $= a$、dim（β） $= b$、 dim（Q^q） $= q$、2（$b - a + 1$） $< q$。设 u： $\alpha \to \beta$ 是一个一般位置的向量丛态射。记 $\Sigma \subset Q^q$ 为由下式给出的子流形:

$$\Sigma = \{x \in Q^q | Ker(u_x : \alpha_x \to \beta_x) \neq 0\}. \tag{23}$$

该流形 Σ 是丛态射 u的奇异流形。注意，在给定的维数限制下，对于一般的向量丛态射 u ，我们有 $rk(u) \geq a - 1$。子流形$\Sigma \subset Q^q$ 的余维等于 $b - a + 1$。

我们来描述子流形 (23) 的法丛，这个丛记为 ν_Σ。记 $\lambda : E(\lambda) \to \Sigma$ 为线性子丛，它由态射 u 在奇异子流形 $\Sigma \subset Q^q$ 上的核构成。因此，下面这个位于 $\Sigma\varepsilon$ 上的丛包含关系是良定义的。记 Λ_α 为位于 Σ 上的丛，该丛是子丛 $\varepsilon(\lambda) \subset \alpha$ 的正交补。在 Σ 上有一个自然的向量丛态射（纤维同构） $v : \Lambda_\alpha \subset \beta$ ，它是良定义的。我们将丛 Λ_β 定义为位于 Σ 上的丛，它是丛 $\alpha|_\Sigma$ 中子丛 $v(\Lambda_\alpha)$ 的正交补。法丛 $\nu(\Sigma)$ 由以下公式确定:

$$\nu(\Sigma) = \lambda \otimes \Lambda_\beta. \tag{24}$$

若流形 Q^q 有边界 ∂Q ，且向量丛态射u 是定义在带边界流形上的丛态射，那么限制 $u|_{\partial Q}$ 的奇异子流形 $\partial\Sigma \subset \partial Q$ 是具有法丛的子流形 $\Sigma \subset Q^q$ 的边界，其法丛由同一公式 (24) 给出。

在论文 [K] 中（本文引用了同一作者先前发表的论文），定义了一个配边群，其元素是余维为 $b-a+1$、带有由方程 (24) 给出的法丛附加结构的流形在 Q^q 中的嵌入的配边类（在这一构造中，流形 Q^q是闭的）。对于任意一般的向量丛态射 u ： $\alpha \to \beta$ ，该配边群中的一个元素是良定义的。这个元素是将向量丛态射 u 同伦变形为纤维单射的总障碍。

设 $\hat{}\nu$： $E(\hat{}\nu) \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$ 是一个向量丛，$\dim(\hat{}\nu) = n+1-2^k$, $2^k < n+2$，它定义在标准射影空间上，并且同构于以下 Whitney和:

$$\hat{\nu}_{\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}} = (n + 1 - 2^k)\kappa_{\mathbb{R}\mathrm{P}}, \tag{25}$$

其中 $\kappa_{\mathbb{RP}}$ 是 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$ 上的典范线丛。令怀特尼和 $\hat{}\nu_{\mathbb{RP}^{2^k-1}} \oplus \kappa_{\mathbb{RP}}$ 记为 $\nu_{\mathbb{RP}^{2^k-1}}$，则有：

$$\nu_{\mathbb{RP}^{2^k-1}} = (n - 2^k + 2)\kappa_{\mathbb{RP}}. \tag{26}$$

标准投影

$$\pi : \nu_{\mathbb{RP}^{2^k-1}} \to \hat{\nu}_{\mathbb{RP}^{2^k-1}} \tag{27}$$

其核 $\kappa_{\mathbb{RP}}$ 是良定义的。在

$$b(2^k) \leq n + 2 \tag{28}$$

（正整数 $b(r)$，$r = 2^k$ 等于使丛 $b(2^k)\kappa_{\mathbb{RP}^{2^k-1}}$ 同构于平凡丛的最小 2 的幂；在（28）的右端我们有一个 2 的幂），根据（26），丛 $\nu_{\mathbb{RP}^{2^k-1}}$ 同构于射影空间 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$上的法丛。

下面给出一个定义。

丛 $\hat{}\nu_{\mathbb{RP}}$的可容许截面族的定义

我们称一个一般的 s–截面族

$$\hat{\psi} = \{\hat{\psi}_1, \ldots, \hat{\psi}_s\}, \quad \hat{\psi} : s\varepsilon \to \hat{\nu}_{\mathbb{RP}}$$

若丛 $\hat{}\nu_{\mathbb{RP}}$ 是可容许的，则存在一个正则的 s–截面族

$$\psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_s\}, \quad \psi : s\varepsilon \to \nu_{\mathbb{RP}}$$

$\hat{}$ 满足以下条件的丛 $\nu_{\mathbb{RP}}$ 的截面族：$\pi \circ \psi = \psi$。

引理 12。假设 $s \leq n + 2 - 2^{k+1} - k - 1$ 且 $n \equiv -2$（模 2^{2^k}），$n > 0$。那么丛 $\hat{}\nu_{\mathbb{RP}^{2^k-1}}$ 具有一个可容许的 s-截面族。

引理 12 的证明

根据戴维斯表，射影空间 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$ 可浸入欧几里得空间 $\mathbb{R}^{2^{k+1}-k-1}$ 中（这不是浸入的目标欧几里得空间的最低可能维数）。根据方程（28），并且由于 $b(k) \leq 2^k$ for $n = 2^{2^k} - 2$（模 2^{2^k+1}），由（26）给出的丛允许一个一般正则的 s–截面族，记为 ψ。投影

该正则族的$\hat{}\psi = \pi \circ \psi$是丛$\hat{}\nu_{\mathbb{RP}}$的可容许 s–截面族。引理 12 得证。 □

考虑一个可容许的泛型 s–截面族 ψ 的奇异流形记为 $\Sigma \hat{\subset} \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$。若取 $\alpha \equiv s\varepsilon, \beta \equiv \hat{}\nu, u = \psi$，这一记号便与 (23) 相对应。在下述引理中，我们将描述子流形$\Sigma \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$的法丛 ν_Σ。

引理 13. 假设

$$s = n + 2 - 2^{k+1} - k - 1, \quad k \geq 2, \tag{29}$$

其中 $n = 2^{2^k} - 2$ (模 2^{2^k})。那么，向量丛$\hat{}\nu_{\mathbb{RP}}$ (25) 的泛型 s–族中的奇异可容许截面所构成的子流形 $\Sigma \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$ 是一个维数为 k 的光滑子流形。该子流形的法丛 ν_Σ 配有斜框架 $\Xi_\Sigma : (2^k - 1 - k)\kappa_\Sigma \equiv \nu_\Sigma$，此斜框架的特征类 $\kappa_\Sigma = \kappa_\Sigma(\Xi)$ 与限制$\kappa_{\mathbb{RP}}|_{\Sigma \subset \mathbb{RP}^{2^k-1}}$相 *совп*合。

引理 13 的证明

让我们借助 Koschorke 定理描述法丛 ν_Σ。此外，让我们定义这个丛的斜框架。用 $\hat{}\lambda \subset s\varepsilon$ 表示流形 Σ 上族 ψ 的核组成的子丛。$\hat{}$ 根据假设，族 ψ 是容许的，因此：

$$\lambda = \kappa_\Sigma \tag{30}$$

（回顾一下，κ_Σ 向量丛 $\kappa_{\mathbb{RP}}|_\Sigma$ 记作）。我们将 Σ 上 $\kappa_\Sigma \subset s\varepsilon$ 的正交补记作 $s\varepsilon - \kappa_\Sigma$。

根据该构造：

$$(s\varepsilon - \kappa_\Sigma) \oplus \kappa_\Sigma = s\varepsilon. \tag{31}$$

让我们证明丛 ν_Σ 满足方程：

$$\nu_\Sigma \equiv (n + 2 - 2^k - k - 1)\kappa_\Sigma. \tag{32}$$

$\hat{}$ 我们将丛 $\hat{}\nu_{\mathbb{RP}^{2^k-1}|_\Sigma}$ 中 $\psi(s\varepsilon - \kappa_\Sigma)$ 的正交补记为 Λ。显然，$dim(\Lambda) = 2^k - 1 + k$。根据 Koschorke 定理，以下向量丛同构是良定义的：

$$\Lambda \otimes \kappa_\Sigma \equiv \nu_\Sigma.$$

丛 Λ是 Σ上的稳定丛，它是一个带有指定稳定平凡化的稳定平凡丛。这是由以下事实得出的：下列等式左侧的稳定向量丛是一个平凡丛（带有指定的稳定平凡化）：

$$\hat{\nu}_{\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}} \oplus \kappa_\Sigma = \hat{\psi}(s\varepsilon - \kappa_\Sigma) \oplus \kappa_\Sigma \oplus \Lambda.$$

这证明了方程（32）。同构（32）定义了丛 ν_Σ 的斜框架Ξ_Σ，其特征类为 κ_Σ。引理 13 得证。

□

备注

由于法丛在 Σ 上的限制与平凡丛同构，利用以下在 k 维流形 Σ 上的稳定同构：

$$b(k)\kappa_{\mathbb{R}\mathrm{P}} = b(k)\varepsilon,$$

斜框架 Ξ_Σ 确定了流形 Σ 在欧几里得空间中的法丛的斜框架。

让我们考虑一个元素

$$x \in Imm^{sf,A_j}(2^k - 2, n - 2^k + 2), \quad n = -2(mod 2^{k+1}),$$

由三元组 $(\varphi, \Xi_M, A_j(M))$ 的配边类给出。令 $m = 2^k - 2$。考虑向量丛 $\nu_{\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$，$\dim(\nu) = n - m$。流形 M^m 的法丛 ν_M (26) 由下式给出：

$$\nu_M = \kappa_M^*(\nu_{\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}}).$$

考虑映射

$$\lambda_M : M^m \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1} \times \prod_{i=1}^{j} \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty, \tag{33}$$

参见（13），它是通过集合 A_j 构造的。考虑标准投影 π_0：$\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}(0) \times \prod_{i=1}^{j} \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty(0) \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$ 到因子$\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}(0)$上的映射。复合 $\pi_0 \circ \lambda_M$：$M^m \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}(0)$ 与映射 κ_M 重合。

我们通过以下公式定义余维1（即维数 dim(ˆν_M) $= n+1-2^k$）的子丛 ˆ $\nu_M \subset \nu_M$：

$$\hat{\nu}_M = \kappa_M^*(\hat{\nu}_{\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}}).$$

定义丛 ˆν_M 的截面族 ˆ $\xi_M = \{\hat{\xi}_1、\ .....、\ \hat{\xi}_s\}、\ s = n+3-2^{k+1}+k$。该集合是丛 ˆ$\nu_M$ 的一个可容许截面集 $\psi = \{\psi_1, \ldots \psi_s\}$ 通过映射 κ_M 得到的拉回像。记

$$N^{k-1} \subset M^m \tag{34}$$

奇异截面子流形。容易证明，dim(N^{k-1}) =($k-1$)。流形 N^{k-1} 配备了来自群 $H^1(N^{k-1}; \mathbb{Z}/2)$ 的上同调类集合 $A_j(N)$；其中，$A_j(N)$ 的一个类被定义为该集合在子流形 $N^{k-1} \subset M^m$ 上对应类的限制。集合 $A_j(N)$ 中的类 $\kappa_M|_N$ 记为 κ_N。记浸入 $\varphi|_N$ 为 φ_N。

我们用 ν_N 表示欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中浸入（通过一般位置论证嵌入）的流形 $\varphi_N(N^{k-1})$ 的法丛。法丛 ν_N 同构于 Whitney和 $\nu_N = \nu_M|_N \oplus \nu_{N\subset M}$，其中 $\nu_{N\subset M}$ 表示流形 M^m 内子流形 $N^{k-1} \subset M^m$ 的法丛。

根据引理 13，以及映射 κ_M 沿子流形 $\Sigma \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$ 的横截性，丛 $\nu_{N\subset M}$ 配备了斜框架 $\Xi_{N\subset M}$，其特征类为 κ_N。根据 Koschorke 定理，丛 $\nu_M|_N$ 也配备了斜框架。这个斜框架的特征类计算与引理 13 类似。由此得到浸入 φ_N 的斜框架 Ξ_N，其余维为 ($n-k+1$)。

引理 14。三元组 $(\varphi_N,\ \Xi_N,\ A_j(N))$ 确定一个元素 $x_{k-1} \in Imm^{sf,\ A_j}(k-1,\ n-k+1)$，此元素是元素 $x \in Imm^{sf,\ A_j}(2^k-2,\ n-2^k+2)$ 的阶 $(k-1)$ 压缩的总障碍。

引理 14 的证明

考虑截面族 ˆ ψ 的奇点子流形 $\Sigma^k \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$，我们将此流形重新记为 Σ_0^k。该流形具有以下自然分层（一个滤子）：

$$\emptyset \subset \Sigma_k^0 \subset \cdots \subset \Sigma_1^{k-1} \subset \Sigma_0^k \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}. \tag{35}$$

子流形 Σ_i, $dim(\Sigma_i) = k-i$ 在(35)中被定义为在 ψ 中的第一（$s-i$）截面的子族的奇异子流形。一个

直接计算表明，(35) 中子-流形的基本类 $[\Sigma_i]$ 在群 $H_{k-i}(\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1};\mathbb{Z}/2)$ 中表示该群唯一的生-成元：该同调类对偶于特征类$\bar{w}_{n+1-2^k-k+i}[(n+1-2^k)\kappa_{\mathbb{R}\mathrm{P}}]$ 丛 $\nu_{\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}}$。

不失一般性，我们假设映射 $\kappa_M\colon M^m \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$沿着分层 (35) 横截。我们将分层 (35) 的原像记为

$$N^0_{k-1} \subset N^1_{k-2} \subset \cdots \subset N^{k-1}_0 \subset M^m. \tag{36}$$

滤过 (36) 的顶层流形 N^{k-1}_0与上文定义的流形 N^{k-1}重合。

我们对参数 i, i =0, . . . , $k-1$ 使用归纳法来证明引理。假设映射 κ_M: $M^m \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$ 的像位于标准射影子空间 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-2-i} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$ 中。在此情形下 $N^{i-1}_{k-i} = \emptyset$。通过标准论证，我们可以假设分层 Σ^i_{k-i} 与余维数相同的标准子流形 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1-i}$ 处于一般位置，并且仅在一点相交。（这两个子流形在流形 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$ 中的自交指标为奇数，且模 2 意义下定义良好。）

带框架流形 N^i_{k-i-1} 是标记点在映射 κ_M 下的正则原像（该映射的像位于子流形 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-2-i}$中）。我们将由三元组（$\varphi_{N_{k-i-1}}$、 $\Xi_{N_{k-i-1}}$、 A_j(N_{k-i-1})）的配边类表示的元素，在配边群 $Imm^{sf;A_j}(i, n-i)$ 中记为x_i。根据引理11，条件 $x_i = 0, i \le k-2$ 得到满足，当且仅当存在一个从映射 κ_M 到映射 $\kappa_{M'}$ 的正规配边： $M'^m \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-2-i} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k}$。因此，元素 x 的阶数为 $i+1, i+1 \le k-1$的压缩是良定义的。若置 $i+1 = k-1$，我们便有一个阶为（$k-1$）的压缩。引理14得证。

□

以下命题是定理 1 证明中的关键步骤。

命题 *15.* 设 $n = -2(mod(2^k))$、 $n > 2^k$, $x \in Imm^{sf;A_j}(2^k-2, n-2^k+2)$ 是同态 *(45)* 的核中的任意元素（在此公式中我们取 $b(k) = 2^k$，但这不是 $b(k)$ 的最小值，见 *(28)*）。设 $x_{k-1} \in Imm^{sf;A_j}(k-1, n-k+1)$ 是元素 x 的阶 $(k-1)$ 压缩的总障碍。那么元素 x_{k-1} 属于传递同态 *(4)* 的像，即存在元素 $y_{k-1} \in Imm^{sf;A_{j+1}}(k-1, n-k+1)$，使得 $r^!_{j+1}(y_{k-1}) = x_{k-1}$。

命题 15 的证明

假设元素 x 的配边类由三元组 $(\varphi_M, \Xi_M, A_j(M))$ 给出，其中 φ_M: $M^m \looparrowright \mathbb{R}^n$ 是浸入，$\dim(M^m) = m = 2^k - 2$。由于 $codim(\varphi_M)$ 是奇数， M^m 是定向的。

考虑流形M^m上的法丛 $\nu_M \cong (n-2^k+2)\kappa_M$，以及余维 1 子丛 $\hat{}$ $\nu_M \subset \nu_M$， $\hat{}\nu_M \equiv (n-2^k+1)\kappa_M$。 $\hat{}$ 下面证明存在丛 $\hat{}\nu_M$，
$s = n+2+k-2^{k+1}$的一个正则 s–截面族 ψ。

记 $D(\kappa_M)$ 为一个带边界的流形，它是与线丛 κ_M 相关联的圆盘丛的全空间。向量丛 $\hat{}\nu_M$ 提升为 $D(\kappa_M)$ 上的向量丛（仍记作 $\hat{}\nu_M$）。根据 R.Cohen 定理 [C]，存在一个浸入 $D(\kappa_M) \looparrowright \mathbb{R}^{2^{k+1}-2-k}$，因为 $\dim(D(\kappa_M)) = 2^k - 1$ 且 $\alpha(2^k-1) = k$。该结论的一个初等且自成一体的证明见下文定理 16。

等价地，丛$\hat{}\nu_M$ 具有一个 s–正则截面族。丛 $\hat{}\nu_M$ 的正则 s–族 ξ 的自然提升，记为 ψ，到丛 ν_M 的正则 s–截面族被定义。

$\hat{}$ 让我们考虑丛 $\hat{}\nu_M$ 的可容许 s–截面族 ψ。该截面族定义为丛 $\hat{}$ $\nu_{\mathbb{RP}^{2k-1}}$ 的可容许 s–截面族的拉回，见引理 12。丛 ν_M 的正则 s–截面族 $\hat{}$ ψ 定义为可容许 s–截面族 ψ 的提升。

考虑流形 $M^m \times I$，并按公式 $\nu_{M\times I} = p_M^*(\nu_M)$ 定义丛 $\nu_{M\times I}$，其中 p_M: $M^m \times I \to M^m$是到第二因子的标准投影。按公式 $\hat{}\nu_{M\times I} = p_M^*(\hat{}$ $\nu_M)$ 定义丛 $\hat{}\nu_{M\times I}$。考虑丛 $\nu_{M\times I}$ 的一个一般的 s–截面族 $X = \{\chi_1, \dots \chi_s\}$，其边界条件如下:

$$X = \psi \quad over \quad M^m \times \{1\}, \tag{37}$$

$$X = \xi \quad over \quad M^m \times \{0\}. \tag{38}$$

我们用 $V^{k-1} \subset M^m \times I$ 表示族 X 的奇异子集。根据一般位置论证，该子集是 $M^m \times I$ 中的闭子流形，因为在边界 $\partial(M^m \times I)$ 上，族 X 是正则的。我们用

$$\hat{X}\{\hat{\chi}_1, \dots, \hat{\chi}_s\}$$

将 s–族 X 投影到向量$\hat{}$ 丛$\hat{}\nu_{M\times I}$的截面 s–族中。 s–族 X 满足以下边界条件:

$$\hat{X} = \hat{\psi} \quad over \quad M^m \times \{1\}, \tag{39}$$

$$\hat{X} = \hat{\xi} \quad over \quad M^m \times \{0\}. \tag{40}$$

我们用$\hat{}K^k \subset M^m \times I$表示$s$–族$\hat{}X$中的奇异截面子集。该子集$\hat{}K^k$是一个带边界的$k$维流形。边界$\partial\hat{}K^k$的唯一分支是$M^m \times \{1\}$)的一个子流形；该分支与可容许族$\psi$的$\hat{}$奇点子流形$N^{k-1} \subset M^m \times \{1\}$重合，见（34）（回顾一下，族$\xi$是正则且可容许的）。根据定义，以下包含关系是良定义的：$V^{k-1} \subset \hat{}K^k$。

根据引理 13，三元组(φ_N, Ξ_N, A_N)定义良好。这里，$\varphi_N = \varphi|_N$,Ξ_N是此浸入的斜框架，$A_j(N)$是$A_j(M)$在$N^{k-1} \subset M^m \times \{1\}$上的限制。三元组$(\varphi_N, \Xi_N, A_j(N))$表示元素$x = [(\varphi, \Xi_M, A_j(M))]$,$x \in Imm^{sf;A_j}(2^k-2, n-2^k+2)$的$k-1$阶压缩的总障碍$x_{k-1} \in Imm^{sf;A_j}(k-1, n-k+1)$。

让我们使用公式(24)来计算子流形$\hat{}K^k \subset M^m \times I$的法丛，以及子流形$V^{k-1} \subset \hat{}K^k$的线法丛。

记λ为V^{k-1}上的由s–截面族X的核构成的线丛。我们来证明，子流形$V^{k-1} \subset M^m \times I$的法丛$\nu_V$由以下公式给出：

$$\nu_V \equiv \varepsilon \oplus (m-k+1)\lambda, \quad m = 2^k - 2. \tag{41}$$

法丛$\nu_{M\times I}|_V$在子流形V^{k-1}上的限制同构于丛$(n+2-2^k)\kappa_{M\times I}$，因此，由于$b(k-1) \leq 2^k$，它同构于平凡丛：

$$(n+2-2^k)\kappa_{M\times I} \equiv (n+2-2^k)\varepsilon. \tag{42}$$

该同构是典范的，即不依赖于M^m和V^{k-1}。我们将向量丛Λ定义为由基截面的线性组合构成的平凡丛中线子丛λ的正交补。丛Λ表示稳定向量丛$-\lambda$。因此，向量丛$\nu_{M\times I}$中子丛$\Xi(\Lambda)$的正交补，是向量丛$\nu_M|_V$中与向量丛$\lambda \oplus (2^k-k-1)\varepsilon$同构的子丛。根据 Koschorke 定理，子流形$V^{k-1} \subset M^{2^k-2} \times I$的法丛与以下向量丛同构：

$$\nu_{V\subset M\times I} \equiv \lambda \otimes (\lambda \oplus (2^k-k-1)\varepsilon) \equiv \varepsilon \oplus (2^k-k-1)\lambda. \tag{43}$$

由于等式（42），这个向量丛$\nu_{V\subset M\times I}$也表示流形V^{k-1}的稳定法丛。公式（43）得证。

浸入 $\varphi\times Id|_V$ 的限制是一个浸入（嵌入）φ_V： $V^{k-1}\looparrowright \mathbb{R}^n\times[0,1]$。根据公式 (43)，这个浸入是目标空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个斜框架浸入。通过计算，浸入 φ_V 的法丛带有一个斜框架，记作 Ξ_V。上同调类的集合 $A_j(V)$ 由公式 $A_j(V)=A_j(M\times I)|_V$ 定义，其中 $A_j(M\times I)$ 是由投影 p_M 从 M^m 上给定的上同调类集合 $A_j(M)$ 诱导而来。我们定义上同调类的集合 $A_{j+1}(V)$，即在集合 $A_j(V)$ 中添加最后一个上同调类 $\kappa_{j+1}=\lambda\otimes\kappa_{M\times I}$。三元组 $y_{k-1}=(\varphi_V,\Xi_V,A_{j+1}(V))$ 确定了配边群 $Imm^{sf;A_{j+1}}(k-1,n-k+1)$ 中的一个元素。

记 K^k 子流形 $V^{k-1}\subset\hat{K}^k$的一个小型闭正则邻域。子流形（带边界）$U_V\subset M^m\times I$ 上截面族 $\hat{X}$ 的核线丛同构于线丛 $p^*_{U_V,\ V}(\lambda)$，其中 $p_{U_V,\ V}$: $U_V\to V$是从该邻域到中心子流形的投影。我们将线丛 $\hat{}\hat{}p^*_{U_V,\ V}(\lambda)$记作 λ。向量丛中由 U_V 上的基截面的线性组合构成的子丛 λ 的正交补，也记作 $\hat{}\ \Lambda$。

让我们考虑向量丛 $\hat{}\nu_{M\times I}$ 中的子丛 $\hat{}\hat{}\ X(\Lambda)$，这里所说的丛是指截面族将 Λ 映射得到的像。类似地，利用定义在 U_V 上的向量丛的典范同构进行计算：$(2^{k-1})\lambda\equiv(2^{k-1})\kappa_M\equiv(2^{k-1})\varepsilon$，可知子丛 $X(\Lambda)$ 在 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\nu_{M\times I}$ 中的正交补（记作 $-X(\Lambda)$）与丛 $\lambda\oplus(2^{k-1}-k-1)\varepsilon\oplus(2^{k-1}-1)\kappa_M$ 同构。根据 Koschorke 定理，子流形 $U_V\subset M^m\times I$ 的法丛 $\nu_{U_V\subset M\times I}$ 的稳定同构类由下式给出：

$$\nu_{U_V\subset M\times I}\equiv(-k-1)\hat{\lambda}\oplus(-\kappa_M\otimes\hat{\lambda}).$$

特别地，利用（43），子流形$V^{k-1}\subset K^k$ 的线法丛与线丛 $\lambda\otimes\kappa_M$同构。

记 ∂U_V 为 Q^{k-1}。空间 Q^{k-1} 是一个闭流形，$\dim(Q^{k-1})=k-1$。子流形$Q^{k-1}\subset M^m\times I$的法丛 $\nu_{Q\subset M\times I}$ 由以下公式给出：

$$\nu_{Q\subset M\times I}\equiv\varepsilon\oplus(m-k+1)\kappa_M.$$

浸入 $\varphi\times id$： $M^m\times I\looparrowright\mathbb{R}^n\times I$ 限制到子流形 $Q^{k-1}\subset M^m\times I$ 上后，与一个斜框架浸入 $\hat{}\varphi_Q$： $Q^{k-1}\looparrowright\mathbb{R}^n\times\{1\}$（余维为（$n-k+1$））正则同伦等价；该浸入带有斜框架 $\hat{}$ framing，记作 Ξ_Q，并具有此斜框架的特征类

$\hat{}\kappa_Q = \kappa_{M\times I}|_Q$。流形 Q^{k-1} 配备了由上同调类集合 $\hat{}\, A_j(Q)$、 $A_j(Q) = A_j(M\times I)|_{Q\subset M\times I}$构成的结构。三元组（$\varphi_Q$、 Ξ_Q、 $A_j(Q)$）确定了配边群 $Imm^{sf;A_j}(k-1、n-k+1)$中的一个元素。

流形 $K^k \setminus U_V$ 的边界由两个分支组成：$\partial(K^k \setminus U_V) = Q^{k-1} \cup K^{k-1}$。浸入 $\varphi \times Id|_{(K^k\setminus U_V)}$ 的限制与浸入 φ_K：$K^k \looparrowright \mathbb{R}^n \times I$ 正则同伦，后者满足以下边界条件： $\varphi_K|Q = \varphi_Q$：$Q^{k-1} \looparrowright \mathbb{R}^n \times \{1\}$, $\varphi_K|N = \varphi_N$：$N^{n-1} \looparrowright \mathbb{R}^n \times \{0\}$。浸入 φ_K 是一个带有斜框架 Ξ_K 的斜框架浸入，其斜框架的特征类为 $\kappa_K = \kappa_{M\times I}|_K$。流形 K^k 配备了上同调类集 $A_j(K) = A_j(M\times I)|_{K\subset M\times I}$。

三元组 $x_{k-1} = (\varphi_N, \Xi_N, A_j(N))$ 确定配边群 $Imm^{sf;A_j}(k-1, n-k+1)$ 中的一个元素。元素 x_{k-1} 是对元素 $x = [(\varphi, \Xi_M, A_j)]$ 进行压缩的总障碍，其阶为 $\hat{}\,\hat{}\,(k-1)$。元素 $[(\varphi_Q, \Xi_Q, A_j(Q))]$ 是元素 $y_{k-1} = [(\varphi_V, \Xi_V, A_{j+1}(V))]$在传递态射 $r^!_{j+1}$ 下的像。元素$x_{k-1} = [(\varphi_N, \Xi_N, A_j(N))]$与 $r^!_{j+1}(y_{k-1}) = [(\varphi_Q, \hat{}\Xi_Q, \hat{}A_j(Q))]$ 相等。元素 x_{k-1}与 $r^!_{j+1}(y_{k+1})$之间的配边由三元组 $(\varphi_K, \Xi_K, A_j(K))$ 给出。

假设 $k-1$ 为偶数。我们来证明 y_{k-1} 属于(45)的核（在此公式中，我们假设 $b(k) = k+1$）。由 x构造 y_{k-1} 的方法推广到 x 在(45)下的像（在此公式中 $b(k) = 2^k$）。由于x 属于(45)的核， y_{k-1} 也属于(45)的核。命题15得证。 □

压缩定理的证明 1

我们通过公式（9）为 $n-k = q-1$定义正整数 $\psi = \psi(q)$。根据命题7，定义在群 $Imm^{sf;A_\psi}(d-1, n-d+1)$ 上的总传递同态（7）是平凡同态。我们定义正整数

$$l(d) = \exp_2(\exp_2 \ldots \exp_2(d-1+1)\cdots+1), \tag{44}$$

其中，函数 $\exp_2(x+1) = 2^{x+1}$ 的迭代次数为 ψ，如命题7中所定义，且迭代序列的底数为 $x = d-1$。

令 l' 为任意一个 2 的幂， $l' \geq l(d)$。定义 $n = l' - 2$。我们来证明，$Imm^{sf}(n-1, 1)$ 中的任意元素都可进行阶为 $d-1$ 的压缩。

根据假设 $n_0 \leq n$，定义 $n_0 = l(d) - 2$。考虑以下一列 ψ 整数： $2n_1 = log_2(n_0+2) - 2$， $2n_2 = log_2(n_1+2) - 2$， ……， $2n_\psi = log_2(n_{\psi-1}+2) - 2$。这些整数均为正数，且 $n_\psi = d-1$。

令 $J^{sf}_{n_0}(1\ 1 \quad J^{sf} \quad Imm^{sf}\ n-1\ 1 \rightarrow Imm^{sf} \quad 3 \quad) \in Imm^{sf}(,)$ 为元素 $x \in Imm^{sf}(,)$ 在 $:(,)(n_0, n-n_0)$ 下的像，情形 $A_1 = \{\kappa_0 = \kappa_M\}$ 参见()。记 x_{d-1} 为元素 x 的 $d-1$ 阶压缩的总障碍。根据推论10，元素 x_{d-1} 与元素 $J^{sf}_{n_0}(x)$ 的 $(d-1)$ 阶压缩的总障碍重合， $n_0 \geq d-1$。

我们考虑阶 n_1 对元素 x 的收缩的总障碍 $x_{n_1} \in Imm^{sf}(n_1, n-n_1)$，我们有 $x_{n_1} = J^{sf}_{n_1}(x)$。根据命题15，存在一个元素 $y_{n_1} \in Imm^{sf;\{\kappa_1\}}(n_1, n-n_1)$，使得元素 y_{n_1} 经传递同态得到的像等于 x_{n_1}。

考虑元素 y_{n_1} 的 n_2 阶压缩的总障碍 $y_{n_2} \in Imm^{sf;\kappa_1}(n_2, n-n_2)$。根据命题15，存在一个元素 $z_{n_2} \in Imm^{sf;\kappa_1,\ \kappa_2}(n_2, n-n_2)$，使得元素 $r^!_2(z_{n_2})$ 是元素 y_{n_1} 的 n_2 阶压缩的总障碍。元素 $r_{tot}(z_{n_2}) = r_1 \circ r_2(z_{n_2}) = J^{sf}_{n_2}(x_{n_0}) = x_{n_2}$ 是元素 x_{n_1} 的 n_2 阶压缩的总障碍。同一个元素 x_{n_2} 也是初始元素 x 的 (n_2) 阶压缩的总障碍。

通过归纳法，我们证明元素 x 的 $(d-1)$ 阶压缩的总障碍属于重数为 ψ 的总传递同态的像，即该总障碍等于 $r_{tot}(z)$， $z \in Imm^{sf;A_\psi}(d-1, n-d+1)$。根据命题7，我们有 $r_{tot}(z) = 0$。因此， $x_{d-1} = 0$。压缩定理1得证。 □

4 附录：特殊情况下科恩浸入定理 [C] 的完整自足证明

在命题15的证明中，我们使用了以下事实。记 $b = b(k) = 2^{2k}$。假设 $n = 2^l - 2$、$l \geq b(k)$。

定理 16. 设配边类 $x \in Imm^{sf,A_r}(b(k)-2, n-b(k)+2)$ 由斜框架浸入 $(f: M^{b(k)-2} \looparrowright \mathbb{R}^n, \Xi_M)$ 表示，

$\dim(M^{b(k)-2}) = b(k) - 2$，其中流形 $M^{b(k)-2}$配备了一个映射(33)。假设元素 x 属于忘却同态的核

$$Imm^{sf,A_r}(b(k)-2, n-b(k)+2) \to H_{b(k)-2}(\prod_{i=0}^{r} \mathbb{RP}_i^{\infty}). \tag{45}$$

那么，在正则配边类 $[x]$ 中存在一个元素，使得流形 $M^{b(k)}$ 可浸入欧几里得空间 $\mathbb{R}^{2b(k)-3-k}$，并具有由线丛 κ_M 给出的非退化斜截面。

备注

定理 16 还有另一种证明，因为它是 R.Cohen 浸入定理 [C]的推论。

定理 16 证明的关键步骤是以下引理。

引理 17。 令(N^j, Ξ_N)、 $j = 0, \ldots, k-1$为一个带框架的（特别是定向的）流形，配备了一个映射

$$\lambda_N : N^j \to \mathbb{RP}_0^{\infty} \times \prod_{i=1}^{r} \mathbb{RP}^{\infty}(i).$$

让我们假设 *Hurewicz*像

$$(\lambda_N)_*([N]) \in H_j(\prod_{i=1}^{r} \mathbb{RP}_i^{\infty}; \mathbb{Z}) \tag{46}$$

整数系数下为平凡。于是存在一个余维为 $b(k) - 1$, $\partial(W_W^k) = N^{k-1}$, $\Psi_W|_{\partial W^k} = \Xi_N$,$\lambda_W|\partial W = N^k = \lambda_N$ 的斜边界(W^k, Ψ_W, λ_W)，其中】【。

$$\lambda_W : W^k \to \mathbb{RP}_0^{\infty} \times \prod_{i=1}^{r} \mathbb{RP}^{\infty}(i),$$

且 $\kappa_W = w_1(\Psi_W)$ 与映射 λ_W 在因子 $\mathbb{RP}_0^{\infty}$上的投影重合。

引理 17 **的证明概要**

为证明引理17，我们考虑空间 $\prod_{i=1}^{r}\mathbb{R}\mathrm{P}_i^{\infty}$的维数 0，...， $k-1$（稳定同伦群）的带框浸入的配边群的Atiyah–Hirzebruch 型谱序列。我们考虑空间 $\mathbb{R}\mathrm{P}_0^{\infty}\times\prod_{i=1}^{r}\mathbb{R}\mathrm{P}_i^{\infty}$ 的余维 $b(k)-1$ 中维数 0，..， $k-1$ 的斜框架浸入的配边群的Atiyah–Hirzebruch 谱序列。存在一个从第一个谱序列到第二个谱序列的自然映射。根据 [A-E] 的主要结果， E_2-项中核的所有高阶系数都是平凡的。因此， E^{∞}–therm 的核完全由相应的带框架流形映射的配边类的 Hurewicz像(46)描述。根据假设，此Hurewicz像是平凡的。因此，任意带框架流形（N^k， Ξ_N）都是余维 $b(k)-1$ 中的斜框架边界。引理 引理 17 得证。

□

定理 16 **证明概要**

根据维数假设，法丛 ν_M 在 M 上同构于Whitney和 $Cb(k)\kappa_M$，其中 κ_M 是 $M^{b(k)-2}$上的一个给定线丛。为简便起见，我们可以假设 $b(k)=2^{2k}$，其中 C 是一个正整数。让我们计算 Koschorke构造 [K] ，以证明 $\nu_M=Cb(k)\kappa_M$ 上的法丛 $M^{b(k)-2}$ 具有到该丛的纤维单射

$$\mu_M=(C-1)b(k)\varepsilon\oplus k\varepsilon\oplus\kappa_M. \tag{47}$$

下文中，我们将丛 ν_M 的 μ-截面简称为此。构造通过对指标 $j=0,\ldots,k$ 进行归纳法给出。

记丛 ν_M 具有一个 $2k+(C-1)b(k)$ 截面的正则族。记为

$$I\subset\nu_M$$

子丛$(C-1)b(k)\varepsilon\subset\nu_M$的正交补，它由首批正则 $(C-1)b(k)$ μ-截面组成，见（47）。在第 j次归纳法步骤中， $j=0$，.....， k，我们假设存在一个（不是纤维单射的）态射 ρ_j，将由（47）中的最后各项组成的子丛 $(2k-j+1)\varepsilon\oplus\kappa_M\subset\mu_M$ 映入子丛 $I\subset\nu_M$，使得以下两个条件得到满足：

–1. 将态射 ρ_j 在子丛 $(j+1)\varepsilon\oplus\kappa_M\subset(2k-j+1)\varepsilon\oplus\kappa_M$ 上的限制记为 $\hat{}\rho_j$ ，该限制应为正则态射，即纤维单射。

–2. 将态射 ρ_j 在子丛 $(2k-j+1)\varepsilon \subset (2k-j+1)\varepsilon \oplus \kappa_M$ 上的限制记为 $\tilde{\rho}_j$，该限制应为正则态射。

归纳法的基础步骤由条件保证，因为元素 x 属于 (45) 的核。

让我们证明归纳法的一个步骤 $j \mapsto j+1$。考虑态射 ρ_j，并将此态射在子丛 $(j+2)\varepsilon \oplus \kappa_M \subset (2k-j+1)\varepsilon \oplus \kappa_M$上的限制记为 $\hat{}\rho_j^{\circ}$（比族 $\hat{}\rho_j$ 中多一个截面）。一般而言，态射 $\hat{}\rho_j^{\circ}$并不正则。记 $N^{j+1} \subset M^{b(k)-2}$ 为此态射的奇异子流形。条件表明，类 κ_M 在 N^{j+1} 上的限制是平凡的，并且 N_{j+1} 在$M^{b(k)-2}$中带框架（因此，N^{j+1}是一个带框架流形）。让我们证明这个带框架流形满足引理 17 的条件。

让我们证明 Hurewicz像 (46) 是平凡的。分两种情况：

–a. j 是偶数;
–b. j 为奇数。

让我们考虑情形a。取截面 ρ_{j+2}的集合，该集合限制在子丛$(j+3)\varepsilon \oplus \kappa_M \subset (2k-j+1)\varepsilon \oplus \kappa_M$上，将此限制记为$\hat{}\rho_j^{\circ\circ}$（相对于$\hat{}\rho_j$ 的另外两个截面）。态射$\hat{}\rho_j^{\circ\circ}$的奇点记为 K^{j+2}——这是非正则截面的一个子流形。容易计算得：$w_1(K^{j+2}) = \kappa_M|_K$。总障碍 x 经同态 (45)定向这一条件意味着，K^{j+2} 作为群 $H_{j+2}(\mathbb{R}\mathrm{P}_0^{\infty} \times \prod_{i=1}^{r} \mathbb{R}\mathrm{P}_i^{\infty}; \mathbb{Z}^{tw})$中的一个元素（其中，扭系数是相对于笛卡尔积中的第一项考虑的，并由类 κ_M给出），是一个边界。因此，同调类 $[K^{j+2}] \cap \kappa_M = [L^{j+1}]$（其作为群$H_{j+1}(\mathbb{R}\mathrm{P}_0^{\infty} \times \prod_{i=1}^{r} \mathbb{R}\mathrm{P}_i^{\infty}; \mathbb{Z})$中的一个元素来考虑）是一个边界。已证明，在情形 –a 下，应应用引理 17。

让我们考虑 –b 的情形。考虑族 ρ_j°，其中包含一个正则子族 ρ_j。由于限制 κ_M 在奇异流形N^{j+1} 上是平凡的，族 ρ_j° 与线丛 κ_M的张量积是退化的。族 $\rho_j^{\circ} \otimes \kappa_M$ 确定了丛 $(C-1)b(k)\kappa_M \oplus (j+1)\kappa_M \oplus \varepsilon$ 到丛 $Cb(k)\varepsilon - b(k)\kappa_M$的一个态射。由于$j+1$ 是偶数，总障碍 (46) 的像是定向的，因此我们可以使用条件 x 属于 (45) 的核。在 –b 的情形下，已证明引理 17 的条件均得到满足。

奇异流形上存在具有平凡核的正则态射 $\hat{}\rho_{j+1}$ 的障碍，由带框架的 j 维流形的映射 $\lambda_N\colon N^j \to \prod_{i=1}^{r} \mathbb{R}\mathrm{P}_i^{\infty}$ 的配边类给出，该映射

被视为余维 $b(k)-1$ 带有局部扭系数系统的斜框架流形，该系统与 κ_M 相关（注意，$\kappa_M|_{N^{j+1}}$ 是平凡的，但在正则配边类中并不假定这一性质）。

我们证明了存在满足条件 –1 的 ρ_{j+1}。现在证明 ρ_{j+1} 可以取为满足条件 2。根据构造，将截面 $\hat{}\rho_j^\circ$ 同伦到截面 $\hat{}\rho_{j+1}$ 的过程中，所得的是一个核纤维化平凡的奇异流形。

显然，存在截面子族 $(2k-j+1)\varepsilon$ 的一个同伦 $\tilde{\rho}_j$ в $\tilde{\rho}'_j$，其具有平凡核的奇点；此外，在子族 $(j+1)\varepsilon$ 上的限制 $\tilde{\rho}'_j$ 与在该族上的限制 $\hat{}\rho_{j+1}$ 重合。因此，存在子丛 $(2k-j+1)\varepsilon \oplus \kappa_M$ 的一个单态射 ρ'_{j+1}（它比满足条件 –1 和条件 –2 的 ρ_{j+1} 多一个截面），且满足以下条件：子丛 $(2k-j+1)\varepsilon \subset (2k-j+1)\varepsilon \oplus \kappa_M$ 上的限制 ρ'_{j+1} 具有平凡的核纤维化。根据一般位置论证，在这个平凡核纤维化上的限制 ρ'_{j+1} 是正则的。将态射 ρ'_{j+1} 限制到子丛 $(2k-j)\varepsilon \subset (2k-j+1)\varepsilon \oplus \kappa_M$ 上。存在一个小的泛性变形 $\rho'_{j+1}|_{(2k-j)\varepsilon} \mapsto \tilde{\rho}_{j+1}$，使其成为正则态射 $\tilde{\rho}_{j+1}$。这就证明了条件 2。归纳步骤得证。

根据归纳法的最后一步，存在一个正则截面 ρ_{k-1}。定理 16得证。

□

参考文献

[A1] P.M.Akhmet'ev，预印本，arXiv:1005.1005v1（2010）。

[A-E] P.M.Akhmet'ev 和 P.J.Eccles，带框架的配边与斜带框架配边之间的关系，《伦敦数学学会通报》，第39卷（2007），473-481页。[C1] Carter, J.S.，余维一浸入的手术 $\mathbb{R}^{n+1}$：消除 n重点。《美国数学会汇刊》298（1986），第1期，83-101页。[C2] Carter, J.S.，论博伊曲面的推广：构造第三稳定茎的一个生成元。《美国数学会汇刊》298（1986），第1期，103-122页。[C] R.L.Cohen，可微流形的浸入猜想《数学年刊》122卷第2期，237-328页（1985）。[H] Hirsch, Morris W. 有界流形在欧几里得空间中的嵌入。《数学年刊》（第二辑）74卷（1961），494–497页。

[K1] U.Koschorke，浸入的多重点与 *Kahn-Priddy* 定理，《数学杂志》169卷（1979），223-236页。[K] U.Koschorke，向量丛的非稳定与稳定单态射。《拓扑学及其应用》75卷（1987），261-286页。[P] L.S.Pontryagin，光滑流形及其在同伦论中的应用，第2版，Nauka，莫斯科（1976），英文译本：《美国数学学会译丛》（第二辑）11卷（1959），1-114页；（1964）重印；L.S.Pontryagin，《文选》第3卷，《代数拓扑与微分拓扑》，115-252页，戈登与布里奇科学出版社（1986）。

彼得·米哈伊洛维奇·阿赫梅季耶夫 pmakhmet@mail.ru